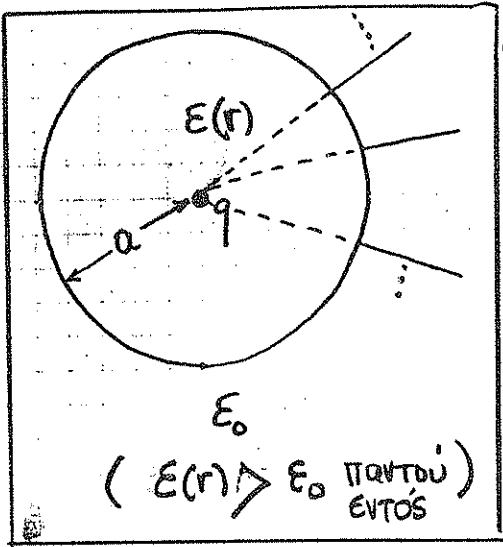


ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΑΠΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

1 Σφαίρα ανομοιογενούς διηλεκτρικού υλικού και σημειακό φορτίο στο κέντρο της. (Διεξοδική θεώρηση)



• Διηλεκτρική μετατόπιση (πυκνότητα γραμμών ηλεκτρικών πεδίων):

$$D_r = \frac{q}{4\pi r^2} \text{ ΠΑΝΤΟΥ στο χώρο.}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την πλήρη σφαιρική συμμετρία του συστήματος (υπάρχει αποκλειστικά μόνο ακτινική διεύθυνση). Οι γραμμές σχηματίζουν σφαιρικό διόργανο και ο "αριθμός" τους είναι

ίσος με q (καθάρως συμβατική διεύθυνση).

• Ένταση ηλεκτρικού πεδίου:

$$E_r = \begin{cases} D_r / \epsilon(r) & \text{έντος} \\ D_r / \epsilon_0 & \text{έκτος} \end{cases}$$

• Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου ως E_r αναπαριστούμενου ταυτίζονται με αυτές της D_r πλην όμως είναι εξασθενημένες κατά μήκος διότι η ένταση του πεδίου είναι μικρότερη εκεί που κενύει, επειδή $E(r) > E_0$.

• Πόρωση:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \begin{cases} \vec{e}_r \frac{q}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(r)} \right] & \text{έντος} \\ 0 & \text{έκτος} \end{cases}$$

• Φορτία πόρωσης πάσης φύσεως:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \text{ έντος}$$

$$\sigma_p = -\vec{e}_n \cdot \vec{P} \text{ (} r=a \text{)} \stackrel{(\vec{e}_n = \vec{e}_r)}{=} \frac{q}{4\pi a^2} \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(a)} \right]$$

$$[\sigma_p = -\vec{e}_n \cdot (\vec{P}_{\text{εκτός}} - \vec{P}_{\text{έντος}})]$$

Όσον αφορά τώρα το $\rho_p(r)$ έχουμε (*):

$$\rho_p(r) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \bar{P}_r(r)]$$

$$= -\frac{q}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\epsilon(r)} \right] = \frac{q \epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\epsilon(r)} \right]$$

* Σημαντική παρατήρηση

Το $\rho_p(r)$ ορίζεται εφόσον το $\nabla \cdot \vec{P}$ υπάρχει! ^{πέραν της περίπτωσης να είναι συνάρτηση δέλτα $\delta(\vec{r})$} Υπενθυμίζω ότι το $\nabla \cdot \vec{a}$, όπου $\vec{a}(\vec{r})$ διανυσματική συνάρτηση, ορίζεται ως εξής:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S(\Delta V)} \vec{a} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

το οποίο για να υπάρχει θα πρέπει να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} \cdot d\vec{S}}{\Delta S(\Delta V)}$$

στις θέσεις εκείνες που θέλουμε να ορίσουμε το $\nabla \cdot \vec{a}$!

Αν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει τότε δεν ισχύει το θεώρημα Gauss.
δηλαδή,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{a} dV = \oint_{S(V)} \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

για όγκο V στον οποίο εκτελούνται σημείο ή σημεία (δέσες)
πώς το παραπάνω όριο $(\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int \nabla \cdot \vec{a} dV}{\Delta V})$ απειρίζεται.

Με βάση τη παρατήρηση αυτή, θα δούμε ότι δυναμικό ρόλο παίζει στο
ισόγλω φορτίων πρόωσης η συνάρτηση $\epsilon(r)$

• Ισοζύγιο φορτίων πρόωσης :

Το συνολικό φορτίο πρόωσης θα πρέπει να μηδενίζεται δεδομένου ότι ήταν μηδέν και στο μη προωμένο υλικό (απουσία q) και του γεγονότος ότι η πρόωση αποτελεί στην ουσία ανακατανομή θετικών και αρνητικών φορτίων των οποίων τα κέντρα μικροσωπιδίων κατοικούν αρχικά ομοιόμορφα.

Ας υπολογίσουμε πάλι την ποσότητα: $Q_{\rho \text{ χώρου}} + Q_{\rho \text{ επιφάνειας}}$

$$= \int_V dV \rho_p(r') + \oint_{S(V)} \sigma_p(a) dS' = 4\pi \int_0^a dr' r'^2 \rho_p(r') + q \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(a)} \right]$$

$$= -q \epsilon_0 \int_0^a dr' \frac{d}{dr'} \left[\frac{1}{\epsilon(r')} \right] + q \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(a)} \right] = q \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon(a)} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(0)} \right] + q \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(a)} \right]$$

Άρα $Q_{\rho \text{ χώρου}} + Q_{\rho \text{ επιφάνειας}} = q \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(r=0)} \right] \neq 0 !$

Από την άλλη μεριά το άθροισμα $Q_{\rho \text{ χώρου}} + Q_{\rho \text{ επιφάνειας}}$ είναι δόξω των ορισμών των ρ_p και σ_p και με βάση το παραπάνω συμπέρασμα.

$$Q_{\rho \text{ χώρου}} + Q_{\rho \text{ επιφάνειας}} = - \int_V dV \nabla \cdot \vec{P} + \oint_{S(V)} \vec{P} \cdot d\vec{S} \neq 0$$

Άρα το θεώρημα Gauss δεν ισχύει διότι, πράγματι, στη χειροιά

των $\nabla = 0$ έχουμε:

$$\oint_{S(V)} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^a \frac{4\pi r^2 q}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(r)} \right] = q \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(0)} \right] \neq 0$$

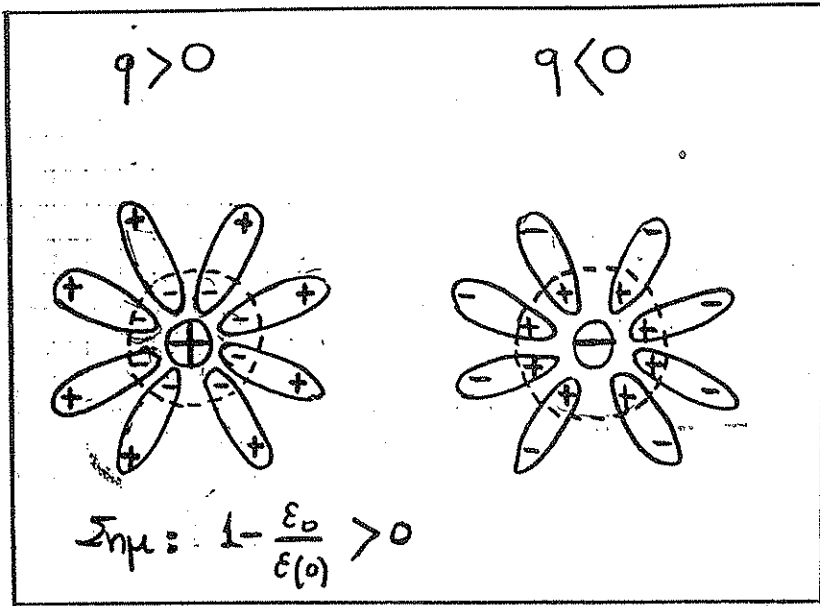
Επομένως, πέραν των $Q_{\rho \text{ χώρου}}$ και $Q_{\rho \text{ επιφάνειας}}$ θα πρέπει να

αναπυδώσει σημειακό φορτίο πρόωσης στο $r=0$, $q_p = -q \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(0)} \right]$

ώστε να ικανοποιήσω το Ισοζύγιο:

$$q_p + Q_{\text{ρχώρου}} + Q_{\text{επιφανείας}} = 0$$

- Φυσική εικόνα του εφεικτού φορτίου πύκνωσης, q_p



Το q_p αποτελείται από το σύνολο των ουρών (όταν $q > 0$) ή κεφαλών (όταν $q < 0$) των διπόλων που οχηματίζονται και συνωθούνται γύρω από το q δημιουργώντας γύρω του ($r = 0+$)

διαρκής απείρου φορτίου. Η απόλυτη τιμή του φορτίου πύκνωσης είναι πάντα μικρότερη του $|q|$ διότι $0 < 1 - \epsilon_0/\epsilon(r) < 1$

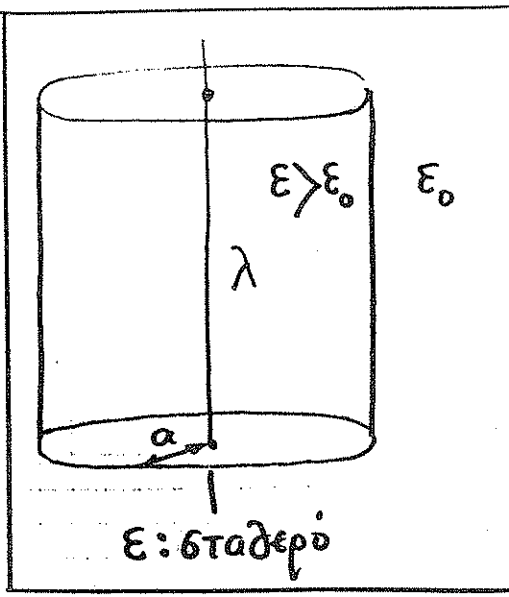
Σε περιπτώσεις που $\epsilon(r) \gg \epsilon_0$ έχουμε $q_p \approx -q$ δηλαδή έχουμε σχεδόν "εξωδετερύωση" του φορτίου $-q$. Εάν δέ $\epsilon(r) \gg \epsilon_0$

για κάθε r τότε ναί μεν το q διαρκίζει σχεδόν πλήρως αλλά όταν επιφανεια ($r=a$) του υλικού εμφανίζεται φορτίο πύκνωσης επιφανειακό $\sigma_p \approx q/4\pi a^2$ δηλαδή το q κάνει τη γιά την παρουσία του αιώδη μέσω της πύκνωσης που προκαλεί.

2 Απείρας διηλεκτρικές κύλινδρος και γραμμική κατανομή φορτίου κατά τον άξονά του. (δυναμική θεωρία)

- Διηλεκτρική μετατόπιση (λόγω κυλινδρικής συμμετρίας) υφίσταται μόνο ακτινική διωζύβα:

$$D_r = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad \text{παντα' στο κείρο}$$



• Ένταση ηλεκτρικού πεδίου :

$$E_r = \begin{cases} D_r / \epsilon & \text{εΝΤΌΣ} \\ D_r / \epsilon_0 & \text{εΚΤΌΣ} \end{cases}$$

• Πόλωση :

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \begin{cases} \vec{e}_r \frac{\lambda}{2\pi r} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) & \text{εΝΤΌΣ} \\ 0 & \text{εΚΤΌΣ} \end{cases}$$

• Φορτία πόλωσης :

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \text{ (εΝΤΌΣ)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_r) = 0$$

$$G_p = \vec{e}_\eta \cdot \vec{P} (r=a) = \frac{\lambda}{2\pi a} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \text{ και}$$

• Ισοζύγιο φορτίων πόλωσης (ανά μονάδα μήκους)

$$\Lambda_{\rho \text{ χώρου}} + \Lambda_{\rho \text{ επιφανείας}} \equiv \frac{Q_{\rho \text{ χώρου}} + Q_{\rho \text{ επιφανείας}}}{L \text{ (κάποιο μήκος)}}$$

$$= (2\pi a L) \frac{\lambda}{2\pi a} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) / L = \lambda \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \neq 0$$

Αρα, πάλι το θεώρημα Gauss δεν ισχύει διότι στη φησιμα του

$$v=0 \text{ (} v=0^+ \text{)} \text{ έχουμε μη μηδενισμό του } \oint \vec{P} \cdot d\vec{S} \text{ } \left[= \lambda \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \right]$$

Επομένως, πέραν των $Q_{\rho \text{ χώρου}} (=0)$ και $Q_{\rho \text{ επιφανείας}}$ θα πρέπει να αναπληρωθεί γραμμική κατανομή φορτίου (κυλινδρική μηδενικής ακτίνας) απασχολούμενη από τις σφές ($\lambda > 0$) ή τις κεφαλές ($\lambda < 0$) διότι πιν "θωρακίζον" τήν γραμμική κατανομή. Δηλαδή,

$$\lambda_p = -\lambda \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

• Παρατήρηση :

Μπορεί κανείς να ορίσει στην περίπτωση αυτή σαν σπινύ γραμμική

φορτίο, την ποσότητα:

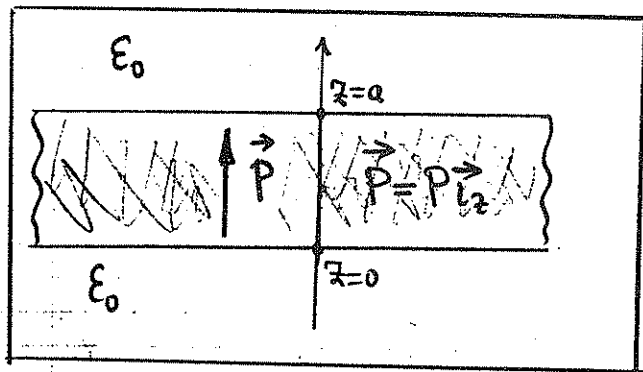
$$\lambda_{ολ} = \lambda + \lambda_p = \lambda \frac{\epsilon_0}{\epsilon}$$

Έχουμε λοιπόν ότι παντού:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} = \frac{\lambda_{ολ}}{2\pi r \epsilon_0}$$

Διεξήγησε το E_r μπορεί να θεωρηθεί σαν η λύση του ηλεκτροστατικού προβλήματος στον κενό χώρο για την περίπτωση γραμμικής κατανομής ίσως με $\lambda_{ολ}$ (δηλ. της τροποποιημένης λ κατά την προσθήκη λ_p).

3 Πεδίο πλάκας ηλεκτρίτη προλωμένης εκκάρδια



• φορτία πρόωσης:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \quad (\vec{P} = \text{σταθερό})$$

$$\sigma_p = -\vec{l}_n \cdot (\vec{P}'_{έξω} - \vec{P}'_{μέσα}) = \vec{l}_n \cdot \vec{P}$$

$$= \begin{cases} P, & z=a \\ -P, & z=0 \end{cases}$$

• Διηλεκτρική μετατόπιση:

Έχουμε παντού: $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ (όχι ελεύθερα φορτία)

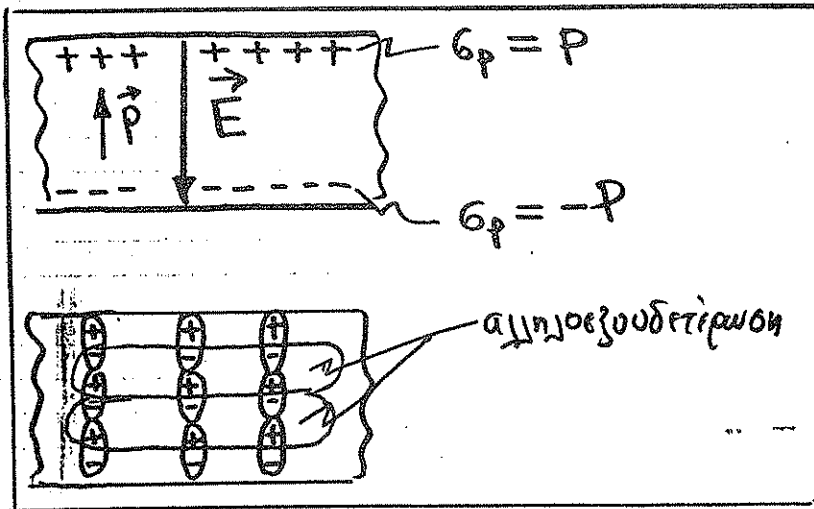
$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P} = 0 \quad (\text{όχι ρεύματα})$$

Επιπλέον $\vec{l}_n \cdot (\vec{D}'_{έξω} - \vec{D}'_{μέσα}) = 0$ (όχι επιφ. κατανομές ελεύθερων φορτίων)

και $\vec{l}_n \times (\vec{E}'_{έξω} - \vec{E}'_{μέσα}) = 0 \Rightarrow \vec{l}_n \times (\vec{D}'_{έξω} - \vec{D}'_{μέσα}) = \vec{l}_n \times (\vec{P}'_{έξω} - \vec{P}'_{μέσα}) = 0$ (επειδή $\vec{l}_n \times \vec{P}'_{μέσα} = \pm \vec{l}_z \times \vec{l}_z P = 0$). Έχουμε δηλαδή βεβαιότητα $\nabla \cdot \vec{D} = 0, \nabla \times \vec{D} = 0$, και \vec{D} απόλυτα βεβαίως στις δύο διαχωριστικές επιφάνειες

Άρα το \vec{D} είναι παντού μηδέν αφού είναι συνεχές και έχει μηδενική απόκλιση και περιδίνηση. Επομένως

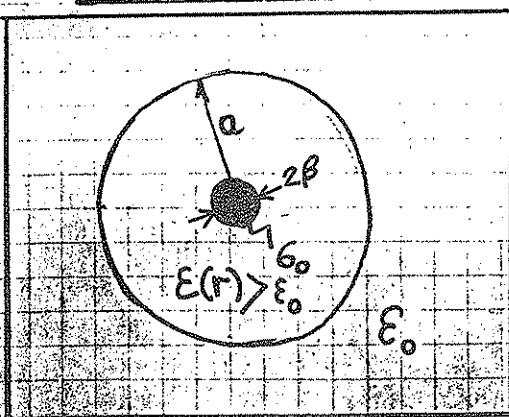
$$0 = \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \begin{cases} \text{μέσα: } \vec{E} = -\vec{P}/\epsilon_0 \\ \text{έξω: } \vec{E} = 0 \end{cases}$$



Επομένως, το \vec{E} μπορεί να θεωρηθεί ότι προκαλείται μόνο από τις δύο παράλληλες επιφανειακές κατανομές, στις θέσεις $z = 0, a$, σ_p και $-\sigma_p$

που ήδη γνωρίζουμε ότι δημιουργεί μηδενικό πεδίο εκτός και πεδίο $-\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = -\frac{P}{\epsilon_0}$ εντός!

4 Παραλλαγή της άσκησης 1 [επιφανειακό φορτίο σε σφαιρικό στο κέντρο (και σε εποχή) με κοίλη διηλεκτρική σφαίρα]



$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad r \geq b$$

$$E_r = \begin{cases} D_r/\epsilon(r) & a \leq r \leq b \\ D_r/\epsilon_0 & a < r \end{cases}$$

$$\vec{P} = \begin{cases} \vec{r} \frac{Q}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(r)}\right] & a \leq r \leq b \\ 0 & a < r \end{cases}$$

$$\sigma_p|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(a)}\right] \quad \sigma_p|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(b)}\right]$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad a \leq r \leq b \quad \rho_p = -\epsilon_0 \epsilon_0 \frac{\beta^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\epsilon(r)} \right]$$

Ισοζύγιο: $Q_{\text{κέντρο}} + Q_{\text{επιφανειακή}} = Q_{\text{κέντρο}} + Q_{\rho(r=b)} + Q_{\rho(r=a)} = 4\pi\epsilon_0\beta^2 \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon(b)} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(a)} \right] = 4\pi\epsilon_0\beta^2 \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(b)} \right] + 4\pi\epsilon_0\beta^2 \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon(a)} - 1 \right] = 0$ όπως πράγματι αναμένεται.

Δεν υπάρχει εδώ κεντρική ή οριακή να επικρατήσουν ιδιομορφές κατανομής

φορτίων πύκνωσης δίου δεν υφίστανται ζεύγες κατανομή φορτίων εκτός
 εξ' αρχής: Η επιφανειακή κατανομή σ_0 δεν εικάζει ιδιομορφία αμν'
 φυσικά προκαλεί την εμφάνιση της $\sigma_r|_{r=\beta}$ η οποία παίζει το
 ρόλο του q_p στην πρώτη παραλλαγή της άσκησης. Επομένως η 2^η
 αυτή παραλλαγή είναι πιο ρεαλιστική. Μάλιστα, η 1^η παραλλαγή μπορεί
 να ανακτηθεί εάν ορίσουμε:

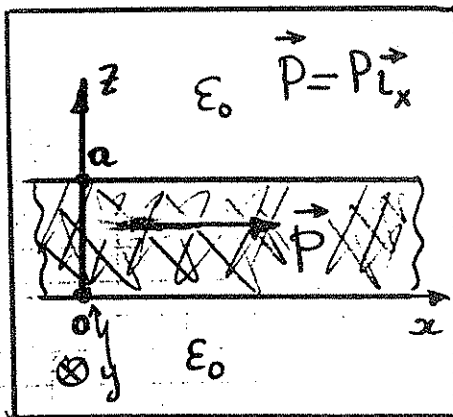
$$-q = \lim_{\beta \rightarrow 0} (4\pi\beta^2 \sigma_0)$$

και

$$q_p = \lim_{\beta \rightarrow 0} (4\pi\beta^2 \sigma_r|_{r=\beta})$$

$$= - \left[\lim_{\beta \rightarrow 0} (4\pi\beta^2 \sigma_0) \right] \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(0)} \right]$$

5 Πεδίο πλάκας ηλεκτρίτη με διευμηκή πρόωση (άπειρη έκταση)



Όπως στην άσκηση 3, έχουμε (\vec{P} : σταθερό διάνυσμα)

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

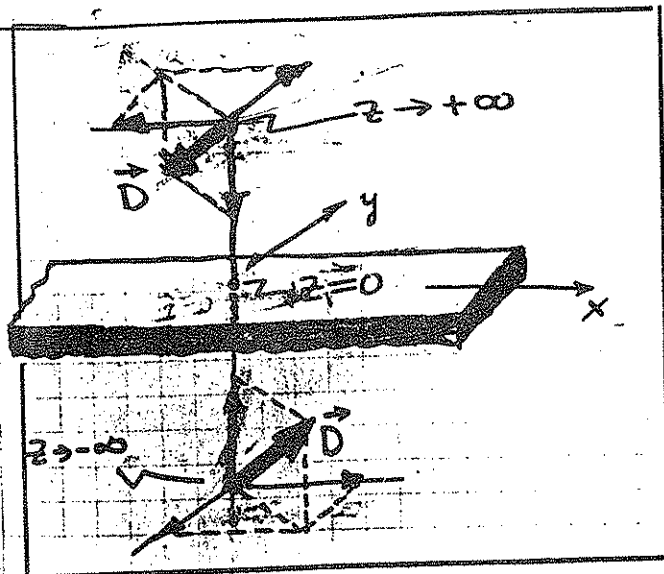
$$\nabla \times \vec{D} = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{D}_{ε_0} - \vec{D}_{\mu\epsilon_0}) = 0 \Rightarrow D_{z\mu\epsilon_0} = D_{z\epsilon_0}$$

$$\vec{e}_y \times (\vec{D}_{ε_0} - \vec{D}_{\mu\epsilon_0}) = \vec{e}_y \times (\vec{P}_{ε_0} - \vec{P}_{\mu\epsilon_0}) = -\vec{e}_y \times \vec{P}_{\mu\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{y\epsilon_0} = D_{y\mu\epsilon_0} \\ D_{x\epsilon_0} - D_{x\mu\epsilon_0} = \begin{cases} -P_0 & \text{για } z=a \\ P_0 & \text{για } z=0 \end{cases} \end{cases}$$

δηλαδή έχουμε μηδενισμό της απέκλισης και της περιόδου του \vec{D} και
 συνεπώς των συνιστωσών του πέραν της x-οριζοντιότητας. Αυτό συνεπάγεται
 άμεσα ότι το \vec{D} είναι τημαζιακά σταθερό διάνυσμα (δηλαδή όλες του
 οι συνιστώσες είναι σταθερές τημαζιακά), άρα ταυτίζονται με τις
 τιμές τους στο άπειρο, άρα και για $z = \pm\infty$ οι $D_{x\epsilon_0}$, $D_{y\epsilon_0}$ και
 $D_{z\epsilon_0}$ θα πρέπει να έχουν τις τιμές που έχουν και επί της επιφάνειας του
 ηλεκτρίτη. Ομως:



$$\vec{D}(z \rightarrow -\infty) = -\vec{D}(z \rightarrow +\infty)$$

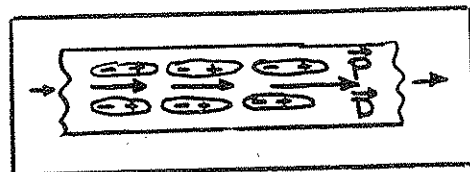
διότι λόγω της άπειρης έκτασης της πλάκας κατά τις x και y διαστάσεις, θα πρέπει στρωγές 180° των επιπέδων (zx) ή (zy) να δίνουν την ίδια εικόνα.

[δοκιμάστε τη μινι δυνατή γότση

ως το διάστημα απεικόνισης τριδιχοτάτου σχήματος στρωγή της διπλής εικόνας κατά 180° (δηλ. του επιπέδου (zx) του χαρτί)].

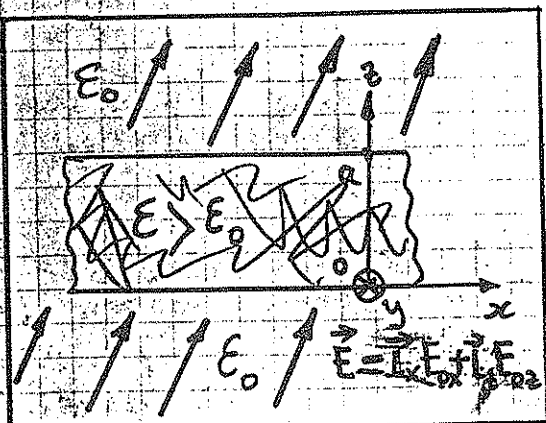
Όμως η παραπάνω, λόγω συνεπαράθεσης $\vec{D}(z \rightarrow \pm\infty) = \vec{0}$ οπότε $\vec{D}_{εξω} = \vec{0}$. Ετσι τελικά έχουμε μόνο:

$$\vec{D}_{μέσα} = \vec{D}_x μέσα = \begin{cases} \vec{P} & z = a \\ \vec{P} & z = 0 \end{cases}$$



Άρα $\vec{D}_{μέσα} = \vec{P}$ και έτσι $\vec{E}_{μέσα} = \vec{0}$, (ενώ και $\vec{E}_{εξω} = \vec{0}$)

6. Πρόσθεση διηλεκτρικής πλάκας άπειρης έκτασης όταν τρέχει εντός ηλεκτρικού πεδίου (εμοφενούς)



Έχουμε (ε: σταθερό)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \text{ παντού (πριν και μετά)}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \text{ παντού (πριν και μετά)}$$

Άρα οι συνιστώσες του \vec{E} είναι τμηματικά συνεχείς

$$\text{Επίσης } \vec{E}_{εκτός (πριν)} = \vec{E}_{εκτός (μετά)}$$

Το πεδίο διαμορφώνεται μόνο μέσα στο υλικό

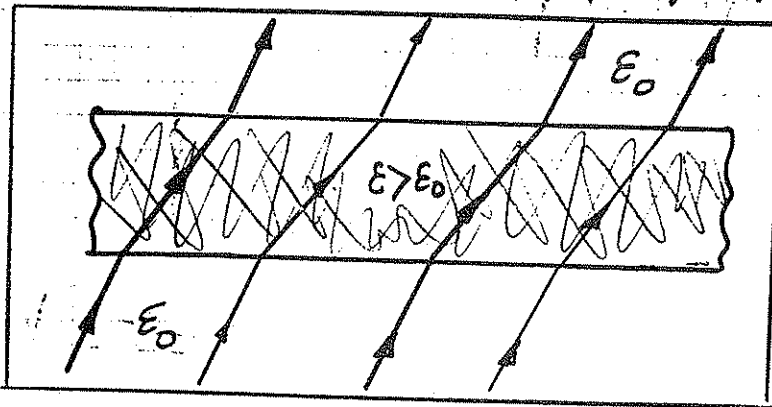
Επίσης: $\vec{l}_y \times (\vec{E}_{εκτῆ} - \vec{E}_{εντῆ}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{xεντῆ} = E_{0x} \\ E_{yεντῆ} = 0 \end{cases}$ 10

$\vec{l}_y \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_{εκτῆ} - \epsilon \vec{E}_{εντῆ}) = 0 \Rightarrow E_{zεντῆ} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_{0z} < E_{0z}$

Αρα τελικά:

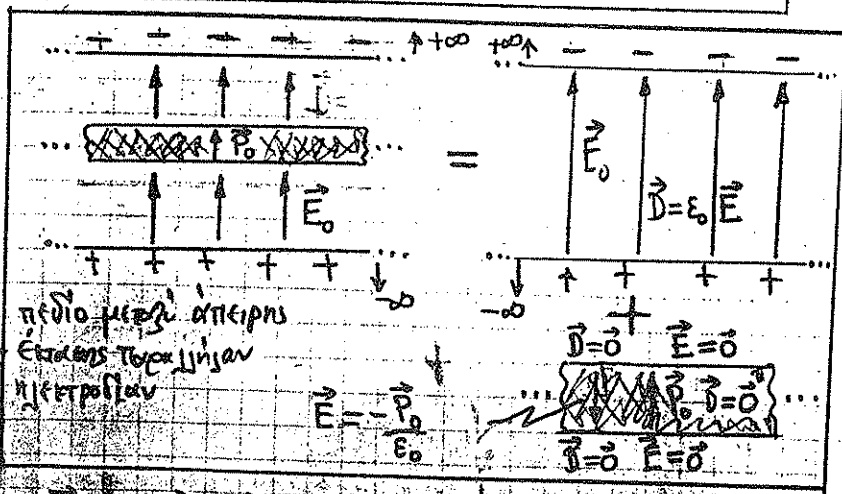
$\vec{E}_{εντῆ} = \vec{l}_x E_{0x} + \vec{l}_z \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_{0z}$

ενά $\vec{P}_{εντῆ} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_{εντῆ}$



και $\vec{D}_{εντῆ} = \epsilon \vec{E}_{εντῆ}$

7 ΗΛΕΚΤΡΙΤΗΣ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΕΔΙΟ



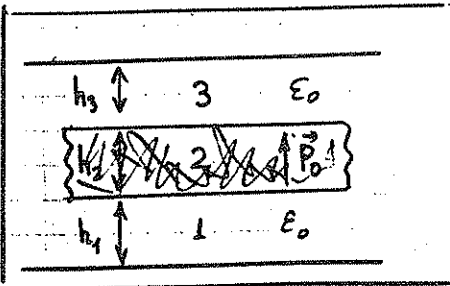
Επειδή η πυκνότητα των υλικών είναι ανεξάρτητη των πεδίων μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με επάλειψη:

$\vec{E}_{εξω} = \vec{E}_0 + \vec{0} = \vec{E}_0$
 $\vec{E}_{μέσα} = \vec{E}_0 - \frac{\rho_{επιφ}}{\epsilon_0}$

$\vec{D}_{εξω} = \vec{0} + \epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$
 $\vec{D}_{μέσα} = \vec{0} + \epsilon \vec{E}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_{μέσα} + \vec{P}_0$ πράγματι

* Στο πρόβλημα αυτό το πεδίο \vec{E} παραμένει αμετάβλητο μόνο εάν τα δύο ηλεκτρικά (πυκνές) θεωρηθούν σαν τοποθετημένα στο $\pm \infty$. Εάν, αντίθετα το \vec{E}_0 επιφυλάσσεται με τη διατήρηση κάποιας διαφοράς δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων τοποθετημένων σε πεπερασμένη απόσταση μεταξύ τους, τότε δεν ισχύει

η παραπάνω λύση. Το \vec{E} μεταβλητεί (προσαρμύζεται) κατά 2^ο τρόπο (11
 (σε κάθε περιοχή) πάνω, μέσα και κάτω από την πλάκα ηλεκτρική) έτσι ώστε να
 διατηρηθεί η ίδια διαφορά δυναμικού αφού αυτή είναι η αλλαγή επιβεβαιώσα με
 τη βοήθεια εξωτερικών πηγών. Δεν μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα όπως
 πριν (με σταθερά). Αντί αυτού έχουμε



$$\text{σταθερό} = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{z}$$

$$= E_1 h_1 + E_2 h_2 + E_3 h_3 \quad (\alpha)$$

Λόγω απουσίας εξωτερικών επιφανειακών φορτίων

θα έχουμε $D_3 = D_2 = D_1$ (λόγω της άσπειρης έκτασης υπάρχει απώδρα άλλων συνιστωσών
 πάνω και κάτω κορυφών και, επίσης, έχουμε σταθερότητα κατά περιοχή). Έχουμε, δηλαδή

$$\epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 E_2 + P_0 = \epsilon_0 E_3 \quad (\beta)$$

Συνδυάζοντας την (α) και τις (β), έχουμε:

$$h_1 E_1 + h_2 (\epsilon_0 E_1 - P_0) / \epsilon_0 + h_3 E_1 = V_+ - V_- \quad \text{ή} \quad (h_1 + h_2 + h_3) E_1 = V_+ - V_- + h_2 \frac{P_0}{\epsilon_0}$$

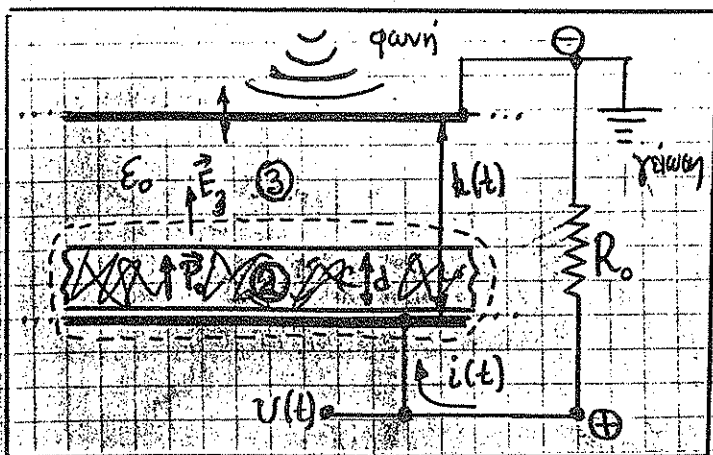
ή αν $h_1 + h_2 + h_3 \equiv h$:

$$E_1 = E_3 = \frac{V_+ - V_-}{h} + \frac{h_2}{h} \frac{P_0}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{V_+ - V_-}{h} - \frac{h - h_2}{h} \frac{P_0}{\epsilon_0}$$

(γ) όταν $h \rightarrow \infty$ ανακτώνται τα αποτελέσματα της προηγ. παραγρ. 8^α

8 ΜΙΚΡΟΦΩΝΟ ΗΛΕΚΤΡΙΤΗ



Το κάτω ηλεκτρόδιο ("δεξινό")
 έχει αρχικά σταθερό και 100 μτ
 μηδέν (δηλαδή 100 μτ από το "αριστερό"
 ηλεκτρόδιο που είναι γειωμένο). Δηλαδή (με
 βέβαιη με (γ)), με $d = h_2$ (άουσιον ?)
 $E_3 = \frac{d}{h_0} \frac{P_0}{\epsilon_0}$, $E_2 = -\frac{h_0 - d}{h_0} \frac{P_0}{\epsilon_0}$

όπου h_0 η διαμ. ισορροπίας του δια-
 ηλεκτροδίου. Όταν κινήσει να πάσσει το τζινζάκι, το διαφράγμα του (t) θα κινηθεί, δηλαδή
 θα προσηλυθεί με κάποιο δυναμικό στα άκρα της αντίστασης R_0 . Θα έχουμε τότε,

$$E_3(t) = \frac{v(t)}{h(t)} + \frac{d}{h(t)} \frac{P_0}{\epsilon_0}, \quad E_2(t) = \frac{v(t)}{h(t)} - \frac{h(t) - d}{h(t)} \frac{P_0}{\epsilon_0} \quad (\alpha)$$

Το φορτίο στο κάτω ηλεκτρόδιο, του οποίου η κίνηση (των φορτίων) διατηρεί αυτή τη διαφορά δυναμικού, θα υπολογισθεί με επιφάνεια Gauss όπως στο σχήμα:

$$q = \oint_{S_{στο 3}} \vec{D}_3 \cdot d\vec{S} = A \epsilon_0 E_3, \text{ όπου } A \text{ το εμβαδόν του ηλεκτροδίου. Άρα, } i = dq/dt$$

θα είναι:

$$i(t) = A \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{v(t)}{h(t)} + \frac{d}{h(t)} \frac{P_0}{\epsilon_0} \right] \quad (\beta)$$

Το οποίο θα είναι το ρεύμα προσεδοσίας (φορτίου) του ηλεκτροδίου. Λίγω της φύσης του, αν υποθεσιασθεί κίνηση θετικών φορτίων αντίθετα προς τη πηγή τάσης ($\ominus \rightarrow \ominus$) άρα στο νόμο του Ohm που ακολουθεί θα έχει αρνητικό πρόσημο,

$$i(t) = -\frac{1}{R_0} v(t) \quad (\gamma)$$

Εκσυμπίπουν, $v(t) = v(t=0) + \delta v(t) = \delta v(t)$ και $h(t) = h(t=0) + \delta h(t)$

Επειδή δε: $\delta h(t) \ll h_0$, $\frac{1}{h(t)} \approx \frac{1}{h_0} \left(1 - \frac{\delta h(t)}{h_0} \right)$ μπορούμε να κάνουμε χρήση προσεγγίσεων πρώτης τάξης της εξίσωσης που τρέφεται από το συνδυασμό (β), (γ):

$$-\frac{v(t)}{R_0} = -\frac{A \epsilon_0}{h^2(t)} \left[v(t) + \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \right] \frac{dh(t)}{dt} + \frac{A \epsilon_0}{h(t)} \frac{d v(t)}{dt}$$

$$-\frac{\delta v(t)}{R_0} \approx -\frac{A \epsilon_0}{h_0^2} \left[1 - 2 \frac{\delta h(t)}{h_0} \right] \left[\delta v(t) + \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \right] \frac{d \delta h(t)}{dt} + \frac{A \epsilon_0}{h_0} \left[1 - \frac{\delta h(t)}{h_0} \right] \frac{d \delta v(t)}{dt}$$

⇒

$$\frac{A \epsilon_0}{h_0} \frac{d \delta v(t)}{dt} + \frac{\delta v(t)}{R_0} \approx \frac{A \epsilon_0}{h_0^2} \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \frac{d \delta h(t)}{dt} \quad (\delta)$$

αφού αγνοούμε όρους $\delta h(t) \delta v(t)$ ή μηδενικά των παραγώγων τους. Αν υποθέσουμε ότι το $\delta h(t)$ έχει αρμονική βάρηση συχνότητας ω (η συχνότητα που το πάνω ηλεκτρόδιο - διαφράγμα ταλαντώνεται όταν διεγερθεί από ακουστική ή ηλεκτρονική δέγξηση) τότε η (δ) γίνεται:

$$-j \frac{A \epsilon_0 \omega}{h_0} \hat{\delta v}_\omega + \frac{\hat{\delta v}_\omega}{R_0} = -j \frac{A \epsilon_0}{h_0^2} \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \omega \hat{\delta h}_\omega \quad (\epsilon)$$

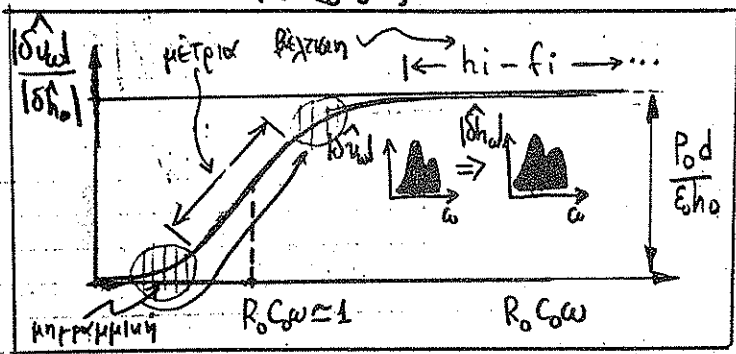
όπου $\hat{\delta v}_\omega$, $\hat{\delta h}_\omega$ φαίνεται στη συχνότητα ω . Αν ορίσουμε $C_0 \equiv \frac{A \epsilon_0}{h_0}$ (δηλ. δείκτη αλληλεπίδρασης ανά είδος ή χωρητικότητα του πυκνωτή που εξισώνεται με C_0 εν κενώ)

τότε από την (F) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\delta U}_\omega}{\hat{\delta h}_\omega} &= -j \frac{C_0}{h_0} \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \omega \left(j C_0 \omega + \frac{1}{R_0} \right) \\ &= \frac{-j \frac{C_0}{h_0} \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \omega \left(\frac{1}{R_0} + j C_0 \omega \right)}{\frac{1}{R_0^2} + C_0^2 \omega^2} \\ &= \frac{\frac{C_0}{h_0} \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \omega C_0 \omega - j \frac{C_0}{h_0} \frac{P_0 d}{\epsilon_0} \omega \frac{1}{R_0}}{\frac{1}{R_0^2} + C_0^2 \omega^2} = \frac{C_0^2 \omega^2 \frac{P_0 d}{\epsilon_0 h_0} - j \frac{C_0 \omega}{R_0} \frac{P_0 d}{\epsilon_0 h_0}}{\frac{1}{R_0^2} + C_0^2 \omega^2} \end{aligned}$$

$$\frac{(R_0 C_0 \omega)^2 \frac{P_0 d}{\epsilon_0 h_0}}{1 + (R_0 C_0 \omega)^2} \frac{1 - j \frac{1}{R_0 C_0 \omega}}{1 + (R_0 C_0 \omega)^2} \text{ οπότε το μέρος είναι}$$

$$\left| \frac{\hat{\delta U}_\omega}{\hat{\delta h}_\omega} \right| = \frac{(R_0 C_0 \omega)^2}{1 + (R_0 C_0 \omega)^2} \left(\frac{P_0 d}{\epsilon_0 h_0} \right) \left[1 + \frac{1}{(R_0 C_0 \omega)^2} \right]^{1/2}$$



Για $R_0 C_0 \omega \approx 1$ η σχέση $|\hat{\delta U}_\omega|, |\hat{\delta h}_\omega|$ είναι περίπου γραμμική, ενώ για $R_0 C_0 \omega \gg 1$ (μεγάλο συχνότητα) η "απόκριση" $|\hat{\delta U}_\omega|$ είναι αντίστροφη της

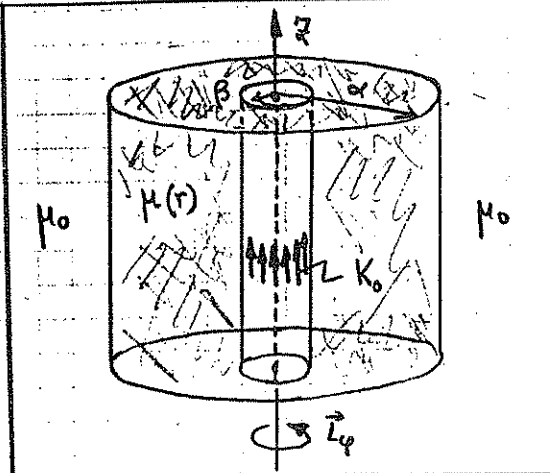
διαφέρει $|\hat{\delta h}_\omega|$ (φαντασικό σήμα συχνότητας ω) και περίπου ίση με $\frac{P_0 d}{\epsilon_0 h_0}$.

Πάντα από την άποψη της "πίεσης" (hi-fi) λειτουργίας η περιοχή είναι η γραμμική όταν, δηλαδή, έχουμε σταθερό λόγο (ανεξάρτητο του ω), ή, στη χειρότερη περίπτωση, ανάλογο του ω . Εξαρτάται είδος η καλύτερη (πιο γρήγορη) και ελάχιστη εξάρτηση από τη συχνότητα αναπαραγωγή του ακουστικού φάσματος. Επιθυμούμε να είναι η περιοχή αυτή όσο το δυνατόν ευρύτερη (και προς τις χαμηλές συχνότητες). Αρκετά καλά θα μπορούσε να $R_0 C_0 \omega \approx \frac{P_0 d}{\epsilon_0 h_0}$! Η διαφορά είναι παράμετρον λόγω φωνητικής συνθήσεων βέβαια, υπ' όψιν ότι το μοντέλο είναι απλά στο ότι θα ψευδώς κωδικοποιήσει τις επιπτώσεις της διαμόρφωσης (μηχανικής) συμπεριφοράς του διαφράγματος, όπως μάθαμε από βιβλίο κ.π.

ΑΤΙΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

1 ΑΠΕΙΡΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΜΕ $\mu(r)$ ΜΑΓΝΗΤΙΖΟΜΕΝΟΣ ΜΕ ΡΕΥΜΑ I ΚΑΤΑ ΤΩΝ ΑΞΩΝΑ ΤΟΥ

Μια καλύτερη απόδοση της άσκησης αυτής είναι να αρχίσουμε με ένα κενό μαγνητιζόμενο κύλινδρο (αμυρογενής), και η εσωτερική κυλινδρική επιφάνεια να θεωρηθεί ότι έχει επιφανειακό ρεύμα $K_0 \vec{e}_z$ και έχει ακτίνα β . Έστω ότι η εξωτερική ακτίνα είναι α . τσάπρριζονας



την νόμο του Ampere έχουμε:

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \mu(r) K_0 \frac{\beta}{r} & \text{για } \beta < r \leq \alpha \\ \vec{e}_\phi \mu_0 K_0 \frac{\beta}{r} & \text{για } r > \alpha \end{cases}$$

οπότε $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{B} \left[\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu(r)} \right]$

ή $\vec{M} = \begin{cases} \vec{e}_\phi [\mu(r) - 1] K_0 \frac{\beta}{r} & \text{για } \beta < r \leq \alpha \\ 0 & \text{για } r > \alpha \end{cases}$

όπου $\mu_r(r) = \mu(r) / \mu_0$. Τα ρεύματα μαγνήτισης θα είναι:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \vec{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\phi) = \vec{e}_z K_0 \frac{\beta}{r} \frac{d\mu_r(r)}{dr}$$

$$\vec{K}_M(r=\beta) = \vec{e}_\phi \times (\vec{M}_{\text{εξω}} - \vec{M}_{\text{μέσα}}) = -\vec{e}_\phi \times \vec{M}_{\text{μέσα}} = +\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi [\mu_r(\beta) - 1] K_0 = \vec{e}_z [\mu_r(\beta) - 1] K_0$$

$$\vec{K}_M(r=\alpha) = \vec{e}_\phi \times (\vec{M}_{\text{εξω}} - \vec{M}_{\text{μέσα}}) = -\vec{e}_\phi \times \vec{M}_{\text{μέσα}} = -\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi [\mu_r(\alpha) - 1] K_0 \frac{\beta}{\alpha} = -\vec{e}_z [\mu_r(\alpha) - 1] K_0 \frac{\beta}{\alpha}$$

ισοζύγιο: $[I_{\text{σπείρα}} + I_{\text{επιφάνεια}(r=\beta)} + I_{\text{επιφάνεια}(r=\alpha)}]_{\text{αμφιμαγνήτισης}} \stackrel{!}{=} 0$

$$\int_{S_{\text{διατομή}}} \vec{J}_M \cdot d\vec{S} + \oint_{\rho(\text{κύβος } r=\beta)} \vec{K}_M \cdot d\vec{l} + \oint_{\rho(\text{κύβος } r=\alpha)} \vec{K}_M \cdot d\vec{l} = 2\pi K_0 \beta \int_{\beta}^{\alpha} d\mu_r(r) + 2\pi K_0 \beta [\mu_r(\beta) - 1] - 2\pi K_0 \beta [\mu_r(\alpha) - 1]$$

$$= 2\pi K_0 \beta [\mu_r(\alpha) - \mu_r(\beta)] - 2\pi K_0 \beta \mu_r(\beta) - 2\pi K_0 \beta \mu_r(\alpha) = 0 \text{ πράγματι.}$$

Στην περίπτωση τραχηλιού ρεύματος κατά μήκος του άξονα z μπορούμε να γράψουμε μέσω των ορίων:

$$I = \lim_{\beta \rightarrow 0} (2\pi \beta K_0)$$

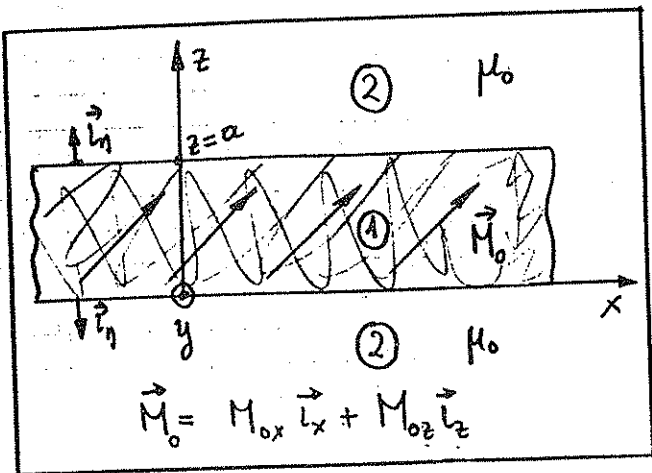
Τότε το επιφανειακό ρεύμα μαγνήτισης $\vec{K}_M(r=\beta)$ γίνεται τραχηλιό:

$$I_M = \lim_{\beta \rightarrow 0} (2\pi \beta K_M(r=\beta)) = I [\mu_r(\beta) - 1]$$

και τότε,

$$\vec{K}_M(r=\alpha) = -\vec{l}_z [\mu_r(\alpha) - 1] \frac{1}{\alpha} \lim_{\beta \rightarrow 0} (K_0 \beta) = -\vec{l}_z [\mu_r(\alpha) - 1] \frac{I}{2\pi \alpha}$$

2. ΠΛΑΚΑ ΜΑΓΝΗΤΗ ΣΤΟ ΚΕΝΟ ΧΩΡΟ



Υποθέτουμε ότι όλα τα ρεύματα ενδογενών φορτίων είναι μηδενικά: $\vec{J}_u = 0, \vec{K}_u = 0$. Η πλάκα υποτίθεται ότι έχει άπειρη έκταση κατά τις x και y διευθύνσεις και πάχος a.

Οι σχετικές εξισώσεις των Maxwell είναι:

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (\vec{H}_0 : \text{σταθερό διάνυσμα})$$

παντού (περιέχει ① και ②). Άρα το \vec{H} είναι σταθερό κατά περιστροφές διάνυσμα. Έχουμε λοιπόν:

$$\vec{l}_y \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (z=0, z=a)$$

$$\vec{l}_y \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = -\vec{l}_y \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \quad (z=0, z=a)$$

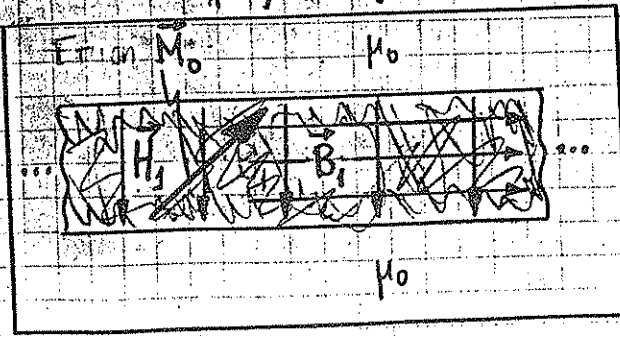
Για τις άκρες:

$$\vec{H}(z \rightarrow \infty) = -\vec{H}(z \rightarrow -\infty)$$

το οποίο συνπαράγει (βλ. απάντηση 5 της προηγούμενης ενότητας) ότι το \vec{H}_2 είναι μηδέν παντού στον χώρο ②. Εάν η πλάκα είχε πεπερασμένη διαστάσεις θα τρυπηθούσε το πεδίο στα περιβάλλοντα χώρο, δηλαδή θα υπήρχε $\vec{H}_2 \neq 0$. Ετσι, οι σχέσεις (α)

$$\vec{l}_y \times \vec{H}_1 = 0 \Rightarrow \vec{H}_1 = H_1 \vec{l}_z = H_1 \vec{l}_z$$

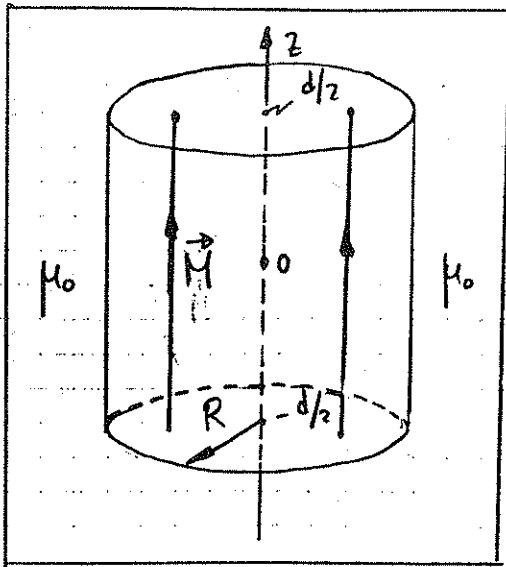
$$\vec{H}_1 \cdot \vec{l}_y = -\vec{l}_y \cdot \vec{M}_0 \Rightarrow H_1 = -M_{0z}$$



Επίσης, $\vec{B}_2 = 0$, ενώ

$$\vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{H}_1 + \vec{M}_0) = \mu_0 M_{0x} \vec{l}_x$$

Δηλαδή, θα έχουμε τη διάταξη γραμμών του αόρατου με $\vec{H}_1 \perp \vec{B}_1$!



$\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$, M_0 : σταθερό

Υπολογισμός μαγνητικού πεδίου

(1) Υπολογισμός "φορτίων": ΠΡΟΣΟΧΗ

$\rho_M \equiv -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = 0$ [$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} = -(\nabla \cdot \vec{M})/\mu_0$
κατ'αναλογία του $\nabla \cdot \vec{E} = -\rho_{01}/\epsilon_0$]

Επίσης, $\sigma_M \equiv \mu_0 \vec{e}_n \cdot (\vec{M}'_{έξω} - \vec{M}'_{μέσα})$ [από τη σχέση

$\vec{e}_n \cdot (\vec{B}'_{έξω} - \vec{B}'_{μέσα}) = 0 \Rightarrow \mu_0 \vec{e}_n \cdot (\vec{H}'_{έξω} - \vec{H}'_{μέσα}) =$

$= -\mu_0 \vec{e}_n \cdot (\vec{H}'_{έξω} - \vec{H}'_{μέσα}) \equiv \sigma_M$ κατ'αναλογία

του $\epsilon_0 \vec{e}_n \cdot (\vec{E}'_{έξω} - \vec{E}'_{μέσα}) = \sigma_{01}$. Έχουμε λοιπόν,

$\sigma_M = \begin{cases} \mu_0 M_0, & z = d/2 \\ -\mu_0 M_0, & z = -d/2 \end{cases}$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση επιφανείας πάνω στα

μόνα μαγνητικά φορτία (σ_M) για να υπολογίσουμε το ϕ_M . Για ευκολία, κατασκευάμε μόνο

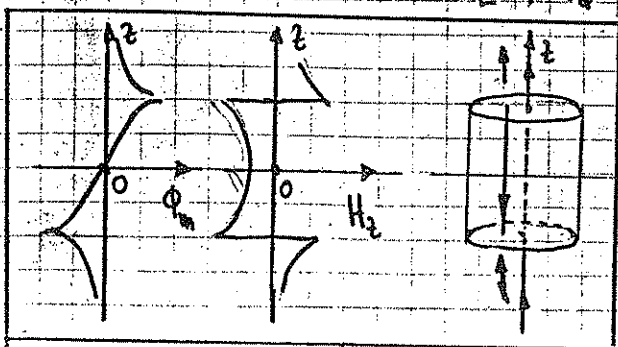
το ϕ_M για $r=0$ (δηλαδή πάνω στη άξονα z):

$$\phi_M(z, r=0) = \int_0^R \frac{2\pi r' dr' \sigma_M(r')}{4\pi \mu_0 [r'^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{M_0 d}{2} \left\{ \left[\left(\frac{R}{d} \right)^2 + \left(\frac{z}{d} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{R}{d} \right)^2 + \left(\frac{z}{d} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} + \left| \frac{z}{d} + \frac{1}{2} \right| - \left| \frac{z}{d} - \frac{1}{2} \right| \right\}$$

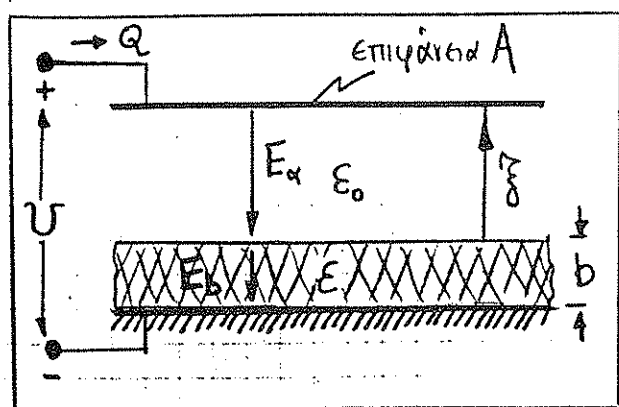
και, $H_z(z, r=0) = -\frac{\partial \phi_M(z, r=0)}{\partial z}$ ή

$$H_z(z, r=0) = -\frac{M_0 d}{2} \left[\frac{\frac{z}{d} - \frac{z}{d} - \frac{1}{2}}{\left[\left(\frac{R}{d} \right)^2 + \left(\frac{z}{d} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\frac{z}{d} - \frac{z}{d} + \frac{1}{2}}{\left[\left(\frac{R}{d} \right)^2 + \left(\frac{z}{d} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} + \begin{cases} 0 & \text{για } |z| > d/2 \\ 2 & \text{για } |z| < d/2 \end{cases} \right]$$



Το διανυσματικό και το πεδίο $[\phi_M(z, r=0) \text{ και } H_z(z, r=0)]$ έχουν τη χρονική παράσταση του διήλεκτου. Παρατηρούμε ότι μέσα στο κύλινδρο, το H_z είναι παντού αρνητικό ($M_0 > 0$).

(1) Δύναμη σε οπίσθιο πυκνωτή



Ζητείται η δύναμη που ασκείται στο ελάστω υστεροδίο (το λάστω είναι συνδεδεμένο) όταν εφαρμοσθεί τάση U . Το διακεκλιμένο μάζι των υστεροδίων αποσπάζεται από το κενό χώρο σε ύψος (ζ) και το υλικό με διακεκλιμένη ελαστικότητα ϵ . Έχουμε:

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{e} = \zeta E_a + b E_b \quad (a)$$

Ο νόμος του Gauss για την επιφάνεια του υλικού (συνέχεια των εφαρμοσμένων σημείων της διακεκλιμένης μηχανικής) δίνει:

$$\epsilon_0 E_a = \epsilon E_b \quad (b)$$

οπότε ο συνδυασμός (α) και (β) δίνει σχέση:

$$E_a = \frac{U}{\zeta + b \frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \quad (c)$$

Το φορτίο των πλάκων υστεροδίων είναι:

$$Q = D_a A = \epsilon_0 E_a A = \frac{\epsilon_0 U A}{\zeta + b \frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \quad (d)$$

οπότε η χωρητικότητα $C = Q/U$ των οπίσθιων δίνεται:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{\zeta + b \frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \quad (e)$$

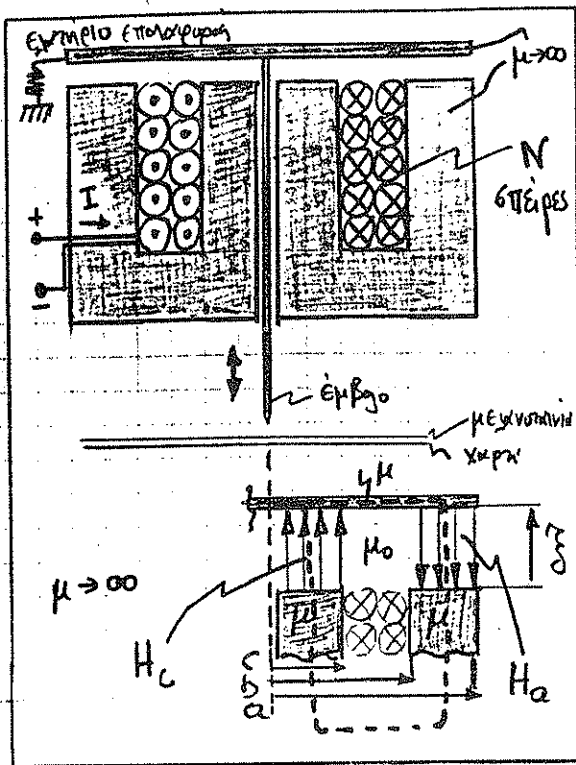
Εφαρμογή της (187) δίνει:

$$W_e = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$f = - \frac{dW_e}{d\zeta} = - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{d\zeta} = - \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0 A}{\left(\zeta + b \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^2} \quad (a)$$

Εξ' ορίσμων, η f είναι θετική όταν δρά κατά την κατεύθυνση αύξησης του ζ . Εδώ η (a) δίνει ότι η f είναι αρνητική, πράγμα αναμενόμενο λόγω ύψους των υστεροδίων προς τα πάνω.

(2) Μαγνητικό έμβολο - οδηγός ακίδων σε εκτυπωτή ακίδων



Το έμβολο είναι ποζιόλιθο και είναι προσαρμοσμένο σε δίσκο από γυύλι τγι υψύη μαγνητική διαπερατότητα. Ο δίσκος ακείει εν τγι μικρό διάκενο από τον οδηγό τω εμβόλου, κατασκευασμένο στο το ίδιο υψύη. Σε ειδική κυλινδρική δίσκη σκαρπύη στο γυύλι τω οδηγού είναι εγκατεστημένο πηνίο N σπείρων το οποίο φέρει ρεύμα I. Η μαγνητική πεδίο εδύεται τρυλά από το υψύη τω δίσκου και τω οδηγού δύναι μ → ∞ : η μαγνητική δύναμη ροή στην γυύη τω δίσκου είναι περίπου

στο διάκενο και μέσα στο γυύη όπου λόγω τω περιβαλλόντων τω περικείμεται μαγνητική ροή (B) το πεδίο H είναι μηδενικό (ή, τμάρητμ, εσπάρητμ σε σχέση με τω γυύη τω στο διάκενο. Εφαρτμ τω νόμου τω Ampere όπως στο σκίτμ (κλειστός δρόμος τω περιγύη τω δυναμικού ρεύμα) δύναι :

$$H_a \int + H_c \int = NI \quad (\alpha)$$

Επειδή όγμ σε μαγνητική γυάρη εδύητμ από το διάκενο στο γυύη και πογί στο πλάκενο (μ → ∞) η ροή στις δίσκω τω H_a και H_c είναι η ίδια, τμάρητμ :

$$\Psi_m = \mu_0 H_a \pi (a^2 - b^2) = \mu_0 H_c \pi c^2 \quad (\beta)$$

Η ροή εδύη συζήτμτμ με κάθε σπείρα τω πηνίου. Επομένως, η συνολική ροή τω συζήτμτμ με το πηνίο είναι NΨ_m, ή, με τρήση τω (α) και (β) :

$$N\psi_m = \frac{\mu_0 N^2 \pi c^2}{\zeta \left(1 + \frac{c^2}{a^2 - b^2}\right)} I \equiv LI \quad (8)$$

οπών L ο συντελεστής αυτεπαγωγής $L \equiv \frac{\psi_m \text{ προπαιγμένη} / I \equiv \psi_m \text{ ολική} / I$
 ("προπαιγμένη" αναγνώριση στο άθροισμα $N\psi_m$). Η μαθηματική έκφραση που
 είναι απόδοκέρμενη στο σύστημα είναι :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (8)$$

Ενώ, η συνένεργεια :

$$W_m' = LI^2 - W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (9)$$

Έφαρξη της (190) μας δίνει τη δύναμη f :

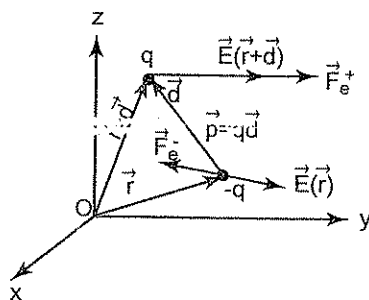
$$f = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{d\zeta} = - \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 N^2 \pi c^2}{\zeta^2 \left(1 + \frac{c^2}{a^2 - b^2}\right)} \quad (10)$$

Η δύναμη τείνει να μειωθεί στο ζ . Άρα είναι εκκλιτική διεξάγεται από τη χώρα
 του I . Το ελάχιστο επιπλοφόρο επιβάρυνση το δίσκο στο θύση ισορροπία να είναι
 το I μηδενίζεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

9. Δυνάμεις στα διηλεκτρικά υλικά

Θεωρούμε ένα δίπολο ροπής \vec{p} , το οποίο βρίσκεται μέσα σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο που δεν είναι, γενικά, ομοιόμορφο (Σχ.1). Έστω $\vec{E}(\vec{r})$ και $\vec{E}(\vec{r} + \vec{d})$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση του αρνητικού και στη θέση του θετικού φορτίου του διπόλου, αντίστοιχα. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτά τα φορτία είναι $\vec{F}_e^- = -q\vec{E}(\vec{r})$ και $\vec{F}_e^+ = q\vec{E}(\vec{r} + \vec{d})$. Η συνισταμένη δύναμη είναι



Σχήμα 1

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^- = q[\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - \vec{E}(\vec{r})] = \\ &= q\left[\vec{E}(\vec{r}) + dx \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial z} - \vec{E}(\vec{r})\right] = \\ &= (q\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1)$$

Στην (1) χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα Taylor για το $\vec{E}(\vec{r} + \vec{d})$, στο οποίο διατηρήθηκαν όροι μέχρι πρώτης τάξης, διότι το \vec{d} του διπόλου είναι πολύ μικρό ($\vec{d} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$). Από την (1) είναι προφανές ότι αν το πεδίο είναι ομοιόμορφο, δηλαδή αν $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E} = \text{σταθερό}$, τότε $\vec{F}_e = 0$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει εύκολα από την αρχή, διότι σ' αυτή την περίπτωση είναι $\vec{F}_e^- = -q\vec{E}$, $\vec{F}_e^+ = q\vec{E}$ και $\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^- = 0$.

Αν υπάρχει κατανομή διπόλων σε κάποιο διηλεκτρικό, η στοιχειώδης ηλεκτρι-

κή δύναμη που ασκείται στο στοιχείο όγκου dV προκύπτει από την (1) και είναι $d\vec{F}_e = (d\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$ ή, με χρήση της (5.2), $d\vec{F}_e = (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} dV$, όπου \vec{P} είναι η πόλωση του διηλεκτρικού. Τότε, η χωρική πυκνότητα $\vec{f}_e = d\vec{F}_e / dV$ της ηλεκτρικής δύναμης είναι

$$\vec{f}_e = (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (2)$$

Αν στο διηλεκτρικό υπάρχουν και ελεύθερα χωρικά φορτία με πυκνότητα ρ , η (2) γενικεύεται στη σχέση

$$\vec{f}_e = \rho \vec{E} + (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (3)$$

Βέβαια σε διηλεκτρικό που περιέχει και ελεύθερα φορτία η χωρική πυκνότητα της ηλεκτρικής δύναμης δίνεται και από τις σχέσεις

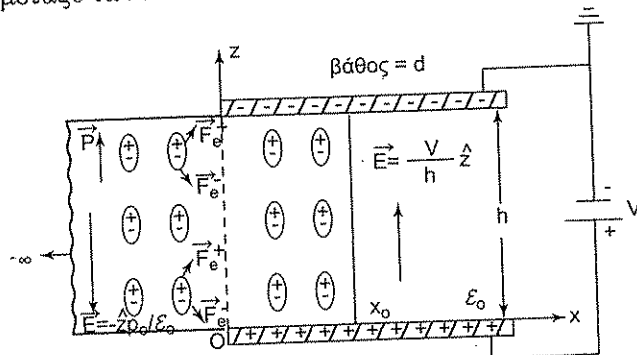
$$\vec{f}_e = (\rho + \rho_p) \vec{E} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} = \rho \vec{E} - (\nabla \cdot \vec{P}) \vec{E}, \quad (4)$$

όπου έγινε χρήση των (6.5). Η (4) διαφέρει από την (3) αλλά αποδεικνύεται ότι και οι δύο, αν ολοκληρωθούν σε όλο τον όγκο του διηλεκτρικού, δίνουν την ίδια συνολική δύναμη που ασκείται σ' αυτό.

9.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Ο πυκνωτής παράλληλων, επίπεδων, αγωγικών πλακών του Σχ.2 συνδέεται με πηγή συνεχούς τάσης V και περιέχει, αρχικά, αέρα σαν διηλεκτρικό. Η απόσταση h μεταξύ των πλακών του είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις τους



Σχήμα 2

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} \vec{E} - \epsilon \vec{E} \cdot \nabla \vec{E} + \vec{D} \cdot \nabla \vec{E}$$

και το
από η
τον πυ
απόστ
να υπο

Λύση
Το πεδ
τα γιν

το πεδ
τα γιν

Κάνει
δυναμ
Η
κόν το
ακριβ
φίσετ
σκοπ
Η απ
Σχ.2
κατα
πρω
πρω

και το βάθος είναι d . Μεταξύ των πλακών του πυκνωτή εισάγεται μία πλάκα από ηλεκτρήτη, επίσης πάχους h και βάθους d , μέχρι τη θέση $x=x_0$. Έξω από τον πυκνωτή, στην κατεύθυνση x , ο ηλεκτρήτης εκτείνεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, θεωρητικά έως $x \rightarrow -\infty$. Αν η πόλωση του είναι σταθερή $\vec{P} = P_0 \hat{z}$, να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται σ' αυτόν.

Λύση:

Το πεδίο μεταξύ των πλακών του πυκνωτή (στον αέρα) είναι ομοιόμορφο, κατά τα γνωστά, και ισούται με

$$\vec{E} = \frac{V}{h} \hat{z} \quad (5)$$

Το πεδίο μέσα στην πλάκα του ηλεκτρήτη, σε μεγάλη απόσταση από τον πυκνωτή, είναι σύμφωνα με το παράδειγμα 6.6.1α επίσης ομοιόμορφο και ίσο με

$$\vec{E} = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \hat{z} \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (6)$$

Κανένα από τα δύο αυτά ομοιόμορφα πεδία δεν συνεισφέρει στη ζητούμενη δύναμη, σύμφωνα με τη (2), διότι οι κλίσεις τους είναι μηδενικές.

Η δύναμη προκύπτει από το ανομοιόμορφο πεδίο κοντά στα άκρα των πλακών του πυκνωτή, το οποίο συνήθως θεωρείται αμελητέο, αλλά εδώ είναι αυτό ακριβώς που θα μας δώσει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Λόγω της ανομοιομορφίας του πεδίου, ασκείται μεγαλύτερη δύναμη στα άκρα των διπόλων που βρίσκονται πιο κοντά σε μία από τις πλάκες του πυκνωτή, απ' ότι στα άλλα άκρα. Η συνολική δύναμη σε κάθε δίπολο είναι $\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^-$, όπως φαίνεται στο Σχ.2, με αποτέλεσμα να προκύπτει τελικά μία συνισταμένη δύναμη προς την κατεύθυνση x . Αυτή τη δύναμη θα υπολογίσουμε. Με μια πρώτη ματιά το πρόβλημα φαίνεται πολύ δύσκολο, διότι δεν είναι γνωστό το πεδίο που την προκαλεί. Όμως, επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο, ισχύει ότι

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad *$$

και επομένως η x -συνιστώσα της χωρικής πυκνότητας της ηλεκτρικής δύναμης είναι, σύμφωνα με τις (2) και (7),

$$f_{ex} = P_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = P_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (P_z E_z) - E_z \frac{\partial P_z}{\partial x} \quad \checkmark \quad (8)$$

Ο τελευταίος όρος στην (8) είναι μηδενικός, διότι $P_z = P_o = \text{σταθερό}$. Η συνολική δύναμη είναι

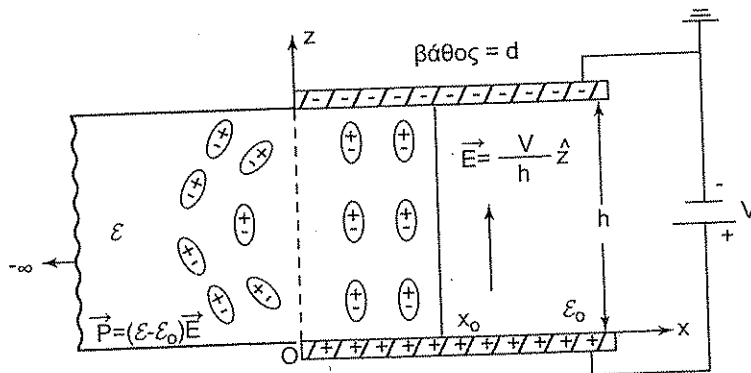
$$F_{ex} = \int_V f_{ex} dV = \int_{x=-\infty}^{x_0} \int_{y=0}^d \int_{z=0}^h \frac{\partial}{\partial x} (P_z E_z) dx dy dz = \int_{y=0}^d \int_{z=0}^h [P_z E_z]_{x=-\infty}^{x_0} dy dz =$$

$$= hd \left[P_o \frac{V}{h} + \frac{P_o^2}{\epsilon_0} \right] = P_o V d + \frac{P_o^2 h d}{\epsilon_0}, \quad \checkmark \quad (9)$$

διότι στις θέσεις $x=x_0$ και $x=-\infty$ οι ολοκληρώσεις ως προς y και z είναι απλοί πολλαπλασιασμοί ως προς d και h , αντίστοιχα, εφόσον τα P_z και E_z εκεί είναι ανεξάρτητα από τα y και z . Στην (9) χρησιμοποιήθηκαν οι (5) και (6). Από την (9) φαίνεται ότι υπάρχει μη μηδενική δύναμη ακόμη και αν αποσυνδεθεί η πηγή τάσης ($V=0$). Η δύναμη αυτή ωθεί τον ηλεκτρήτη μεταξύ των πλακών του πυκνωτή, λόγω του πεδίου που δημιουργούν τα επιφανειακά φορτία των πλακών, τα οποία επάγονται εξαιτίας του ηλεκτρήτη. Η φορά της δύναμης δεν αλλάζει ακόμη κι αν $\vec{P} = -P_o \hat{z}$ (εξαρτάται από το P_o^2). Η προηγούμενη δύναμη αυξάνεται αν το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή και η πόλωση είναι ομόρροπα, όπως στο Σχ.2 [εξ. (9)], και ελαττώνεται αν είναι αντίρροπα. Μάλιστα, στην τελευταία περίπτωση η φορά της αντιστρέφεται και ωθεί τον ηλεκτρήτη έξω από τον πυκνωτή, αν $V > P_o h / \epsilon_0$.

Παράδειγμα 2

Να επαναληφθεί το προηγούμενο παράδειγμα, αν μεταξύ των πλακών του πυκνωτή εισάγεται μία πλάκα από ένα συνηθισμένο διηλεκτρικό υλικό σταθερής επιτρεπτότητας ϵ , αντί της πλάκας του ηλεκτρήτη (Σχ.3).



Σχήμα 3

Λύση:

Το πεδίο πόλωσης έντασις διεύθι στα άξια Η δύν Σχ.2. με τα τα αρ απομ χει τεί διηλει πυκνό

Αντικ

Η συν

Στ από ξάρτι διηλι

Λύση:

Το πεδίο μεταξύ των πλακών του πυκνωτή δίνεται πάλι από την (5). Τώρα η πόλωση στη διηλεκτρική πλάκα δεν είναι σταθερή, αλλά είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, στην οποία οφείλεται και της οποίας έχει τη διεύθυνση και φορά. Έτσι, στην περιοχή του ανομοιομόρφου πεδίου, κοντά στα άκρα των πλακών του πυκνωτή, η πόλωση θα έχει x - και z - συνιστώσες. Η δύναμη που ασκείται σε κάθε δίπολο είναι $\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^-$, όπως και στο Σχ.2. Τα δίπολα τείνουν να προσανατολιστούν προς την κατεύθυνση του \vec{E} , με τα θετικά τους άκρα να έλκονται από τα φορτία της αρνητικής πλάκας και τα αρνητικά τους άκρα από τα φορτία της θετικής πλάκας. Επειδή τα πλέον απομακρυσμένα άκρα τους βρίσκονται σε ελαφρά ασθενέστερο πεδίο, υπάρχει τελικά μία συνισταμένη δύναμη προς την κατεύθυνση x , η οποία ωθεί το διηλεκτρικό προς το εσωτερικό του πυκνωτή. Η x -συνιστώσα της χωρικής πυκνότητας της ηλεκτρικής δύναμης προκύπτει από τη (2) και είναι

$$f_{ex} = P_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + P_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = (\epsilon - \epsilon_0) \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (10)$$

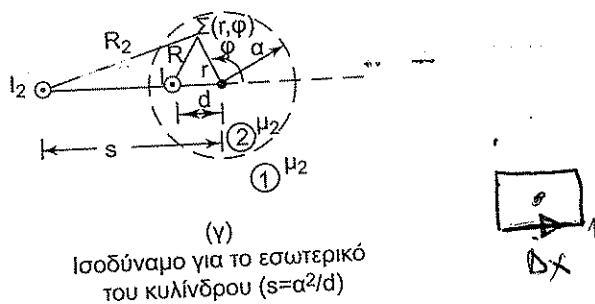
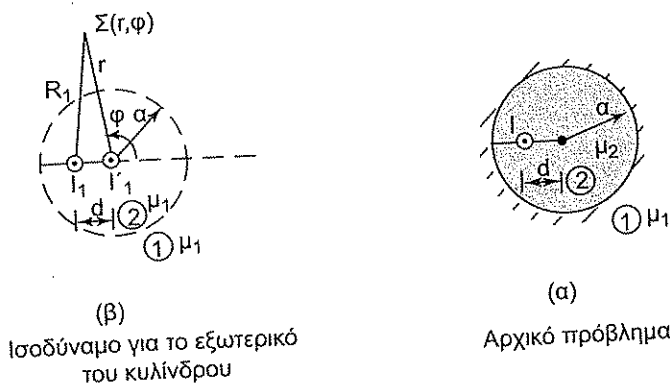
Αντικαθιστώντας στη (10) από την (7) βρίσκουμε ότι

$$f_{ex} = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 + E_z^2) \quad (11)$$

Η συνολική δύναμη είναι

$$\begin{aligned} F_{ex} &= \int_V f_{ex} dV = \int_{x=-\infty}^{x_0} \int_{y=0}^d \int_{z=0}^h \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 + E_z^2) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) h d \left[E_x^2 + E_z^2 \right]_{x=-\infty}^{x_0} = \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) h d \frac{V^2}{h^2} = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{V^2 d}{h} \end{aligned} \quad (12)$$

Στη (12) χρησιμοποιήθηκε η (5) καθώς και το γεγονός ότι σε πολύ μεγάλη απόσταση από τον πυκνωτή ($x \rightarrow -\infty$) είναι $\vec{E} = 0$. Η δύναμη είναι τώρα ανεξάρτητη από την πολικότητα της τάσης (ανάλογη του V^2) και πάντοτε ωθεί το διηλεκτρικό προς το εσωτερικό του πυκνωτή ($\epsilon > \epsilon_0$).



Σχήμα 3

ισοδύναμο πρόβλημα του Σχ.3γ είναι ανάλογο με εκείνο του Σχ.7.7 του Κεφ.11, το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση του παρόντος προβλήματος, όταν $\mu_1 \rightarrow \infty$.

Παρατήρηση

Αν στα προβλήματα των ενοτήτων 9.1-9.3, αντί για έναν απέραντο ευθύγραμμο νηματοειδή αγωγό, έχουμε γενικότερες απέραντες κατανομές ρευμάτων, με ροή παράλληλη στον άξονα z και χωρίς εξάρτηση από το z, το διανυσματικό δυναμικό υπολογίζεται με επαλληλία των δυναμικών όλων των ρευμάτων και των ειδώλων τους, σύμφωνα με τα προηγούμενα.

10. Δυνάμεις στα μαγνητικά υλικά

Θα υπολογίσουμε αρχικά τη μαγνητική δύναμη η οποία εξασκείται σε ένα μαγνητικό δίπολο ροπής \vec{m} τοποθετημένο σε ανομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο \vec{B} . Θεωρούμε το μαγνητικό δίπολο του Σχ.3.1, με σχήμα ορθογωνικού βρόχου. Οι δυνάμεις που εξασκούνται σε κάθε πλευρά του βρόχου είναι

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F}_1 &= -I \Delta x (B_y \hat{z} - B_z \hat{y}), & \Delta \vec{F}_2 &= I \Delta x (B_y \hat{z} - B_z \hat{y}), \\ \Delta \vec{F}_3 &= I \Delta y (-B_x \hat{z} + B_z \hat{x}), & \Delta \vec{F}_4 &= -I \Delta y (-B_x \hat{z} + B_z \hat{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

και η συνισταμένη δύναμη δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}_1 + \Delta \vec{F}_2 + \Delta \vec{F}_3 + \Delta \vec{F}_4 &= I \Delta x \Delta y \left[-\frac{B_y - B_{y_2}}{\Delta y} \hat{z} + \frac{B_z - B_{z_2}}{\Delta y} \hat{y} - \frac{B_x - B_{x_4}}{\Delta x} \hat{z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_z - B_{z_4}}{\Delta x} \hat{x} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Στο όριο καθώς $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, οι όροι μεταξύ των αγκυλών ορίζουν μερικές παραγώγους, ενώ το γινόμενο $I \Delta x \Delta y$ εκφράζει τη μαγνητική διπολική ροπή $\vec{m} = m_z \hat{z} = I \Delta x \Delta y \hat{z}$. Έτσι, η (2) δίνει τη μαγνητική δύναμη \vec{F}_m , η οποία εξασκείται στο μαγνητικό δίπολο του Σχ.3.1 και είναι

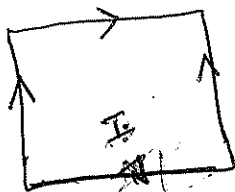
$$\vec{F}_m = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \Delta \vec{F} = m_z \left[\frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{y} - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \hat{z} \right] \quad (3)$$

Εφαρμογή των νόμων Gauss και Ampere για το μαγνητικό πεδίο δίνει τις σχέσεις

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (4)$$

και

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5)$$



$$\frac{I}{S} \hat{x} \times \vec{B} (\Delta x)$$

Η (3) με χρήση των (4) και (5) γράφεται

$$\hat{x} x (\partial B_x + \hat{y} B_y + \hat{z} B_z) - I (\hat{z} B_y - \hat{y} B_z)$$

$$\vec{F}_m = m_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z} \right) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (6)$$

Στην (5) θεωρήσαμε ότι το μαγνητικό πεδίο \vec{B} υπάρχει στο κενό, όπου $\vec{J} = 0$:

Αν έχουμε κατανομή διπόλων σε κάποιο μαγνητικό υλικό, η στοιχειώδης μαγνητική δύναμη, η οποία εξασκείται στο στοιχείο όγκου dV , προκύπτει από την (6) και είναι $d\vec{F}_m = (d\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$ ή, με χρήση της (7.2), $d\vec{F}_m = (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{B} dV$, όπου \vec{M} είναι η μαγνήτιση του υλικού. Στην περίπτωση αυτή η χωρική πυκνότητα της μαγνητικής δύναμης είναι

$$\vec{F}_m = \frac{d\vec{F}_m}{dV} = (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (7)$$

Από τις (6) και (7) είναι προφανές ότι αν το \vec{B} είναι ομοιόμορφο η μαγνητική δύναμη είναι μηδενική. Από την (7) και τις (8.18) και (8.19) προκύπτει ότι στα διαμαγνητικά υλικά το \vec{M} είναι αντίρροπο του \vec{B} , ενώ σ' όλα τα υπόλοιπα υλικά είναι ομόρροπο του \vec{B} . Γι' αυτό το λόγο η μαγνητική δύναμη στα πρώτα έχει φορά τέτοια ώστε να τα απωθεί από την περιοχή του ισχυρού μαγνητικού πεδίου, ενώ στα δεύτερα η φορά της είναι τέτοια, ώστε να τα έλκει προς την περιοχή του ισχυρού μαγνητικού πεδίου.

Οι εκφράσεις (6) και (7) προκύπτουν αμέσως από τις (9.1) και (9.2) του Κεφ.9, αν θεωρήσουμε ότι το μαγνητικό δίπολο σχηματίζεται από δύο αντίθετα σημειακά μαγνητικά φορτία σε μικρή απόσταση μεταξύ τους, όπως στο Σχ.8.16, και χρησιμοποιήσουμε τις αναλογίες $\vec{p} \leftrightarrow \mu_0 \vec{m}$, $\vec{P} \leftrightarrow \mu_0 \vec{M}$ και $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$.

Αν υπάρχει και ρή ρευμάτων ελεύθερων φορτίων με πυκνότητα \vec{J} , τα δεξιά μέλη των τριών εξισώσεων (5) είναι $\mu_0 J_x$, $\mu_0 J_y$ και $\mu_0 J_z$, αντίστοιχα, και η (6) γενικεύεται στην

$$\vec{F}_m = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \mu_0 \vec{m} \times \vec{J} \quad (8)$$

Επίσης, η (7) γενικεύεται στην

$$\vec{F}_m = (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (9)$$

Η συνολική δύναμη είναι το ολοκλήρωμα της (9) σ' όλο τον όγκο V του υλι-

κού. Στις (7) και (9) \vec{B} είναι η μαγνητική επαγωγή που προέρχεται απ' όλες τις πηγές εκτός του υλικού. Το υλικό θεωρούμε ότι περιβάλλεται από το κενό, δηλαδή για το αντίστοιχο \vec{H} ισχύει ότι $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$.

Παράδειγμα 1

Μία πλάκα από μόνιμο μαγνήτη πάχους h και βάθους d εισάγεται, μέχρι τη θέση $x=x_0$, στο διάκενο αέρα ενός μαγνητικού κυκλώματος με ομοιόμορφο πεδίο $\vec{H} = H_0 \hat{z}$ (Σχ.1). Το h υποτίθεται πολύ μικρότερο από τις υπόλοιπες διαστάσεις. Έξω από το διάκενο, στην κατεύθυνση $-x$, ο μαγνήτης εκτείνεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, θεωρητικά έως $x \rightarrow -\infty$. Αν η μαγνήτιση του είναι σταθερή, $\vec{M} = M_0 \hat{z}$, να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται σ' αυτόν.

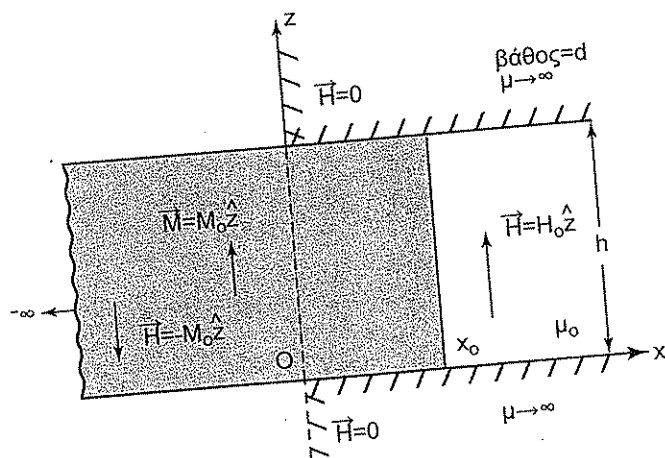
Λύση:

Η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού του μαγνητικού κυκλώματος είναι πολύ μεγάλη και θεωρείται πρακτικά άπειρη. Επομένως, η ένταση του μαγνητικού πεδίου σ' αυτό θεωρείται μηδενική.

Το πεδίο μέσα στην πλάκα του μόνιμου μαγνήτη, σε μεγάλη απόσταση από το διάκενο, είναι σύμφωνα με το παράδειγμα 8.2.1α

$$\vec{H} = -M_0 \hat{z} \quad (x \rightarrow -\infty), \tag{10}$$

δηλαδή επίσης ομοιόμορφο. Τα δύο ομοιόμορφα πεδία δεν συνεισφέρουν στη ζητούμενη δύναμη, σύμφωνα με την (7), διότι οι κλίσεις τους είναι μηδενικές. Η δύναμη προκύπτει από το ανομοιόμορφο πεδίο κοντά στα άκρα του διακέ-



Σχήμα 1

νου, σε αναλογία με την ερμηνεία που δόθηκε στο παράδειγμα 9.1.1 του Κεφ.9 για την ηλεκτρική δύναμη που προκαλείται από το ομοιόμορφο πεδίο στα άκρα των πλακών ενός πυκνωτή. Υποτίθεται ότι εδώ χρησιμοποιούμε το μοντέλο των μαγνητικών φορτίων. Η δύναμη έχει την κατεύθυνση x . Από την (7) βρίσκουμε ότι

$$f_{mx} = M_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (11)$$

Επειδή είναι $\vec{J} = 0$, ισχύει ότι

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (12)$$

Όμως, είναι $B_x = \mu_0 (H_x + M_x) = \mu_0 H_x$, διότι $M_x = 0$. Επομένως προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας από τη (13) στην (11) έχουμε ότι

$$f_{mx} = \mu_0 M_z \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} (M_z H_z) - \mu_0 H_z \frac{\partial M_z}{\partial x}, \quad (14)$$

διότι $\partial M_z / \partial x = \partial M_o / \partial x = 0$.

Η συνολική δύναμη είναι

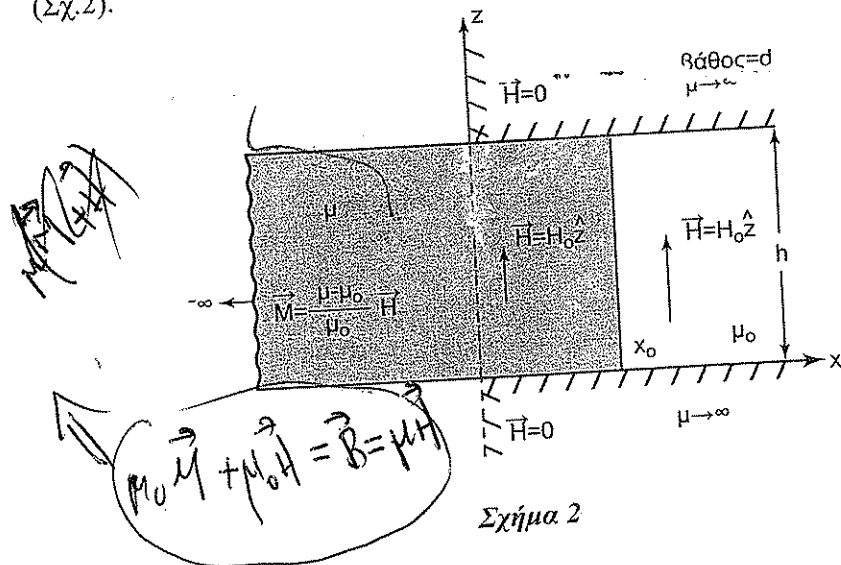
$$\begin{aligned} F_{mx} &= \int_V f_{mx} dV = \int_{x=-\infty}^{x_0} \int_{y=0}^d \int_{z=0}^h \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} (M_z H_z) dx dy dz = \mu_0 [M_z H_z]_{x=-\infty}^{x_0} h d = \\ &= \mu_0 h d (M_o H_o + M_o^2) \end{aligned} \quad (15)$$

Στη (15) χρησιμοποιήθηκε η (10), καθώς και η τιμή $\vec{H} = H_o \hat{z}$ της έντασης στο διάκενο του αέρα. Ακόμη κι αν $H_o = 0$, είναι $F_{mx} \neq 0$. Η δύναμη αυτή ωθεί τον μόνιμο μαγνήτη στο εσωτερικό του διακένου. Επειδή εξαρτάται από το M_o^2 , η φορά της δεν αλλάζει ακόμη κι αν είναι $\vec{M} = -M_o \hat{z}$. Η δύναμη μεγα-

λώνει αν το μαγνητικό πεδίο του διακένου είναι ομόρροπο με τη μαγνήτιση, όπως στο Σχ.1 [εξ. (15)], και μικραίνει αν είναι αντίρροπο. Στην τελευταία περίπτωση η φορά της αντιστρέφεται αν είναι $H_o > M_o$, και ωθεί τον μαγνήτη έξω απ' το διάκενο.

Παράδειγμα 2

Να επαναληφθεί το προηγούμενο παράδειγμα, αν στο διάκενο αέρα εισαχθεί μία πλάκα από συνηθισμένο μαγνητικό υλικό, με σταθερή διαπερατότητα μ (Σχ.2).



Σχήμα 2

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή η μαγνήτιση του υλικού δεν είναι σταθερή, αλλά είναι ανάλογη της έντασης του μαγνητικού πεδίου, με την οποία έχει την ίδια διεύθυνση και φορά. Επομένως, κοντά στο άκρο του διακένου, όπου το πεδίο είναι ανομοιόμορφο, η μαγνήτιση έχει x - και z -συνιστώσες. Η εικόνα είναι ανάλογη μ' αυτή του Σχ.9.3 στο παράδειγμα 9.2 του Κεφ.9, εφόσον χρησιμοποιηθεί το μοντέλο των μαγνητικών φορτίων. Ισχύουν αντίστοιχες παρατηρήσεις όπως και σ' εκείνο το παράδειγμα. Έτσι, η μαγνητική δύναμη έχει την κατεύθυνση x και ωθεί το μαγνητικό υλικό στο εσωτερικό του διακένου. Από την (7) προκύπτει ότι

$$f_{mx} = M_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + M_z \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + \mu_0 M_z \frac{\partial H_x}{\partial z} = \mu_0 \left[M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right]$$

$$= \mu_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \frac{\partial}{\partial x} (H_x^2 + H_z^2) \quad (16)$$

ΔΙΑΚΗΡΥΞΕΙΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΣΕ ΑΠΛΟΤΕΡΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ

ω $\rho(\vec{r}) = \rho_u(x, y)$ (ανεξ. του z)

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\text{στο } (x, y)} dx' dy' \rho_u(x', y') \ln \frac{R_{T_0}'}{R_T'}$$

δηλαδή $d\lambda'(x', y') = \rho(x', y') dx' dy'$

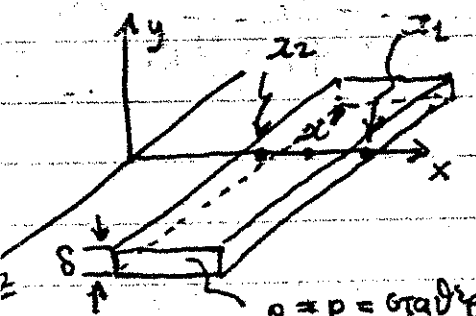
δ) όταν $\rho(\vec{r}) = \rho_u(z)$ (ανεξ. των x & y)

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 + \frac{1}{2\epsilon_0} \int_{\text{στο } z} dz' \rho_u(z') (|z_0 - z'| - |z - z'|)$$

δηλαδή $d\sigma_u(z') = \rho_u(z') dz'$

Το ϕ_0 μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να μηδενίζεται με την πρόθεση του ομοιογενούς πεδίου π.π. γύρω από το R_{T_0}' ή $|z_0 - z'|$ αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :



$\rho_u = \rho_0 = \text{σταθερό ποσό στη λεπτή γάλαξη}$
($\delta \ll x_1 - x_2$)

Αναγωγή: $\rho_u = \rho_0 \rightarrow \sigma_u = \rho_0 \delta$
 $\sigma_u \rightarrow d\lambda' = \sigma_u dx' = \rho_0 \delta dx'$

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\text{στο } x (x_2 \rightarrow x_1)} d\lambda' \ln \left(\frac{R_{T_0}'}{R_T'} \right)$$

Επιλέγουμε: $\phi_0 + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\text{στο } x (x_2 \rightarrow x_1)} d\lambda' \ln R_{T_0}' = 0$

Άρα: $\phi = - \frac{\rho_0 \delta}{2\pi\epsilon_0} \int_{x_2}^{x_1} dx' \ln R_T' = - \frac{\rho_0 \delta}{2\pi\epsilon_0} \int_{x_2}^{x_1} dx' \sqrt{(x-x')^2 + y^2}$

Άρα: $\phi(x, y) = - \frac{\rho_0 \delta}{2\pi\epsilon_0} \int_{x-x_2}^{x-x_1} dw' \ln \sqrt{w'^2 + y^2}$ μετά από αλλαγή μεταβλητών $x-x' \rightarrow w'$

ΣΗΜΑΚΑ ΦΟΡΤΙΑ ΣΤΟ ΚΑΝΟ Η ΣΕ ΜΕΣΑ ΜΕ ϵ, μ : σταθερά (δηλ. όταν $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ μόνο $\vec{B} = \mu \vec{H}$)

Κενό: $\nabla^2 \phi = - \frac{\rho_{\text{ολ}}}{\epsilon_0}$, $\rho_{\text{ολ}}$ (σημ. φορτίων στο κενό) = $\rho_u + \rho_p$, $\rho_p = 0$ (κενό)

και ρ_u (σημ. φορτίων) = $q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q)$, \vec{r} : θέση μέτρηση του ϕ , \vec{r}_q : θέση σημ. φορτίου

ΛΥΣΗ ΤΗΣ $\nabla^2 \phi = - \frac{q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q)$: $\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_q|} \Big|_{\text{για } t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q|}{c}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

Σημ: $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q) = \delta(x - x_q) \delta(y - y_q) \delta(z - z_q)$ σε καρτεσιανές συντετ.

εξέδο με ε, μ (ε, μ: σταθερές):

$$\nabla^2 \phi = - \frac{\rho_u(\text{ολκ. φορτίου})}{\epsilon} = - \frac{q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_q)}{\epsilon}$$

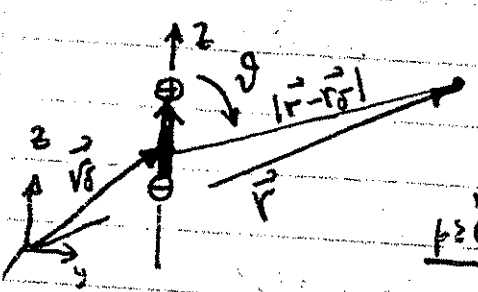
ΥΣΗ: $\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}_q|} \Big|_{\text{για } t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q|}{c_\mu}}$, $c_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΙΠΟΛΑ ΣΤΟ ΚΕΝΟ ή ΣΕ ΜΕΣΑ ΜΕ ε, μ (δυνα. μόνο όταν $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$)

εξέδο: $\phi(\vec{r}, t) =$ (μετά από Taylor κ' επαγωγή \oplus \ominus φορτίων διατόμων)

$$= \left\{ \frac{P_z}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_d|^2} + \frac{\dot{P}_z}{4\pi\epsilon_0 c|\vec{r} - \vec{r}_d|} \right\} \cos\theta \Big|_{\text{για } t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_d|}{c}}$$

$\vec{r}_d =$ θέση κέντρου διατόμων



$P_z \equiv q\delta$, $\dot{P}_z \equiv \frac{dq}{dt}$

$P_z = d|q|$: διαγ. ροπή (διάνημα $\vec{p} = \vec{z}d|q|$)

εξέδο με ε, μ σταθερά: $\phi(\vec{r}, t) = \left\{ \frac{P_z}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}_d|^2} + \frac{\dot{P}_z}{4\pi\epsilon c_\mu|\vec{r} - \vec{r}_d|} \right\} \cos\theta \Big|_{\text{για } t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_d|}{c_\mu}}$

$c_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝ. ΔΥΝ ΓΙΑ ΔΙΠΟΛΟ (ΑΡΑ κ' ΜΑΓΝ. ΠΕΔΟΥ)

επαγωγή γενικά για μέσο με ε, μ (για το κενό $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, $\mu \rightarrow \mu_0$, $c_\mu \rightarrow c$):

Ψηφισμένη: $\nabla^2 \phi = - \frac{q \delta(\vec{r} - \vec{r}_q)}{\epsilon}$

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_u$, όπου \vec{J}_u (για διατομή) = $id \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_d)$ με $i \equiv \frac{dq}{dt}$ και d το μήκος του.

Για η θέση σημ. φορτίου για το φ αντιστοιχείση σημ. για το A_z διατόμων στην αντιστοιχίαση $\epsilon \rightarrow \frac{1}{\mu}$, $\phi \rightarrow A_z$, $q \rightarrow id = \dot{q}\delta = \dot{P}_z$ (από πριν)

εξέδο: $A_z(\vec{r}, t) = \frac{\mu \dot{P}_z}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_d|} \Big|_{\text{για } t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_d|}{c_\mu}}$

Η Η-Μ ΠΕΔΙΑ ΓΙΑ ΔΙΠΟΛΟ

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial A_z}{\partial t} \vec{l}_z$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\vec{l}_z A_z)$$

Τελικά:
$$\vec{E} = \left\{ \vec{l}_r \left[\frac{P_z}{4\pi\epsilon |\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{\dot{P}_z}{4\pi\epsilon c_\mu |\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right] \cos\theta + \vec{l}_\theta \left[\frac{P_z}{4\pi\epsilon |\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{\dot{P}_z}{4\pi\epsilon c_\mu |\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \frac{\ddot{P}_z}{4\pi\epsilon c_\mu^2 |\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \sin\theta \right\}_{\text{για } t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c_\mu}}$$

$$\vec{H} = \left\{ \vec{l}_\phi \left[\frac{\dot{P}_z}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \frac{\ddot{P}_z}{4\pi c_\mu |\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \sin\theta \right\}_{\text{για } t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c_\mu}}$$

στο κενό $(\epsilon, \mu) c_\mu \rightarrow (\epsilon_0, \mu_0) c$ και $\ddot{P}_z = d^2Q/dt^2$

Μακρινό πεδίο:
$$\vec{E}_\infty = \vec{l}_\theta \frac{\ddot{P}_z \sin\theta}{4\pi\epsilon c_\mu^2 r} \Big|_{\text{για } t - \frac{r}{c_\mu}}$$

$$\vec{H}_\infty = \vec{l}_\phi \frac{\ddot{P}_z \sin\theta}{4\pi c_\mu r} \Big|_{\text{για } t - \frac{r}{c_\mu}}$$

όπου r η απόσταση από το κέντρο της σφαίρας στο βρέγμα το δίπλου.

Διάνυσμα Poynting μακρινό πεδίου.

$$\vec{N}_\infty = \vec{E}_\infty \times \vec{H}_\infty = \vec{l}_r \left(\frac{\ddot{P}_z \sin\theta}{4\pi c_\mu r} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Συνολική εκπεμπόμενη ισχύς από ηλ. δίπλου

$$P = \oint \vec{N}_\infty \cdot d\vec{S}' = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{\ddot{P}_z}{4\pi c_\mu} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3\theta' d\theta' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\ddot{P}_z}{c_\mu} \right)^2$$

για και $d\vec{S}' = \vec{l}_r 2\pi r'^2 \sin\theta' d\theta'$ στην περίπτωση μας (σφαιρική συμμετρία).

Θεωρούμε που δεν είναι του ηλεκτρονίου του διπόλου φορτία είναι \vec{E}_e

$$\vec{E}_e = \vec{E}_e^+ + \vec{E}_e^- = q \left[\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) + \vec{E}(\vec{r}) + dx \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial z} \right]$$

$$= q \left[\vec{E}(\vec{r}) + dx \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial z} \right]$$

$$= (q\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r})$$

Στην (1) χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα Taylor για το \vec{E} διατηρήθηκαν όροι μέχρι πρώτης τάξης, διότι το \vec{d} του κρού $(\vec{d} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz)$. Από την (1) είναι προφανές ότι ομοιόμορφο, δηλαδή αν $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E} = \text{σταθερό}$, τότε $\vec{E}_e = 0$. Το προκύπτει εύκολα από την αρχή, διότι σ' αυτή την περίπτωση $\vec{E}^+ = q\vec{E}$ και $\vec{E}_e = \vec{E}_e^+ + \vec{E}_e^- = 0$. Αν υπάρχει κατανομή διπόλων σε κάποιο διηλεκτρικό, η στοιχειώδ.

ΕΒΔΟΜΑΔΑ 13-18/11/2002

Ολοκληρωμένα παραληλίας συγκριτικά βέ. στατικά προβλήματα

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_{0\lambda}}{\epsilon_0} \rightarrow \phi = \phi_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_{0\lambda} dV' \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R'_0} \right)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_u}{\epsilon} \rightarrow \phi = \phi_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \rho_u dV' \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R'_0} \right) \text{ όταν } \mathbb{Z}(\epsilon, \mu)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_{0\lambda} \rightarrow \vec{A} = \vec{A}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}_{0\lambda} dV' \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R'_0} \right) \quad R' = |\vec{r} - \vec{r}'|, R'_0 = |\vec{r} - \vec{r}'_0|$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}_u \rightarrow \vec{A} = \vec{A}_0 + \frac{\mu}{4\pi} \int \vec{j}_u dV' \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R'_0} \right) \text{ όταν } \mathbb{Z}(\epsilon, \mu)$$

Ιδιόμορφες καταστάσεις φορτίων ή ρημάτων

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\lambda_u \delta^{(2)}(\vec{r}_T - \vec{r}_{T_0})}{\epsilon_0} \rightarrow \phi = \phi_0 + \frac{\lambda_u}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_{T0}}{R_T}\right) \quad (\lambda_u \text{ στο κενό})$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\lambda_u \delta^{(2)}(\vec{r}_T - \vec{r}_{T_0})}{\epsilon} \rightarrow \phi = \phi_0 + \frac{\lambda_u}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_{T0}}{R_T}\right) \quad (\lambda_u \text{ σε υλικό με } \epsilon \text{ εάν } \mathbb{Z}(\epsilon, \mu))$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q_u \delta(z - z_0)}{\epsilon_0} \rightarrow \phi = \phi_0 + \frac{q_u}{2\epsilon_0} (|z_0 - z_0| - |z - z_0|) \quad (q_u \text{ στο κενό})$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q_u \delta(z - z_0)}{\epsilon} \rightarrow \phi = \phi_0 + \frac{q_u}{2\epsilon} (|z_0 - z_0| - |z - z_0|) \quad (q_u \text{ σε υλικό με } \epsilon \text{ εάν } \mathbb{Z}(\epsilon, \mu))$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 K_0 \delta(z - z_k) \rightarrow A_y = A_{y0} + \frac{\mu_0 K_0}{2} (|z_0 - z_k| - |z - z_k|) \quad (K \text{ στο κενό})$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu K_0 \delta(z - z_k) \rightarrow A_y = A_{y0} + \frac{\mu K_0}{2} (|z_0 - z_k| - |z - z_k|) \quad (K \text{ σε υλικό με } \mu \text{ εάν } \mathbb{Z}(\epsilon, \mu))$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 i \delta^{(2)}(\vec{r}_T - \vec{r}_{Ti}) \rightarrow A_z = A_{z0} + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{R_{Ti0}}{R_{Ti}}\right) \quad (i \text{ στο κενό})$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu i \delta^{(2)}(\vec{r}_T - \vec{r}_{Ti}) \rightarrow A_z = A_{z0} + \frac{\mu i}{2\pi} \ln\left(\frac{R_{Ti0}}{R_{Ti}}\right) \quad (i \text{ σε υλικό με } \mu \text{ εάν } \mathbb{Z}(\epsilon, \mu))$$

$$\delta^{(2)}(\vec{r}_T - \vec{r}_{Ti}) \equiv \delta(|\vec{r}_T - \vec{r}_{Ti}|) / (2\pi r_T)$$

$z_{0,k}$ ή θέση των \perp στα άξονα z επιπέδα που φέρει το q_u ή το K_u
 $r_{T,λi}$ ή απόσταση των ρημάτων \parallel στα άξονα z από τον άξονα z (η ρημνή φέρει το λ_u ή το $\rho_{u\lambda}$ ή i)

Lorentz

Andrew Zangwill

$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (επιλογή μας) τότε:

"Modern
Classical
Synthesis"

$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{0L}$ και $\square^2 \phi = -\frac{\rho_{0L}}{\epsilon_0}$

Για περιπτώσεις ειδικές που $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ με ϵ, μ : σταθερές
 συνθήκη Lorentz δίνει:

$\square^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_u$ και $\square^2 \phi = -\frac{\rho_u}{\epsilon}$ όπου τάρα:

$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c_\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $c_\mu^2 \equiv \frac{1}{\epsilon \mu}$ και ∇^2 όπως και πριν.

Συνθήκη Coulomb

Αν $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (πάλι επιλογή μας) τότε:

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{0L} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ και $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_{0L}}{\epsilon_0}$ (επίσης: $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$)

σημ: όταν έχουμε στατικά προβλήματα $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ τότε: $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{0L}$
 $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_{0L}}{\epsilon_0}$
 όπου τάρα φυσικά $\vec{J}_{0L} = \vec{J}_u + \vec{J}_M$ μιά και $\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = 0$

Με τη συνθήκη Coulomb έχουμε φυσικά επίσης ότι $\nabla \cdot (-\mu_0 \vec{J}_{0L} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$
 δηλαδή η απείριση του φερών μέρος της εξίσωσης για το \vec{A} είναι μηδενική.

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ - ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ

$\Sigma: \nabla \times \vec{E} \approx 0$ (δηλ. $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0$)

$\Sigma: \nabla \times \vec{H} \approx \vec{J}_u$ (δηλ. $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0$)

Η προσέγγιση αυτή ισχύει για συστήματα δικτύωσης L και χρόνου μέτρησης του L, για τα οποία $\frac{L}{T} \ll c_\mu$ με c_μ την ταχύτητα διάδοσης των φαινομένων στα συστήματα αυτά.

ΗΛ. ΔΥΝΑΜΙΚΟ Φ ΣΤΗΜ. ΦΟΡΤΙΟΥ ΜΕ ΣΥΝΘΗΚΗ LORENTZ

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q(t - |\vec{r} - \vec{r}_q|/c)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_q|}, \quad \vec{r}_q : \text{στιγμ. θέση φορτίου}$$

$$c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$$

Όταν το σημ. φορτίο (αδρανικό φυσικά) φρίσκει και έτσι κινείται με $v < c$ στο οποίο ισχύουν οι προσεγγίσεις $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ με $\epsilon, \mu = \text{σταθερές}$ τότε, πάλι με συνθήκη Lorentz έχουμε:

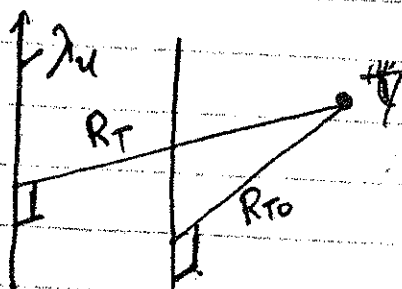
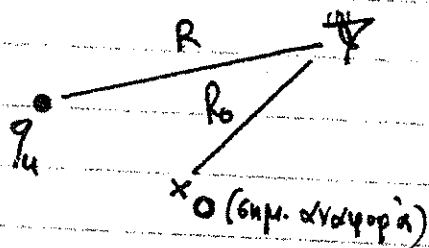
$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q(t - |\vec{r} - \vec{r}_q|/c_\mu)}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_q|} \quad \text{με } c_\mu \equiv 1/\sqrt{\epsilon\mu}$$

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΥΞΕΙΣ ΣΕ ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (Η/Σ)

q_μ : $\phi = \phi_0 + \frac{q_\mu}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)$, $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_q|$, $R_0 \equiv |\vec{r}_0 - \vec{r}_q|$
 $\phi_0 \equiv \text{δυν. αναφορά}$

λ_μ : $\phi = \phi_0 + \frac{\lambda_\mu}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{R_{T0}}{R_T} \right)$, $R_T \equiv |\vec{r} - \vec{r}_T|$, $R_{T0} \equiv |\vec{r}_{T0} - \vec{r}_T|$

σ_μ : $\phi = \phi_0 + \frac{\sigma_\mu}{2\epsilon_0} (\bar{z}_0 - \bar{z})$, $\bar{z} \equiv |z - z_0|$, $\bar{z}_0 \equiv |\bar{z}_0 - z_0|$



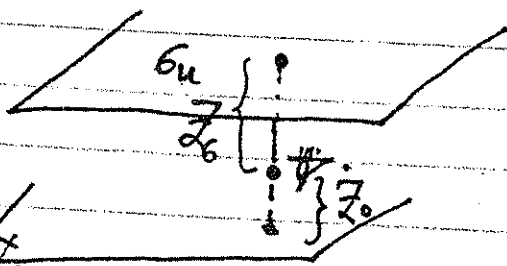
* αξονική αναφορά

Για Δικυβερμίες ποσότητες:

$dq_\mu : d\phi = \frac{dq_\mu}{4\pi\epsilon_0 R}$

$d\lambda_\mu : d\phi = -\frac{d\lambda_\mu}{2\pi\epsilon_0} \ln R_T$

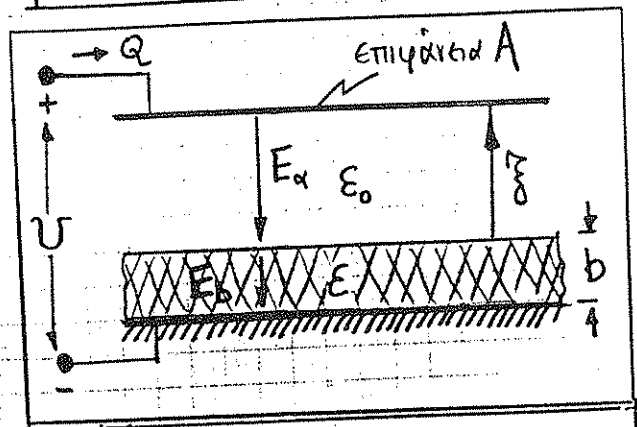
$d\sigma_\mu : d\phi = -\frac{d\sigma_\mu}{2\epsilon_0} \bar{z}$



επίπεδο αναφοράς

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΟ (ΜΑΓΝΗΤΟ) ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1) Δύναμη σε στιγμίο πυκνωτή



$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{e} = \zeta E_{\alpha} + b E_{\beta} \quad (a)$$

Ο νόμος του Gauss για την επιφάνεια της διακεκομμένης μεταλλικής δίνει:

$$\epsilon_0 E_{\alpha} = \epsilon E_{\beta} \quad (b)$$

οπότε ο συνδυασμός (α) και (β) δίνει σχέση:

$$E_{\alpha} = \frac{U}{\zeta + b \frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \quad (c)$$

Το φορτίο των πλάκων ηλεκρωτών είναι:

$$Q = D_{\alpha} A = \epsilon_0 E_{\alpha} A = \frac{\epsilon_0 U A}{\zeta + b \frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \quad (d)$$

οπότε η χωρητικότητα $C = Q/U$ των συνθηκών δίνεται:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{\zeta + b \frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \quad (e)$$

Εφαρμογή της (187) δίνει:

$$W_e = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$f = - \frac{dW_e}{d\zeta} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{d\zeta} = - \frac{1}{2} \frac{U^2 \epsilon_0 A}{\left(\zeta + b \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^2} \quad (στ)$$

Εξ' ορισμού, η f είναι θετική όταν δράει κατά την κατεύθυνση αύξησης του ζ. Εδώ η (στ) δίνει ότι η f είναι αρνητική, πράγμα αναμενόμενο λόγω έλξης των ηλεκτρικών πλάκων τους.

Ζητείται η δύναμη που ασκείται στο ελάστω ηλεκτρόδιο (το κάτω είναι σταθερό) όταν εφαρμόσθει τάση U. Το διακεκομμένο μαζί μεν ηλεκτροδίων αποσπάζεται από το κάτω ηλεκτρόδιο σε ύψος ζ και το γυρνά με διακεκομμένη εσοχή ε. Έχουμε:

(a) του γυρνά (συνέχεια των εφαρμογών ομοιομορφίας)

κή δύναμη που ασκείται στο στοιχείο όγκου dV προκύπτει από την (1) και είναι $d\vec{F}_e = (d\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$ ή, με χρήση της (5.2), $d\vec{F}_e = (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} dV$, όπου \vec{P} είναι η πόλωση του διηλεκτρικού. Τότε, η χωρική πυκνότητα $\vec{f}_e = d\vec{F}_e / dV$ της ηλεκτρικής δύναμης είναι

$$\vec{f}_e = (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (2)$$

Αν στο διηλεκτρικό υπάρχουν και ελεύθερα χωρικά φορτία με πυκνότητα ρ , η (2) γενικεύεται στη σχέση

$$\vec{f}_e = \rho \vec{E} + (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (3)$$

Βέβαια στο διηλεκτρικό που περιέχει και ελεύθερα φορτία η χωρική πυκνότητα της ηλεκτρικής δύναμης δίνεται και από τις σχέσεις

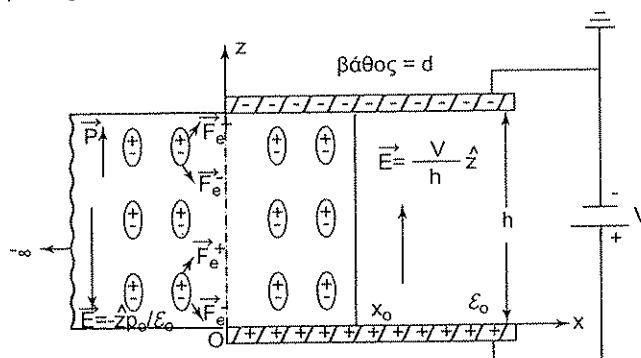
$$\vec{f}_e = (\rho + \rho_p) \vec{E} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} = \rho \vec{E} - (\nabla \cdot \vec{P}) \vec{E}, \quad (4)$$

όπου έγινε χρήση των (6.5). Η (4) διαφέρει από την (3) αλλά αποδεικνύεται ότι και οι δύο, αν ολοκληρωθούν σε όλο τον όγκο του διηλεκτρικού, δίνουν την ίδια συνολική δύναμη που ασκείται σ' αυτό.

9.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Ο πυκνωτής παράλληλων, επίπεδων, αγωγικών πλακών του Σχ.2 συνδέεται με πηγή συνεχούς τάσης V και περιέχει, αρχικά, αέρα σαν διηλεκτρικό. Η απόσταση h μεταξύ των πλακών του είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις τους



Σχήμα 2

και το βάθος είναι d . Μεταξύ των πλακών του πυκνωτή εισάγεται μία πλάκα από ηλεκτρίτη, επίσης πάχους h και βάθους d , μέχρι τη θέση $x=x_0$. Έξω από τον πυκνωτή, στην κατεύθυνση x , ο ηλεκτρίτης εκτείνεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, θεωρητικά έως $x \rightarrow -\infty$. Αν η πόλωση του είναι σταθερή $\vec{P} = P_0 \hat{z}$, να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται σ' αυτόν.

Λύση:

Το πεδίο μεταξύ των πλακών του πυκνωτή (στον αέρα) είναι ομοιόμορφο, κατά τα γνωστά, και ισούται με

$$\vec{E} = \frac{V}{h} \hat{z} \quad (5)$$

Το πεδίο μέσα στην πλάκα του ηλεκτρίτη, σε μεγάλη απόσταση από τον πυκνωτή, είναι σύμφωνα με το παράδειγμα 6.6: Ισέπισης ομοιόμορφο και ίσο με

$$\vec{E} = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \hat{z} \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (6)$$

Κανένα από τα δύο αυτά ομοιόμορφα πεδία δεν συνεισφέρει στη ζητούμενη δύναμη, σύμφωνα με τη (2), διότι οι κλίσεις τους είναι μηδενικές.

Η δύναμη προκύπτει από το ανομοιόμορφο πεδίο κοντά στα άκρα των πλακών του πυκνωτή, το οποίο συνήθως θεωρείται αμελητέο, αλλά εδώ είναι αυτό ακριβώς που θα μας δώσει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Λόγω της ανομοιομορφίας του πεδίου, ασκείται μεγαλύτερη δύναμη στα άκρα των διπόλων που βρίσκονται πιο κοντά σε μία από τις πλάκες του πυκνωτή, απ' ότι στα άλλα άκρα. Η συνολική δύναμη σε κάθε δίπολο είναι $\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^-$, όπως φαίνεται στο Σχ.2, με αποτέλεσμα να προκύπτει τελικά μία συνισταμένη δύναμη προς την κατεύθυνση x . Αυτή τη δύναμη θα υπολογίσουμε. Με μια πρώτη ματιά το πρόβλημα φαίνεται πολύ δύσκολο, διότι δεν είναι γνωστό το πεδίο που την προκαλεί. Όμως, επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο, ισχύει ότι

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (7)$$

και επομένως η x -συνιστώσα της χωρικής πυκνότητας της ηλεκτρικής δύναμης είναι, σύμφωνα με τις (2) και (7),

$$f_{ex} = P_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = P_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (P_z E_z) - E_z \frac{\partial P_z}{\partial x} \quad (8)$$

Ο τελευταίος όρος στην (8) είναι μηδενικός, διότι $P_z = P_o = \text{σταθερό}$. Η συνολική δύναμη είναι

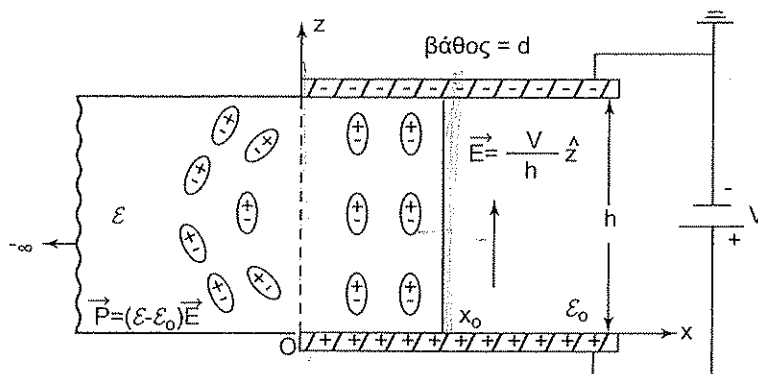
$$F_{ex} = \int_V f_{ex} dV = \int_{x=-\infty}^{x_o} \int_{y=0}^d \int_{z=0}^h \frac{\partial}{\partial x} (P_z E_z) dx dy dz = \int_{y=0}^d \int_{z=0}^h [P_z E_z]_{x=-\infty}^{x_o} dy dz =$$

$$= hd \left[P_o \frac{V}{h} + \frac{P_o^2}{\epsilon_o} \right] = P_o V d + \frac{P_o^2 h d}{\epsilon_o} \quad (9)$$

διότι στις θέσεις $x=x_o$ και $x=-\infty$ οι ολοκληρώσεις ως προς y και z είναι απλοί πολλαπλασιασμοί ως προς d και h , αντίστοιχα, εφόσον τα P_z και E_z εκεί είναι ανεξάρτητα από τα y και z . Στην (9) χρησιμοποιήθηκαν οι (5) και (6). Από την (9) φαίνεται ότι υπάρχει μη μηδενική δύναμη ακόμη και αν αποσυνδεθεί η πηγή τάσης ($V=0$). Η δύναμη αυτή ωθεί τον ηλεκτρήτη μεταξύ των πλακών του πυκνωτή, λόγω του πεδίου που δημιουργούν τα επιφανειακά φορτία των πλακών, τα οποία επάγονται εξαιτίας του ηλεκτρήτη. Η φορά της δύναμης δεν αλλάζει ακόμη κι αν $\vec{P} = -P_o \hat{z}$ (εξαρτάται από το P_o^2). Η προηγούμενη δύναμη αυξάνεται αν το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή και η πόλωση είναι ομόρροπα, όπως στο Σχ.2 [εξ. (9)], και ελαττώνεται αν είναι αντίρροπα. Μάλιστα, στην τελευταία περίπτωση η φορά της αντιστρέφεται και ωθεί τον ηλεκτρήτη έξω από τον πυκνωτή, αν $V > P_o h / \epsilon_o$.

Παράδειγμα 2

Να επαναληφθεί το προηγούμενο παράδειγμα, αν μεταξύ των πλακών του πυκνωτή εισάγεται μία πλάκα από ένα συνηθισμένο διηλεκτρικό υλικό σταθερής επιτρεπτότητας ϵ , αντί της πλάκας του ηλεκτρήτη (Σχ.3).



Σχήμα 3

Λύση:

Το πεδίο μεταξύ των πλακών του πυκνωτή δίνεται πάλι από την (5). Τώρα η πόλωση στη διηλεκτρική πλάκα δεν είναι σταθερή, αλλά είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, στην οποία οφείλεται και της οποίας έχει τη διεύθυνση και φορά. Έτσι, στην περιοχή του ανομοιόμορφου πεδίου, κοντά στα άκρα των πλακών του πυκνωτή, η πόλωση θα έχει x - και z - συνιστώσες. Η δύναμη που ασκείται σε κάθε δίπολο είναι $\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^-$, όπως και στο Σχ.2. Τα δίπολα τείνουν να προσανατολιστούν προς την κατεύθυνση του \vec{E} , με τα θετικά τους άκρα να έλκονται από τα φορτία της αρνητικής πλάκας και τα αρνητικά τους άκρα από τα φορτία της θετικής πλάκας. Επειδή τα πλέον απομακρυσμένα άκρα τους βρίσκονται σε ελαφρά ασθενέστερο πεδίο, υπάρχει τελικά μία συνισταμένη δύναμη προς την κατεύθυνση x , η οποία ωθεί το διηλεκτρικό προς το εσωτερικό του πυκνωτή. Η x -συνιστώσα της χωρικής πυκνότητας της ηλεκτρικής δύναμης προκύπτει από τη (2) και είναι

$$f_{ex} = P_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + P_z \frac{\partial E_z}{\partial z} = (\epsilon - \epsilon_0) \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \quad (10)$$

Αντικαθιστώντας στη (10) από την (7) βρίσκουμε ότι

$$f_{ex} = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 + E_z^2) \quad (11)$$

Η συνολική δύναμη είναι

$$\begin{aligned} F_{ex} &= \int_V f_{ex} dV = \int_{x=-\infty}^{x_0} \int_{y=0}^d \int_{z=0}^h \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 + E_z^2) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) h d \left[E_x^2 + E_z^2 \right]_{x=-\infty}^{x_0} = \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) h d \frac{V^2}{h^2} = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{V^2 d}{h} \end{aligned} \quad (12)$$

Στη (12) χρησιμοποιήθηκε η (5) καθώς και το γεγονός ότι σε πολύ μεγάλη απόσταση από τον πυκνωτή ($x \rightarrow -\infty$) είναι $\vec{E} = 0$. Η δύναμη είναι τώρα ανεξάρτητη από την πολικότητα της τάσης (ανάλογη του V^2) και πάντοτε ωθεί το διηλεκτρικό προς το εσωτερικό του πυκνωτή ($\epsilon > \epsilon_0$).