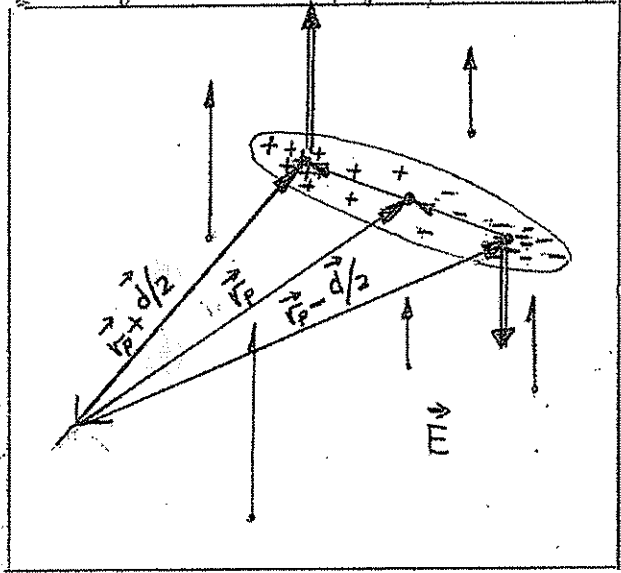


ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΤΕΣ. ΕΠΙ ΔΙΠΛΩΝ

Υποθέτουμε ότι ένα ηλεκτρικό δίπλωμα είναι "εμβυθισμένο" σε ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Η δύναμη που δέχεται πάνω του είναι η συνισταμένη των δυνάμεων (ηλεκτρικών) που υφίσταται η κεφαλή (+) και η ουρά (-). Δηλαδή έχουμε:



$$\vec{F} = |q| \vec{E}(\vec{r}_p + \frac{\vec{d}}{2}, t) - |q| \vec{E}(\vec{r}_p - \frac{\vec{d}}{2}, t)$$

όπου \vec{r}_p είναι η θέση του φαινομενικά κέντρου του διπλώματος. Αν η επιλογή των συστημάτων αναφοράς και μέτρησης του $\vec{E}(\vec{r}, t)$ είναι τέτοια ώστε η θέση της αρχής των αξόνων ως προς τη χαρακτηριστική διάσταση του διπλώματος ($|\vec{d}|$) να είναι πολύ μεγαλύτερη, δηλ. γιατί $|\vec{d}| \ll |\vec{r}_p|$ τότε στα αναπτύγματα Taylor

της παραπάνω έκφρασης μπορούμε αμέσως να αρκестούμε μόνο στους πρώτους (γραμμικούς ως προς \vec{d}) όρους. Έτσι,

$$\vec{F} \approx |q| \left[\vec{E}(\vec{r}_p, t) + \frac{\vec{d}}{2} \cdot \nabla \vec{E}(\vec{r}_p, t) + \dots \right] - |q| \left[\vec{E}(\vec{r}_p, t) - \frac{\vec{d}}{2} \cdot \nabla \vec{E}(\vec{r}_p, t) + \dots \right]$$

$$\vec{F} = |q| \vec{d} \cdot \nabla \vec{E}(\vec{r}_p, t) \equiv (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}_p, t) \quad (51)$$

Δηλαδή η δύναμη κείται μόνο γύρω από τον άξονα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος του διπλώματος (δηλ. υπάρχει η παράγωγος $\vec{p} \cdot \nabla = p \frac{\partial}{\partial s}$, όπως s είναι μήκος τριχών επί του \vec{d}).

Από τον ορισμό της ^{μηχανικής} ροπής, μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τη συνιστώσα ροπή που δέχεται:

$$\vec{T} = |q| (\vec{r}_p + \frac{\vec{d}}{2}) \times \vec{E}(\vec{r}_p + \frac{\vec{d}}{2}, t) - |q| (\vec{r}_p - \frac{\vec{d}}{2}) \times \vec{E}(\vec{r}_p - \frac{\vec{d}}{2}, t)$$

Αναίσιμος κατά Taylor και υποθέτουμε πάλι ότι $|\vec{d}| \ll |\vec{r}_p|$ περιγράφεται περίπου:

$$(52) \quad \vec{T} \approx \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}_p, t) + \vec{r}_p \times [(\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}_p, t)] : \text{ροπή ως προς την αρχή των αξόνων. * ΠΡΟΣΟΧΗ!}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι ανεξαρτήτως αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές ή όχι, υπάρχει πάντα ροπή (ανεξάρτητη σημείου αναφοράς) $\vec{p} \times \vec{E}$ η οποία φαίνεται όταν το δίπλωμα δεν είναι ευθυγραμμισμένο με το ηλεκτρικό πεδίο. Αυτή η ροπή είναι υπεύθυνη για την περιστροφή σε στατικά πεδία.

Η μαγνητισμός οφείλεται στη τάση που έχουν οι δομικοί λίθοι των υλικών να συμπεριφέρονται σαν μαγνητικά δίπολα, δηλαδή μικροσκοπικά κλειστά ρεύματα τα οποία, όπως και τα μικροσκοπικά κλειστά ρεύματα (βρόχοι) δημιουργούν μαγνητικά πεδία σαν αποτέλεσμα του νόμου του Ampère. Τέτοια μαγνητικά δίπολα μπορεί να υφίστανται λόγω:

- Κίνησης ηλεκτρονίων γύρω από πυρήνα (e) (στη πραγματικότητα πρόκειται για κίνηση ηλεκτρονικών νέφους)
- ίδια κίνηση των ηλεκτρονίων πέρι του άξονα τους (spin).

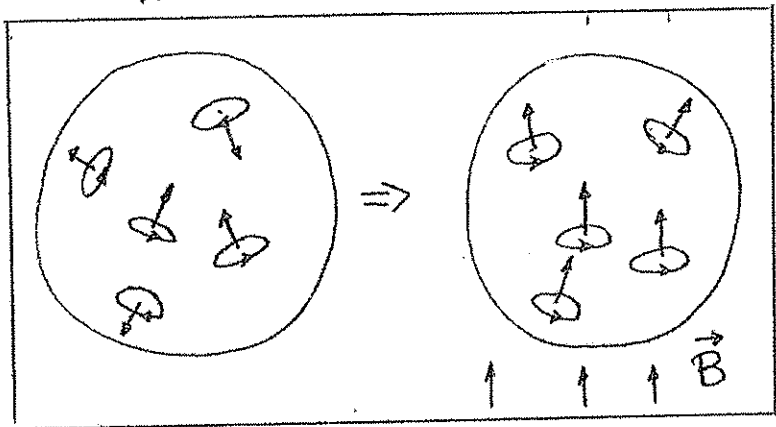
Σε σχέση με την δεύτερη περίπτωση, η αντιστοίχη στοιχειώδης μαγνητική ροπή (ρεύμα λόγω τριτογενούς, επί επιφάνεια σε $A \cdot m^2$) καλείται μαγνητόνη του Bohr :

$$\mu_B = \pm \frac{e \hbar}{2m_e} \quad (53)$$

η οποία έχει τιμή περί τα $10^{-23} A \cdot m^2$. Η μαγνητική αλλη ροπή δεν είναι καθόλου ασήμαντη: Έξωθεν μπορεί να βλχθεί ότι εάν όλα τα ηλεκτρόνια ήταν προσανατολισμένα έτσι ώστε να είχαν όλα $\mu_B = + \frac{e \hbar}{2m_e}$ κατά την ίδια διεύθυνση (έστω z), στην περίπτωση, π.χ, του σιδήρου και μια σφαίρα διαμέτρου 20 cm, η συνολική μαγνητική ροπή θα ήταν τόσο μεγάλη που μόνο ένα ρεύμα, βίον κατά τον ίση τρόπο της σφαίρας, με ένταση $10^5 A$ θα μπορούσε να την ισοφορήσει! Τέτοια περίπτωση είναι βέβαια σχεδόν αδύνατη διότι η κβαντομηχανική προσβεί ότι πάντα οι ηλεκτρονικές σφαιρές θα πρέπει να συμπεριφέρονται με ηλεκτρονικά αντιστάν spin, έτσι και περιβόδων ηλεκτρονίων (δηλαδή, υπάρχουν αντιστάν υποσφαιρές). Στην πραγματική περίπτωση μπορεί να υπάρχει παραπάνω μαγνητικό πεδίο (παράμαγνητισμός) έτσι και η σωστή διάταξη των ατόμων μέσα στο υλικό εκπροσωπεί το φαινόμενο. Πέραν όρα του φαινομένου αυτό, υπάρχει και το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί η κίνηση των ηλεκτρονικών νέφους. Έτσι, υπάρχει συνφασική μαγνητική ροπή με τη κίνηση αλλη και το φαινόμενο αναφέρεται διπομαγνητικό. Τέτοι πέραν των υλικών που παρουσιάζουν μέγιστη μαγνητισμό, υπάρχουν και τα διπομαγνητικά υλικά (ferromagnets) που υποκείμενα σε εξωτερικά μαγνητικά πεδία, μπορεί να παρουσιάσουν μαγνητισμό που παραμένει και μετά την απομακρύναν των εξωτερικών πεδίων.

Η εμφάνιση της μαγνητισμού ενός υλικού μέσω είναι λόγω αποτελέσματος της αντιστάνσης

(αλληλές μαγνητικές, λόγω εδωκερπικών δυνάμεων) των συναρτών με τη θέση της έξης μαγνη- 30
 τικών διπόλων.



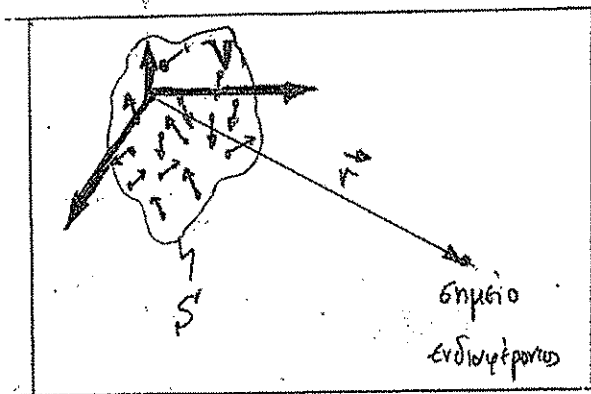
ΠΟΣΟΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός της μαγνητικής ροπής
 ενός κινούμενου φορτίου

$$\vec{m} = \frac{1}{2} q \vec{r} \times \vec{v} \quad (54)$$

όπου \vec{r} και \vec{v} είναι η θέση και η ταχύτητα του αντίστοιχου. Παρατηρούμε ότι ο
 ορισμός αυτός καθιστά τη μαγνητική ροπή μέγεθος εξαρτώμενο από την επιλογή της αρχής του
 συστήματος συντεταγμένων, άρα σχετικό. Αυτή η δυσκολία όμως είναι εντός φαινομένου και
 ξεπερνιέται με τη δέσμευση συστήματος πολλών φορτίων:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} q_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i \vec{m}_i \quad (55)$$



Ο ορισμός αυτός έχει νόημα κάτω από τις εξής
 προϋποθέσεις:

- όταν τα σωματίδια περιλαμβάνουν ενός πεπερασμένου
 χώρου όγκου V και δεν τον εγκαταλείπουν
 ποτέ
- Η αρχή των αξόνων είναι πάντα έντος του
 χώρου όγκου V .

- όταν τα σημεία ενδιαφέροντος (μετρήσεων) απέχουν από την αρχή των αξόνων αποστάσεις
 $|\vec{r}|$ πολύ μεγαλύτερες της μέγιστης διάστασης ^{max(d)} του συστήματος όγκου V και περιβά-
 λοντας επιφάνειας S . Τότε (και μόνο τότε) η θέση της αρχής των αξόνων (πάντα εντός
 του V) δεν παίζει ρόλο ασυμπτωτικά (δηλαδή καθώς $\max(d)/|\vec{r}| \rightarrow 0$).

Ισοδύναμος τρόπος τρέψης της (55) είναι ο ακόλουθος:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} \int_{V(S)} dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) q_i (\vec{r}' \times \vec{v}_i) \quad (55a)$$

\vec{m} , Ισοδύναμο:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V dV' \vec{r}' \times \sum_{i \in V} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) q_i \vec{v}_i$$

Όμως, το $\sum_{i \in V} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) q_i \vec{v}_i$ δεν είναι άλλο από την ιδιόμορφη (στην περίπτωση αλλη) πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}(\vec{r}'; i \in V)$. Άρα, για συνεχές σώμα ή στο συνεχές όριο, όταν το $\vec{J}(\vec{r}')$ μετατρέπεται (ή γίνε) σε γεία συνάρτηση, θα έχουμε

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V dV' \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}', t) \quad (56)$$

Η μαγνητική ροπή, σε διακριτά ή συνεχές σώματα, είναι μέγεθος που χαρακτηρίζεται μία περιοχή του χώρου περιγραφόμενη μέσα στην οποία υπάρχουν συνεχή ρεύματα ή διακριτά κινούμενα φορτία. Η επιλογή του σημείου αναφοράς (αρχής των αξόνων) δεν έχει και τόση σημασία αν η χρήση που θα κάνουμε θα είναι για μετρήσεις αψευδή μακριά από την περιοχή αυτή.

Σχέση τανυστικής ορμής (τροφορμής) και μαγνητικής ροπής

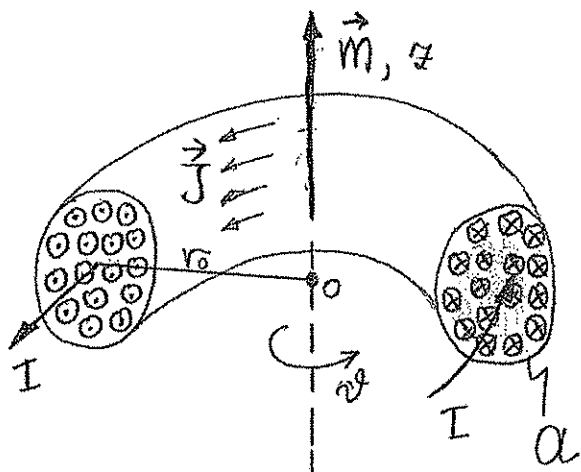
Η μαγνητική ροπή συνδέεται άμεσα με τη συνολική τροφορμή (ως προς την ως άνω επιλεγμένη αρχή των αξόνων) του συστήματος (διακριτά ή μη). Ο λόγος είναι ο ακόλουθος: Η τροφορμή ορίζεται σαν $\vec{L} = M(\vec{r} \times \vec{v})$ όπου M η μάζα του συστήματος. Επομένως θα έχουμε αντίστοιχα για ένα, πολλα' σώματα:

$$\vec{m} = \frac{q}{2M} \vec{L} \quad (57a)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum \frac{q_i}{M_i} \vec{L}_i \quad (57b)$$

και για όμοια (ίδιο q, M) σώματα:

$$\sum \vec{m}_i \equiv \vec{m} = \frac{q}{2M} \vec{L} \equiv \frac{q}{2M} \sum \vec{L}_i \quad (57c)$$



Το τοποσίδες του σχήματος αποζητεί μορφή για το βρόχο. Έχουμε:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int_{2\pi} dV' \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \\ \simeq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\alpha \vec{r}_0 \times \vec{J}$$

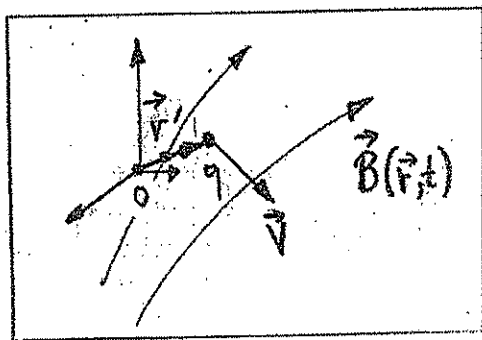
όπου a η διατομή του και \vec{J} σταθερό.

Ολοκλήρωση έχουμε ($\vec{J}a = \vec{I}$, όπου η κατάθυσση είναι η του σχήματος)

$$\boxed{\vec{M} = \vec{l}_z \pi a^2 I} \quad (58)$$

Διότι η μαγνητική ροπή έχει μέτρο το γινόμενο των ρεύματος επί το εμβαδόν του βρόχου και κατεύθυνση όπως ο κανόνας του κοχλία ορίζεται.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ ΕΠΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΔΙΠΟΛΩΝ



Η μαγνητική δύναμη που ασκείται στο κινούμενο φορτίο του σχήματος είναι:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \simeq q \vec{v} \times \left[\vec{B}(\vec{r}=0, t) + \vec{r}' \cdot \nabla \vec{B}(\vec{r}=0, t) + \dots \right]$$

αν η επιλογή της αρχής των αξόνων είναι τέτοια ώστε $|\vec{r}'|$ να είναι αρκετά μικρότερο από το χαρακτηριστικό μήκος ανομοιογένειας του \vec{B} (δηλ, το $\max \left| \frac{\nabla \vec{B}}{B} \right|^{-1}$). Η παραπάνω σχέση μας δίνει:

$$\boxed{\vec{F} \simeq q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}=0, t) - q \left[\vec{r}' \cdot \nabla \right] \vec{B}(\vec{r}=0, t) \times \vec{v}} \quad (59)$$

Ο πρώτος όρος της (59) είναι φυσικά η μαγνητική δύναμη με το πεδίο χρησιμοποιμένο στη θέση αναφοράς $\vec{r}'=0$. Ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφεί ισοδύναμα $+ q \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} x'_j \frac{\partial B_l}{\partial x_k} v_k$ όπου $[\epsilon_{ijk} = 1$ για $i=1, j=2, k=3$ και για κάθε κυκλική μεταβολή, ενώ $\epsilon_{ijk} = -1$ για άλλες μεταβολές, και τέλος $\epsilon_{ijk} = 0$ εάν δύο ή τρεις δείκτες είναι οι ίδιοι επίσης $(1,2,3) \rightarrow (x,y,z)$].

Ισοδύναμα μπορεί να γραφεί τέλεια σαν $(\vec{m} \times \nabla) \times \vec{B}$. Επειδή όμως, γενικότερα $(\vec{m} \times \nabla) \times \vec{B} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) - \vec{m} \nabla \cdot \vec{B}$ και $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, έχουμε ζήτημα για την (59)

$$\vec{F} \simeq q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}=0, t) + \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})|_{\vec{r}=0} \quad (60)$$

Επομένως, πέραν της μαγνητικής δύναμης, αποκτώνται δυνάμεις εάν υφίσταται ανομοιογένεια του πεδίου κατά μήκος της μαγνητικής ροπής. Η σχέση (60) γενικότερα και για δίσταμα βαρυσίων που εκτελούν περιορισμένες κινήσεις σε μικρή περιοχή του χώρου. Τότε, προφανώς, ο πρώτος όρος στην (60) εκπροσωπεί γιατί αλλιώς τα βαρυσία θα εξερχόταναν του όγκου περιορισμού τους. Έτσι, είτε για διακεκτό σύστημα, είτε για συνεκτό, έχουμε ζήτημα,

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (60a)$$

με \vec{m} ορισμένη κατά το προηγούμενο.

Όταν αφορά τώρα τις ροπές των δυνάμεων που αποκτώνται σε ένα κυρία παράδειγμα διακεκτό ή συνεκτό σύστημα, έχουμε (κατά τον ορισμό της ροπής) για μόνον το διακεκτό σύστημα:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \sum_i q_i \vec{r}_i \times [\vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i)] \\ &= \int dV' \vec{r}' \times [\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}')] \end{aligned}$$

όπου, πάλι $\vec{J}(\vec{r}') = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor και αγνοώντας την ίδια ποσότητα όπως και με τον υπολογισμό των δυνάμεων έχουμε ζήτημα,

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (61)$$

όπου \vec{m} όπως ορίστηκε προηγουμένως και \vec{B} μέγεθος στο σημείο αναφοράς ή επιλογή των οποίων δεν παίζει σημαντικό ρόλο, αρκεί να κάνουμε χρήση της (61) σε σημείο μέτρησης - παρατήρησης σε μεγάλες αποστάσεις από αυτό σε σχέση με τις αποστάσεις του χώρου περιεχομένου των κινήσεων. Η σχέση (61) μεταφέρεται αυτούσια και στα συνεκτά συστήματα (δηλαδή το ιδιόμορφο ρεύμα χωρίς με τις συναρτήσεις δείξα γίνεται μία συνάρτηση). Η δράση της ροπής στην (61) είναι διαφορετική κλαδικά απ' ό,τι κβαντομηχανικά * ΠΡΟΣΟΧΗ

Η δράση της ροπής επί του μαγνητικού διπόλου (κλασικά)

Η σχέση (61) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μελέτη συμπεριφοράς υλικών σε μαγνητικό πεδίο. Απλά δείχνει ότι ροπή ασκείται (κάθετη στο επίπεδο $\vec{m}-\vec{B}$) αν το \vec{m} δεν είναι εναρτισμένο με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ορατών ή μη, χρονομεταβλητό ή μη.

Θα εξετάσουμε τώρα το είδος της κίνησης που προκαλεί η ροπή αυτή κλασικά (δηλ. κβαντομηχανικά): Εάν \vec{L} είναι η ορμή του συστήματος, τότε προφανώς

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (62a)$$

κατά τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής. Επιπλέον όμως έχουμε [(57δ)] :

$$\frac{q}{2M} \vec{L} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (62\beta)$$

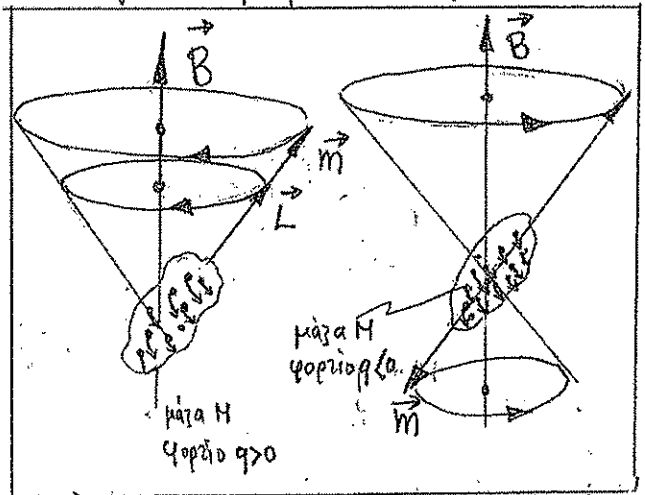
Εάν, μάλιστα, ορίσουμε το διάνυσμα $\vec{\omega}_L$, έτσι ώστε:

$$\vec{\omega}_L \equiv -\frac{q\vec{B}}{2M} \quad (63a)$$

τότε η (62β) γίνεται:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_L \times \vec{L} \quad (63\beta)$$

η οποία, προφανώς, αντικατοπτρίζει συνεχή αλλαγή στη διεύθυνση του \vec{L} (άρα και του \vec{m}) με γωνιακή συχνότητα $\omega_L = |\vec{\omega}_L|$ περί τον άξονα του $\vec{\omega}_L$ (άρα, του \vec{B}) χωρίς τολύκωση αλλαγή του μέτρου του \vec{L} (επειδή $\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dL^2}{dt} = \vec{L} \cdot (\vec{\omega}_L \times \vec{L}) = 0$).



δηλαδή, το διάνυσμα \vec{L} , άρα και \vec{m} , διαγράφουν αενάως κυκλική επιφάνεια α με άξονα, τον άξονα του \vec{B} . Η κίνηση αυτή καλείται μετάπτωσηση και η συχνότητα ω_L , συχνότητα μετάπτωσης Larmor. Στο διπλανό σχήμα σκιαγραφείται η κίνηση αυτή για $q > 0$ και $q < 0$.

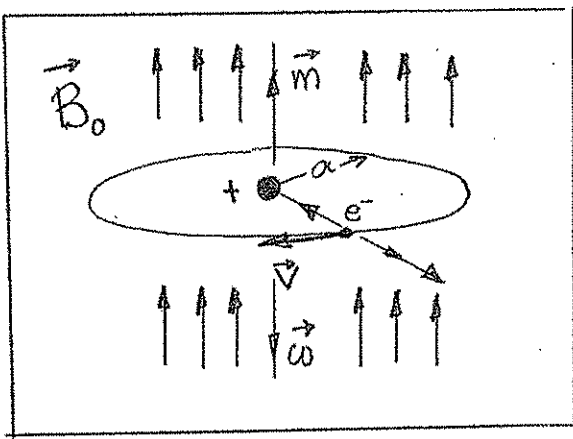
ΠΡΟΣΟΧΗ

Κβαντομηχανικά βεβαίως ισχύει μόνο η σχέση.

$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$ (\vec{m} : μη κλασικό) που οδηγεί σε μηδενισμό της \vec{T} λόγω τελικής εναρτιστικής $\vec{m} \parallel \vec{B}$!!

Διαμαρτυζικό Φαινόμενο

Για την περιγραφή των διαμαρτυζικών φαινομένων θα χρησιμοποιηθεί το κλασικό μοντέλο για το ηλεκτρόνιο (π.χ. στο άτομο του υδρογόνου). Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι η δύναμη Coulomb - έλξης από τον πυρήνα, η φυγόκεντρος καθώς και η δύναμη Lorentz λόγω σπινθής του εξωτερικού πεδίου \vec{B}_0 . Έχουμε λοιπόν,



$$0 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{r} + M_e \omega^2 a \vec{r} - e \vec{v} \times \vec{B}_0 \quad (64a)$$

όπου a , έστω η ακτίνα περιφοράς του ηλεκτρονίου και ω , η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πυρήνα από τον πυρήνα. Η σχέση $\vec{m} = \frac{q_e}{2M_e} \vec{L}$ μας δίνει ($q_e = -e$, $\vec{L} = M_e \vec{r} \times \vec{v}$):

$$\vec{\omega} = -\frac{2}{e a^2} \vec{m} \quad (a \equiv |\vec{r}| \text{ και } \vec{\omega} \perp \vec{r})$$

Επιπλέον, έχουμε $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ που λόγω της προηγούμενης σχέσης γίνεται $\vec{v} = -\frac{2}{e a^2} \vec{m} \times \vec{r}$

Ετσι λοιπόν, η εξίσωση ισορροπίας γίνεται:

$$0 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{r} + M_e \omega^2 a \vec{r} + \frac{2}{a^2} (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{B}_0 \quad (64b)$$

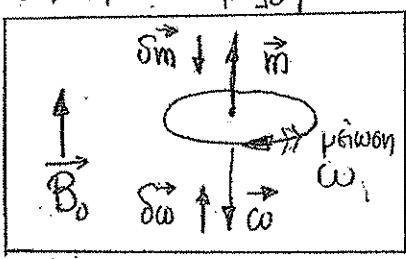
Έχουμε όρος $(\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{B}_0 = (\vec{m} \cdot \vec{B}_0) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{B}_0) \vec{m} = (\vec{m} \cdot \vec{B}_0) a \vec{r}$ εφ' όσον $\vec{r} \perp \vec{B}_0$ λόγω αντισυμμετρίας του μαγνητικού διπύλου-ατόρου με το \vec{B}_0 (εξωτερική εικόνα).

Τελικά η (64b) γίνεται:

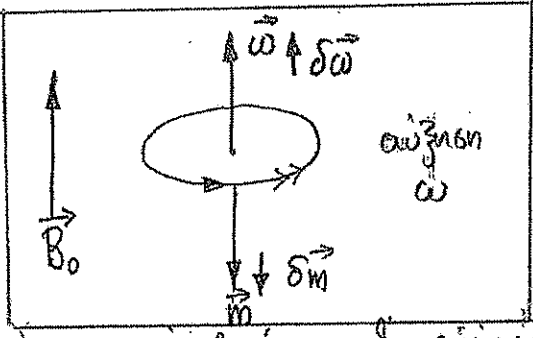
$$\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 M_e a^3} - \frac{2}{M_e a^2} (\vec{B}_0 \cdot \vec{m}), \quad \vec{\omega} = -\frac{2\vec{m}}{e a^2} \quad (65)$$

η οποία απλά λέει ότι: εάν μιν το επιβραδύμενο πεδίο και η ηλεκτρονική μαγνητική ροπή είναι παραλληλα διανύσματα ($\vec{B}_0 \cdot \vec{m} > 0$) τότε η συχνότητα περιφοράς μειώνεται ^{κατά μικρό} από την τιμή που έχει απουσία πεδίου. Αυτό ισοδυναμεί με ανάπτυξη ενός δω αντιπαραλλήλου προς το $\vec{\omega}$ ή, ισοδύναμα με ανάπτυξη ενός δω αντιπαραλλήλου προς το \vec{m} , άρα και προς το \vec{B}_0 .

Εάν, δε, το επιβραδύμενο πεδίο και η ηλεκτρονική μαγνητική ροπή είναι αντιπαραλληλα



διανύσματα ($\vec{B}_0 \cdot \vec{m} < 0$) τότε η συχνότητα περιφοράς αυξάνεται κατά μικρό από την τιμή που έχει απουσία πεδίου. Αυτό ισοδυναμεί με ανάπτυξη ενός δω παραλλήλου προς το $\vec{\omega}$, ή ισοδύναμα με ανάπτυξη ενός δω παραλλήλου



προς το \vec{m} , άρα αντιπαράλληλα προς το \vec{B}_0 .
 Δηλαδή, πάντα, η δράση του \vec{B}_0 οδηγεί στην μεταβολή της ηλεκτρονικής μαγνητικής ροπής αντιπαράλληλα προς το \vec{B}_0 . Δηλαδή το ηλεκτρόνιο προσαρμόζει έτσι την κίνησή του ώστε η μεταβολή που θα επιφέρει στο δυναμικό πεδίο να αντισταθμίσει πάντα την εξωτερική επίδραση. Το φαινόμενο αυτό είναι το διαμαγνητικό φαινόμενο.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ (ΜΑΓΝΗΤΙΣΗ)

Η πυκνότητα μαγνητικής ροπής (\equiv μαγνήτιση) ορίζεται σαν

$$\vec{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \vec{m}_j = \vec{M}(\vec{r}, t) \quad (66)$$

Στο βαθμό που υπάρχει, αυτό το όριο μπορεί να οριστεί η πεδιακή συνάρτηση της μαγνήτισης (δία). Στη φτωχή περίπτωση (όταν η διακριτότητα πρέπει να ληφθεί υπόψη) η μαγνήτιση (ιδιόμορφη σε τέτοιες περιπτώσεις) μετρά το μέσο όρο της συσχετισμένης (m_j^{-3}) μαγνητικής ροπών στη περιοχή ενός όγκου \vec{V} . Εάν, μάλιστα, ορίσουμε τη μέση τιμή μαγνητικής ροπής στη περιοχή αυτή σαν,

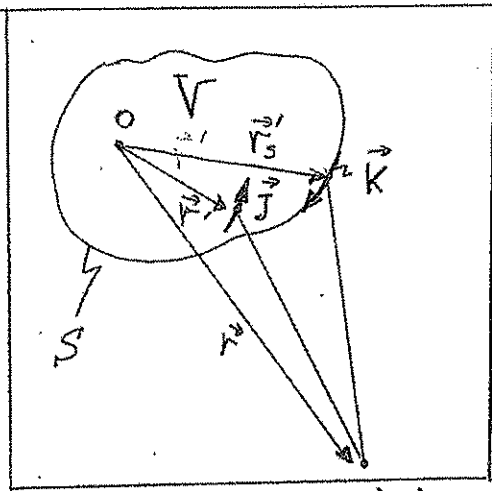
$$\langle \vec{m} \rangle \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta N} \sum_{j \in \Delta V} \vec{m}_j \quad (67)$$

τότε έχουμε,

$$\vec{M} = n_m(\vec{r}, t) \langle \vec{m} \rangle \quad (68)$$

δηλαδή, η μαγνήτιση είναι το γινόμενο του μέσου μαγνητικής ροπής επί της αριθμητικής πυκνότητας των μαγνητικών διπόλων ($\Delta N / \Delta V$ στο όριο). Εάν, γένη, το μικρό μέσο περιεχόμενα από ποικιλία διπόλων τότε (όπως και με την πείραση σε ανάσχεση περίπτωση) να έχουμε:

$$\vec{M} = \sum_a n_{ma}(\vec{r}, t) \langle \vec{m}_a \rangle \equiv \sum \vec{M}_a \quad (69)$$



Το δυναμικό Δυναμικό σε σημείο του χώρου \vec{r} λόγω ρεύματων σε περιφραγμένο κομμάτι του χώρου αρκεία απομακρυσμένο από το σημείο \vec{r} , δίνεται σύμφωνα με την αρχή επαλληλίας από το ολοκλήρωμα

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V(S)} dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (70)$$

και στην επιφάνεια S των όγκο V οι διαστάσεις του οποίου είναι πολύ μικρότερες του $|\vec{r}|$ ($|\vec{r}| \gg \max |\vec{r}'|$). Τα επιφανειακά ρεύματα υπεισέρχονται στην (70) σαν ιδιόμορφα $\vec{J}(\vec{r}', t)$. Αν θύσουμε, βέβαια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ξεχωριστά, επιφανειακά, ολοκλήρωμα $\mu' d\sigma'$. Επειδή $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg |\vec{r}'|$ μπορούμε να αναπτύξουμε την (70) σε σειρά Taylor, δηλαδή $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r}| \left[1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \dots \right]$. Χρήση του αναπτύγματος αυτού στην (70) και υποθέτοντας ότι τα ρεύματα μέσα στο V χαρακτηρίζεται από μηδενική απόκλιση ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$) δίνει τελικά στο όριο $|\vec{r}'| \rightarrow 0$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (71)$$

όπου το \vec{m} δίνεται από τις εκφράσεις (55) ή (56). Η σχέση (71) είναι εξαιρετικά χρήσιμη για την ανάπτυξη της μακροσκοπικής θεωρίας των μαγνητικών φαινομένων στα υλικά μέσα.

Βαθμιαίο μαγνητικό δυναμικό και μαγνητικές ροές

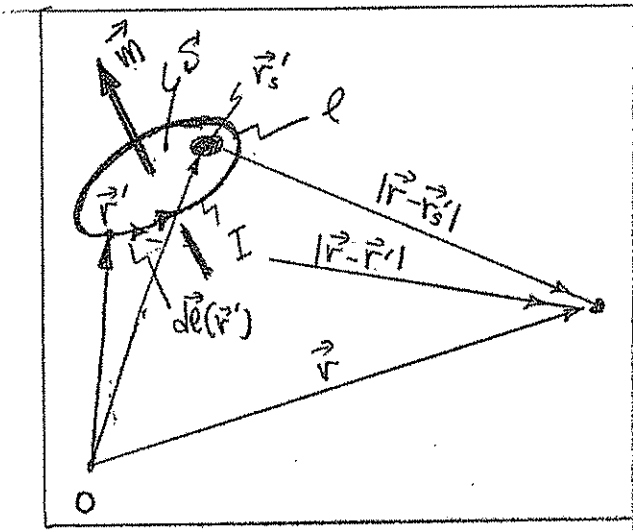
Στη περίπτωση που έχουμε μόνιμα μαγνητικά πεδία (μαγνητοστατική) και σε περιοχές του χώρου ή του υλικού μέσου που απουσιάζουν τα ρεύματα \vec{J} , μπορούμε να κάνουμε χρήση ενός βοηθητικού δυναμικού (βαθμιαίου): επειδή $\nabla \times \vec{H} = 0$, στην περίπτωση της μαγνητοστατικής, μπορούμε να ορίσουμε βαθμιαία πεδίακή συνάρτηση $\phi_m(\vec{r})$, έτσι ώστε $\vec{H} = -\nabla \phi_m$. Μπορεί να δείξει ότι για μαγνητικό δίπολο έχουμε:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (72)$$

Λειτουργίες υπολογισμού των (71) και (72)

Θεωρούμε το βρόχο που μεταφέρει μόνιμο ρεύμα I , σαν το ποτήριό μας για το δίπλο. Έχουμε λοιπόν:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{S(\ell)} \frac{d\vec{\ell}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S(\ell)} d\vec{S}(\vec{r}') \times \nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ με β' αξον}$$



το θεώρημα του Stokes, ή ισοδύναμα,
 $= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S(\ell)} d\vec{S}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ το οποίο
 για μικρό $|\vec{r}'|/|\vec{r}|$ δίνει

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S(\ell)} d\vec{S}(\vec{r}') \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

δίνει $\vec{m} = I \int_{S(\ell)} d\vec{S}(\vec{r}')$ όπως ήδη είδαμε

Επειδή, τώρα, $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r}|}$ έχουμε, $\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right)$ και έτσι, $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

$$= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[\vec{m} \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) \right]. \text{ Άρα}$$

$$\boxed{\vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[\vec{m} \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) \right]} \quad (73)$$

Κανόνας χροιάς της ταυτοτήτας: $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \nabla \cdot \vec{B} - \vec{B} \nabla \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \nabla \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \vec{B}$ και επειδή \vec{m} = σταθερό χωρικά, η (73) δίνει,

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \left[(\vec{m} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) - \vec{m} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\nabla (\vec{m} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right)) - \vec{m} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) \right]$$

$$= -\nabla \left[-\frac{\vec{m} \cdot \nabla}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) \right] + \frac{\vec{m}}{4\pi} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{|\vec{r}|^3} \right) \equiv -\nabla \left[\frac{\vec{m} \cdot \nabla}{4\pi |\vec{r}|^3} \right] + \vec{m} \delta(\vec{r}) \text{ δίνει}$$

$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{|\vec{r}|^3} \right) \equiv 4\pi \delta(\vec{r})$. Έτσι, για $\vec{r} \neq 0$, όπως εξ' αλλού έχουμε ήδη υποδείξει παραπάνω

το αλληλο παρατήρησης μακριά από το δίπλο, έχουμε,

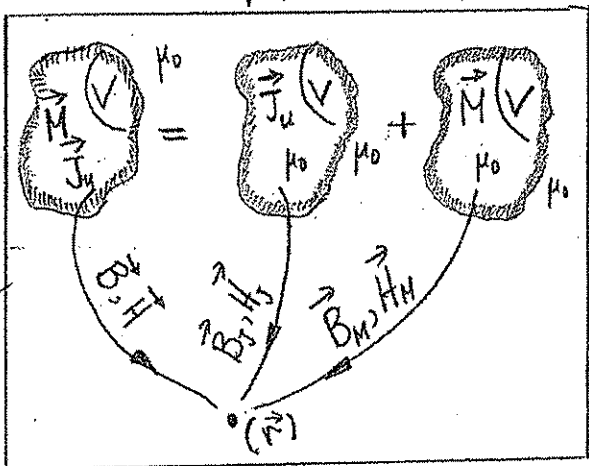
$$\boxed{\vec{H} = -\nabla \left[\frac{\vec{m} \cdot \nabla}{4\pi |\vec{r}|^3} \right]} \equiv -\nabla \phi_m \quad (74)$$

ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ
 ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ \vec{A} ΚΑΙ ϕ_m (ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ)

Η χρήση της έκφρασης (16) στην περίπτωση των συνεχών υλικών μέσων σε συνδυασμό με τη διατύπωση για τα \vec{A} και ϕ_m οδηγεί στις ακόλουθες διαφορικές εκφράσεις για τη συνεισφορά στα δυναμικά $\vec{A}(\vec{r})$ και $\phi_m(\vec{r})$ ενός στοιχειώδους όγκου dV' υλικού μέσα στο οποίο υπάρχουν συνεχώς κατακρυμμένες μαγνητικές ροές :

$$(75) \quad \begin{aligned} d\phi_m(\vec{r}; \vec{r}') &= \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{dV' \vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ d\vec{A}(\vec{r}; \vec{r}') &= \mu_0 \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \mu_0 \frac{dV' \vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

όπου η μαγνήτιση $\vec{M}(\vec{r})$ θεωρείται σαν δεδομένη συνάρτηση των υλικών μέσων. Στο μέσο υποθέτουμε ότι υπάρχουν επίσης ρεύματα "ελεύθερων" φορτίων \vec{J}_u . Δηλαδή στο μέσο έχουμε συνολικά: μικροσκοπικά "ρεύματα" που αποτελούν το γενικευμένο διάνο των μαγνητικών ροών και των ελλείπων μαγνητικών πεδίων και μικροσκοπικά ρεύματα \vec{J}_u . Το ζεύγος των πεδίων \vec{J} και \vec{M} ανταναγκάζει την ύπαρξη των δύο αντιστοίχων ρεύματων.



Ο υπολογισμός των μεγεθών \vec{B} και \vec{H} μπορεί να γίνει στη βάση της επιταγής των δύο γεωμετρικών διάνο \vec{J}_u και \vec{M} . Τα ρεύματα \vec{J}_u προκαλούν :

$$(76) \quad \begin{aligned} \vec{B}_J(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}_J = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{J}_u(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{H}_J(\vec{r}) &= \frac{\vec{B}_J(\vec{r})}{\mu_0} \end{aligned}$$

Ενώ με βάση τις (75) έχουμε για τη συνεισφορά του \vec{M} :

$$(77) \quad \begin{aligned} \vec{B}_M(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}_M = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ \vec{H}_M(\vec{r}) &= -\nabla \phi_m = -\nabla \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

Πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι η δυναμική κρήνη του \vec{H}_M οφείλεται στο γεγονός ότι στο σχήμα της επαλληλίας, δεν υπάρχουν ρεύματα \vec{J}_M στη δεύτερη συνιστώσα, οπότε η διατήρηση του \vec{H} (\vec{H}_M) στη βάση των βραχυπρόθεσμων δυναμικών καθίσταται δυνατή.

Αθροίζοντας τις σχέσεις (76) και (77) παίρνουμε τα βραχυπρόθεσμα $\vec{B} = \vec{B}_S + \vec{B}_M$ και $\vec{H} = \vec{H}_S + \vec{H}_M$. Από που κατεί μπορεί να διαπιστωθεί αμέσως είναι ότι η σχέση μεταξύ \vec{H} και \vec{B} απέχει πολύ από μία σχέση αναλογίας (ώστε να μπορεί να διακοπαστεί εύρα ο ραντισμός μαγνητικού διαπερατότητας). Έχουμε δηλαδή,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \vec{H}_M - \frac{\vec{B}_M}{\mu_0} \quad (78)$$

Η διαφορά $\vec{H}_M - \frac{\vec{B}_M}{\mu_0}$ δεν είναι (και ούτε περιμέναμε, εξάλλως) μηδενική για σημεία εντός του υλικού. Αντίθετα μηδενίζεται για σημεία στην υλική, οπότε και επανερχόμαστε στη σχέση του κενού χώρου, δηλαδή, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Επίσης, θα πρέπει η (78) να αποδείξει ρηχά τη σχέση ορισμού της \vec{M} , δηλαδή $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύρα ως εξής: Η διαφορά $\vec{H}_M - \frac{\vec{B}_M}{\mu_0}$ μπορεί να γραφεί ως εξής με βάση τη σχέση (77):

$$\begin{aligned} \vec{H}_M(\vec{r}) - \frac{\vec{B}_M(\vec{r})}{\mu_0} &= -\nabla \cdot \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \left[\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] - \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \left[\nabla \times \left(\nabla \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] - \int_V dV' \vec{M}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \begin{cases} 0 & \text{αν } \vec{r} \text{ εκτός } V \\ \vec{M}(\vec{r}) & \text{αν } \vec{r} \text{ εντός } V \end{cases} \end{aligned}$$

όπου κάνουμε χρήση των ταυτοτήτων: $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) \equiv \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$, $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$ και $\nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$.

**ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ
ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΑ ΡΕΥΜΑΤΑ ΜΑΓΝΗΤΙΣΗΣ**

Μια άλλη αντιμετώπιση των μαγνητικών ιδιοτήτων γίνεται με την εισαγωγή των έννοιών των ρευμάτων μαγνήτισης. Αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι η μαγνητική $\vec{M}(\vec{r})$ ενός υλικού μέσου χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των διανυσματικών δυναμικών $\vec{A}_M(\vec{r})$, όπως ήδη είδαμε, μιας ποσότητας η οποία και αντιστοιχεί με το διανυσματικό δυναμικό - γαμαμάρομα επαλληλίας επί ρευμάτων εκάθερου φορτίου (χαρικών και επιφανειακών), μπορεί να αντιστοιχισθεί με ανάλογα ρεύματα. Τα ρεύματα αυτά καλούνται ρεύματα μαγνήτισης. Συγκεκριμένα, ορίζουμε:

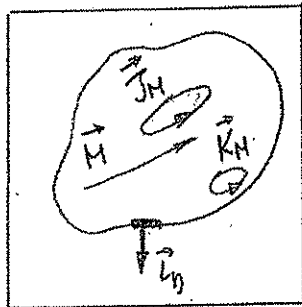
$$(79) \quad \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{A}_M(\vec{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V dV' \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \oint_{S(\vec{r})} dS' \frac{\vec{K}_M(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Υπάρχει, τώρα, η δυνατότητα να προσδιορισθούν τα ρεύματα $\vec{J}_M(\vec{r})$ και $\vec{K}_M(\vec{r})$ με τη βοήθεια απλών διανυσματικών ταυτοτήτων και θεωρημάτων στο οριστικό μέτρο της έκφρασης (79). Έχουμε δηλαδή, $\frac{\vec{M}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\left(\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \times \vec{M}' = -\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) + \frac{\nabla' \times \vec{M}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ οπότε:

$$\vec{A}_M(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\nabla' \times \vec{M}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

η οποία, με εφαρμογή των θεωρημάτων Stokes στο πρώτο προσθετέο του βελών μέλους δίνει τελικά τη μορφή του αντιστοίχου μέλους της έκφρασης (79). Εξοί, εύκολα μπορεί να ταυτισθεί κανείς τα ρεύματα μαγνήτισης με τις ακόλουθες ποσότητες-συναρτήσεις της μαγνήτισης \vec{M} :

$$(80) \quad \begin{aligned} \vec{J}_M(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \\ \vec{K}_M(\vec{r}) &= \vec{M} \times \vec{\zeta}_n, \quad \vec{\zeta}_n = \frac{d\vec{S}}{dS} \end{aligned}$$



Το \vec{J}_M το έχουμε επίσης αναφέρει στις εξισώσεις Maxwell (7) καθώς και 6η παράγραφο 3.3.2 (βλ. 3.48) του 1ου μέρους των σημειώσεων.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΧWELL ΓΙΑ ΣΤΑΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΣΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΜΕΣΑ

Συνοψίζοντας τις σχετικές εξισώσεις του Maxwell για στατικά πεδία απουσία ρευμάτων \vec{J}_u έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_u \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}) : \text{συνακτική σχέση} \end{aligned} \quad (81a)$$

καθώς και τις σχετικές για διαχωριστικές επιφάνειες σχέσεις αγωγιμότητας:

(ακίνητες)

$$\begin{aligned} \vec{l}_+ \cdot (\vec{D}_+ - \vec{D}_-) &= \sigma_u \\ \vec{l}_+ \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) &= 0 \end{aligned} \quad (81b)$$

Ισοδύναμα μπορεί κανείς να ζαναγράψει τις (81) ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{\text{ολ}}}{\epsilon_0} & \text{και} & \vec{l}_+ \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \frac{\sigma_{\text{ολ}}}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 & & \vec{l}_+ \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0 \\ \rho_{\text{ολ}} &= \rho_u - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{E}) & & \sigma_{\text{ολ}} = \sigma_u - \vec{l}_+ \cdot (\vec{P}_+ - \vec{P}_-) \end{aligned} \quad (82)$$

ή

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_u & \text{και} & \vec{l}_+ \cdot (\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \sigma_u \\ \nabla \times \vec{D} &= \nabla \times \vec{P}(\vec{D}) & & \vec{l}_+ \times (\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \vec{l}_+ \times (\vec{P}_+ - \vec{P}_-) \end{aligned} \quad (83)$$

Στην περίπτωση που $\vec{P} = \vec{P}_0$, δηλαδή ανεξάρτητο του \vec{E} , τότε η γραφή (83) είναι πιο βολική για την περίπτωση των ηλεκτρικών όπως υφίσταται \vec{P}_0 . Στην απλή δε περίπτωση των ισοτροπικών, γραμμικών υλικών που έχουμε $\vec{P}(\vec{E}) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{E}) \vec{E}$ τότε, λαμβανόμενα υπ' όψη ότι η εξίσωση $\nabla \times \vec{E} = 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει η συνάρτηση δυναμικού ϕ : $\vec{E} = -\nabla \phi$, έχουμε από τις (81) ($\epsilon = 1 + \chi_e$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \equiv \vec{l}_0 \cdot \nabla & \quad (*) \\ \vec{E} = -\nabla \phi & \quad \epsilon_+ \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_+ - \epsilon_- \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_- = -\sigma_u \\ \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = -\rho_u & \quad \vec{l}_+ \times (\nabla \phi_+ - \nabla \phi_-) = 0 \end{aligned} \quad (84)$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL ΓΙΑ ΣΤΑΤΙΚΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΜΕΣΑ

Συνολίζουμε επίσης τις σχετικές εξισώσεις των Maxwell για στατικά πεδία :

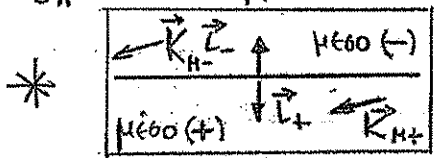
$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{l}_+ \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= 0 \\
 \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_u & \vec{l}_+ \times (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) &= \vec{K}_u \\
 \vec{H} &= \vec{H}(\vec{B}) : \text{συντακτική σχέση}
 \end{aligned} \tag{85}$$

Ισοδύναμα, μπορεί κανείς να επαναδιατυπώσει τις (85) ως εξής :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{H} &= -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{H}) & \vec{l}_+ \cdot (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) &= \vec{l}_+ \cdot (\vec{M}_- - \vec{M}_+) \\
 \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_u & \vec{l}_+ \times (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) &= \vec{K}_u
 \end{aligned} \tag{86}$$

b

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{l}_+ \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= 0 \\
 \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_{\text{ολ}} & \vec{l}_+ \times (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) &= \mu_0 \vec{K}_{\text{ολ}} \\
 \vec{J}_{\text{ολ}} &\equiv \vec{J}_u + \vec{J}_M = \vec{J}_u + \nabla \times \vec{M}(\vec{B}) & \vec{K}_{\text{ολ}} &\equiv \vec{K}_u + \vec{K}_{M+} + \vec{K}_{M-} \\
 & & \vec{K}_{M+} &= -\vec{l}_- \times \vec{M}_+ = \vec{l}_+ \times \vec{M}_+ \\
 & & \vec{K}_{M-} &= -\vec{l}_+ \times \vec{M}_-
 \end{aligned} \tag{87}$$




* εδώ πρέπει να προβάζουμε ιδιαίτερα το μόνος ότι το μαγνητικό επιφανειακό ρεύμα είναι το αρνητικό του εξωτερικού μομέντου του μοναδιαίου διανύσματος που "βλέπει" εκτός του υλικού επί τη μαγνήτιση του υλικού *

Στις περιπτώσεις των μόνιμων μαγνητών, δηλαδή, όταν $\vec{M} = \vec{M}_0$: ανεξάρτητο του \vec{H} , τότε η γραφή (87), αλλά και η (86) προσαρμόζονται για εφαρμογή. Τέλος στην αυτή περίπτωση ισοτροπικών ηραμικών υλικών για τα οποία $\vec{M}(\vec{H}) = \chi_m \vec{H}$ με $\chi_m < 0$ και $\chi_m > 0$ ή τα διαμαγνητικά και τα παραμαγνητικά αντίστοιχα (υλικά που το διαμαγνητικό ή το παραμαγνητικό γινόμενο υπερβαίνει, δηλαδή). και απουσία ρευμάτων \vec{J}_u τότε $[\nabla \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\nabla \phi_m \text{ και } \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)]$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\nabla\phi_m & \mu_+ \left(\frac{\partial\phi_m}{\partial n}\right)_+ - \mu_- \left(\frac{\partial\phi_m}{\partial n}\right)_- &= 0 \\ \nabla \cdot (\mu \nabla\phi_m) &= 0 & \vec{l}_+ \times (\nabla\phi_{m+} - \nabla\phi_{m-}) &= -\vec{K}_u \end{aligned} \quad (88)$$

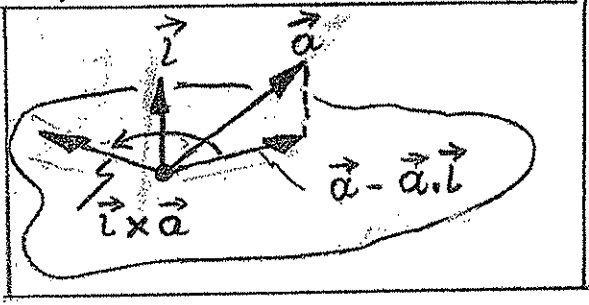
όπου $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \vec{l} \cdot \nabla$

ΠΡΟΣΟΧΗ 

Πρέπει να τονισθεί ότι η απουσία \vec{J}_u ναί μεν καθιστά δυνατή την χρήση των βαθμωτά μαγνητικά δυναμικά, αλλά από δέν συνεπάγεται ανεκμεταλλεία ότι θα πρέπει να αποφεύγουμε τη δυνατότητα παρουσίας επιφανειακών ρεύματων. Η παρουσία των τριγωνικών οδηγεί, όπως φαίνεται στις (88), σε αδυναμία των διανυσματικών παραστάσεων $\vec{l} \times \nabla$ του βαθμωτά από δυναμικού.

Δύο σημαντικές παρατηρήσεις

- (1) Τα ρεύματα \vec{J}_u δέν μπορεί μορφολογικά να είναι σταθεστά στην περίπτωση των στατικών μαγνητικών πεδίων. Ο νόμος του Ampère $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_u$ συνεπάγεται $\nabla \cdot \vec{J}_u = 0$ δηλαδή είναι σφαινοειδούς τύπου (πρόσφα που αποκλείει την συνύπαρξη μη μόνιμης κατανομής φορτίου: $\frac{\partial \rho_u}{\partial t} \neq 0$)
- (2) Στις σχέσεις διαχωριστικών επιφανειών πρέπει να επισημανθεί ότι το $\vec{l} \times \vec{a}$ (\vec{l} το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα) δέν είναι διανυσματικά η προβγή του διανύσματος \vec{a} επί της επιφανείας στην οποία κάθετο είναι το \vec{l} . Είναι στην πραγματικότητα, το στραμμένο κατά $\pi/2$ και κατά την φορά που ορίζει ο κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία με διάνυσμα στροφής το \vec{l} .



Κατά μήρο, βέβαια, το $\vec{l} \times \vec{a}$ έχει το μέτρο της εφαπτομένης συνιστώσας που διανυσματικά ορίζεται σαν $\vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{l}$

ΑΓΩΓΟΙ (ΑΓΩΓΙΜΑ ΥΛΙΚΑ)

Έχουμε ήδη αναφερθεί στη χρήση των ρευμάτων "ελεύθερων" φορτίων σαν πηγή που αποτελεί πηγή στις εξισώσεις Maxwell. Στις περισσότερες περιπτώσεις βέβαια οι πηγές μας δεν είναι ρεύματα ή φορτία που είναι "τοποθετημένα" μέσα στο υλικό μέσο, κενά βέβαια στις περιπτώσεις εκείνες που διαμορφώνουμε τα μακροσκοπικά μας πεδία κάνοντας χρήση πλήρους ή μερικών φορτισμένων πλάκων κλπ (ηλεκτροδίων) ή ρευματοφόρων σωμάτων. Πληθές, δυναμικά, φορτές ρεύματα και φορτία μπορούν αντίστοιχα να αναπαραχθούν και να ανακατασκευασθούν, στην ίδια την επιφάνεια των πεδίων πάνω στους φορτισμένους φορτίων εκάστου που μπορούν να κινούνται χωρίς να είναι δεσμευμένοι σε ατομικά ή μοριακά συστήματα. Πρόκειται δηλαδή για ηλεκτρικά αγωγιμότητας (που είναι διατάξεις για την αγωγιμότητα), όπως, ελεύθερες ρίζες σε ηλεκτρονικά διατάξεις, ιόντα και ηλεκτρόνια σε πλάσμα κλπ. Η δύναμη που προκαλεί την κίνηση των φορτισμένων σωμάτων είναι πάντοτε η δύναμη Lorentz:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = q_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) \quad (89)$$

όπου ο δείκτης υποδεικνύει το i -οστό σωματίο, και \vec{E} και \vec{B} αναφέρονται στα σωματικά πεδία δηλαδή τη συνεισφορά των εξωτερικών επιβαλλόμενων πεδίων και αυτά που αναπτύσσονται λόγω της κίνησης ή της συγκέντρωσης των σωματιδίων. Στα εξωτερικά πεδία συμπεριλαμβάνονται μακροσκοπικά πεδία (ηλεκτρομαγνητικά εμπεριλαμβανομένου από μας όπως ηλεκτρικά, πηνία κλπ) καθώς και τα πεδία των ατομικών ή μοριακών δυνάμεων των σωμάτων μέσα από τις οποίες περνούν τα σωματίδια κατά την κίνησή τους (αν υπάρχουν, όπως στον ημιαγωγό). Συχνά χρειάζεται να θυμόμαστε ότι όσον και η απόκριση της κίνησης των σωματιδίων στις ατομικές ή μοριακές δυνάμεις. Χρησιμοποιήστε λοιπόν τα εξής φυσικά μοντέλα πέραν της (89)

- Στατιστικό (θερμική κίνηση) θεωρία) μοντέλο για τα
δυσώδη και τα μόρια ή άτομα μετασχηματισμού
- Πληρης ορισμός των μακροσκοπικών εξαρτησιακών πεδίων
- Κβαντομηχανικές αλληλεπιδράσεις δεν μπορούν να αποκλειστούν σε
ορισμένες περιπτώσεις (ημιαγωγοί, σταφές Josephson, κλπ)
- Σε άλλες περιπτώσεις είναι δυνατή η περιγραφή της κίνησης των
σωματιδίων αυτών σαν κίνηση ρευστού μέσου. Σύμφωνα αυτών το μοντέλο
απαιτεί προέγερση (πλά και μήματα) κινησιολογικού μοντέλου. Οπότε
λεπτομέρειες της δράσης όλων των άλλων στοιχείων του μέσου επί των
δυσωδίων (που τείνουν συνεχώς όριο, θεωρούνται στοιχειώδεις όγκοι
ρευστών) μπορεί να κριθεί ε'αυτοί που ονομάζονται αντίσταση και
κίνηση. Παράδειγμα ενός τέτοιου ρευστοδυναμικού μοντέλου είναι ο
κεντρικός νόμος του Ohm: Αν \vec{J} αντιπροσωπεύει ρεύμα κέρου
ηλεκτρονίων, χ^{-1} ένα είδος αντίστασης ή απορροής ορμής των
δυσωδίων συγκρούσεων των με ιόντα (ανά μόνο υποθέτουμε ότι υπάρχουν
επιτυχία των ηλεκτρονίων και σαν συγκρούσεις θεωρούμε την επίδραση
των αερίων πάνω στα ηλεκτρόνια) και με T_e τη θερμοκρασία
(αγαθή κινητικότητα - ενέργεια που σχετίζεται με τις αγαθές κινήσεις)

τότε :

$$\frac{Me}{n_e e^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\chi} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{n_e} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{n_e} \nabla (n_e k_B T_e) \quad (90)$$

όπου k_B η σταθερά Stefan-Boltzmann και \vec{v} το πεδίο ταχύτητας
των ρευστών ηλεκτρονίων. (ως προς άκτινο σύστημα αναφοράς),
Ο πρώτος, δεύτερος και τρίτος αριθμοί
όρος είναι ο αδρανειακός όρος, ο όρος αντίστασης και το φαινόμενο
Hall αντίστοιχα. Ο δεύτερος και τρίτος όρος δίνει είναι η μαγνητική
δύναμη επί του ρεύματος και του αερίου του (ανα μονάδα φορτίου)
και ο θερμοδυναμικός όρος αντίστοιχα.

Σε μίνιμι κατάσταση και πυκνό, ψυχρό ρευστό υγεραιών 45
 μπορούμε να αγνησουμε τον αδρανικό όρο και τα φαινόμενα
 Hall και θερμοεκφυκτικό, καταλήγοντας στην απλούστερη έκφραση

$$\vec{J} \approx \gamma_s (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (91)$$

Ο απλός νόμος του Ohm είναι η περίπτωση που $|\vec{v} \times \vec{B}| \ll |\vec{E}|$
 και διατηπώνεται σαν,

$$\vec{J} = \gamma_s \vec{E} \quad (92)$$

Το γ καλείται (ειδιική) ^{στατική} αγωγιμότητα και μπορεί να είναι
 συνάρτηση του χώρου. Πάντως, η τελικότερη σχέση σύνδεσης του \vec{J}
 με το \vec{E} είναι διανυσματική και μπορεί να υπάρχουν και μη
 γραμμικοί όροι, βεβαίως μπορεί κανείς να έχει εκφράσεις της
 μορφής (10) όταν τώρα οι πυρήνες-ταυοστές καλούνται αγωγιμότητες.
 Επίσης, όταν και στην περίπτωση των κλασιστικών σχέσεων
 μπορεί να έχουμε περιπτώσεις που η σύνδεση ρεύματος-πεδίου
 να γίνεται στον πραγματικό χρόνο ή στον συχνοτικό χώρο

με τη μορφή

$$\vec{J} = \gamma_s \vec{E} \quad (93)$$

$$\vec{J}_\omega = \gamma(\omega) \cdot \vec{E}_\omega$$

όταν στη δεύτερη περίπτωση, η σχέση διατυπώνεται μεταξύ των
 φασιδθικών ρεύματος-πεδίου. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό
 αργότερα.

Συχνά (όπως στον ηλεκτροστατικό και τους ηλεκτροδυναμικούς) χρησιμοποιείται η μεθόδου κινησιότητας αντί της αμφοτερότητας:

$$\vec{J} = \sum_{\pm} [n_{\pm} |q_{\pm}| \mu_{\pm} + n_{\mp} |q_{\mp}| \mu_{\mp}] \vec{E} \quad (94)$$

όπου μ_{\pm} , $|q_{\pm}|$, n_{\pm} είναι οι κινησιότητες, φορτίο ανά φορτία και αριθμική πυκνότητες των θετικών/αρνητικών φορέων αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι το \vec{J} μπορεί να εκφραστεί και με βάση τις μέσες ταχύτητες των φορέων ως εξής:

$$\vec{J} = \sum_{\pm} [n_{\pm} |q_{\pm}| \langle \vec{v}_{\pm} \rangle - n_{\mp} |q_{\mp}| \langle \vec{v}_{\mp} \rangle] \quad (95)$$

Απλά δύο αντίθετοι φορείς κινούνται αντίθετα, αλλά συνεισφέρουν προσδεμένα στο ρεύμα. Τέλος ας θυμηθούμε ότι η γρήγονη συκρίνωση φορέων χάρη δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_{\text{σκ}} = \sum_{\pm} [n_{\pm} |q_{\pm}| - n_{\mp} |q_{\mp}|] \quad (96)$$

Στοιχειώδεις "υπολογισμοί" του γ (ή μ_{\pm}) (στατικών μεθόδων)

Η δύναμη Lorentz ($\vec{B} = 0$) συνεπάγεται ότι για μικρά χρονικά διαστήματα κατά μέσο όρο ίσα με το χρόνο που οι φορτίς-σωματίδια συκρύνονται με άλλα ή με ατομικά/μοριακά συκρίσιμα (δηλαδή αλληλεπιδρούν έντονα) η δράση του \vec{E} προκαλεί μεταβολή στο ταχύτητα $\Delta \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} \Delta t \approx \frac{q}{m} \vec{E} L^{-1}$ όπου L η διαστάση των "συκρίσεων" κατά μέσο όρο. Για ένα σύστημα σωματιδίων λοιπόν θα έχουμε:

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \langle \Delta \vec{v}_{\alpha} \rangle \quad (97a)$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha} \nu_{\alpha}} \vec{E}$$

Επιπλέον :

$$\gamma = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}, \quad \gamma_{\alpha} \equiv \frac{q_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{m_{\alpha} \nu_{\alpha}} \quad (97b)$$

και

$$M_{\alpha} = \frac{|q_{\alpha}|}{m_{\alpha} \nu_{\alpha}} \quad (98)$$

As συμπρωθή είσιον ου σφιδίζηται να καθήται το αντιστοίχο της ειδικής αγωγιμότητας, ειδική αντίσταση. Είναι ενδιαφέρον να δούμε το μέγεθος του ν καθώς και του $J/n_e e$ (ταχύτητα ηλεκτρονίων αγωγιμότητας όταν $J=1A$) στο χαλκό, δεδομένου ότι η πυκνότητα n_e δ'απαιτεί είναι $n_e = 8.43 \times 10^{28} m^{-3}$. Αμέσως προκύπτει ότι $J/n_e e \approx 1 m/ώρα (!)$ για $J = 4 A/mm^2$. Είναι λοιπόν η κίνηση των ηλεκτρονίων (η συντεταγμένη, όχι τυχαία) που περιλαμβάνει σε σχέση με τα $10^5 m/sec$ που είναι περίπου η ταχύτητα των δόσων θερμικών κινήσεων στους $20^{\circ} C$ Κελσίου!

Πειραματικά μπορεί εύκολα να μετρηθεί το γ του χαλκού στους $20^{\circ} C$ Κελσίου π.χ. προκύπτει λοιπόν $\gamma = 5.8 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ ($1 \Omega = 1 V/1A$). Με βάση λοιπόν, αυτό εύκολα συνάγεται ότι $\nu \approx 4 \times 10^{13} sec^{-1}$ που αντιστοιχεί σε συχνότητα φασματική $f \approx 7 THz (!)$ (ο πηγή, δηλαδή, συχνότητα).

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι επειδή η συχνότητα συγκρίνεται

αυξάνεται όσο η στάση των φορέων του ρεύματος (ελαίτες
 δερμικές κινήσεις τους) αυξάνεται. Επειδή η τριβή αυξάνεται
 με την αύξηση της θερμοκρασίας των φορέων ή/και του μέσου
 (μυρίαν/αίμα) μέσα από το οποίο αυτή διέρχεται, περιγράφει
 κανείς μάλιστα του γ (ανάλογο του αντίθετου του ν) με
 αύξηση της θερμοκρασίας.

Μόνιμη ροή ρεύματος με στατικά πεδία (απουσία μαγνητικού πεδίου)

Προφανώς έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} &= 0 \\ \vec{J} &= \gamma \vec{E} \end{aligned} \quad (99)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία το γ είναι σταθερό και επειδή υπάρχει
 δυναμικό ϕ : $\vec{E} = -\nabla\phi$ ($\nabla \times \vec{E} = 0$) η (99), αδιακρίτως τιμής γ
 μας δίνει:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (100)$$

δηλαδή την εξίσωση Laplace. Ας σημειωθεί ότι ρ_{ext} μπορεί να
 υπάρχει αλλά χρονικά ανεξάρτητα. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου
 μάλιστα στις περιπτώσεις (99+100) και γραμμές ροής ρεύματος.

Ισοδύναμη φαινολογία σε χρονικά αβητές καταστάσεις

Οι εξισώσεις των Maxwell πέραν της φαινομένης μαθηματικοποίησης των
 στο πεδίο των φυσικών μπορούν επίσης να μαθηματικοποιηθούν περαιτέρω
 και στο πεδίο των εφαρμοδολογιών!

$$a_{\omega, \vec{k}} = \int_V dV' \int_{-\infty}^{\infty} dt' a(\vec{r}', t') e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t')} \quad (101)$$

όπου $a(\vec{r}', t')$ είναι κάποια από τις ποσότητες που συζητήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Το $a_{\omega, \vec{k}}$ είναι λοιπόν, φασική (μιάδα) στο συχνικό χώρο Fourier και επειδή το $a(\vec{r}', t')$ υπακούει σε αναρτήσεις σε πραγματική ποσότητα υπακούει στη σχέση $a_{\omega, \vec{k}}^* = a_{-\omega, -\vec{k}}$ (*: μιγαδικό συζυγές). Οι εξισώσεις Maxwell γίνονται τώρα,

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E}_{\omega, \vec{k}} &= \omega \vec{B}_{\omega, \vec{k}} \\ \vec{k} \times \vec{B}_{\omega, \vec{k}} + \mu_0 \omega \vec{D}_{\omega, \vec{k}} &= -j\mu_0 \vec{J}_{\omega, \vec{k}} \\ \vec{k} \cdot \vec{D}_{\omega, \vec{k}} &= -j\rho_{\omega, \vec{k}} \\ \vec{k} \cdot \vec{B}_{\omega, \vec{k}} &= 0 \end{aligned} \quad (102)$$

δίου, $\nabla \times \vec{a} \rightarrow j\vec{k} \times \vec{a}_{\omega, \vec{k}}$, $\nabla \cdot \vec{a} \rightarrow j\vec{k} \cdot \vec{a}_{\omega, \vec{k}}$ κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier.

Στην περίπτωση των φερμικών διαπερατήτων υλικών με μαγνητική διαπερατότητα αυτή του κενού, μ_0 , η μόνη συζακτική σχέση που θα μας ενδιαφέρει είναι αυτή η μεταξύ \vec{D} και \vec{E} (ή \vec{P} και \vec{E}). Όταν ήδη έχουμε επικυρώσει [σχίσμα (10)] θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \int dV' \chi(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') \quad (103)$$

όπου χ η επιδεκτικότητα (πυκνός) η οποία, για πομπές υλικό μέσο σε μόνιμη κατάσταση (χρονικά σταθερή ή περιοδική) είναι συνάρτηση μόνο των διαφορών $\vec{r} - \vec{r}'$ και $t - t'$. Η σχέση (103) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

έτσι :

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \int_0^{\infty} d\tau \int dV' \chi(\vec{r} - \vec{r}', \tau) \cdot \vec{E}(\vec{r}', t - \tau) \\ \chi(\vec{r} - \vec{r}', \tau) &= 0 \text{ για } \tau \leq 0 \end{aligned} \quad (104)$$

με

όπως η ανώμαλη για $\tau < 0$ (τ : χρονική διαφορά από το "τώρα" t) 50
 απλά διατυπώνει το νόμο της αγωγιμότητας: αρχικό ε ίσοδυναμεί με μερική
 χρονική σιγή και έτσι ο μη μηδενισμός της χ στην περίπτωση αυτή θα
 ισοδυναμεί με ανάπτυξη πλάσματος, δηλαδή ηλεκτρικών πεδίων που θα αναπτύσσονται
 στο μέλλον. Αποτέλεσμα όταν αυθαίρετα είναι ότι ο πηγή μετασχηματισμός
 Fourier της (104) θα είναι:

$$\vec{P}_{\omega, \vec{k}} = \epsilon_0 \chi_{\omega, \vec{k}} \cdot \vec{E}_{\omega, \vec{k}} \quad (105)$$

δηλαδή στην αλγεβρική σχέση. Εάν ορίσουμε σαν $\vec{\epsilon}_r(\omega, \vec{k})$ σαν τον παραμόρφωτο
 ταχυδύνη ηλεκτρικής επιπεδισμός (σχετικής) το $\vec{I} + \chi_{\omega, \vec{k}}$ (\vec{I} μοναδιαίος
 -διαστάσης πίνακας-ταυτοτής), θα έχουμε:

$$\vec{D}_{\omega, \vec{k}} = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{E}_{\omega, \vec{k}} \quad (106)$$

Το πεδίο των ηλεκτρικών φορτίων στην (102), $\vec{J}_{\omega, \vec{k}}$, μπορεί να θεωρηθεί ότι
 απορρέει από δύο μέρη: Τα εξωτερικά επιπέδισμα και επιπέδισμα (δηλαδή είναι
 καθορισμένων πεδίων, αλλά δεν επιπαραδύονται από αυτά) και από τα ρεύματα απεικονί-
 τικου, τα οποία, όπως είδαμε θα είναι $\vec{j}_s \cdot \vec{E}_{\omega, \vec{k}}$ (\vec{j}_s είναι ο στατικός τωνοτής
 απεικονίσιμος). Κανονική χρήση της (106) στην (102) και με βάση το
 διαχωρισμό των πεδίων, έχουμε:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_{\omega, \vec{k}}) - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_{\omega, \vec{k}} = -j\omega \mu_0 (\vec{j}_{\omega, \vec{k}} \epsilon_{\text{ext}} + \vec{j}_{\omega, \vec{k}} \epsilon_{\text{int}}) \quad (107)$$

όπως στο οριστικό μέτρο κάνουμε επίσης χρήση της πρώτης των (102). Η παραπάνω
 εξίσωση είναι η μετακυματώδη εξίσωση Helmholtz στην οποία πηγή είναι τα εξωτερικά
 ρεύματα και τα σταθερικά ρεύματα που είναι:

$$\vec{j}_{\omega, \vec{k}} \epsilon_{\text{int}} = [\vec{j}_s - j\epsilon_0 \omega \chi(\omega, \vec{k})] \cdot \vec{E}_{\omega, \vec{k}} \quad (108)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα "εσωτερικά" ρεύματα απορρέουν από τα απεικονίσιμα και τα ρεύματα

πλάτους, $-j\epsilon_0\omega \vec{\chi}(\omega, \vec{k})$. Εάν διασπαστούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\vec{\chi}$, έχουμε:

$$\vec{J}_{\omega, \vec{k}}^{\text{εσωτ}} = \vec{\chi}_{1600\delta}(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{E}_{\omega, \vec{k}} - j\epsilon_0\omega \vec{\chi}'(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{E}_{\omega, \vec{k}} \quad (108a)$$

$$\vec{\chi}_{1600\delta}(\omega, \vec{k}) \equiv \vec{\chi}_s + \epsilon_0\omega \vec{\chi}''(\omega, \vec{k})$$

Η πρώτη αντέδραση στα ηλεκτρικά πεδία είναι "αμικα" χαρακτήρα, δηλαδή είναι σε φάση με το ηλεκτρικό πεδίο 'εξ' η' και η ονομασία του $\vec{\chi}_{1600\delta}(\omega, \vec{k})$: ισοδύναμη αμφιμότητα (στο όριο $\omega \rightarrow 0$, συμπίπτει με την αμικα αμφιμότητα). Η δεύτερη αντέδραση έχει διαφορά φάσης $\pi/2$ σε σχέση με το συνολικό ρεύμα αμφιμότητας. Η ισοδύναμη αμφιμότητα υπακούει στη σχέση συμμετρίας

$$\vec{\chi}_{1600\delta}^*(\omega, \vec{k}) = \vec{\chi}_{1600\delta}(-\omega, -\vec{k}) \text{ διότι } \vec{\chi}''(-\omega, -\vec{k}) = -\vec{\chi}''(\omega, \vec{k}) \quad (\vec{\chi}_{\omega, \vec{k}}^* = \vec{\chi}_{-\omega, -\vec{k}})$$

Αρα αντιπροσωπεί ένα πραγματικό φυσικό μέγεθος, δηλαδή, υπάρχει ένα ισοδύναμο εσωτερικό ρεύμα αμφιμότητας (μέρος του οποίου είναι το αμικα ρεύμα), $\vec{J}_{1600\delta, \text{αμικα}}(\vec{r}, t)$

που θα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{J}_{1600\delta, \text{αμικα}}(\vec{r}, t) = \int_V dV' \int_0^{\infty} d\tau \vec{\chi}_{1600\delta}(\vec{r}-\vec{r}', \tau) \cdot \vec{E}(\vec{r}', t-\tau) \quad (109)$$

$$\vec{\chi}_{1600\delta}(\vec{r}-\vec{r}', \tau) = 0 \text{ για } \tau < 0$$

όπου $\vec{\chi}_{1600\delta}(\vec{r}, t)$ είναι ο αντίστροφος ογκικός μετασχηματισμός Fourier του $\vec{\chi}_{1600\delta}(\omega, \vec{k})$. Το ισοδύναμο ρεύμα αμφιμότητας απεικονίζει ρεύμα μεταφοράς φορτίων μόνο κατά το αμικακό τμήμα. Το υπόλοιπο αντιπροσωπεί ολισθήσεις-απομακρύνσεις από την κατάσταση μη αποβενιγμένης τάσης σε τοπικό επίπεδο των φορτίων που είτε σχηματίζουν δίπολα με το περιβάλλον ή απορροφούν φορτία που δύνανται να μετακινηθούν ως πραγματικό (μοριακό-ατομικό) δίπολο. Οι ολισθήσεις αυτές μπορεί να θεωρηθούν ως απεικονιστικά "αυτορροές" τους με

το πεδίο που βρίσκεται σε θερμική κίνηση, για παράδειγμα. Όπως και να είναι όμως, συνιστούν, όπως και στην περίπτωση των αλληλορρέουσων βε-ενεργειακών ατμοσφαιρών.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ POISSON-LAPLACE

Οι εξισώσεις αυτές απαντούν σε πλάθος εφαρμογών, κυρίως στατικών, στον ηλεκτρομαγνητισμό, όπως,

για $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ και $\vec{D} = \mu \vec{H} : \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_u, \vec{A} : \text{δυναμικό δυναμικό} \quad (110a)$

Εδώ, $\nabla^2 \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$, και έχουμε χρησιμοποιήσει τη συνθήκη Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (όραση $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (φ. ηλεκροστατικό δυναμικό)). Επίσης, σε άλλη περίπτωση,

για $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ και $\vec{D} = \mu \vec{H}$, μ : σταθερό και $\vec{J} = 0 : \nabla^2 \phi_m = 0$ με $\vec{H} = -\nabla \phi_m \quad (110b)$

Ακόμη, σε προβλήματα διηλεκτρικών υλικών, είδαμε ότι:

για $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ και $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, ϵ : σταθερό : $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_u}{\epsilon}$ με $\vec{E} = -\nabla \phi \quad (110c)$

για $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ και $\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P}$: $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_{ex}}{\epsilon_0}$ με $\vec{E} = -\nabla \phi \quad (110d)$

Στα αγώγια υλικά, $\vec{J} = \chi \vec{E}$:

για $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \vec{J} = \chi \vec{E}$, χ : σταθερό : $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial \rho_u}{\partial t}$ με $\vec{E} = -\nabla \phi \quad (110e)$

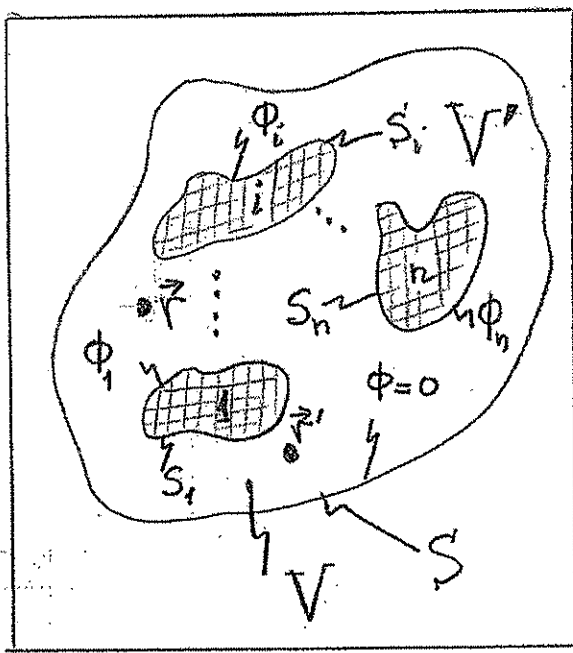
Στην περίπτωση, μάλιστα, της (110a) η δυναμική σχέση $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_u$ μετατρέπεται σε τρεις βαθμιαίες του τύπου $\nabla^2 A_i = -\mu J_{ui}$ στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ($i = x, y, z$). Επιπλέον, σε μια σημαντική περίπτωση έχουμε να αντιμετωπίσουμε τη λύση εξισώσεων του τύπου:

$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = S(\vec{r}) : \text{POISSON}$
 $\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0 : \text{LAPLACE} \quad (III)$

Η ΕΙΔΙΚΗ ΚΑΙ Η ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ P-L

Για λόγους αυστηρότητας της περιγραφοίς θα περιορισθούμε στο ηλεκτροστατικό πρόβλημα στη φυσική περιγραφή των πεδίων και των ιδιοτήτων των εξισώσεων P-L. Στην συνέχεια όμως θα δούμε πως εφαρμόζονται τα συμπεράσματα σε πηχό περιπτώσεων όχι μόνο ηλεκροστατικών.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του διηλεκτρικού χώρου. Δηλαδή, με δεδομένα πυκνότητα φορτίων $\rho(\vec{r})$ στο χώρο μεταξύ επιφανειών δεδομένων δυναμικών Φ_i σε σύστημα που καταλαμβάνει συνολικό όγκο V . Οι επιφανείες διαφόρων δυναμικών κολλούνται επιφανείες τελείων αμφοίων, υπέρ των οποίων δεν επιτρέπεται συγκεντρώσει φορτίων με κανόνισμα χωρική διαμόρφωση (όταν επιφανεία τους) των δυναμικών. Οι διαφορές δυναμικών είναι μάλιστα όχι



γίνονται να κινήσει φορτία. Τα φορτία, λοιπόν, είναι ζεύγη ελαστικά να κινηθούν έτσι ώστε να αποκατασταθεί τελική ισορροπία σε ισοδυναμική κατάσταση. Είναι V' ο χώρος (όγκος) μεταξύ των επιφανειών S_i ($i=1, \dots, n$). Μεταξύ των επιφανειών ισχύει η εξίσωση:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rho = \rho_u + \rho_f = \rho_u - \nabla \cdot \vec{P} \quad \text{μνωτό} \quad (112a)$$

ή

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_u}{\epsilon} \quad \text{αν} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \epsilon: \text{σταθερό} \quad (112b)$$

της οποίας ειδική λύση (p) είναι το ομογενή πεδίο σταθμίας:

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (113)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει πάντα εντός του χώρου V . Σημειώνω ότι η εξίσωση

επιφάνεια S' του V μπορεί να είναι και στο άπειρο (* ΠΡΟΣΟΧΗ).

Η επιδιώξιμή δει είναι μονοσήμαντα ορισμένη για τον ερμεί αηό γόμο. Αν

υποθέσουμε ότι V_c είναι ο συμπληρωματικός του V χώρος-όγκος και αν εκεί υπάρχουν κατανομή φορτίων, έστω $\rho_c(\vec{r})$, τότε θα ισχύει για όλο το χώρο V και V_c λόγω των $\rho_c(\vec{r})$:

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \phi_c = \begin{cases} \rho_c(\vec{r}), & \vec{r} \text{ στον } V_c \\ 0, & \vec{r} \text{ στον } V \end{cases} \quad (114\alpha)$$

Δεδομένου όμως ότι λόγω των $\rho(\vec{r})$ στον V ισχύει για όλο τον χώρο

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \phi_p = \begin{cases} 0, & \vec{r} \text{ στον } V_c \\ \rho(\vec{r}), & \vec{r} \text{ στον } V \end{cases} \quad (114\beta)$$

οτίστε για το χώρο ενδιαφέροντός μας θα έχουμε επιπλοήσεις *:

$$-\epsilon_0 \nabla^2 (\phi_c + \phi_p) = \rho(\vec{r}) \quad (114\gamma)$$

που συνδυάζεται με την (112α) και άρα,

$$\phi_c(\vec{r}) + \phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (114\delta)$$

Ό, επιπλέον, το ολοκλήρωμα επιπλοήσεις για τον συμπληρωματικό χώρο V_c δίνει:

$$\phi_c(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_c} \frac{\rho_c(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (114\epsilon)$$

θα έχουμε επίσης

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int_{V_c} \frac{\rho_c(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad (114\epsilon')$$

όπου $\rho_c(\vec{r})$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση!

* Ισχύει η επιπλοήσεις λόγω εφαρμογής των εξισώσεων Poisson.

Ετσι, έχουμε, ζήτημά, αντίθεση μεταξύ των λύσεων (113) και (114 α'). Η αντίθεση αυτή απορρέει από τη μη-μοναδικότητα της ειδικής λύσης που βγαίνει στα φορτία του χώρου V , και μόνο. Υπάρχει όμως και ένας άλλος λόγος που

η λύση αυτή (113) είναι αληθής: Δεν περιέχει 4 ποσά το μέγεθος οι επιφάνειες S_i είναι ισοδυναμικές επιφάνειες. Επίσης, λόγω απουσίας επιφληνικών ραμμάτων δ'αυτής (έχει ήδη επεξηγηθεί η ισορροπία όπως υπάρχει) και λόγω πληρώσεως μηδενισμού των πεδίων στο εσωτερικό τους, θα πρέπει η επιφληνική παράγωγος του ϕ δ'αυτής να μηδενίζεται. Αναζητούμε λοιπόν στον (113) το πρόβλημα που να συμπεριλάβουμε τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Ο λόγος εμφάνισης του προβλήματος αυτού είναι η απουσία της συνεισφοράς στο δυναμικό, των φορτίων που είναι επιφληνικά κατανεμημένα στις ισοδυναμικές επιφάνειες!

Η συνεισφορά αυτή στο δυναμικό, ϕ_h , υπακούει του εξίσωση LAPLACE

$$\nabla^2 \phi_h = 0 \quad (115)$$

Η συνομήλο λογισμό στο πρόβλημα:

$$(116a) \quad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho_{ολ}}{\epsilon_0} \quad \text{με} \quad \phi(S_i) = \phi_i, \quad i=0,1,\dots,n, \quad S_0 \text{ επιφ.} \\ \text{με} \quad S_0 \equiv S, \quad \text{και} \quad \phi_0 = 0$$

είναι

$$(116b) \quad \phi = \phi_p + \phi_h, \quad \phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_{ολ}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \\ \nabla^2 \phi_h = 0 \quad \text{με} \quad \phi_h(S_i) = \phi_i - \phi_p(S_i), \quad i=0,1,\dots,n \\ \text{με} \quad S_0 \equiv S \quad \text{και} \quad \phi_0 = 0$$

Ετσι, στις επιφάνειες θα έχουμε $\phi(S_i) = \phi_p(S_i) + \phi_h(S_i) = \phi_i$. Η λύση αυτή, της εξίσωσης Poisson μπορεί να γίνει σε δύο βήματα:
 (1) Υπολογισμός των ομοιομορφικών επιφληνικών δυναμικών την ιδιαιτερότητα. Με

βάζουν και υπολογίζουμε τις τιμές $\phi_h(S_i) = \phi_i - \phi_p(S_i)$ ολοποσής στην
 πραγματικότητα είναι συναρτήσεις των \vec{r} σε κάθε μία από τις επιφανειακές δυνάμεις.
 [λόγω του ότι, φυσικά, $\phi_p(S_i)$ δεν είναι σταθερό επί της S_i]. Πάντως, οι
 συναρτήσεις αυτές είναι πρωτές συναρτήσεις.

(2) Λύση της εξίσωσης LAPLACE $\nabla^2 \phi_h = - \text{ολ. εσ. υποκείμενης σε}$ οριακές
 συνθήκες $\phi_h(S_i) = \phi_i - \phi_p(S_i)$.

Στο τέλος, η συνολική (και μοναδική πλέον) λύση είναι το άθροισμα $\phi_p + \phi_h$.

Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΜΗΧΙΑΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LAPLACE

Η εξίσωση LAPLACE είναι, λοιπόν, ιδιαίτερα κεντρική στη λύση των προβλημάτων των
 ηλεκτροστατικών, κύρια σε συνθήκες καταστάσεως ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ή/και $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$).
 Το μόνο που επιπλέον χρειάζεται είναι ο υπολογισμός στοιχειωδών επιφανειακών
 αποκλίσεων έτσι η αλληλεπίδραση κατανομή επιφανειακών φορτίων συμβολίζει
 με τα δυναμικά των επιφανειακών-φορέων τους και ο συνδυασμός μ' αυτές υπολογισμών
 επιφανειακών στοιχειωδών αποκλίσεων. Επιπλέον οι εξισώσεις Laplace (116β)

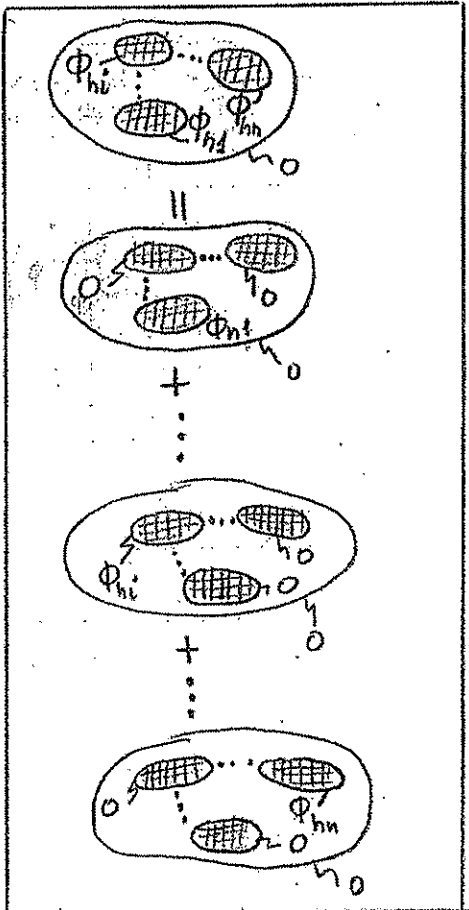
μπορούν να διαπεριωρισθούν ακόμη ευκολότερα
 με τη βοήθεια της εξής σταθμισίας:

$$\phi_h = \sum_{j=1}^n \phi_{hj} \quad (117a)$$

όπου,

$$\phi_{hj} : \nabla^2 \phi_{hj} = 0$$

$$\text{με } \phi_{hj}(S_i) = \begin{cases} \phi_i - \phi_p(S_i) & \text{για } i=j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases} \quad (117b)$$



δηλαδή, το πρόβλημα εύρους της λύσης στην εξίσωση
 LAPLACE ανάθεσε στη λύση ίδιων απλών προβλημάτων
 (πχ. απιονόητων) προβλημάτων, με τη δράση των
 επιφανειακών με δοσμένες συναρτήσεις δυναμικών (δεν
 είναι απαραίτητο, όπως είδαμε, 100 δυναμικών επιφανειακών στη γενική περίπτωση).

ΠΙΝΑΚΑΣ ΧΩΡΙΤΙΚΟΤΗΤΩΝ

Αν υποθέσουμε ότι σε ένα χώρο υπάρχουν n επιφανείες τείνων σφαιρών (ηλεκτρονίων) σταθερά δυναμικά v_j , ενώ δεν υπάρχει φορτίο χώρο στον χώρο μεταξύ τους τότε, με βάση τα προηγούμενα η λύση για το δυναμικό στο χώρο θα είναι $\phi = \sum \phi_j$ με $\phi_j: \nabla^2 \phi_j = 0$ και $\phi_j(S_i) = 0$ για $i \neq j$ ενώ $\phi_j(S_j) = v_j$. Εάν τώρα θέσουμε

να υπολογίσουμε το φορτίο μιας εκάστη των επιφανειών-ηλεκτροδίων θα έχουμε:

$$q_i = - \oint_{S_i} \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \epsilon_0 \oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \epsilon_0 \oint_{S_i} \nabla \phi \cdot d\vec{S} = - \sum_{j=1}^n \epsilon_0 \oint_{S_i} \nabla \phi_j \cdot d\vec{S}$$

Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης LAPLACE, το δυναμικό ϕ_j είναι ανάλογο προς το δυναμικό v_j που είναι υπεύθυνο για τη δημιουργία του. Άρα μπορεί να

ορίσει κανείς τις ακόλουθες, ανεξάρτητες των v_j ποσότητες,

$$C_{ij} \equiv \frac{- \oint_{S_i} \epsilon_0 \nabla \phi_j \cdot d\vec{S}}{v_j} \quad (118)$$

οι οποίες καλούνται συντελεστές χωρητικότητας. Επει το φορτίο q_i γίνεται:

$$q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} v_j \quad (119a)$$

ενώ το συνολικό φορτίο,

$$q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} v_j \quad (119b)$$

Το μέγεθος C_{ii} καλείται συντελεστής αυτο-χωρητικότητας, ενώ C_{ij} ($i \neq j$) συντελεστές αμοιβαίας χωρητικότητας.

Η ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ POISSON

Η αξία του θεωρήματος μοναδικότητας της λύσης της εξίσωσης Poisson διακρίνεται στο ότι με σταθερότερο ζήτημα και αν βρούμε η λύση (μαθηματικά ή φυσικά) τότε είναι και η μόνη. Επίσης υποδεικνύει το θεωρητικό από τις ορίσεις...

συνθήκες φυσικές που εξασφαλίζουν μοναδικότητα λύσεων. Φυσικά η μοναδικότητα 58
 εφαρμόζεται και για την εξίσωση LAPLACE ($\rho = 0$). Πριν την εξήταση της
 μοναδικότητας της λύσης ας ορίσουμε τις πλέον διαδεδομένες οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται
 και σε πόλλα φυσικά συστήματα και δεν περιορίζονται μόνο σε τέτοια σχήματα οριακές επιφάνειες.
 Ορίζουμε συν L_j των τελετών:

$$L_j \equiv \alpha_j(\vec{r}_s) + \beta_j(\vec{r}_s) \frac{\partial}{\partial n}, \quad \alpha_j(\vec{r}_s), \beta_j(\vec{r}_s): \text{μικτές, συνθήκες} \quad (120a)$$

όπου $\frac{\partial}{\partial n}$ νόστος η κάθετη παραγωγή προς τα έξω των επιφανειακών των οριακών επιφανειών
 τότε μια μετρία κατηγορία οριακών συνθηκών είναι οι συνθήκες Newton:

$$L_j \phi(\vec{r}_{S_j}) = c_j(\vec{r}_s) \text{ επί των } S_j : \text{συνθήκες Newton} \quad (120b)$$

Υποπεριπτώσεις: $\alpha_j = 0$ παντού: συνθήκες Neumann
 $\beta_j = 0$, παντού: συνθήκες Dirichlet
 $\left. \begin{array}{l} \alpha_j^2(\vec{r}_s) + \beta_j^2(\vec{r}_s) \neq 0 \\ \alpha_j(\vec{r}_s) \cdot \beta_j(\vec{r}_s) \geq 0 \end{array} \right\} : \text{μικτές συνθήκες} \quad (120\gamma)$

• Μοναδικότητα: Έστω το πρόβλημα:
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon \\ L\phi(\vec{r}_s) = c(\vec{r}_s) \\ \text{μικτές συνθηκών} \end{array} \right\}$$

το οποίο υποθέτουμε ότι επιδέχεται δύο λύσεις $\phi_1(\vec{r})$ και $\phi_2(\vec{r})$. Τότε λόγω
 σταθμίας θα ισχύει και το πρόβλημα:
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 (\phi_1 - \phi_2) = 0 \\ L[\phi_1(\vec{r}_s) - \phi_2(\vec{r}_s)] = 0 \\ \text{μικτές συνθηκών} \end{array} \right\}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα Green με $(*) f = g = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$:

$$\int_V [(\phi_1 - \phi_2) \nabla^2 (\phi_1 - \phi_2) + \nabla(\phi_1 - \phi_2) \cdot \nabla(\phi_1 - \phi_2)] dV = \oint_{S(V)} (\phi_1 - \phi_2) \nabla(\phi_1 - \phi_2) \cdot \vec{dS}$$

(*) Ταυτότητα Green:

g, f συναρτήσεις δεικνόμενες:
$$\int_V [g \nabla^2 f + \nabla g \cdot \nabla f] dV \equiv \oint_{S(V)} g \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

 στον V (περιβλήμα d πλάτους S)
 όπου $\frac{\partial f}{\partial n} dS \equiv \nabla f \cdot \vec{dS}$

Επιπλέον: $0 \ll \int |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)|^2 dV = \int_S \frac{\beta(\vec{r}_s)}{\alpha(\vec{r}_s)} |\partial_n(\varphi_1 - \varphi_2)|^2 dS \ll 0$ 59
 εκεί όπου $\alpha(\vec{r}_s) \neq 0$
 $-\int_S \frac{\alpha(\vec{r}_s)}{\beta(\vec{r}_s)} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 dS \ll 0$
 εκεί όπου $\beta(\vec{r}_s) \neq 0$

Αρα, $\nabla(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ παντού αρκεί να υπάρχει ένα τυχόν σημείο δηλαδή επί της S όπου: $\alpha(\vec{r}_s) \neq 0$ ή $\beta(\vec{r}_s) \neq 0$. Αρα, $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{σταθερά}$. Η

σταθερά αυτή μπορεί να προσδιοριστεί:

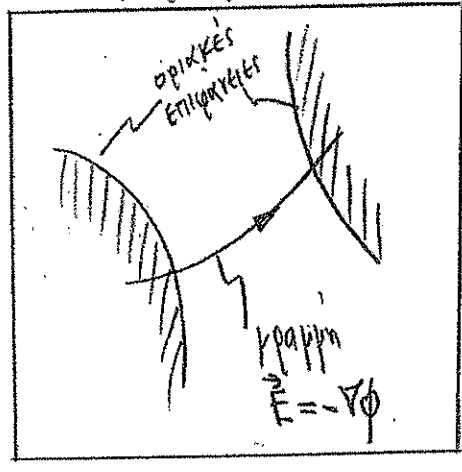
(1) Έστω ότι σε ένα τυχόν σημείο \vec{r}_s που οριζόμαστε $\alpha(\vec{r}_s) \neq 0$. Τότε

$$\Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \Rightarrow \alpha(\vec{r}_s) \cdot \text{σταθερά} = 0 \Rightarrow \text{σταθερά} = 0$$

(2) Εάν παντού στο S είναι $\alpha(\vec{r}_s) = 0$ τότε η σταθερά αυτή παραμένει απροσδιορίσιμη. Δηλαδή σε συνθήκες Neumann προβλεπεται στη λύση μια απροσδιορίσιμη σταθερά \otimes (ΠΡΟΣΟΧΗ).

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ LAPLACE

Η $\nabla^2 \phi = 0$ δεν μπορεί να έχει μέγιστα ή ελάχιστα εκτός των οριακών επιφανειών. Δηλαδή, σε κανένα σημείο του χώρου μεταξύ των επιφανειών θα μπορεί η τιμή του ϕ να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη της μικρότερης ή μεγαλύτερης τιμής της επί των οριακών επιφανειών. Ο



λογοι είναι απλά ότι οι γραμμές του \vec{E} , δηλαδή οι γραμμές ρεύματος του ϕ πρέπει να αρχίζουν και να τελειώνουν σε οριακή επιφάνεια. Λόγω του βαρυσταθούς χαρακτήρα του πεδίου ($\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi = 0$) οι γραμμές δεν μπορούν να αρχίζουν ή να σταματούν σε σημεία εντός του όγκου V , μεταξύ των οριακών επιφανειών. Εποί,

όλα τα άκρωςτα μέγιστα και ελάχιστα θα κείνται επί των οριακών επιφανειών όταν $\nabla^2 \phi = 0$.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΕΠΙΛΛΗΛΙΑΣ

Μια παρέρχουσα της ταυτότητας Green είναι η ακόλουθη

$$\int_V (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g) dV = \oint_{S(V)} (g \nabla f - f \nabla g) \cdot d\vec{S} \quad (121)$$

Αν αυτή εφαρμοστεί για $f = \phi$ και $g = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ τότε εύκολα προκύπτει (*)
 όπου (με $\nabla^2 \phi = -\rho_v/\epsilon_0$ ή $\nabla^2 \phi = -\rho_u/\epsilon$)

$$(122) \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{ολ}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dS$$

ή η αντίστοιχη ($\rho_{ολ} \rightarrow \rho_u, \epsilon_0 \rightarrow \epsilon$).

Παρατηρούμε ότι το διωνυμικό διαφοροποιείται από τις τιμές των $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ και ϕ επί των οριακών επιφανειών $[S(V)]$ μπορεί να αποζητήσουμε επιφανειακά $\{S_j\}$ καθώς και από τα χαρακτηριστικά χαρακτηριστικά τους. Φυσικά, ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει το συνολικό ολοκλήρωμα επιφανειακά για τα τρέχονα φορτία φορτία χώρου. Η (122) είναι λοιπόν ισοδύναμη έκφραση με τη λύση του προβλήματος Poisson με οριακές συνθήκες Dirichlet ή Neumann ή ειδικότερα δίνονται η εφαρμογή των, π.χ., βρέχων, της ορθογωνίου ολοκλήρωσης. Για την περίπτωση της εξίσωσης Laplace με $\Delta_j \phi(\vec{r}_{S_j}) = c(\vec{r}_{S_j})$ επί των οριακών επιφανειών $\{S_j\}$ η εξειδίκευση της (122) είναι:

$$(123) \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_j \oint_{S_j} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{S_j} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{S_j}|} + \frac{\beta(\vec{r}_{S_j})}{\alpha(\vec{r}_{S_j})} \right] - \frac{c(\vec{r}_{S_j})}{\alpha(\vec{r}_{S_j})} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{S_j}|} \Bigg\} dS \\ & \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{S_j}|} \frac{c(\vec{r}_{S_j})}{\beta(\vec{r}_{S_j})} - \phi(\vec{r}_{S_j}) \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{S_j}|} \frac{\alpha(\vec{r}_{S_j})}{\beta(\vec{r}_{S_j})} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{S_j}|} \right] \right\} dS \end{aligned} \right.$$

για $\vec{r}_{S_j} \in \alpha(\vec{r}_{S_j}) \neq 0$
για $\vec{r}_{S_j} \in \beta(\vec{r}_{S_j}) \neq 0$

(*) Ας σημειωθεί ότι,

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \text{ όπου } \delta(\vec{r} - \vec{r}') \text{ συνάρτηση δέλτα με}$$

$$\int_V dV' \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 0 & \text{για } \vec{r} \text{ εκτός } V \\ 1 & \text{για } \vec{r} \text{ εντός } V \end{cases}$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ POISSON ΣΕ ΕΙΔΙΚΟ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα $\{ \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \text{ στο } V \text{ και } \mathcal{L}\phi(\vec{r}_s) = c(\vec{r}_s) \text{ στο } S \}$ (επιλογή επιφανείας περιρροής του χώρο όγκου V). Η αναγωγή έχει ως εξής:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_{\text{ειδ}}(\vec{r}) + \phi_{\text{συμπ}}(\vec{r}) \quad \text{με } \vec{r} \text{ στο } V *$$

$$\phi_{\text{ειδ}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{V_c} \frac{\rho_c(\vec{r}'_c) dV'_c}{|\vec{r} - \vec{r}'_c|} \right]$$

$\rho_c(\vec{r}'_c)$ φορτία στο συμπλήρωμα του V (V_c) δικής μας επιλογής

$$\phi_{\text{συμπ}}(\vec{r}) : \nabla^2 \phi_{\text{συμπ}} = 0, \quad \mathcal{L}\phi_{\text{συμπ}}(\vec{r}_s) = c_{\text{συμπ}}(\vec{r}_s)$$

$$c_{\text{συμπ}}(\vec{r}_s) \equiv c(\vec{r}_s) - \mathcal{L}\phi_{\text{ειδ}}(\vec{r}_s)$$

(124)

- Πλεονεκτήματα της μεθόδου:
- (1) Επίλυση της LAPLACE αντί POISSON
 - (2) Με κατάλληλη επιλογή των φορτίων $\rho_c(\vec{r}'_c)$ υπάρχει η δυνατότητα (δύσκολο, βεβαίως!) να έχουμε $c_{\text{συμπ}}(\vec{r}_s)$ διευκολύει να έχουμε πάλι να υποθέτουμε LAPLACE με ομογενείς οριακές συνθήκες.

Συνθήκες των ομογενών οριακών συνθηκών στη λύση της LAPLACE:

- (2α) : αν $\beta = 0$ (DIRICHLET) τότε $\phi(\vec{r}_s) = 0$, οπότε $\phi_{\text{συμπ}}(\vec{r}) = 0$ παντού στο χώρο λόγω μοναδικότητας
- (2β) : αν $\alpha = 0$ (NEUMANN) τότε $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_{\vec{r}_s} = 0$, οπότε $\phi_{\text{συμπ}}(\vec{r}) = 0$ παντού στο χώρο λόγω μοναδικότητας
- (2γ) : αν $\alpha, \beta \neq 0$ (ΜΙΚΤΗ) τότε $\alpha\phi + \beta\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$, οπότε $\phi_{\text{συμπ}}(\vec{r}) = 0$ παντού στο χώρο λόγω μοναδικότητας

Είναι εύκολο να δείξει ότι η ειδική λύση πρόβλημα ικανοποιεί την POISSON:

$$\nabla \phi_{\text{ειδ}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V+V_c} \nabla_{\vec{r}} \frac{\rho^*(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \quad \text{με} \quad \rho^*(\vec{r}') = \begin{cases} \rho(\vec{r}') & \text{στον } V \\ \rho_c(\vec{r}') & \text{στον } V_c \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V+V_c} -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \rho^*(\vec{r}') dV' \quad \left(\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right)$$

οπότε,

$$\nabla^2 \phi_{\text{ειδ}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V+V_c} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) \rho^*(\vec{r}') dV' = -\frac{1}{\epsilon} \int_{V+V_c} \delta(\vec{r}-\vec{r}') \rho^*(\vec{r}') dV'$$

$$= -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{επειδή το } \vec{r} \text{ ανήκει στον } V.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ POISSON-LAPLACE

Το πρόβλημα των διεπιφανειών μπορεί να αντιμετωπισθεί εύκολα με την απλή εφαρμογή των εξισώσεων Maxwell για τις αδυναμίες. Μπορούμε να διακρί-

νουμε είτε (1) $\epsilon_0 \vec{\tau}_n \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \sigma_{\text{ολ}}$ και \vec{P}_\pm μισά, είτε (2) $\vec{\tau}_n \cdot (\epsilon_+ \vec{E}_+ - \epsilon_- \vec{E}_-) = \sigma_{\text{ολ}}$ για ϵ_\pm πυκνωτές σταθερές επιρρημότητες. Επίσης έχουμε $\vec{\tau}_n \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0$. Οι σχέσεις αυτές έχουν σαν συνέπεια για το δυναμικό ϕ που υπακούει στις εξισώσεις POISSON-LAPLACE τα εξής:

$$\phi_+ = \phi_- \quad \text{και} \quad \begin{cases} (\partial\phi/\partial n)_+ - (\partial\phi/\partial n)_- = -\frac{\sigma_{\text{ολ}}}{\epsilon_0} & \text{ανάλυση με την περίπτωση} \\ (\partial\phi/\partial n)_+ \epsilon_+ - (\partial\phi/\partial n)_- \epsilon_- = -\sigma_{\text{ολ}} \end{cases} \quad (125)$$

ΟΤΙΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ που δεν απειρίζεται το ηλεκτρικό πεδίο επί της επιφάνειας (π.χ, οχι σε περιπτώσεις διπολικού σφαιρικού). Η (125) αποτελεί οριακή συνθήκη και η διεπιφάνεια, έτσι, μπορεί να θεωρηθεί σαν οριακή επιφάνεια και για τα δύο προβλήματα POISSON-LAPLACE που διατυπώνονται στους δύο ημιχώρους (\pm) που διαχωρίζει.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LAPLACE ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

ΓΕΝΙΚΟ (ΧΩΡΙΣ ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΙΣ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ) ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \quad (126\alpha)$$

με $\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$0 = \frac{\nabla^2 \phi}{\phi} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \quad ('' = \frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^2}{dy^2}, \frac{d^2}{dz^2}) \quad (126\beta)$$

$$\begin{aligned} X'' &= -k_x^2 X \\ Y'' &= k_y^2 Y \\ Z'' &= -k_z^2 Z \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{με } k_y^2 &= k_x^2 + k_z^2 \\ k_{x,y,z} &: \text{σταθερές.} \end{aligned} \quad (126\gamma)$$

Ο χωρισμός μεταβλητών οδηγεί το πρόβλημα στη λύση 3 συνήθων διαφορικών εξισώσεων όπου υπαγορεύονται 3 σταθερές ποσότητες εκ των οποίων οι 2 είναι "ανεξαρτήτες". Η τιμή των σταθερών αυτών (άρα, και των λύσεων) θα γίνει στη βάση των οριακών συνθηκών όπως θα δούμε. Προς το παρόν θα δούμε άμεσα το είδος των λύσεων της (126γ) στη βάση των προσημών των $k_{x,y,z}^2$. Οι σταθερές $k_{x,y,z}$ και ούτως ή άλλως διαχωρισμού και μπορεί να είναι πραγματικές ή φανταστικές. Για δύο διαχωρισμούς έχουμε μόνο μία σταθερά διαχωρισμού. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} X'' &= -k^2 X \\ Y'' &= k^2 Y \end{aligned} \quad k^2 : \text{σταθερά} \quad (126\delta)$$

Ας δώσουμε τώρα τα είδη των λύσεων για το διδικύριο πρόβλημα, στη βάση των

Προβλήματα των k^2 : Τα είδη αυτά ονομάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$k=0$	$k^2 \geq 0$	$k^2 \leq 0$ ($k \rightarrow jk'$)
1	$\cos kx \cosh ky$	$\cosh kx \cdot \cos ky$
x	$\cos kx \sinh ky$	$\cosh kx \cdot \sin ky$
y	$\sin kx \cosh ky$	$\sinh kx \cdot \cos ky$
xy	$\sin kx \sinh ky$	$\sinh kx \cdot \sin ky$
	$\cos kx \cdot e^{-ky}$	$e^{kx} \cdot \cos ky$
	$\cos kx \cdot e^{ky}$	$e^{-kx} \cdot \cos ky$
	$\sin kx \cdot e^{ky}$	$e^{kx} \cdot \sin ky$
	$\sin kx \cdot e^{-ky}$	$e^{-kx} \cdot \sin ky$

(127)

Σε κάθε περίπτωση υπάρχουν οι στοιχειώδεις εκτίτες συναρτήσεις γραμμικός συνδυασμός των οποίων είναι η γενική λύση $\phi = X \cdot Y$. Για παράδειγμα, στην περίπτωση $k=0$ η λύση θα είναι της γενικής μορφής $C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy$ ή, ισοδύναμα, $X \equiv Ax + B, Y = \Gamma y + \Delta$, με (C_1, C_2, C_3, C_4) ή (A, B, Γ, Δ) σταθερές που καθορίζονται στο πλαίσιο προβλήματος από τις οριακές συνθήκες. Όλες οι συναρτήσεις, $1, x, y, \cos kx, \sin kx, \cosh ky, \sinh ky, \cos ky, \sin ky$ είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις που υφίστανται ανάλυση με την περίπτωση την (126δ). Στην περίπτωση των 3 διαστάσεων τα πράγματα παρόμοια υπάρχουν 3 σταθερές διαχωρισμού (δύο "ανεξαρτητές"), δεν διαφέρουν ποσοτικά: Ομοίως, ανάλογα με την περίπτωση θα έχουμε

(128)

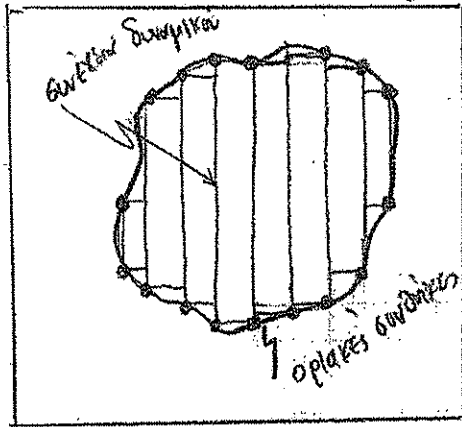
$X : \cos k_x x$ ή $\sin k_x x$, k_x πραγματικό ($k_x^2 > 0$) ή φανταστικό ($k_x^2 < 0$)
$Y : \cosh k_y y$ ή $\sinh k_y y$, k_y πραγματικό ($k_y^2 > 0$) ή φανταστικό ($k_y^2 < 0$)
$Z : \cos k_z z$ ή $\sin k_z z$, k_z πραγματικό ($k_z^2 > 0$) ή φανταστικό ($k_z^2 < 0$)

με την παρατήρηση ότι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις φανταστικού ορίσματος ισοδυναμούν με υπερβολικές συναρτήσεις πραγματικού ορίσματος ($k_{x,y,z} \rightarrow j k'_{x,y,z}$) όπως και οι υπερβολικές συναρτήσεις φανταστικού ορίσματος ισοδυναμούν με τριγωνομετρικές πραγματικού ορίσματος. Επίσης οι εκθετικές συναρτήσεις πραγματικού εκθέτη είναι πάντα συνδυασμοί τριγωνομετρικών υπερβολικών συναρτήσεων πραγματικού ορίσματος. Πάντα πρέπει να αναφέρεται είναι εξαρτημένη: αν $(k_x^2 > 0, k_y^2 > 0)$ τότε $k_z^2 > 0$, αν $(k_x^2 < 0, k_y^2 < 0)$

Τότε επίσης $k_z^2 < 0$: όταν όμως $k_x^2 \cdot k_y^2 < 0$ τότε το πρόβλημα των k_z^2 (αρκ και η μορφή των μ δένων) εξαρτάται από το πρόβλημα των $k_x^2 + k_y^2$ (θετικό ή αρνητικό).

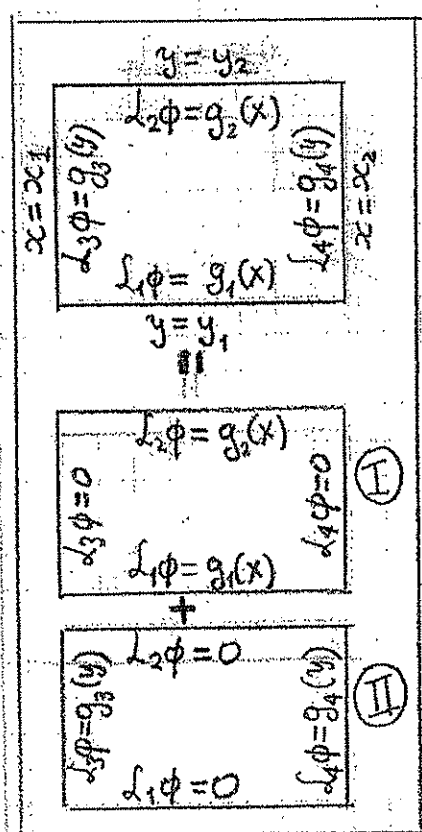
Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΣΤΙΣ 2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ορισμένες συνθήκες επί των πλευρών ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου: Στο εχάρινισιο 2-διδότατο χωρίο γίνεται προσπάθεια χωρισμού του σε μικρότερα ορθογώνια υποχωρία που να μπορούν να αντιμετωπιστούν να το προσεγγίσουν. Αν η κάλυψη αυτή δεν είναι ικανοποιητική, τότε θα πρέπει να διατρέξουμε σε άλλα συστήματα συντεταγμένων. Το πρόβλημα γίνεται σε κάθε χωρίο ξεκινώντας με συνθήκες συνέχειας στις κοινές διαχωριστικές γραμμές μεταξύ των χωρίων. Βέβαια οι τιμές των συναρτήσεων στις γραμμές αυτές είναι άγνωστες, γι' αυτό



να τονίσουμε γύρω των βιβάσεων που προσεγγίζουμε από όσα να υποχωρία σε ανάλυση με τις πραγματικά ορισμένες συνθήκες στα φράγματα αυτά των συστημάτων μπορεί να αντιμετωπιστούν το πρόβλημα άμεσα.

Η αναπαράσταση των προβλημάτων στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, στην ειδική περίπτωση που όλες οι οριζόντιες συνθήκες δίνονται μόνο των $L_j \equiv \alpha_j + \beta_j \frac{\partial}{\partial n}$ ($j=1,2,3,4$) με α_j, β_j : σταθερές ποσότητες, γίνεται ως εξής:



(1) Χωρίζουμε το πρόβλημα σε δύο ερωτήματα το καθένα να έχει ορισμένες τις οριζόντιες συνθήκες των απέναντι πλευρών.

(2) Στο καθένα εκ των δύο προβλημάτων, επιλέγονται οι κατάλληλες τριτογενείς-υπερβολικές συνθήκες που ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές.

(3) Οι μη ορισμένες οριζόντιες συνθήκες, αντιμετωπίζονται κατά Fourier με βάση τις ιδιοσυναρτήσεις που προκύπτουν ως εξής:

(*) $\frac{\partial}{\partial n} = \pm \frac{\partial}{\partial x}$ για L_3, L_4 και $\pm \frac{\partial}{\partial y}$ για L_1, L_2

Αναλυτικά έχουμε:

Πρόβλημα I : $\phi = \sum_n X_n(x) Y_n(y)$, $X_n = A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)$
με k_n , A_n/B_n προς προσδιορισμό:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_3 \phi = 0 \\ \mathcal{L}_4 \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \cos(k_n x_1) + k_n \beta_3 \sin(k_n x_1) & \alpha_3 \sin(k_n x_1) - \beta_3 k_n \cos(k_n x_1) \\ \alpha_4 \cos(k_n x_2) - k_n \beta_4 \sin(k_n x_2) & \alpha_4 \sin(k_n x_2) + \beta_4 k_n \cos(k_n x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

As συμπλαδεί ότι $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_{x=x_1} = -\left(\frac{d}{dx}\right)_{x=x_1}$ ενώ $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_{x=x_2} = +\left(\frac{d}{dx}\right)_{x=x_2}$. Το παραπάνω

σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις ($A_n = B_n = 0$) για τα k_n εκείνα που ικανοποιούν
τη σχέση:

$$(129) \quad \det \begin{vmatrix} \alpha_3 \cos(k_n x_1) + k_n \beta_3 \sin(k_n x_1) & \alpha_3 \sin(k_n x_1) - \beta_3 k_n \cos(k_n x_1) \\ \alpha_4 \cos(k_n x_2) - k_n \beta_4 \sin(k_n x_2) & \alpha_4 \sin(k_n x_2) + \beta_4 k_n \cos(k_n x_2) \end{vmatrix} = 0$$

Λύση της υπερβλητικής εξίσωσης (129) οφείτι στην επιλογή λύσης για τα k_n τα οποία
καταίνται ιδιοτιμές των σταθερών διαφορικών κατά την x -διεύθυνση. Οι συναρτήσεις X_n
με k_n ανά που ανήκουν στο σύνολο των ιδιοτιμών-λύσεων της (129) καλούνται
ιδιοσυναρτήσεις και μπορεί να αποδειχθεί ότι σχηματίζουν μια πηχά βάση για
την ανάπτυξη συναρτήσεων του x , άρα και των $g_1(x)$ και $g_2(x)$ που
υπερέρχονται στις άλλες δύο, μη ορθογώνιες, οριακές συνθήκες. Δηλαδή,

$$(130) \quad \begin{cases} g_1(x) = \sum_n F_{1n} X_n(x) \\ g_2(x) = \sum_n F_{2n} X_n(x) \end{cases}$$

όπου τα F_{1n} , F_{2n} υπολογίζονται εύκολα χάρη των σχέσεων ορθογωνιότητας που ικανοποιούν οι

ιδιοσυναρτήσεις :

$$\int_{x_1}^{x_2} X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} = 0 & \text{αν } m \neq n \\ \neq 0 & \text{αν } m = n \end{cases} \quad (131)$$

Πρέπει να συμπλαδεί ότι μετά τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών από την (129) υπολογίζονται
μιασδήποτε και ο γόγος A_n/B_n . Η σχέση ορθογωνιότητας (131) χρησιμοποιείται για

την εύρεση των συντελεστών F_{1n} και F_{2n} :

$$F_{(3,2)n} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} g_{1,2}(x) X_n(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} X_n(x) dx} \quad (132)$$

Από την άλλη μεριά η λύση θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \sum_n X_n(x) Y_n(y) \\ Y_n(y) &= C_n \cosh(k_n y) + D_n \sinh(k_n y) \end{aligned} \quad (133)$$

όπως ο πίνακας (127) υποδεικνύει: Το μίγμα $\{\sin, \cos\}$ στη μία συνάρτηση αντιστοιχεί στο μίγμα $\{\sinh, \cosh\}$ στην άλλη. Σημειώνω βέβαια ότι το $\{\sin, \cos\}$ μπορεί να είναι υπερβασικό γιατί αν η συνάρτηση διαχωριστική (ιδιομορφή) είναι γωνιακή. Έτσι, οι πιο ορθές οριζόντιες συνθήκες γίνονται:

$$\begin{aligned} \sum_n [\alpha_1 X_n(x) Y_n(y_1) - \beta_1 X_n(x) Y_n'(y_1)] &= \sum_n F_{1n} X_n(x) \\ \sum_n [\alpha_2 X_n(x) Y_n(y_2) + \beta_2 X_n(x) Y_n'(y_2)] &= \sum_n F_{2n} X_n(x) \end{aligned} \quad (134a)$$

οποτε, λόγω της ορθογωνιότητας παρά, ισχύει η ισοδυναμία των προφθεροσεων ενός προς έναν (υποδηλώνει παραγράφου):

$$\begin{aligned} \alpha_1 Y_n(y_1) - \beta_1 Y_n'(y_1) &= F_{1n} \\ \alpha_2 Y_n(y_2) + \beta_2 Y_n'(y_2) &= F_{2n} \end{aligned} \quad (134b)$$

πάλι, λόγω της (133) δίνει τη λύση:

$$(134\gamma) \begin{bmatrix} \alpha_1 \cosh(k_n y_1) - \beta_1 k_n \sinh(k_n y_1) & \alpha_1 \sinh(k_n y_1) - \beta_1 k_n \cosh(k_n y_1) \\ \alpha_2 \cosh(k_n y_2) + \beta_2 k_n \sinh(k_n y_2) & \alpha_2 \sinh(k_n y_2) + \beta_2 k_n \cosh(k_n y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1n} \\ F_{2n} \end{bmatrix}$$

Η λύση των (134γ) δίνει τα C_n, D_n . Έτσι γιατί έχουν προσδιορισθεί πλήρως

τα $\{k_n, A_n/B_n, C_n, D_n\}$. Είναι γινόμενο ου σπεί ο λόγος A_n/B_n να
 των πηλη προσδιορισμοί των μινόμενα $X_n(x) Y_n(y)$ δισιν θα μπορούσαμε εβερκιν
 να ορίσασμε, με εξωταμή κοινά πινόμενα : $X_n(x) = \frac{A_n}{B_n} \cos(k_n x) + \sin(k_n x)$
 και $Y_n(y) = B_n C_n \cosh(k_n y) + B_n D_n \sinh(k_n y)$ οπότε τα ζινόμενα, όσα
 αγορά τίν $Y_n(y)$ θα ήσαν τα $B_n C_n, B_n D_n$ αντί των C_n, D_n . θα ικανο-
 ποιόσαν, λοιπόν τα $B_n C_n, B_n D_n$ τίν (134γ) (με αντιστοιχίση $C_n \rightarrow C_n B_n,$
 $D_n \rightarrow D_n B_n$) και, άρα, θα ήσαν μινόμενα ορισμένα.

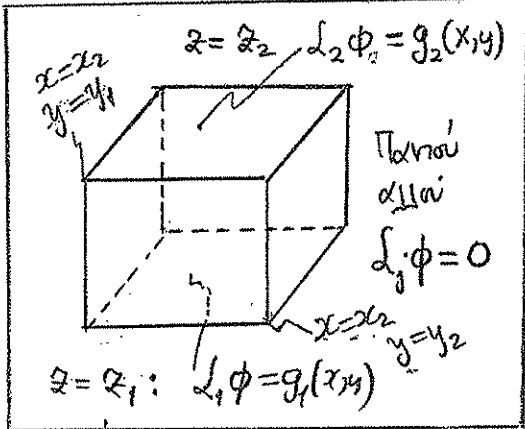
Με ταν ίδιο άκρίβας τρόπο επιλύασμε και το πινόμενα II. θα ισχύει
 άκρίβας η αντιστοιχία άξινων με αντιστοιχίση : $x \leftrightarrow y, X \leftrightarrow Y, 1 \leftrightarrow 3$
 και $2 \leftrightarrow 4$. Φυσικά, τάρτα, τάρ 1 : $k_n, A_n/B_n, C_n, D_n$ θα έσαν
 άλλος, εντάως διαφορετικός τιμής.

Τέλιμα, η λύση θα είναι το άθροισμα των λύσαν των άκρίβων από
 τα πινόμενα I και II. Στην περίπτωση, βίβωτα, των 3 διαστάσεων
 τα πινόμενα μινόμενα πιο πινόμενα, θα δίνεμε, άρσων τάρτα, πιν άκρίβων
 πινόμενα τα πινόμενα στις 3 διαστάσεις.

Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΣΤΙΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

θα εξετάσασμε εβερκιν άποψη τίν τίν περίπτωση οριακών συνθήκων επί των πινόμενα
 οριακών πινόμενα. Το ζήτημα, πινόμενα να θεωρηθεί σαν οριακό-
 πινόμενα ενός άκρίβων 3-διάστατου χωρίου. Ισχύων πινόμενα όσα άκρίβων,
 τίν περίπτωση των δύο διαστάσεων. Το πινόμενα χωρίων σε τίν
 πινόμενα το καθένα από τα οποία έχει οριακές τις οριακές συνθήκες σε
 τίν άκρίβων πινόμενα.
 δισιν $\{x, y, z\}$ περιοριστικά σε οριακές συνθήκες τίν τίνων $\phi_j = g_j(x, y, z)$ ή
 ή $g_j(y, z)$ ή $g_j(z, x)$ άκρίβων τίν τίν πινόμενα μινόμενα με $\phi_j = \alpha_j + \beta_j \frac{\partial}{\partial n}$
 $\alpha_j, \beta_j = \text{σταθερά και } \frac{\partial}{\partial n} = \pm \frac{\partial}{\partial x}, \pm \frac{\partial}{\partial y}, \pm \frac{\partial}{\partial z}$. Η λύση θα πινόμενα

Ψάχνει ένα άθροισμα των λύσεων των επιμέρους άνω προβλημάτων. Θα πηλείται ψάχνει μόνο ένα από τα προβλήματα άνω: Αυτό με μη ομογενείς τις οριακές συνθήκες επί των καθέτων στα άξονα z πτυχών. Εκφράζουμε τη λύση



ως εξής:

$$\phi = \sum_m \sum_n X_n Y_m Z_{nm} \quad (135)$$

$$X_n = A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)$$

$$Y_m = C_m \cos(k_m y) + D_m \sin(k_m y)$$

Ενώ, με βάση τον πίνακα (128) και τη σχέση (126γ) η επιλογή τριγωνομετρικών συναρτήσεων (όχι μόνον, αλλά και μπορεί να προκύψουν φανταστικές σταθερές διακυματισμού k_n ή/και k_m) για τις διαστάσεις x και y συνεπάγεται υπερβολικές συναρτήσεις κατά την z διάσταση. Δηλαδή η Z_{nm} θα είναι:

$$Z_{nm}(z) = E_{nm} \cosh(k_{nm} z) + F_{nm} \sinh(k_{nm} z) \quad (136)$$

Ενώ η (126γ) τράπηται:

$$k_{nm}^2 = k_n^2 + k_m^2 \quad (137)$$

Οι ομογενείς οριακές συνθήκες γίνονται (' υποδηλώνει παραγωγή):

$$\begin{aligned} \alpha_3 X_n(x_1) + \beta_3 X_n'(x_1) &= 0 \\ \alpha_4 X_n(x_2) + \beta_4 X_n'(x_2) &= 0 \\ \alpha_5 Y_m(y_1) + \beta_5 Y_m'(y_1) &= 0 \\ \alpha_6 Y_m(y_2) + \beta_6 Y_m'(y_2) &= 0 \end{aligned} \quad (138)$$

Οι οποίες, συνδυασμένες με τις (135) μας δίνουν δύο ομογενείς συστήματα ως προς (A_n, B_n) και (C_m, D_m) . Θετώντας τις ορίζουσες των συστημάτων ίσες με το μηδέν παίρνουμε δύο υπερβαρικές εξισώσεις λύσης των οποίων είναι

τα k_n και k_m (ιδιοτιμές). Κατόπιν προσδιορίζονται μινωρήματα τα A_n/B_n και C_m/D_m . Στη συνέχεια, τα $g_1(x,y)$ και $g_2(x,y)$, που υπερέχουν τις μη ομογενείς (επί των πλευρών $z=z_1$ και $z=z_2$) ομογενείς συνθήκες, αναπτύσσονται με βάση τις ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ και $Y_m(y)$:

$$g_{(1,2)}(x,y) = \sum_n \sum_m G_{(1,2)nm} X_n(x) Y_m(y) \quad (139)$$

Που, όπως και στις 2 διαστάσεις, οδηγεί λόγω σχέσεων ορθογωνιότητας που έχουμε στις ομογενείς των ιδιοσυναρτήσεων $\{X_n\}$ και $\{Y_m\}$, στις ακόλουθες εκφράσεις για τους συντελεστές G_{1nm} και G_{2nm} :

$$G_{(1,2)nm} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy g_{(1,2)}(x,y) X_n(x) Y_m(y)}{\int_{x_1}^{x_2} X_n^2(x) dx \int_{y_1}^{y_2} Y_m^2(y) dy} \quad (140)$$

Οι μη ομογενείς ομογενείς συνθήκες γίνονται τώρα (υποδηλώνει πρόβλημα):

$$\begin{aligned} z=z_1 : \alpha_1 Z'_{nm}(z_1) - \beta_1 Z_{nm}(z_1) &= G_{1nm} \\ z=z_2 : \alpha_2 Z'_{nm}(z_2) + \beta_2 Z_{nm}(z_2) &= G_{2nm} \end{aligned} \quad (141)$$

Όπου και γίνεται αναπαράσταση των εκφράσεων για τη Z_{nm} από την σχέση (136). Προκύπτει έτσι ένα άστημα 2×2 η λύση του οποίου δίνει τις τιμές των E_{nm} και F_{nm} . Κατ'απόδοση τα τρίτα προσδιορίζονται όλα $(k_n, k_m, A_n/B_n, C_m/D_m, k_{nm}^2 = k_n^2 + k_m^2, E_{nm}, F_{nm})$ και άρα το φ στο ένα από τα τρία προβλήματα. Αφού είναι τα επιμέρους λύσεις στα τρία αυτά προβλήματα οδηγεί γρήγορα στη πλήρη λύση.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ LAPLACE ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες γίνεται:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (142)$$

Μια βολική διαφορά της εξίσωσης αυτής και της αλληλοσώζου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι ότι το όριο $r=0$ είναι ιδιόμορφο για την διαφορική αυτή εξίσωση. Η υιοθέτηση της εξίσωσης αυτής σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις γίνεται με την επιλογή:

$$\phi(r, \varphi) = R(r) F(\varphi) \quad (143) \quad \begin{array}{l} R = \text{ακτινική συνάρτηση} \\ F = \text{αξιομιακή συνάρτηση} \end{array}$$

οπότε, όταν και στην περίπτωση των καρτεσιανών συντεταγμένων παίρνουμε:

$$\begin{array}{l} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -m^2 F \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = m^2 R \end{array} \quad (144)$$

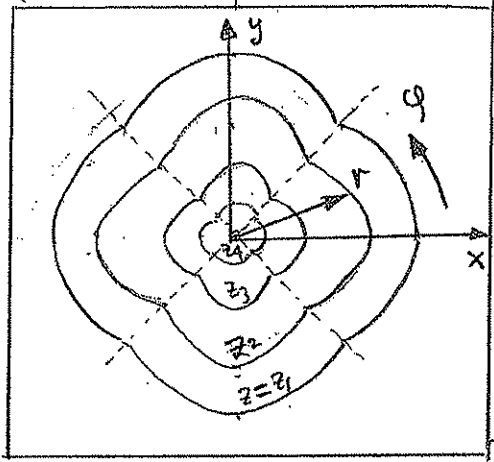
όπου m^2 είναι τώρα η αξιομιακή διαχωριστική. Ανάλογα με το πρόσημο του m^2 θα έχουμε άλλες και σε παρόμοια εξίσωση στο διαχωρισμό σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αξιομιακές $\cos(m^2 \varphi)$ ή υπερβολικές ή ημιτονοειδείς (για $m^2=0$), ένα είδος $r^{\pm m}$ αντίστοιχα η ακτινική συνάρτηση R . Θα επιλέξουμε λύσεις $r^{\pm m}$ ($m^2 > 0$) ή $r^{\pm j|m|}$ ($m^2 < 0$) ή λογαριθμική με σταθερά ($m^2=0$). Οι λύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα πίνακα [Ομν: $r^{\pm j|m|} = e^{\pm j|m|\ln r} = \cos(|m|\ln r) \pm j \sin(|m|\ln r)$]

$m=0$	$m^2 \geq 0$	$m^2 \leq 0$ ($m \rightarrow jm'$)
1	$r^m \cos m\varphi$	$\cos(m'\ln r) \cosh m'\varphi$
φ	$r^m \sin m\varphi$	$\cos(m'\ln r) \sinh m'\varphi$
$\ln r$	$r^{-m} \cos m\varphi$	$\sin(m'\ln r) \cosh m'\varphi$
$\varphi \ln r$	$r^{-m} \sin m\varphi$	$\sin(m'\ln r) \sinh m'\varphi$
		$\cos(m'\ln r) e^{m'\varphi}$
		$\cos(m'\ln r) e^{-m'\varphi}$
		$\sin(m'\ln r) e^{m'\varphi}$
		$\sin(m'\ln r) e^{-m'\varphi}$

(145)

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LAPLACE ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

ΣΤΙΣ τρεις διαστάσεις και σε προβλήματα που επιδέχονται κάποιον είδος άξονα συμμετρίας (όχι και άκρως 360°), όπως το σύστημα 2D στήλης στο οποίο αποτυπώνονται φέρει



στις τρεις του σε διευκολύνει z, η εξίσωση Laplace επιδέχεται και την ανάγνωση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό έχουμε ότι:

$$\phi = R F z$$
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (146)$$

η οποία μετασχηματίζεται στην:

$$0 = \nabla^2 \phi = \frac{1}{R r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dz^2} \quad (147)$$

Αεφομένον ότι ο τελευταίος όρος είναι συνάρτηση μόνο του z, έχουμε:

$$\frac{d^2 z}{dz^2} = -k_z^2 z$$
$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} - r^2 k_z^2 = 0 \quad (148)$$

όπου επίσης ο δεύτερος όρος είναι συνάρτηση μόνο του φ. ενώ ο πρώτος και ο τελευταίος είναι συναρτήσεις μόνο του r. Έτσι:

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -m^2 F$$
$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - r^2 k_z^2 = m^2 \quad (149)$$

Η τελευταία μπορεί να γραφεί,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left(k_z^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (150a)$$

ή με την ανακρίση:

$$\boxed{\begin{aligned} k_r^2 &= -k_z^2 \\ \xi &= |k_r| r \end{aligned}} \quad (150\beta)$$

θα έχουμε σε αδιάφορα μορφή, για $k_r \neq 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} k_r^2 > 0 &: \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dR}{d\xi} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2} \right) R = 0 \\ k_r^2 < 0 &: \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dR}{d\xi} \right) - \left(1 + \frac{m^2}{\xi^2} \right) R = 0 \end{aligned}} \quad (150\gamma)$$

ενώ για $k_r = 0$:

$$\boxed{k_r^2 = 0 : r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = m^2 R} \quad (150\delta)$$

Συνολικά ανακρίσει η περίπτωση των προδικών συστημάτων. Θα εξετάσουμε λοιπόν μόνο τις περιπτώσεις $k_r \neq 0$ που είναι καθαρά ξ διακρίσεις.

Οι λύσεις των (148) και (149) για την αζιμουθιακή συνάρτηση Z και της αζιμουθιακής F είναι κατά περίπτωση τριγωνομετρικές και υπερβηχικές συναρτήσεις με k_z και m τις αντίστοιχες σταθερές διακρίσεων. Όταν οι συνθήκες αυτές μηδενίζονται θα έχουμε τριγωνομετρικές λύσεις ως προς Z ή/και F . Πρέπει να σημειωθεί ότι για σύστημα αλληλοόρθων αζιμουθιακών ($\varphi = 0 \rightarrow 2\pi$) τότε η τριγωνομετρική ως προς φ λύση δεν μπορεί να είναι διαφορετική όταν η $F(\varphi)$ δεν είναι μονότροπος συναρτήσεις. Επίσης οι υπερβηχικές συναρτήσεις δεν είναι διαφορετικές διότι τότε δεν είναι μονότροποι στην περίπτωση αυτή. Έτσι, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin m\varphi, \cos m\varphi$ (m : πραγματικό, άρα $-m^2 > 0$) είναι οι ενδεχόμενες σε σύστημα που κινούνται αλληλοόρθων αζιμουθιακά. Επίσης για να είναι περιοδικές οι λύσεις $F(\varphi)$: $F(\varphi) = F(\varphi + 2\pi)$ στην περίπτωση των αλληλοόρθων αζιμουθιακών συστημάτων, θα πρέπει το m να είναι

ακέραιος $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Οι λύσεις των εξισώσεων (150γ) που καλούνται κατά σειρά: εξίσωση Bessel ($k_r^2 > 0$) και τροποποιημένα εξίσωση Bessel ($k_r^2 < 0$) καλούνται αντίστοιχα συναρτήσεις Bessel, και τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel. Είναι βάν τις χρησιμοποιούνται και τις υπερβολικές συναρτήσεις.

Ερχονται κατά ζεύγη, δηλαδή η λύσεις των (150γ) είναι μίγματα συναρτήσεων Bessel πρώτου και δεύτερου είδους (όπως λέμε ημίτονο και ανιμίτονο) στην $k_r^2 > 0$ περίπτωση και μίγματα συναρτήσεων τροποποιημένων Bessel πρώτου και δεύτερου είδους (όπως λέμε υπερβολικό ημίτονο και υπερβολικό ανιμίτονο) στην $k_r^2 < 0$ περίπτωση. Τα πρώτα είδη είναι γραμμικά ανεξάρτητα των δεύτερων ειδών. Οι συμβολισμοί έχουν ως εξής (το m καλείται τάξη):

	1 ^ο είδος	2 ^ο είδος
$k_r^2 > 0$	$J_m(\xi)$	$Y_m(\xi)$
$k_r^2 < 0$	$I_m(\xi)$	$K_m(\xi)$

(151)

μπορεί να είναι θετική ή αρνητική ή 0 *
(Εδώ είναι ακέραια, αλλά βέβαια υπάρχουν και Bessel με μη ακέραιο)

Στις περιπτώσεις $k_r^2 > 0$ και για J_m και Y_m μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει δύο γραμμικά ανεξάρτητα συνδυασμούς τους, τις μιγαδικές συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους (μιγαδικά συζυγείς, άρα γραμμικά ανεξάρτητες):

$$\begin{aligned}
 H_m^{(1)}(\xi) &\equiv J_m(\xi) + j Y_m(\xi) \\
 H_m^{(2)}(\xi) &\equiv J_m(\xi) - j Y_m(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{152}$$

Επίσης υπάρχει η δυνατότητα να εκφράσουμε τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel με τη βοήθεια των κανονικών συναρτήσεων Bessel (μη γραμμικές σχέσεις)

για παράδειγμα:

$$I_m(\xi) = j^{-m} J_m(j\xi) \quad (153)$$

Ενώ, η μη πραγματική σχέση μαζί 1^η και 2^η είδος στις περιπτώσεις των κανονικών αξία και των τροποποιημένων Bessel είναι:

$$Y_m(\xi) = \frac{J_m(\xi) \cos(m\pi) - J_{-m}(\xi)}{\sin(m\pi)} \quad (154)$$

$$K_m(\xi) = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow m} \frac{I_{-x}(\xi) - I_x(\xi)}{\sin(x\pi)} \quad (x \text{ όχι ακέραιος})$$

ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL

Μια από βασική ιδιότητα των συναρτήσεων Bessel είναι οι αναδρομικές σχέσεις των αλυσίδων κανονισμών. Οι αναδρομικές σχέσεις χρησιμοποιούνται για τον αλγόριθμο υπολογισμού των συναρτήσεων όταν και των παραγώγων τους. Ειδικά έχουμε:

$$\Sigma_m : J_m, Y_m, H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$$

$$\Sigma_{m-1}(\xi) + \Sigma_{m+1}(\xi) = \frac{2m}{\xi} \Sigma_m(\xi) \quad (155a)$$

$$\Sigma_{m-1}(\xi) - \Sigma_{m+1}(\xi) = 2 \Sigma'_m(\xi)$$

και

$$\Sigma : I_m, (-1)^m K_m$$

$$\Sigma_{m-1}(\xi) - \Sigma_{m+1}(\xi) = \frac{2m}{\xi} \Sigma_m(\xi) \quad (155b)$$

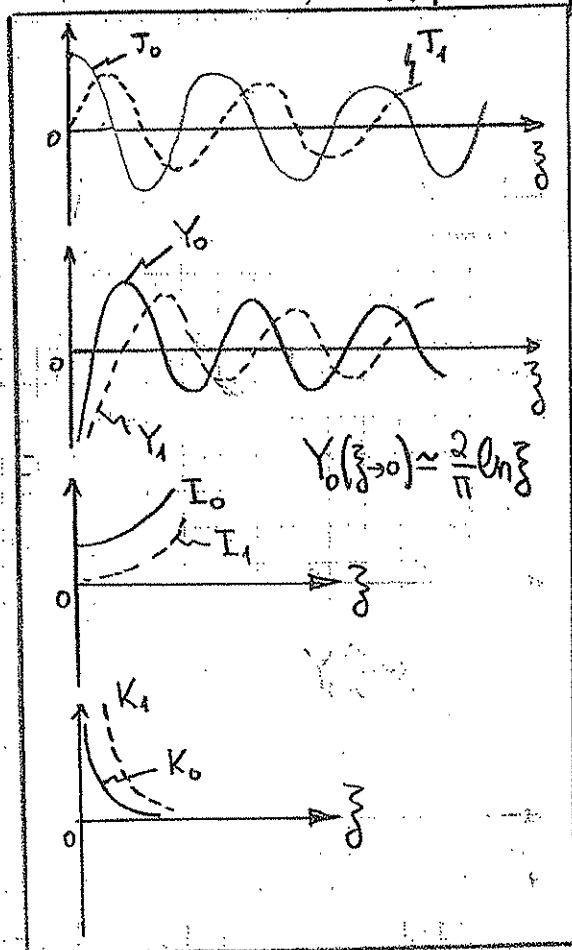
$$\Sigma_{m-1}(\xi) + \Sigma_{m+1}(\xi) = 2 \Sigma'_m(\xi)$$

όπου (') υποδεικνύει παράγωγο ως προς ξ . Όταν λάβει χώρα αλλαγή του ξ (θετική ή αρνητική) έχουμε την εξής ιδιότητα για $m \rightarrow -m$:

$$\begin{aligned}
 J_{-m}(\xi) &= (-1)^m J_m(\xi) \\
 Y_{-m}(\xi) &= (-1)^m Y_m(\xi) \\
 I_{-m}(\xi) &= I_m(\xi) \\
 K_{-m}(\xi) &= K_m(\xi)
 \end{aligned}
 \quad (156)$$

Μια άλλη βασική ιδιότητα είναι ότι οι J_m είναι πεπερασμένες πάντα. Μαζί/όχι για $m=0$, $J_0(0) \neq 0$, ενώ $J_{m \neq 0}(0) = 0$. Αντίθετα οι Y_m απειρίζονται στο $\xi=0$ για κάθε m . Από την άλλη μεριά οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel απειρίζονται είτε: οι $I_m(\xi)$ για $\xi \rightarrow \infty$ και οι $K_m(\xi)$ για $\xi \rightarrow 0$, ενώ $I_0(0) \neq 0$ και $I_{m \neq 0}(0) = 0$ και επίσης

$K_m(\xi) \rightarrow 0$ για $\xi \rightarrow \infty$ για κάθε m . Αυτή η ιδιότητα είναι πολύ χρήσιμη, για την επιλογή των κατάλληλων μέγεθους που θα αναπαριστούν τους οριακούς όρους των συγκεκριμένων προβλημάτων. Στα διπλάσια σχήματα δίνονται



τα σχήματα των $J_0, J_1, Y_0, Y_1, I_1, I_0$ και K_0, K_1 .

Πολύ χρήσιμα είναι και τα αναπτύγματα των συναρτήσεων Bessel για μικρά ορίσματα ξ ($\xi \ll 1$) και όταν $\xi \rightarrow \infty$:

$$J_m(\xi \rightarrow 0) \approx \left(\frac{\xi}{2}\right)^m / m! \quad (m \neq -1, -2, \dots)$$

$$Y_m(\xi \rightarrow 0) \approx -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-m} (m-1)! \quad (m \geq 1)$$

$$I_m(\xi \rightarrow 0) \approx \left(\frac{\xi}{2}\right)^m / m! \quad (m \neq -1, -2, \dots)$$

$$K_m(\xi \rightarrow 0) \approx \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-m} \frac{(m-1)!}{2} \quad (m \geq 1)$$

(157)

KOXI

$$\begin{aligned}
 J_m(\zeta \rightarrow \infty) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta}} \cos\left(\zeta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 Y_m(\zeta \rightarrow \infty) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta}} \sin\left(\zeta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 I_m(\zeta \rightarrow \infty) &\approx \frac{e^\zeta}{\sqrt{2\pi \zeta}} \\
 K_m(\zeta \rightarrow \infty) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} e^{-\zeta}
 \end{aligned}$$

(158)

Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του ζ οι Bessel συντελεστής είναι σαν διακρίτες του ζ (όταν m) και είναι 1^η είδος, ή αντίστροφο διακρίτες του ζ (όταν $-m$) και είναι 2^η είδος. Για μεγάλες τιμές του ζ , οι μη κανονικοί Bessel συντελεστής είναι σαν ζεταμορφικούς με πλάτος μικρότερο από $\zeta^{-1/2}$ (δυσκολία στην πείρα), οι δε τροποποιημένοι Bessel συντελεστής είναι σαν εκθετικές ($e^{\pm \zeta}$) πολλαπλασιασμένοι ποτέ με $\zeta^{-1/2}$. Αυτό διαιολογεί και τα παραλληλισμούς των (J, Y) με τις τροποποιημένες και των (I, K) με τις εκθετικές. Οι συναρτήσεις Bessel είναι καταχωρημένες σε όλα τα "handbook" μαθηματικών συναρτήσεων όπως εξάδω και οι ζεταμορφικοί. Ακόμη υπάρχουν και μικρές υπολογιστές τρέχουν των τις υπολογιστών (μικρές τάξεις 0, 1).