ΑΠΛΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ Ohm

Στατική περίπτωση: $\vec J_u(\vec r) = \overleftrightarrow{\gamma}(\vec r)\cdot\vec E(\vec r)$ όπου $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec r) = \begin{pmatrix}\gamma_{xx}&\gamma_{xy}&\gamma_{xz}\\ \gamma_{yx}&\gamma_{yy}&\gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}&\gamma_{zy}&\gamma_{zz}\end{pmatrix}$ ενώ $\vec J_u = \begin{pmatrix}J_{ux}\\J_{uy}\\J_{uz}\end{pmatrix}$ και $\vec E = \begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}$. Το $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec r)$ καλείται πίνακας (τανυστής) ειδικής αγωγιμότητας. Σε άμορφα ισοτροπικά γραμμικά υλικά το $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec r)$ υποβιβάζεται σε βαθμωτή συνάρτηση, δηλαδή $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec r) = \gamma(\vec r)\overleftrightarrow{I}$ όπου $\overleftrightarrow{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας. Σε ομογενή μέσα $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec r) = \overleftrightarrow{\gamma}$ (ανεξάρτητο του $\vec r$, δηλαδή).

Χρονομεταβλητή περίπτωση: $\vec J_u(\omega,\vec r) = \overleftrightarrow{\gamma}(\omega,\vec r)\cdot\vec E(\omega,\vec r)$ όπου $\vec J_u(\omega,\vec r)$ και $\vec E(\omega,\vec r)$ είναι η φασματική συνιστώσα συχνότητας ω (μιγαδικό διάνυσμα-συνάρτηση του χώρου εν γένει) των μεγεθών $\vec E(\vec r,t)$ και $\vec J_u(\vec r,t)$. Ο τανυστής $\overleftrightarrow{\gamma}(\omega,\vec r)$ είναι εν γένει μιγαδικός.

Στοιχειώδης υπολογισμός του γ σε στατική περίπτωση: Απουσία μαγνητικού πεδίου η δύναμη Lorentz δρά για χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων και μεταβάλλει την ταχύτητα των φορτισμένων σωματίων κατά:

$\Delta\vec V_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec E\Delta t$. Όμως $\langle\Delta t\rangle = \nu_\alpha^{-1}$, όπου ν_α: συχνότητα συγκρούσεων και έτσι, κατά μέσο όρο ($\langle\rangle$): $\langle\Delta\vec V_\alpha\rangle \simeq \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec E\nu_\alpha^{-1}$. Το ρεύμα που αντιστοιχεί στην κινητική αγωγή κατά μέσο όρο είναι $\vec J_\alpha = n_\alpha q_\alpha\langle\Delta\vec V_\alpha\rangle = \frac{q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha\nu_\alpha}\vec E$ και για πλήθος διαφορετικών ειδών σωματίων: $\vec J = \sum_\alpha \vec J_\alpha = \left(\sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha\nu_\alpha}\right)\vec E$.

Έτσι λοιπόν $\gamma = \sum_\alpha\gamma_\alpha$ με $\gamma_\alpha = \frac{q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha\nu_\alpha}$ (το αντίστοιχο της γ_α καλείται ειδική αγωγιμότητα αντιστοιχούσα με το είδος "α"). Εδώ βλέπουμε ότι η συνολική ειδική αγωγιμότητα είναι άθροισμα ειδικών αγωγιμοτήτων. Το n_e (α = ηλεκτρόνια) στα αγώγιμα μπορεί να βρεθεί από την σχέση $n_e = N_u N_A \rho_m/M$ όπου N_u ο αριθμός ελευθέρων ηλεκτρονίων ανά μόριο (ή άτομο σε μέταλλα), N_A ο αριθμός Avogadro (6.0225×10^{23} μόρια/mol) ρ_m η πυκνότητα του μέσου και M μοριακή μάζα (kg/mol). Π.χ. για τον χαλκό $N_u = 1$, $\rho_m = 8.89\times10^{3}$ kg/m³, M (χαλκού) = 63.54 kg/mol, οπότε $n_e = 8.43\times10^{28}$ ηλεκτρόνια/m³. Έτσι λοιπόν, για $J = 4A/mm^2$ έχουμε, $\langle\Delta V_e\rangle = J/n_e e = 1$ m/h !!! Αντίθετα, οι συγκρούσεις γίνονται εντατικότερες όταν η θερμοκρασία του μέσου αυξάνεται. Έτσι λοιπόν $\nu \propto T$ (T: θερμοκρασία). Η δε θερμοκρασία συνδέεται με την θερμική ταχύτητα μέσω της σχέσης $\frac{1}{2}m_e v_{th}^2 = \frac{3}{2}k_B T$ (k_B: σταθερά Stefan Boltzmann), δηλαδή $v_{th} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_e}}$ η οποία για $T \approx 300°K$ (θερμοκρασία 27°C) δίνει περίπου 100 km/sec. Για τον χαλκό, ενδεικτικά, $\gamma \simeq 58\times10^{6}\frac{1}{\Omega m}$ (συμβ: $\frac{1}{\Omega} = S$: Siemens). Έτσι, προκύπτει $\nu^{-1} \simeq 5.2\times10^{-14}$ sec και έτσι $\frac{\omega}{2\pi} \simeq 3\times 10^{12}$ Hz $= 3$ THz.

Νόμος του Ohm και εξίσωση Laplace:

(Μαγνητοστατική): $\nabla\times\vec H \simeq \vec J_u$
(Ηλεκτροστατική) και $\nabla\times\vec E \simeq 0$ δηλαδή στην ειδική αυτή περίπτωση θα έχουμε $\vec E = -\nabla\phi$ και $\nabla\cdot\vec J_u = 0$. Επίσης $\vec J_u = \gamma\vec E$. Άρα:
$\nabla^2\phi = -\nabla\gamma\cdot\nabla\phi/\gamma$. Αν $\nabla\gamma\perp\nabla\phi$ τότε $\nabla^2\phi = 0$ (Laplace).
Επίσης, $\nabla^2\phi = 0$ όταν $\gamma =$ σταθερό. Επίσης $\rho_u = \nabla\cdot\vec D = \nabla\cdot\left(\vec J_u\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$
$= \vec J_u\cdot\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$ και έτσι $\rho_u = 0$ όταν $\vec J_u\perp\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$ ή όταν $\varepsilon/\gamma =$ σταθερό.

Νόμος του Ohm και χρονομεταβλητή κατάσταση σε αγώγιμα υλικά με αμετάβλητα γ και ε:

$\nabla\cdot\vec J_u + \partial\rho_u/\partial t = 0$ και $\vec J_u = \gamma\vec E$, $\vec E = \vec D/\varepsilon$. Άρα: $\nabla\cdot\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\vec D\right) + \partial\rho_u/\partial t = 0$
ή $\frac{\gamma}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec D + \partial\rho_u/\partial t = 0$ ή $\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho_u + \partial\rho_u/\partial t = 0$ (Το ίδιο παίρνουμε και αν $\nabla(\gamma/\varepsilon)\perp\vec D$). Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι $\rho_u(t) = \rho_u(t=0)e^{-t/\tau_x}$ με $\rho_u(t)$ και $\rho_u(t=0)$ συναρτήσεις του χώρου ($\vec r$) και $\tau_x \equiv \varepsilon/\gamma$: Χρόνος χαλάρωσης
Ο χρόνος χαλάρωσης χαρακτηρίζει τα μέσα για τα υλικά και κυμαίνεται από 10^{-19} s (χαλκός) μέχρι 10^{5} s (στη μίκα για όλα πολύ καλά μονωτικά υλικά). Ενδιάμεση τιμή είναι αυτή του διαχωρισμένου ύδατος (1 sec για το αποσταγμένο). Ο χρόνος χαλάρωσης ουσιαστικά μετρά τον χαρακτηριστικό χρόνο "διάχυσης" (πλάτυνσης) κάθε είδους συγκεντρώσεων ελευθέρων φορτίων.

Νόμος του Ohm και διαχωριστική επιφάνεια σε πρακτικά προβλήματα:

Από τον νόμο διατήρησης φορτίου προκύπτει ότι $\vec i_n\cdot(\gamma_1\vec E_1 - \gamma_2\vec E_2) = 0$ ② $\uparrow\vec i_n$ ①
ή $\gamma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \gamma_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}$ $\left(\frac{\partial}{\partial n}\equiv\vec i_n\cdot\nabla\right)$ ενώ επίσης $\phi_1 = \phi_2$.

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΕ ΜΟΝΩΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ: $\uparrow\vec i_n$ ② ① με $\gamma_2 \ll \gamma_1$
(μέσο 2 πολύ μικρότερο αγώγιμο από το 1).
Έχουμε (από την $\vec i_n\cdot(\gamma_1\vec E_1 - \gamma_2\vec E_2) = 0$) ότι $E_{2n} \gg E_{1n}$ και επίσης $J_{1n} = 0$ (όταν $\gamma_2\to 0$). Επίσης $\vec i_n\times(\vec E_2 - \vec E_1) = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$. Άρα η εικόνα δίχως αυτή είναι: ② $\vec E$ ΜΟΝΩΤΗΣ ① ΑΓΩΓΟΣ. Όταν μάλιστα $\gamma_1\to\infty$ και $\gamma_2\to 0$ υφίσταται μόνο $\vec E_2\perp$ επιφάνεια.

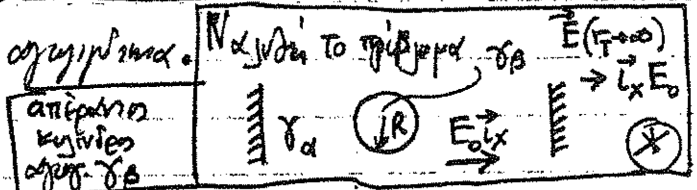
Νόμος Gauss σε διαχωριστική επιφάνεια δύο αγώγιμων υλικών

$\vec i_n\cdot(\varepsilon_2\vec E_2 - \varepsilon_1\vec E_1) = \sigma_u$ και εφόσον $\vec i_n\cdot(\gamma_2\vec E_2 - \gamma_1\vec E_1) = 0$ έχουμε τελικά:

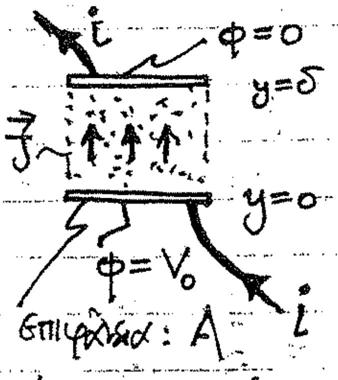
$\boxed{\sigma_u = \varepsilon_2 E_{2n}\left(1 - \frac{\tau_{x1}}{\tau_{x2}}\right)}$. Αν τα υλικά χαρακτηρίζονται από τον ίδιο χρόνο χαλάρωσης τότε δεν υφίσταται σ_u στην επιφάνεια.

Επίσης: ευθέως $\vec{i}_n \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma_{o\lambda}}{\varepsilon_0}$ $\left(\sigma_{o\lambda} = \sigma_u + \sigma_p,\ \sigma_p \equiv -\vec{i}_n \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\right)$ και $\vec{i}_n \cdot (\gamma_2 \vec{E}_2 - \gamma_1 \vec{E}_1) = 0$ έχουμε τελικά: $\boxed{\sigma_{o\lambda} = \varepsilon_0 E_{2n}\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)}$. Άρα το συνολικό επιφανειακό φορτίο μηδενίζεται όταν τα δύο υλικά χαρακτηρίζονται από την ίδια αγωγιμότητα.

Να λυθεί το πρόβλημα



ΑΠΛΟΣ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΑΝΤΙΣΤΑΤΗΣ



Υποθέσεις $\gamma = \gamma(y)$, $\phi = \phi(y)$.

$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\gamma \frac{d\phi}{dy}\right) = 0 \Rightarrow \gamma \frac{d\phi}{dy} = -J = J_0$: σταθερό

οπότε: $\phi - V_0 = -\int_0^y \frac{J_0}{\gamma(y')} dy'$ και επίσης

$0 - V_0 = -J_0 \int_0^\delta \frac{dy'}{\gamma(y')}$. Έτσι, τελικά $\phi = V_0 \left[1 - \frac{\int_0^y dy'/\gamma(y')}{\int_0^\delta dy'/\gamma(y')}\right]$

Αγωγιμότητα (Siemens) αντιστάτη $G \equiv \frac{i}{V_0} = \frac{A \cdot J_0}{V_0} = A \Big/ \int_0^\delta dy'/\gamma(y')$

όταν γ = σταθερό $G = A\gamma/\delta$, ενώ για, π.χ., $\gamma = \gamma_0 e^{-y/\delta}$ προκύπτει $G = \frac{A\gamma_0}{\delta(e-1)}$.

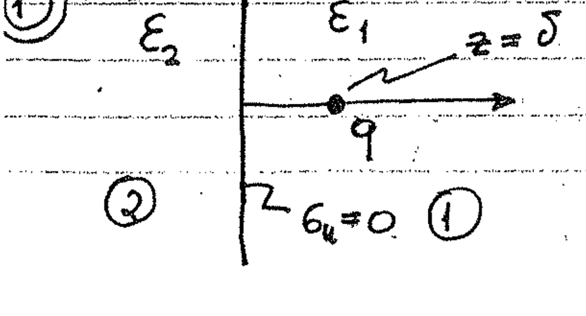
ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΣ Η μέθοδος του κατοπτρισμού βασικά πηγάζει από την μέθοδο αναλογής του προβλήματος Poisson σε ειδικό και ομογενοποιημένο το οποίο και αντιμετωπίζεται εν συνεχεία: Έστω ότι έχουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα: $\nabla^2 \phi = -\rho_u/\varepsilon$ (ή $\nabla^2 \phi = -\rho_{o\lambda}/\varepsilon_0$) στον χώρο V που περικλείεται από την επιφάνεια S και με οριακή συνθήκη στην S την $\alpha(\vec{r}_s)\phi(\vec{r}_s) + \beta(\vec{r}_s)\frac{\partial\phi}{\partial n}(\vec{r}_s) = f(\vec{r}_s)$ όπου $\vec{r}_s$ το διάνυσμα θέσης στην επιφάνεια. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα ($\phi(\vec{r}) = \ldots$) ως εξής: Θέτουμε $\phi(\vec{r}) = \phi_{ειδ}(\vec{r}) + \phi_{ομογ}(\vec{r})$ με $\vec{r}$ μέσα στο V όπου: $\phi_{ειδ}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_V \frac{\rho_u(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{V_{ομογ}} \frac{\rho_{ομογ}(\vec{r}'_{ομογ})\,dV_{ομογ}}{|\vec{r} - \vec{r}'_{ομογ}|}\right]$ όπου $\vec{r}'_{ομογ}$ μέσα στο συμπλήρωμα του V, $V_{ομογ}$ και $\rho_{ομογ}$ πυκνότητα φορτίου χωρικά στο $V_{ομογ}$ διαλεγμένη επιλογή εν γένει. Το $\phi_{ομογ}(\vec{r})$ θα ικανοποιεί τότε την εξίσωση Laplace $\nabla^2 \phi_{ομογ} = 0$ με τροποποιημένη οριακή συνθήκη στην S, την εξής: $\alpha(\vec{r}_s)\phi_{ομογ}(\vec{r}_s) + \beta(\vec{r}_s)\frac{\partial\phi_{ομογ}(\vec{r}_s)}{\partial n} = f(\vec{r}_s) - \alpha(\vec{r}_s)\phi_{ειδ}(\vec{r}_s) - \beta(\vec{r}_s)\frac{\partial\phi_{ειδ}(\vec{r}_s)}{\partial n}$.

Εάν τώρα επιλέξουμε κατάλληλα την $\rho_{ομογ}(\vec{r}_{ομογ})$ μπορούμε να πάρουμε ομογενή οριακή συνθήκη για την $\phi_{ομογ}$, δηλαδή να έχουμε $\nabla^2 \phi_{ομογ} = 0$ και $\alpha(\vec{r}_s)\phi_{ομογ}(\vec{r}_s) + \beta(\vec{r}_s)\frac{\partial\phi_{ομογ}(\vec{r}_s)}{\partial n} = 0$, οπότε για συνθήκη Dirichlet ($\beta = 0, \alpha \neq 0$) ή μικτή ($\alpha, \beta \neq 0$) θα έχουμε $\phi_{ομογ} = 0$ ενώ για συνθήκη Neumann ($\alpha = 0, \beta \neq 0$) $\phi_{ομογ}(\vec{r}_{ομογ})$ = σταθερά.

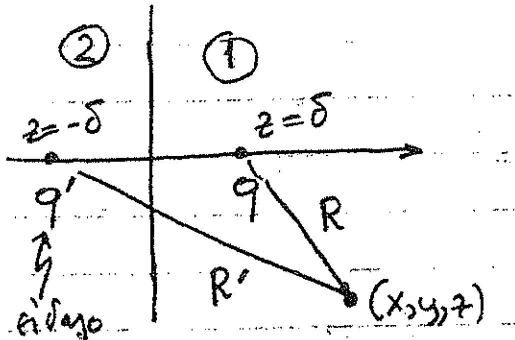
Στην περίπτωση αυτή η $\rho_{απος}$ ζητείται από αντιπροσωπευτική μι αντισταθμιστική κατανομή φορτίων. Τα κύρια σημεία — βήματα και υποθέσεις της μεθόδου αντικατοπτρισμού συνοψίζονται στα εξής:

1. Υπολογίζουμε πεδιακά μεγέθη σε γραμμικά κατανεμημένα σε δύο μέσα που χωρίζονται από κάθετα διαχωριστική επιφάνεια (ανήδας διαφορετικά και ανήδας, όχι όμως επίπεδη επιφάνεια) και που έχουν διαφορετικές ιδιότητες (ε, γ, μ).
2. Ισχύουν γραμμικές συναρτησιακές σχέσεις $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$, $\vec{J}=\gamma\vec{E}$
3. Οι πηγές (φορτία, ρεύματα αντιστάσεως κατανεμημένα) υπάρχουν μόνο στο ένα από τους δύο ημιχώρους (π.χ. στον 1).
4. Τα πεδία υπολογίζονται στη βάση των γνωστών ολοκληρωτικών σχέσεων στα αθροίσματα ή ολοκληρώματα (όρος επαλληλίας): $d\vec{D} = dq\,\vec{i}_R/4\pi R^2$
$d\vec{H} = I d\vec{l}\times\vec{i}_R/4\pi R^2$, $d\vec{J} = \dot{\sigma}\, dS\, \vec{i}_R/4\pi R^2$, $d\vec{A} = \mu_0 I d\vec{l}/4\pi R$
$d\phi = dq/4\pi R\varepsilon_0$ όπου $R=|\vec{r}-\vec{r}_{πηγής}|$ $\vec{i}_R = (\vec{r}-\vec{r}_{πηγής})/R$ και $\dot{\sigma}=\frac{d\dot{q}}{dS}$
με $d\dot{q} = dq/dt$.
5. Κατά από ανοίγματα συνθήκες τοποθετούμε εικονικές πηγές στον χώρο 2 (αντικατοπτρικό χώρο). Οι εικονικές αυτές πηγές ή είδωλα ανάγουν το πρόβλημα στη μορφή ισοδύναμου προβλήματος, σε όλο το χώρο με ιδιότητα αυτή του χώρου 1 και με πηγές τις πραγματικές (στον 1) και τις εικονικές-είδωλα (στο 2) έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ίδιες οριακές συνθήκες του πραγματικού προβλήματος. Η λύση που παίρνουμε έτσι ισχύει μόνο για το χώρο 1 και προκύπτει από τα πεδία που απορρέουν από την επαλληλία των πραγματικών πηγών και των ειδώλων στη βάση των σχέσεων (4).
6. Με τοποθέτηση εικονικών πηγών στο χώρο 1 και με ιδιότητα αυτή του χώρου 2 και με τις οριακές συνθήκες του πραγματικού προβλήματος, υπολογίζουμε τα πεδία στο χώρο 2 ως προερχόμενα από τις εικονικές πηγές του χώρου 1 και μόνο (!!), στη βάση των σχέσεων (4).

Παραδείγματα:

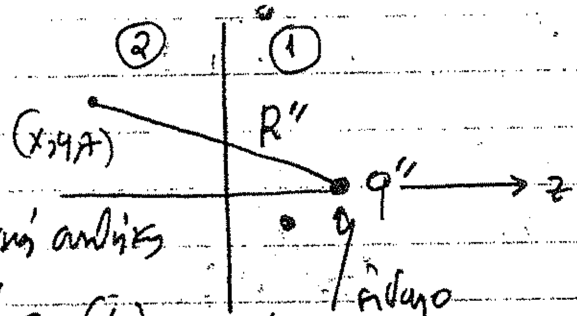
1.


στο $z=0$ έχουμε: $\varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2}$ (επειδή $\sigma_\varepsilon=0$)
$E_{x1} = E_{x2}$
$E_{y1} = E_{y2}$



$z>0$: $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'}\right)$

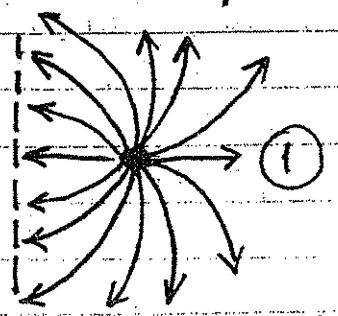
$R = \sqrt{x^2+y^2+(\delta-z)^2}$, $R' = \sqrt{x^2+y^2+(\delta+z)^2}$, $x^2+y^2 = r_T^2$



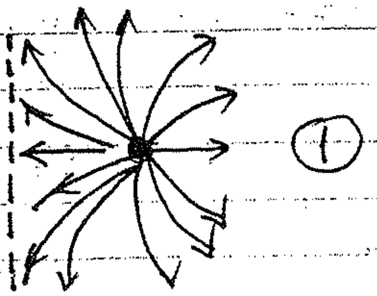
$z<0$: $\phi = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 R''}$

$R'' = \sqrt{x^2+y^2+(\delta-z)^2}$. Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες παίρνουμε: $\frac{q''}{\varepsilon_2}\frac{\partial}{\partial r_T}\left(\frac{1}{R''}\right)_{z=0} = \frac{q}{\varepsilon_1}\frac{\partial}{\partial r_T}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{q'}{\varepsilon_1}\frac{\partial}{\partial r_T}\left(\frac{1}{R'}\right)$ και

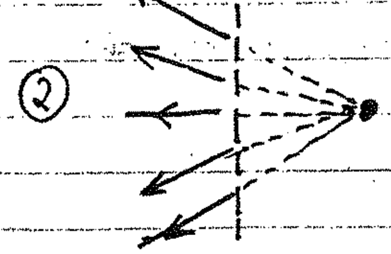
$q''\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R''}\right)_{z=0} = q\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) + q'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R'}\right)$. οι οποίες οδηγούν τελικά στον προσδιορισμό των ειδώλων: $q' = -\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$ και $q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$. <u>Μορφολογία δυναμικών γραμμών στην περίπτωση $q>0$</u> (**):



$(\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \ (q'\cdot q < 0))$

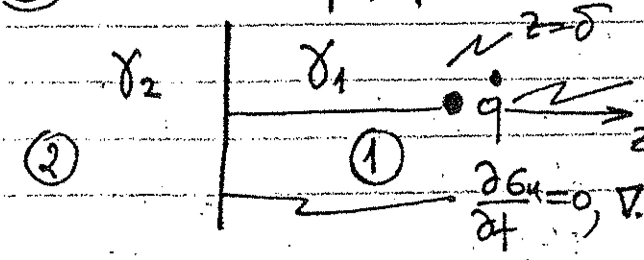


$(\varepsilon_2 < \varepsilon_1 \ (q'\cdot q > 0))$



($q''>0$ είτε $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ είτε $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$).

② Αντίστοιχο πρόβλημα είναι αυτό με δύο διαφορετικά αγώγιμα υλικά



σημειακή πηγή ρεύματος ($\dot q = dq/dt$)

Με εναλλαγή ($\gamma \leftrightarrow \varepsilon$) έχουμε

$\frac{\partial \sigma_u}{\partial t} = 0$, $\nabla\cdot\vec K_u = 0$ $\quad \dot q' = -\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}\dot q$, $\dot q'' = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2+\gamma_1}\dot q$

3) Ειδική περίπτωση – απλά προβλήματα

① ε_1

$q'=-q$, $\vec E_2\to 0$, $\vec E_{t1}\to 0$

② $\varepsilon_2\to\infty$

① γ_1

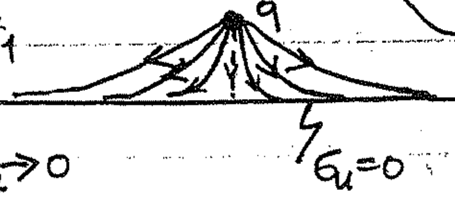
$\dot q'\to-\dot q$, $\vec E_2\to 0$, $\vec E_{t1}=0$

② $\gamma_2\to\infty$

αν $\varepsilon_2<\infty$ τότε $\vec D_2=0\Rightarrow D_{2n}=0$

και $\sigma_u=-D_{1n}=-\varepsilon_1 E_{1n}$

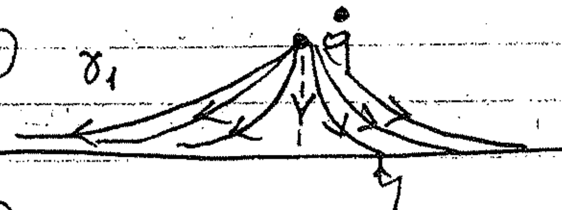
① ε_1



$\vec D_2=0$, $D_{n2}=D_{n1}=0$

② $\varepsilon_2\to 0$

① γ_1

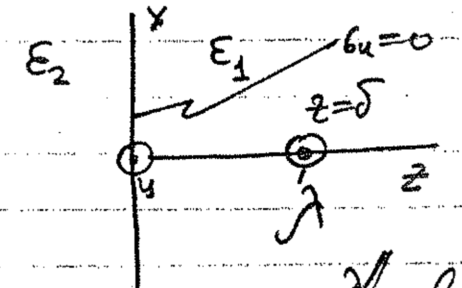


$\vec J_2=0\Rightarrow J_{2n}=J_{1n}=0$

② $\gamma_2\to 0$

$\frac{\partial\sigma_u}{\partial t}+\nabla\cdot\vec K_u=0$

Παράδειγμα με γραμμικό φορτίο λ παράλληλο στη διαχωριστική επιφάνεια και σε απόσταση δ από αυτή:



$z>0:\ \phi=\phi_0-\frac{1}{2\pi\varepsilon_1}\left[\lambda\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)+\lambda'\ln\left(\frac{R'}{R_0}\right)\right]$

$R=\sqrt{x^2+(\delta-z)^2}$

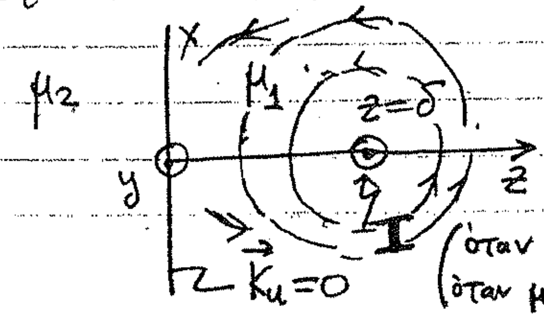
$R'=\sqrt{x^2+(\delta+z)^2}$

$z<0:\ \phi=\phi_0-\frac{\lambda''}{2\pi\varepsilon_2}\ln\left(\frac{R''}{R_0}\right)$, $R''=\sqrt{x^2+(\delta-z)^2}$. Οριακή συνθήκη: $\vec i_n\times(\vec E_2-\vec E_1)=0$

$\Rightarrow\ \frac{\lambda''}{\varepsilon_2}\frac{1}{R''}\frac{\partial R''}{\partial x}=\frac{\lambda}{\varepsilon_1}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\lambda'}{\varepsilon_1}\frac{1}{R'}\frac{\partial R'}{\partial x}\Big|_{z=0}$ και $\vec i_n\cdot(\vec D_2-\vec D_1)=0\Rightarrow$

$\lambda''\frac{\partial R''}{\partial z}=\lambda\frac{\partial R}{\partial z}+\lambda'\frac{\partial R'}{\partial z}\Big|_{z=0}$ οπότε: $\lambda'=-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\lambda$, $\lambda''=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\lambda$

Παράδειγμα σε μαγνητικά μέσα με γραμμικό ρεύμα || στη διαχωριστική επιφάνεια



Εφαρμόζοντας την αντιστοιχία

$\phi\to A_y$, $\lambda\to I$, $\varepsilon\to\frac{1}{\mu}$

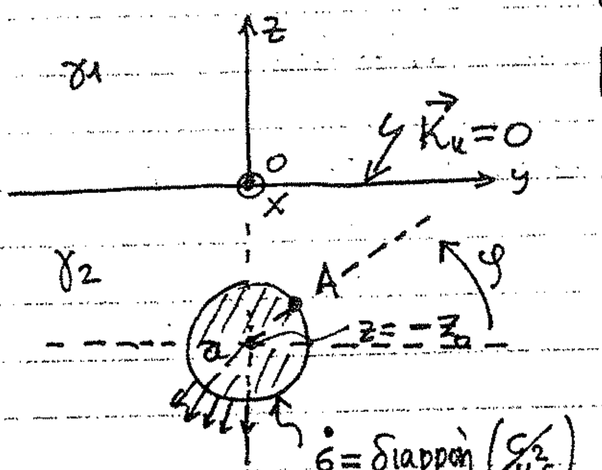
παίρνουμε $I'=-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I$, $I''=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I$

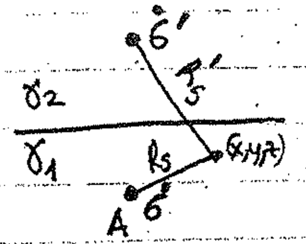
(όταν $\mu_2\to\infty$, $\vec H_2\to 0$, $I'=I$, $I''=0$, φυσικά $\vec H_{2t}=\vec H_{1t}=0$

όταν $\mu_2\to 0$ $\vec B_2\to 0$, $I'=-I$, $I''=2I$ ...)

ΑΣΚΗΣΗ (μειωτής: διαχέει φορτίο στο έδαφος: $z<0$)

Θα λύσει με επαλληλία εκεί του στοιχειώδους μεγέθους $d\varphi = \dot{\sigma}\, dS / 4\pi\gamma R$ και κατοπτρισμού



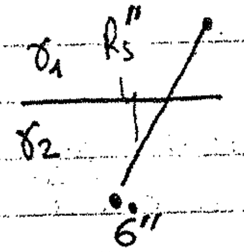


$z<0$: $\dfrac{d\varphi_2}{dS} = \dfrac{1}{4\pi\gamma_2}\left(\dfrac{\dot{\sigma}}{R_s} + \dfrac{\dot{\sigma}'}{R_s'}\right)$

$R_s^2 = (x-x_A)^2 + (y - a\cos\varphi)^2 + (z+z_0 - a\sin\varphi)^2$

$R_s'^2 = (x-x_A)^2 + (y - a\cos\varphi)^2 + (z_0 - z - a\sin\varphi)^2$

(το A είναι επί της επιφανείας του απέραντου κυλίνδρου)



$z>0$: $\dfrac{d\varphi_1}{dS} = \dot{\sigma}''/4\pi\gamma_1 R_s''$, $R_s''^2 = (x-x_A)^2 + (y - a\cos\varphi)^2 + (z+z_0 - a\sin\varphi)^2$

Θα πρέπει για $z=0$: $E_{t1} = E_{t2}$ και $J_{n1} = J_{n2}$ (επειδή $\vec{K}_u = 0$)

Άρα: $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}$ και $\gamma_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \gamma_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\dot{\sigma}''}{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_s''}\right) = \frac{1}{\gamma_2}\left[\dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_s}\right) + \dot{\sigma}'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_s'}\right)\right] \quad \text{και} \quad \dot{\sigma}''\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_s''}\right) = \dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_s}\right) + \dot{\sigma}'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_s'}\right) \text{ στο } z=0$$

Τελικά: $\dot{\sigma}' = \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}\dot{\sigma}$ και $\dot{\sigma}'' = \dfrac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}\dot{\sigma}$. Έχουμε λοιπόν για το δυναμικό:

$$\varphi(z<0) = \frac{\dot{\sigma}}{4\pi\gamma_2}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{2\pi} d\varphi'\, a \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y - a\cos\varphi)^2 + (z+z_0 - a\sin\varphi)^2}} + \frac{\dot{\sigma}}{4\pi\gamma_2}\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{2\pi} a\, d\varphi' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y - a\cos\varphi)^2 + (z - z_0 - a\sin\varphi)^2}}$$

και

$$\varphi(z>0) = \frac{\dot{\sigma}}{4\pi\gamma_1}\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{2\pi} a\, d\varphi' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y - a\cos\varphi)^2 + (z + z_0 - a\sin\varphi)^2}}.$$