ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ MAXWELL ΓΕΝΙΚΑ

ΓΡΑΦΗ 1

$$\oint_{\ell} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_{S(\ell)} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\ell} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_{S(\ell)} \left(\vec{J}_u + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{S} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \rho_{mu}\, dV \equiv 0$$

$$\oint_{S} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \rho_{eu}\, dV \equiv Q_{in} \qquad (1)$$

ΓΡΑΦΗ 2

$$\oint_{S} d\vec{S}\times\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix} = \int_{V(S)} dV \begin{pmatrix}-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\\ \vec{J}+\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{pmatrix}$$

και

$$\oint_{S} d\vec{S}\cdot\begin{pmatrix}\vec{B}\\ \vec{D}\end{pmatrix} = \int_{V(S)} dV \begin{pmatrix}\rho_{mu}\equiv 0\\ \rho_{eu}\end{pmatrix} \qquad (1a)$$

ρ_{mu}, ρ_{eu} : πυκνότητες (ιδιόμορφες ή μη) μαγνητικών και ηλεκτρικών μονοπόλων. Μαγνητικά μονόπολα δεν έχουν εισέτι παρατηρηθεί, ενώ τα ηλεκτρικά μονόπολα ταυτίζονται με τα "ελεύθερα" (όχι μέλη ζευγών αντιθέτων - "u"npaired ή "u"nmatched) φορτία

$\vec{J}_u$: πυκνότητα ρεύματος (ιδιόμορφη ή μη) λόγω κίνησης των "ελευθέρων" φορτίων: Δεν μπορεί να είναι της μορφής $\vec{J}_u = \nabla\times\vec{A}(\vec{r},t)$ με $\vec{A}(\vec{r},t)$ συνάρτηση πεδιακή, εκτός και ρ_{eu}: ανεξάρτητη του χρόνου

<u>Ιδιόμορφες πυκνότητες</u>: αυτές που στη διατύπωσή τους υπεισέρχονται γενικευμένες συναρτήσεις τύπου δέλτα. Μερικά ολοκληρώματα των πυκνοτήτων αυτών οδηγούν στις γνωστές επιφανειακές, σημειακές και γραμμικές πυκνότητες, όλες μη ιδιόμορφες συναρτήσεις του χώρου.

ℓ : γραμμή (κλειστή)
$S(\ell)$: επιφάνεια με χείλος την ℓ
S : επιφάνεια (κλειστή)
$V(S)$: όγκος περικλειόμενος από την S

$\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}$: πεδιακά μεγέθη.

Μόνο 6 είναι ανεξάρτητα *
(θα το δούμε στη συνέχεια)

* Οι γραφές 1 και 2 αναφέρονται σε ακίνητες γραμμές - βρόχους, όγκους και επιφάνειες (δηλαδή, Επιφάνειες Gauss)

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

$$\oint_S \vec{J}_u \cdot d\vec{S} + \int_{V(S)} dV \frac{\partial \rho_{eu}}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

* Αναφέρεται πάλι σε ακίνητες επιφάνειες

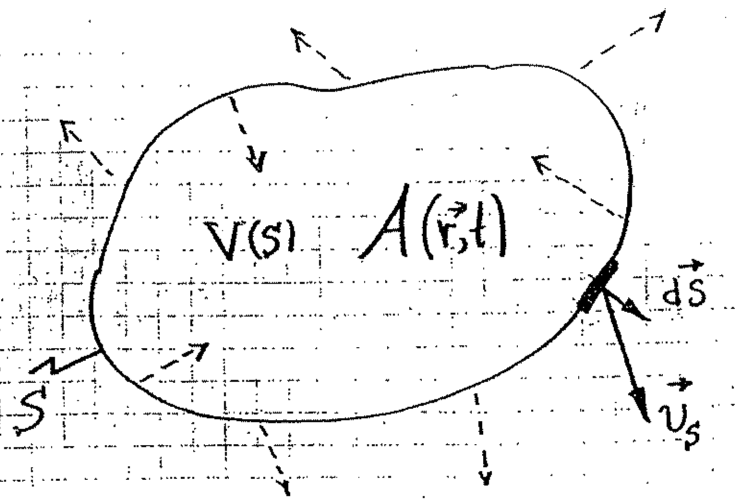
ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΑΚΙΝΗΤΕΣ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Ακίνητες : $$\frac{d}{dt}\int_{V(S)} dV A(\vec{r},t) = \int_{V(S)} dV \frac{\partial A(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (3)$$

Κινούμενες : $$\frac{d}{dt}\int_{V(S)} dV A(\vec{r},t) = \int_{V(S)} dV \frac{\partial A(\vec{r},t)}{\partial t} + \oint_S d\vec{S}\cdot\vec{U}_s(\vec{r},t) A(\vec{r},t) \qquad (3a)$$

$A(\vec{r},t)$: Βαθμωτή ή διανυσματική πεδιακή ποσότητα

$\vec{U}_s(\vec{r},t)$: η ταχύτητα του στοιχείου επιφανείας στη θέση $\vec{r}$, την χρονική στιγμή t.



κινούμενη, παραμορφούμενη, παλλόμενη, επιφάνεια

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

$$\oint_S \vec{J}_u \cdot d\vec{S} + \int_{V(S)} dV \frac{\partial \rho_{eu}}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

* Αναφέρεται πάλι σε ακίνητες επιφάνειες

ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΑΚΙΝΗΤΕΣ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Ακίνητες :

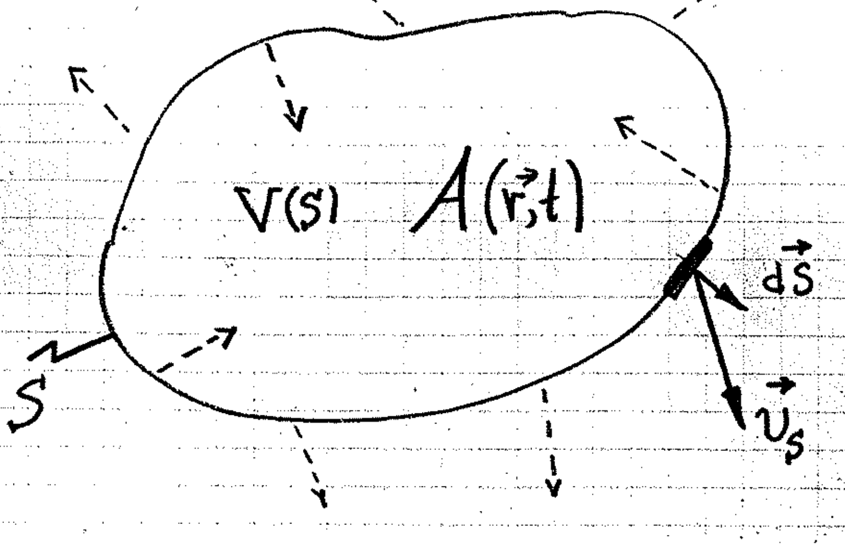
$$\frac{d}{dt}\int_{V(S)} dV A(\vec{r},t) = \int_{V(S)} dV \frac{\partial A(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (3)$$

Κινούμενες :

$$\frac{d}{dt}\int_{V(S)} dV A(\vec{r},t) = \int_{V(S)} dV \frac{\partial A(\vec{r},t)}{\partial t} + \oint_S d\vec{S}\cdot\vec{u}_s(\vec{r},t) A(\vec{r},t) \qquad (3\alpha)$$

$A(\vec{r},t)$: Βαθμωτή ή διανυσματική πεδιακή ποσότητα

$\vec{u}_s(\vec{r},t)$: η ταχύτητα του στοιχείου επιφανείας στη θέση $\vec{r}$, την χρονική στιγμή t.



κινούμενη, παραμορφούμενη, πάλλόμενη, επιφάνεια

ΤΑ ΠΕΔΙΑΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΚΑΙ Η ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΕΚΦΡΑΣΕΩΝ ΤΟΥΣ ΣΤΟΝ ΚΕΝΟ ΧΩΡΟ

Το ζεύγος $\vec{E}, \vec{H}$ συνδέεται ιστορικά με τις δυνάμεις μεταξύ μεμονωμένων φορτίων και μαγνητικών πόλων μαγνητών.

Το ζεύγος $\vec{D}, \vec{B}$ αντικατοπτρίζει πυκνότητες πεδιακών γραμμών ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα.

για υλικά (4) μέσα

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D} &\equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\\ \vec{B} &\equiv \mu_0(\vec{H} + \vec{M})\end{aligned}} \quad , \quad \boxed{\begin{aligned}&\varepsilon_0 \vec{E}\\ &\mu_0 \vec{H}\end{aligned}} \quad (4\alpha)$$

$(\varepsilon_0$: ηλεκτρική δεκτικότητα$)$

$(\mu_0$: μαγνητική διαπερατότητα$)$

Γενικοί ορισμοί | Κενός χώρος

$(\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ Henry/μέτρο, $\varepsilon_0 = 8.8542\ 10^{-12}$ Farad/μέτρο,

Σημείωση: c (ταχύτητα φωτός στο κενό) $= 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,)$

Το $\vec{P}$ αντικατοπτρίζει την παρουσία ύλης, ενώ το $\vec{E}$ είναι η πεδιακή εκείνη ποσότητα που επάγεται από "εξωτερικές" πηγές <u>και</u> πηγές εντός του υλικού μέσου. Τα ίδια ισχύουν και για το $\vec{M}$ και $\vec{H}$ αντίστοιχα. Οι ποσότητες (χαρακτηριστικές του υλικού μέσου) $\vec{P}$ και $\vec{M}$ καλούνται <u>πόλωση</u> και <u>μαγνήτιση</u> αντίστοιχα. Τα $\vec{D}$ και $\vec{B}$ είναι <u>υβριδικές</u> ποσότητες, δηλαδή αντικατοπτρίζουν την παρουσία ύλης και των πεδιακών μεγεθών $\vec{E}$ και $\vec{H}$ που πάσης φύσεως πηγές ("εξωτερικές" ή εντός του υλικού μέσου) επάγουν. Οι "εξωτερικές" πηγές είναι συνήθως επιφάνειες υλικών μέσων πλήρως ελεγχομένων από τον παρατηρητή, τοποθετημένες σε ικανή απόσταση από το υλικό μέσο και διαχωριζόμενες από αυτό με χώρο κενό ύλης. Οι πηγές οι εντός του υλικού μέσου έχουν

να κάνουν με τις ιδιότητες της ύλης στο μικροσκοπικό επίπεδο.
Πρέπει να τονισθεί ότι οι γενικές σχέσεις υλικών μέσων (σελίδα 2) είναι κυριολεκτικά γενικές και εν πολλοίς αποτελούν ορισμούς για τα πεδιακά μεγέθη – πυκνότητες πεδιακών γραμμών. Η "ασυμμετρία" των φυσικών μεγεθών $\vec{P}$ και $\vec{M}$ σε συνάρτηση με τα $\vec{D}$ και $\vec{B}$ (ενώ το $\vec{P}$ μετράται, όπως και το $\vec{D}$ σε Coulomb/μέτρα τετραγωνικά, το $\vec{M}$ δεν μετράται σε Weber/μέτρα τετραγωνικά, αλλά σε Ampère/μέτρα, όπως το $\vec{H}$) οφείλεται σε καθαρά λόγους ιστορικής εξέλιξης του ηλεκτρομαγνητισμού και των συστημάτων μονάδων μέτρησης.

Εισαγωγή των "ορισμών" αυτών στις ολοκληρωτικές σχέσεις οδηγεί στις εξής διαφορικές – σημειακές σχέσεις σ'εκείνες τις περιοχές του χώρου (που καταλαμβάνει το υλικό μέσο) όπου δεν υπάρχουν ιδιόμορφες κατανομές, και για υλικά μέσα σε ηρεμία :

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{ελ}}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0} \equiv \frac{\rho_{εολ}}{\varepsilon_0} \leftarrow \text{ολική πυκνότητα φορτίου}$$

$$\nabla\cdot\vec{H} = -\nabla\cdot\vec{M} \equiv \frac{\rho_{mολ}}{\mu_0}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{ελ} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} \equiv \vec{J}_{ολ} \leftarrow \text{ολικό ρεύμα}$$

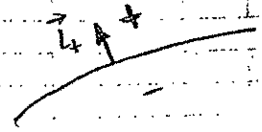
$$\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu_0\frac{\partial\vec{M}}{\partial t} \qquad (5α)$$

πυκνότητα φορτίων πόλωσης : $-\nabla\cdot\vec{P}$
ρεύμα πόλωσης : $\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}$

Επίσης σε διαχωριστικές επιφάνειες (σε ηρεμία) έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{i}_+\cdot(\vec{D}_+-\vec{D}_-) &= \sigma_{ελ} \\ \vec{i}_+\times(\vec{E}_+-\vec{E}_-) &= 0 \\ \vec{i}_+\cdot(\vec{B}_+-\vec{B}_-) &= 0 \\ \vec{i}_+\times(\vec{H}_+-\vec{H}_-) &= \vec{K}_{ελ} \end{aligned} \qquad (5β)$$

$+$, $-$ } οι δύο πλευρές της διαχωριστικής επιφάνειας



Εξισώσεις Maxwell σε κινούμενα υλικά μέσα

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{ελ}}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\vec{H} = -\nabla\cdot\vec{M}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{ελ} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{P}\times\vec{V})$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu_0\frac{\partial\vec{M}}{\partial t} - \mu_0\nabla\times(\vec{M}\times\vec{V}) \qquad (6α)$$

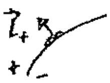
Για κινούμενες διαχωριστικές επιφάνειες έχουμε:

$$\vec{i}_+\cdot(\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \sigma_{ελ}$$

$$\vec{i}_+\times(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = (\vec{i}_+\cdot\vec{V})(\vec{B}_+ - \vec{B}_-)$$

$$\vec{i}_+\cdot(\vec{B}_+ - \vec{B}_-) = 0$$

$$\vec{i}_+\times(\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = \vec{K}_{ελ} - (\vec{i}_+\cdot\vec{V})(\vec{D}_+ - \vec{D}_-) \qquad (6β)$$



Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν με την εισαγωγή των ορισμών στις ολοκληρωτικές σχέσεις όπως αυτές γενικεύονται για κινούμενες επιφάνειες και στο όριο που αυτές περιβάλλουν απειροστά στοιχεία υλικού με μη-ιδιόμορφες πυκνότητες στο όριο αυτό.

$\nabla\times(\vec{P}\times\vec{V})$ αποτελεί ρεύμα λόγω περιστροφής διπόλων ($\vec{P} \not\parallel \vec{V}$)

$\nabla\times(\vec{M}\times\vec{V})$ συνεισφέρει στην αλλαγή της μαγνήτισης λόγω περιστροφής των μαγνητικών διπόλων ($\vec{M} \not\parallel \vec{V}$)

ΓΡΑΦΗ ΜΕ $\vec{E}$ ΚΑΙ $\vec{B}$ ΑΝΤΙ $\vec{H}$ * καλύτερη

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{ελ}}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\left[\vec{J}_{ελ} + \nabla\times\vec{M} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{P}\times\vec{V})\right]$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu_0\nabla\times(\vec{M}\times\vec{V}) \qquad (7)$$

πυκνότητα φορτίων πόλωσης

ρεύμα μαγνήτισης

ρεύμα μετατόπισης κενού (αιθέρα)

ρεύμα μετατόπισης διπόλων

ρεύμα πόλωσης

σειριοί μαγνήτισης

μεταβολή μαγνητικής επαγωγής λόγω κίνησης μαγνητικών διπόλων

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ HELMHOLTZ ΣΕ ΥΛΙΚΑ ΜΕΣΑ (ΣΕ ΗΡΕΜΙΑ)

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0\frac{\partial\vec{J}_{o\lambda}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \mu_0\nabla\times\vec{J}_{o\lambda} \quad (8)$$

$$\vec{J}_{o\lambda} \equiv \vec{J}_{\varepsilon\lambda} + \nabla\times\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} \qquad (9)$$

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Οι εξισώσεις του Maxwell είναι φαινομενικά οκτώ (2 διανυσματικές και 2 βαθμωτές). Με δεδομένα τα $\vec{J}_u$ και ρ_{eu} που συνδέονται με την εξίσωση διατήρησης φορτίου (εξωτερική των εξισώσεων Maxwell, δηλαδή εκφράζει έναν ανεξάρτητο φυσικό νόμο) που είναι βαθμωτή εξίσωση, ο αριθμός των ανεξάρτητων εξισώσεων Maxwell μειώνεται κατά μία. Αν εφαρμόσουμε την απόκλιση στην εξίσωση-νόμο του Faraday θα πάρουμε $\partial\nabla\cdot\vec{B}/\partial t = 0$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\nabla\cdot\vec{B}=0$ αν $\nabla\cdot\vec{B}=0$ στην αρχή του χρόνου (κοσμολογικού χρόνου), δηλαδή συνάγουμε τον νόμο του Gauss. Τελικά λοιπόν έχουμε έξη ανεξάρτητες εξισώσεις οι οποίες εμπλέκουν δώδεκα πεδιακά μεγέθη, δηλαδή, τα $\vec{B},\vec{D}$ και $\vec{H},\vec{E}$. Χρειάζονται επομένως έξη εξισώσεις που να συνδέουν αυτά τα μεγέθη μεταξύ τους. Οι εξισώσεις αυτές, αν και όταν είναι δυνατόν να διατυπωθούν σε κλειστή μορφή, καλούνται <u>συντακτικές</u> σχέσεις. Να σημειωθεί ότι τα μεγέθη $\vec{J}_u$ και ρ_{eu} είναι εξωτερικά σε σχέση με τις εξισώσεις του Maxwell και απαιτούν κάποιο επιπρόσθετο φυσικό μοντέλο για να υπολογισθούν σε συνδυασμό με τις εξισώσεις αυτές. Ένα από τα προσφορότερα και πιό κοντά στη φυσική πραγματικότητα μοντέλα, είναι αυτό της κινητικής θεωρίας εξειδικεύσεις της οποίας είναι η φυσική πλάσματος, η φυσική δεσμών ηλεκτρονίων και η μαγνητοϋδροδυναμική.

Οι συντακτικές σχέσεις, από την άλλη μεριά, στη γενικότητά τους θα πρέπει να αντικατοπτρίζουν την αλυσίδα αιτίας-αποτελέσματος στην επίδραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου επί του υλικού μέσου. Γενικά, η δράση της αιτίας και η εκδήλωση του αποτελέσματος (σαν αιτία μπορούν συμβατικά να ορισθούν τα $\vec{E}$ και $\vec{H}$, ενώ τα αποτελέσματα θα μπορούσαν να ορισθούν η πόλωση $\vec{P}$ και η μαγνήτιση $\vec{M}$ του υλικού μέσου) χωρίζονται χρονικά (δηλαδή υπάρχουν πάντα σε κάποιο βαθμό, μεγάλο ή μικρό, φαινόμενα υστέρησης). Επιπλέον, η σχέση μεταξύ αιτίας-αποτελέσματος, δεν είναι απαραίτητο να είναι γραμμική. Μάλιστα, η μη γραμμική συσχέτιση έχει τεράστιες επιπτώσεις, οι οποίες τελευταία έχουν εκτιμηθεί ιδιαίτερα και ανοίγουν νέους μεγάλους δρόμους εφαρμογών κυρίως στην φωτονική τεχνολογία και τους φωτονικούς υπολογιστές και δίκτυα του μέλλοντος. Η μη γραμμική συσχέτιση στα μαγνητικά φαινόμενα είναι γνωστή εδώ και έναν αιώνα και λαμβάνεται πάντα υπ' όψη στη σχεδίαση μαγνητών, μετασχηματιστών και ηλεκτρικών μηχανών (κινητήρων ή γεννητριών). Η πόλωση, π.χ, θα μπορούσε να είναι:

$$P_i(\vec{r},t)=\varepsilon_0\sum_{j=1}^{3}\int_V dV'\int_{-\infty}^{t} dt'\,\chi^{(1)}_{ij}(\vec{r}\,',t';\vec{r},t)\,E_j(\vec{r}\,',t')$$

Γραμμικός όρος

Μη γραμμικοί όροι

$$+\varepsilon_0\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\int_V dV'\int_V dV''\int_{-\infty}^{t} dt'\int_{-\infty}^{t} dt''\,\chi^{(2)}_{ijk}(\vec{r}\,'',t'';\vec{r}\,',t';\vec{r},t)\,E_j(\vec{r}\,'',t'')\,E_k(\vec{r}\,',t')$$

$$+\varepsilon_0\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\int_V dV'\int_V dV''\int_V dV'''\int_{-\infty}^{t} dt'\int_{-\infty}^{t} dt''\int_{-\infty}^{t} dt'''\,\chi^{(3)}_{ijk\ell}(\vec{r}\,''',t''';\vec{r}\,'',t'';\vec{r}\,',t';\vec{r},t)\,E_j(\vec{r}\,''',t''')\,E_k(\vec{r}\,'',t'')\,E_\ell(\vec{r}\,',t')$$

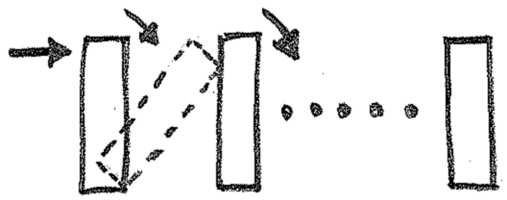
$$+\cdots$$

οπου τα $i(j,k,\ell) = 1,2,3$ αναφέρονται στις καρτεσιανές συνιστώσες των υπεισερχομένων πεδιακών μεγεθών, ενώ η ολοκλήρωση ως προς το χώρο νοείται για όλη την έκταση του υλικού μέσου και αυτή η του χρόνου θεωρείται ότι αρχίζει κάποτε στο παρελθόν το οποίο συμβατικά μόνο συμβολίζουμε με $t \to -\infty$ (η ποσοτική χρήση του $-\infty$ διευκολύνει τα μέγιστα στο μετασχηματισμό της προηγούμενης έκφρασης στο χώρο Fourier ως προς τον χρόνο, δηλαδή, στο συχνοτικό χώρο). Συνήθως ο γραμμικός όρος (πρώτος) και οι δύο πρώτοι μη γραμμικοί είναι επαρκείς για τα περισσότερα των υλικών και για εντάσεις ηλεκτρικού πεδίου αρκετά σημαντικές (ακόμη και για πεδία της τάξης των 10^{10} V/m). Οι συναρτήσεις χ καλούνται πυρήνες ηλεκτρικής επιδεκτικότητας. Ο γραμμικός πυρήνας είναι συνήθως κατά

πολύ μεγαλύτερος των μη γραμμικών πυρήνων που φθίνουν καθώς ανεβαίνει η τάξη τους. Παρατηρούμε επίσης ότι ακόμη και ο γραμμικός όρος δεν είναι σε ευθεία αναλογία συνιστώσα προς συνιστώσα με το αποτέλεσμα, την πόλωση δηλαδή· γι αυτό ο πυρήνας επιτρεπτότητας $\chi^{(1)}$ είναι πίνακας 3X3. Ο λόγος της μη παραλληλίας εντάσεως πεδίου και πόλωσης μπορεί να έγκειται σε εσωτερικές διαμορφώσεις του υλικού μέσου (λόγω κρυσταλλικής δομής π.χ.) που δεν επιτρέπουν ελεύθερες μετακινήσεις φορτίων που θα έθεταν την πόλωση παράλληλη με το επιβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο).

Τέλος, τα φαινόμενα υστέρησης αντικατοπτρίζονται στην παρουσία των ολοκληρωμάτων και μάλιστα των χρονικών (ιστορικών) ολοκληρωμάτων.

Η υστέρηση μπορεί να παρομοιασθεί με το φαινόμενο "ντόμινο": Αν το ηλεκτρικό πεδίο αντιστοιχισθεί με την ώθηση (στιγμιαία) του πρώτου ντόμινο στη σειρά, και η πτώση (οριζοντίωση) των ντόμινος σαν τη πόλωση, τότε είναι φανερό ότι το τυχόν ντόμινο δεν "υπακούει" στιγμιαία στην παρουσία της ώθησης. Επιπλέον, γίνεται το ίδιο υπαίτιο της πτώσης του επομένου: εξού και το χωρικό ολοκλήρωμα στην έκφραση για τη πόλωση.



Η μαγνήτιση, από την άλλη μεριά έχει κι αυτή ανάλογη δομή:

$$\underline{M}_i(\vec{r},t)=\sum_{j=1}^{3}\int_V dV'\int_{-\infty}^{t}dt'\,\zeta^{(1)}_{ij}(\vec{r}',t';\vec{r},t)\,H_j(\vec{r}',t')$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\int_V dV'\int_V dV''\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{t}dt''\,\zeta^{(2)}_{ijk}(\vec{r}'',t'';\vec{r}',t';\vec{r},t)\,H_j(\vec{r}'',t'')\,H_j(\vec{r}',t')$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\int_V dV'\int_V dV''\int_V dV'''\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{t}dt''\int_{-\infty}^{t}dt'''\,\zeta^{(3)}_{ijkl}(\vec{r}''',t''';\vec{r}'',t'';\vec{r}',t';\vec{r},t)\,H_j(\vec{r}''',t''')\,H_k(\vec{r}'',t'')\,H_l(\vec{r}',t')$$
$$+\ \cdots \qquad (11)$$

ζ: πυρήνες μαγνητικής επιδεκτικότητας

Ενα άλλο ενδεχόμενο είναι η εξάρτηση (γραμμική, μη-γραμμική, με υστέρηση) της πόλωσης P_i από τα H_j ή της μαγνήτισης M_i από τα E_j. Η σύζευξη αυτή είναι συνήθης στα λεγόμενα <u>μαγνητο-ηλεκτρικά υλικά</u> στα οποία θα επανέλθουμε αργότερα.

Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι γραφής των συντακτικών σχέσεων. Ο πλέον συνηθισμένος τρόπος που αποτελεί συμβολική συμπύκνωση των παραπάνω είναι ο εξής για υλικά που <u>δεν παρουσιάζουν σύζευξη</u> $\vec{P}$ και $\vec{M}$:

ΓΡΑΦΗ 1
$$\vec{D}=\overleftrightarrow{\varepsilon}\bullet\vec{E}\equiv\overleftrightarrow{\varepsilon}_L\bullet\vec{E}+\vec{NL}(\vec{E})$$
$$\equiv\varepsilon_0\left[\overleftrightarrow{I}+\overleftrightarrow{\chi}^{(1)}\bullet\right]\bullet\vec{E}+\vec{NL}(\vec{E})\equiv\varepsilon_0\overleftrightarrow{\varepsilon}_r\bullet\vec{E}+\vec{NL}(\vec{E}) \qquad (12)$$

και

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu} \bullet . \vec{H} \equiv \overleftrightarrow{\mu}_L \bullet . \vec{H} + \vec{NL}(\vec{H}) \equiv \mu_0 \left[\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\xi}^{(1)} \bullet \right] . \vec{H} + \vec{NL}(\vec{H})$$

$$\equiv \mu_0 \overleftrightarrow{\mu}_r \bullet . \vec{H} + \vec{NL}(\vec{H}) \qquad (12a)$$

όπου ο μεγάλος κύκλος $\bullet$ υποδηλώνει συνέλιξη με ότι ακολουθεί (απλή ή πολλαπλή) και η τελεία γινόμενα με συνιστώσες (απλά-πινάκων ή πολλαπλά-τανυστικά). Τα $\overleftrightarrow{\varepsilon}_L$ και $\overleftrightarrow{\mu}_L$ καλούνται γραμμικοί τανυστές ηλεκτρικής επιτρεπτότητας και μαγνητικής διαπερατότητας αντίστοιχα. Αποτελούνται από δύο μέρη: την επιτρεπτότητα και τη διαπερατότητα του κενού $\varepsilon_0 \overleftrightarrow{I}$ και $\mu_0 \overleftrightarrow{I}$ αντίστοιχα (που είναι απλοί βαθμωτοί πολλαπλασιαστές) και τους τανυστές ηλεκτρικής και μαγνητικής επιδεκτικότητας, $\overleftrightarrow{\chi}^{(1)}$ και $\overleftrightarrow{\xi}^{(1)}$ που είναι πυρήνες-πίνακες 3x3. Ότι περισσεύει είναι οι μη γραμμικές συνεισφορές. Τέλος, οι τανυστές $\overleftrightarrow{\varepsilon}_r$ και $\overleftrightarrow{\mu}_r$ καλούνται γραμμικοί τανυστές σχετικής ηλεκτρικής επιτρεπτότητας και μαγνητικής διαπερατότητας αντίστοιχα (σχετικής ως προς το κενό). Αν συμπεριλάβουμε και τα μαγνητοηλεκτρικά υλικά θα έχουμε:

$$(13) \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{D} &= \overleftrightarrow{\varepsilon} \bullet . \vec{E} + \overleftrightarrow{\zeta} \bullet . \vec{H} \\ \vec{B} &= \overleftrightarrow{\eta} \bullet . \vec{E} + \overleftrightarrow{\mu} \bullet . \vec{H} \end{aligned}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{C} \bullet . \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}} \quad (13a)$$

όπου ο συντακτικός τανυστής-πυρήνας $\overleftrightarrow{C}$, κατά το γραμμικό του μέρος, είναι ένας πίνακας-πυρήνας 6x6 που βρίσκεται σε συνέλιξη με το "διάνυσμα" $(\vec{E}, \vec{H})$. Ο συντακτικός τανυστής μετατρέπεται σε απλό πίνακα 6x6 και οι συντακτικές σχέσεις γίνονται,

$$\begin{pmatrix} \vec{D}_\omega \\ \vec{B}_\omega \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{C}_\omega \cdot \begin{pmatrix} \vec{E}_\omega \\ \vec{H}_\omega \end{pmatrix} \qquad (14)$$

όπου όλα τα μεγέθη αναφέρονται σε όλες τις συνιστώσες Fourier στο συχνοτικό χώρο (ω), μόνο στις περιπτώσεις εκείνες που το υλικό μέσο βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση. (δηλαδή, οι ιδιότητές του εκείνες που επηρεάζουν την ηλεκτρομαγνητική του συμπεριφορά — πρακτικά όλες οι φυσικοχημικές ιδιότητες — είτε δεν εξαρτώνται από το χρόνο, είτε παρουσιάζουν περιοδικές μεταβολές). Δηλαδή, στο συχνοτικό χώρο η γραμμική συσχέτιση μεταξύ του $(\vec{D}, \vec{B})$ και του $(\vec{E}, \vec{H})$ γίνεται διανυσματική σχέση μεταξύ των συνιστωσών Fourier των πεδιακών μεγεθών (όχι κατ' ανάγκη σχέσεις αναλογίας). Ο συντακτικός τανυστής $\overleftrightarrow{C}$ μετατρέπεται σε απλό πίνακα 6x6 και στην περίπτωση εκείνη που δεν επηρεάζονται από τη συχνότητα ω οι ιδιότητες του υλικού: στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν καν συνελίξεις, αλλά απλές διανυσματικές πράξεις πολλαπλασιασμού.

Ενώ ο τρόπος γραφής 1 παραπέμπει στις γνωστές, από τη γυμνασιακή εκπαίδευση, σχέσεις $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ και $\vec{B} = \mu\vec{H}$ (ε, μ μπορεί να είναι βαθματές συναρτήσεις του χώρου), υπάρχει και δεύτερος τρόπος που σχετίζεται άμεσα με εφαρμογές σε χρονομεταβλητά συστήματα. (διάδοση, εκπομπή, σκέδαση κλπ). Θα ασχοληθούμε με τον τρόπο αυτό και την απορρέουσα κατάταξη υλικών στο επόμενο κεφάλαιο.

ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΡΜΟΝΙΚΑ ΚΑΙ ΜΟΝΟΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Στις περιπτώσεις εκείνες που ενδιαφερόμαστε για πεδιακά μεγέθη των οποίων η χρονική εξάρτηση είναι μονοχρωματική, ορίζουμε:

(15) $\vec{A}(\vec{r}, t) \equiv Re\left[\vec{A}_\omega(\vec{r}) e^{-j\omega t}\right]$ όπου $\vec{A}(\vec{r}, t)$ κάθε πεδιακό μέγεθος και $\vec{A}_\omega(\vec{r})$ ο φασιθέτης του μεγέθους αυτού. Έτσι, οι εξισώσεις μπορούν να ξαναγραφτούν ως εξής:

$$\nabla \times \vec{E}_\omega = j\omega \vec{B}_\omega$$
$$\nabla \times \vec{H}_\omega = -j\omega \vec{D}_\omega + \vec{J}_{\varepsilon\iota,\omega}$$
$$\nabla \cdot \vec{B}_\omega = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{D}_\omega = \rho_{\varepsilon\iota,\omega} \quad (16)$$

Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν <u>πάντοτε</u> γιά τις συνιστώσες Fourier (φασιθέτες) των πεδιακών μεγεθών, όσες και νά είναι αυτές.

Οι συντακτικές σχέσεις που συνδέουν τα πεδιακά μεγέθη $(\vec{D}, \vec{H})$ με τα $(\vec{E}, \vec{B})$ κατα τό <u>δεύτερο τρόπο γραφής</u> είναι, όπως ήδη είδαμε και γιά τον πρώτο τρόπο γραφης, εν γένει πυρήνες: ολοκληρωτινοί τανυστές-πυρήνες σε χρόνο και χώρο. Υπάρχουν μάλιστα και περιπτώσεις, που δεν αναφέραμε κατά τη συζήτηση του πρώτου τρόπου γραφής, όπου πέραν των ολοκληρωμάτων υπάρχουν και διαφορίσεις. Αν οι διαφορίσεις είναι χωρικές, τότε πρόκειται γιά μέσα που χαρακτηρίζονται από <u>χωρική διασπορά</u>. Αν είναι χρονικές, τότε τα μέσα χαρακτηρίζονται από <u>χρονική διασπορά</u>. Η εξάρτηση των συντακτικών σχέσεων από το χρόνο, t, υποδηλώνει <u>μη μόνιμη κατάσταση</u> του υλικού μέσου, εκτός εάν και υπάρχει σχέση μεταξύ των φασιθετών που εμπλέκει μια <u>μοναδική συχνότητα</u>. Η εξάρτηση των συντακτικών σχέσεων από το χώρο, αντικατοπτρίζει <u>ανομοιογενή μέσα</u>. Αν <u>αποκλείσουμε μή γραμμική συμπεριφορά και μή μόνιμες καταστάσεις υλικών μέσων</u>, τότε, γιά αρμονικές, μονοχρωματικές διεγέρσεις του μέσου, οι συντακτικές σχέσεις μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

ΓΡΑΦΗ 2

$$(17) \quad \boxed{\begin{aligned} c\vec{D}_\omega &= \overleftrightarrow{R}_\omega \cdot \vec{E}_\omega + \overleftrightarrow{L}_\omega \cdot c\vec{B}_\omega \\ \vec{H}_\omega &= \overleftrightarrow{K}_\omega \cdot \vec{E}_\omega + \overleftrightarrow{Q}_\omega \cdot c\vec{B}_\omega \end{aligned}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\begin{pmatrix} c\vec{D}_\omega \\ \vec{H}_\omega \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{C}_\omega \cdot \begin{pmatrix} \vec{E}_\omega \\ c\vec{B}_\omega \end{pmatrix} \quad (17a)}$$

Ο 6x6 πίνακας $\overleftrightarrow{C}_\omega$ είναι μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας ω, που αποτελείται από τους επί μέρους πίνακες $\overleftrightarrow{R}_\omega$, $\overleftrightarrow{L}_\omega$, $\overleftrightarrow{K}_\omega$ και $\overleftrightarrow{Q}_\omega$. Το πλεονέκτημα του τρόπου γραφής 2 είναι ότι υπακούει στους μετασχηματισμούς Lorentz (αυτοί που αφήνουν μορφολογικά αναλλοίωτες τις εξισώσεις του Maxwell). Προσφέρεται επομένως για τον υπολογισμό των συντακτικών σχέσεων σε κινούμενα υλικά μέσα ή και συστήματα αναφοράς. Επίσης προσφέρεται για το χαρακτηρισμό μέσων που καταναλώνουν ηλεκτρομαγνητική ενέργεια μετατρέποντάς την σε άλλες μορφές ενέργειας ή ακόμη και σε ηλεκτρομαγνητική ενέργεια σε άλλες συχνότητες και μήκη κύματος (θερμική, π.χ.). Θα επανέλθουμε στο αντικείμενο αυτό αργότερα.

Υλικά στα οποία απουσιάζουν τα $\overleftrightarrow{L}_\omega$ και $\overleftrightarrow{K}_\omega$ (είναι, δηλαδή, μηδέν) καλούνται <u>ανισοτροπικά εν γένει</u>. Όταν δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο, τα μέσα καλούνται <u>δις-ανισοτροπικά</u> ή (επί το φυσικότερο) μαγνητοηλεκτρικά όπως ήδη είδαμε. Η ανισοτροπία εν γένει, καθώς και η δις-ανισοτροπία αντικατοπτρίζει ανομοιογενή κατασκευή, κρυσταλλική δομή ή και άξονες ή επίπεδα συμμετρίας στη δομή του υλικού μέσου. Όταν το μέσο όμως είναι <u>άμορφο</u> (πιθανά ανομοιογενές) τότε έχουμε:

άμορφα μη-μαγνητοηλεκτρικά

$$\boxed{\overleftrightarrow{R}_\omega = c\,\varepsilon_\omega(\vec{r})\,\overleftrightarrow{I} \qquad \overleftrightarrow{Q}_\omega = \frac{\overleftrightarrow{I}}{c\,\mu_\omega(\vec{r})} \qquad \overleftrightarrow{L}_\omega = \overleftrightarrow{K}_\omega = 0} \tag{18}$$

οπότε και παίρνουμε τις απλές βαθμωτές σχέσεις $\vec{D}_\omega = \varepsilon_\omega \vec{E}_\omega$, $\vec{H}_\omega = \dfrac{\vec{B}_\omega}{\mu_\omega}$.

Εν γένει τα ανισοτροπικά μέσα χαρακτηρίζονται από τις σχέσεις, $\vec{D}_\omega = \overleftrightarrow{\varepsilon}_\omega \cdot \vec{E}_\omega$, $\vec{B}_\omega = \overleftrightarrow{\mu}_\omega \vec{H}_\omega$, όπως ήδη είδαμε, όπου ένα τουλάχιστον από τα $\overleftrightarrow{\varepsilon}_\omega$, $\overleftrightarrow{\mu}_\omega$ <u>δεν</u> είναι βαθμωτή ποσότητα.

Δηλαδή, μπορούμε να έχουμε μέσα ηλεκτρικά ανισοτροπικά, μαγνητικά ανισοτροπικά ή και διπλά ανισοτροπικά. Ειδικές υποκατηγορίες των μέσων αυτών (αναφορικά με κρυσταλλικές δομές) είναι <u>διαξονικά ανισοτροπικά</u> (ηλεκτρο- ή/και μαγνητο-) υλικά όπου, ο τανυστής ηλεκτρικής επιτρεπτότητας, π.χ., έχει τη <u>μορφή</u> (στο κατάλληλο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων)

$$\boxed{\overleftrightarrow{\epsilon}_\omega = \begin{pmatrix} \epsilon_x(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(\omega) \end{pmatrix}} \quad (19)$$

Στα <u>μονοαξονικά ανισοτροπικά υλικά</u>, από την άλλη μεριά, έχουμε

$$\boxed{\overleftrightarrow{\epsilon}_\omega = \begin{pmatrix} \epsilon(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(\omega) \end{pmatrix}} \quad (20)$$

Στην περίπτωση αυτή, η διεύθυνση z, καλείται <u>οπτικός άξονας</u> του υλικού μέσου.

Άλλες ειδικές υποκατηγορίες υλικών, τα οποία θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε σε παραδείγματα αργότερα, είναι τα λεγόμενα <u>γυροτροπικά</u> μέσα: τα <u>γυροηλεκτρικά μέσα</u> (πλάσμα σε μαγνητικό πεδίο, ζάχαρα).

$$\boxed{\overleftrightarrow{\epsilon}_\omega = \begin{pmatrix} \epsilon(\omega) & -j\epsilon_g(\omega) & 0 \\ j\epsilon_g(\omega) & \epsilon(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(\omega) \end{pmatrix}} \quad (21)$$

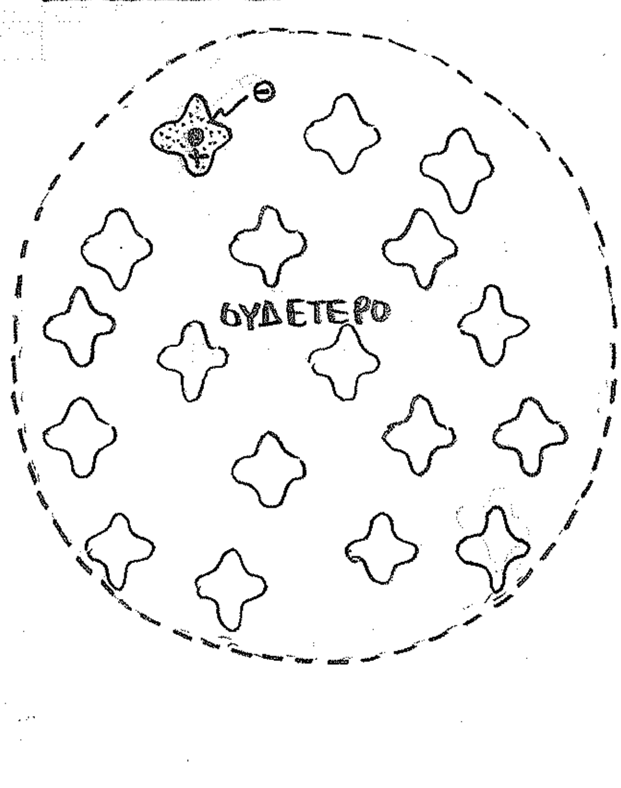
και τα <u>γυρομαγνητικά μέσα</u> (φερίττες)

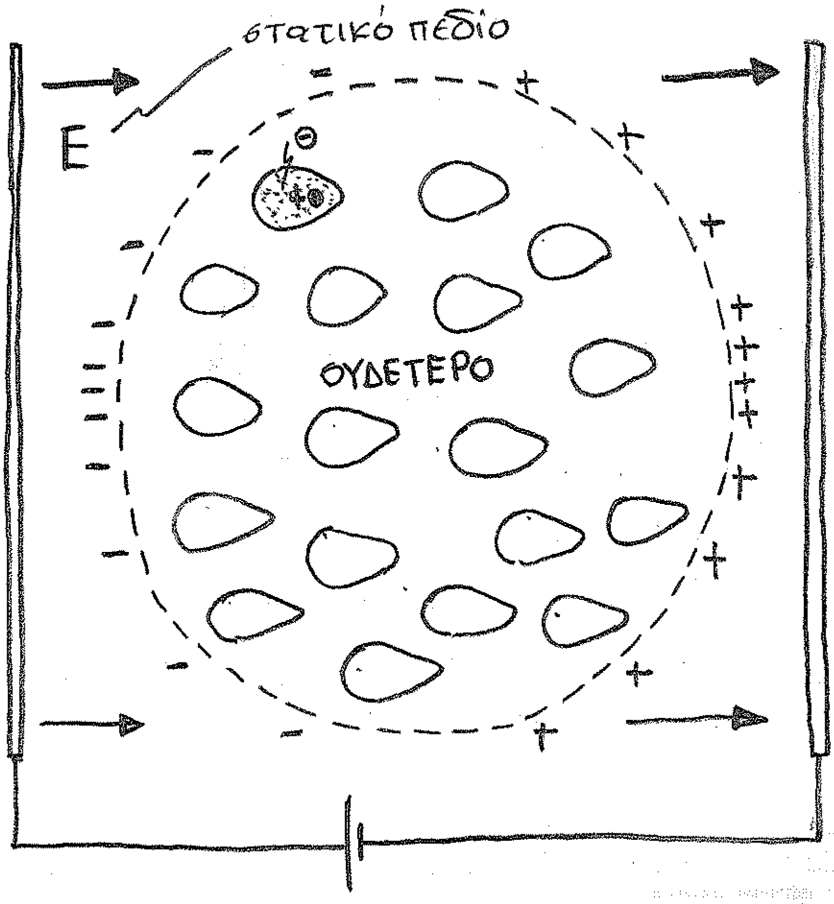
$$\boxed{\overleftrightarrow{\mu}_\omega = \begin{pmatrix} \mu(\omega) & -j\mu_g(\omega) & 0 \\ j\mu_g(\omega) & \mu(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z(\omega) \end{pmatrix}} \quad (22)$$

Τέλος, τα μαγνητοηλεκτρικά υλικά (υλικά που πολώνονται όταν τίθενται σε μαγνητικό πεδίο και μαγνητίζονται, όταν τίθενται σε ηλεκτρικό πεδίο(!) πέραν της αναμενόμενης μαγνήτισης και πόλωσης αντίστοιχα), αποτελούν μια άκρως ενδιαφέρουσα κατηγορία υλικών. Θεωρητικά προβλέφθηκαν στις αρχές της δεκαετίας του '60 από τους σοβιετικούς, Landau, Dzyaloshinskii και Lifshitz. Αργότερα ο σοβιετικός Indenbom και οι Birss και Rado επεσήμαναν ότι το μαγνητοηλεκτρικό φαινόμενο απαντάται σε πολλές κατηγορίες κρυστάλλων. Όμως, το μαγνητοηλεκτρικό φαινόμενο πρωτοεμφανίστηκε σαν ιδιότητα ενός νέου ιδεατού στοιχείου κυκλωμάτων, του λεγόμενου γυράτορα από τον εμπνευστή του, τον Tellegen, γύρω στα 1948 στα εργαστήρια της Philips Ολλανδίας. Τέλος, πρέπει να επισημανθεί, ότι σχεδόν <u>όλα</u> τα υλικά παρουσιάζουν μαγνητοηλεκτρικές ιδιότητες όταν τεθούν σε κίνηση: Από πολύ παλιά ήταν γνωστό, αυτό. Ο Roentgen, μάλιστα, το 1888 ανεκάλυψε ότι κινούμενα διηλεκτρικά μαγνητίζονται όταν τοποθετηθούν σε ηλεκτρικό πεδίο, ενώ το 1905, ο Wilson έδειξε ότι επίσης κινούμενα διηλεκτρικά μέσα εντός ομοιομόρφου μαγνητικού πεδίου, πολώνεται ηλεκτρικά.

Στα επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε διεξοδικά τα φαινόμενα της πόλωσης και μαγνήτισης πριν ασχοληθούμε με την χειραλικότητα.

ΠΟΛΩΣΗ





Φυσική περιγραφή

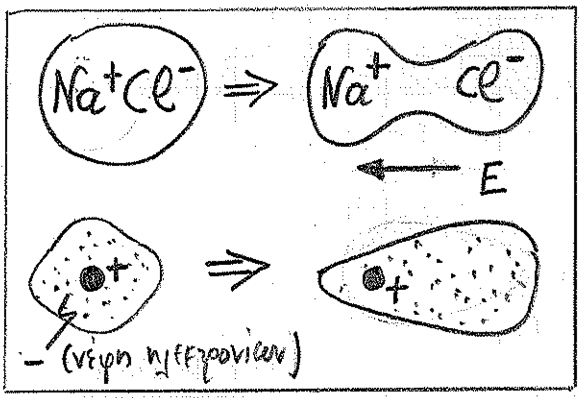
Τα υλικά, εν γένει, χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- Μη πολικά
- Πολικά

Οι χαρακτηρισμοί αυτοί βέβαια αναφέρονται αποκλειστικά στις περιπτώσεις εκείνες που δεν υφίσταται κανένα είδους εξωτερικού (δηλαδή επιβεβλημένου από μας μέσω εξωτερικών πηγών, όπως ήδη εξηγήσαμε) πεδίου.

Τα μη-πολικά υλικά μπορούν να διακριθούν στις εξής κατηγορίες:

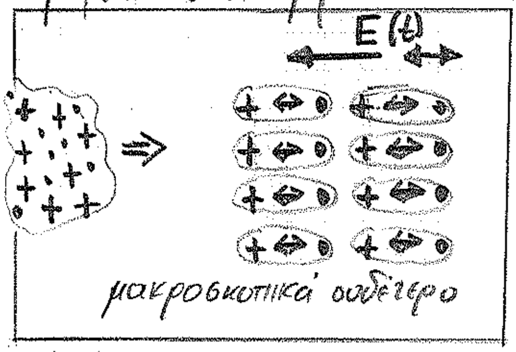
Μη-πολικά:
- επιδεκτικά σε ιοντική ή μοριακή πόλωση:
- επιδεκτικά σε ηλεκτρονική πόλωση:



Δηλαδή, στη μικροσκοπική κλίμακα τα υλικά αυτά πολώνονται λόγω μετατόπισης των γεωμετρικών κέντρων θετικού και αρνητικού φορτίου σε μοριακή ή ηλεκτρονική κλίμακα. Η μετατόπιση αυτή είναι βέβαια σε τάξη μεγέθους συγκρίσιμη ή και μικρότερη των διατομικών αποστάσεων. Το σχήμα της προηγούμενης σελίδας παρουσιάζει την περίπτωση ενός τέτοιου υλικού. Στη περίπτωση αυτή, το υλικό παρουσιάζει φόρτιση στην επιφάνειά του, ενώ στο εσωτερικό υπάρχει εξισορρόπηση που δεν αφήνει περιθώρια για εμφάνιση φορτίων χώρου. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η συμπεριφορά των εν λόγω μη πολικών υλικών στην εφαρμογή του στατικού πεδίου επιφέρει αναδιατάξεις όμοιες με εκείνες ενός υλικού στο οποίο υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια αλλά είναι μακροσκοπικά ουδέτερο: Ηλεκτρόνια θα κινηθούν προς τα αριστερά μέχρι τελικής εξισορρόπησης έτσι ώστε τελικά θα έχουμε την εξωτερική επιφάνεια του υλικού φορτισμένη όπως στο σχήμα. Η σημαντική όμως διαφορά ενός τέτοιου υλικού (που θα ονομάσουμε αγώγιμο και θα μελετήσουμε αργότερα) με το μη πολικό υλικό του παραδείγματος, είναι η ακόλουθη: Το αγώγιμο, εάν έρθει σε επαφή με άλλο αγώγιμο υλικό αντίθετα φορτισμένο (π.χ. την αριστερή πλάκα του σχήματος) θα εκφορτισθεί, δηλαδή τα περισσεύοντα ηλεκτρόνια στην αριστερή επιφάνεια θα μετακινηθούν ελεύθερα μέσα στο ουδέτερο υλικό. Κάτι τέτοιο δε μπορεί να συμβεί, τουλάχιστον εύκολα (για συμβατικές εντάσεις πεδίων που δε θέτουν σε κίνδυνο τους ιοντικούς δεσμούς ή και την κατάσταση δέσμευσης των ηλεκτρονίων – ηλεκτρονικών νεφών από τους πυρήνες).

*** Σημαντική παρατήρηση * ← ΠΡΟΣΟΧΗ !**

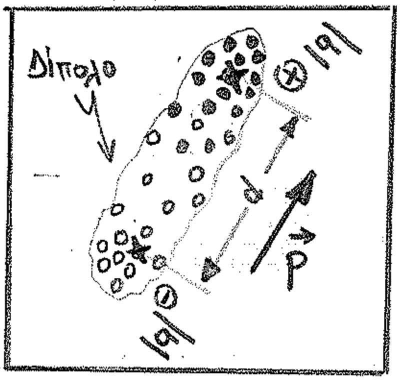
Η πόλωση δεν είναι αποκλειστική ιδιότητα δεσμευμένων φορτίων (είτε σε πυρήνες, είτε σε μοριακά συγκροτήματα). Φορτία (π.χ. ηλεκτρόνια) τα οποία είναι ελεύθερα να κινηθούν (θεωρητικά) και δε αποτελούν μέλη μοριακών ή ηλεκτρονικών συγκροτημάτων, μπορεί, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, να συμβάλλουν στην παρουσία πόλωσης στο υλικό μέσο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό του πλάσματος (συνύπαρξη ηλεκτρονίων και πυρήνων με μακροσκοπική ουδετερότητα και ανυπαρξία φορτίων χώρου στην κατάσταση ηρεμίας απουσία εξωτερικών πεδίων). Αν εφαρμοσθεί περιοδικό ηλεκτρικό πεδίο, τα ηλεκτρόνια τίθενται σε ταλάντωση (σαν πολύ πιο ευκίνητα, λόγω πολύ μικρής μάζας) στη [illegible] των βαρέων (σχετικά) ιόντων. Δηλαδή, εμφανίζονται δίπολα, εναλλασσόμενης κατεύθυνσης και αυξομειούμενου μεγέθους. Η εμφάνιση της περιοδικής αυτής πόλωσης είναι, λοιπόν, αποκλειστική σχεδόν ευθύνη των ηλεκτρονίων που μπορούν ελεύθερα να κινηθούν (όπως και τα ιόντα, αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση) άγοντας ρεύμα όταν εφαρμοσθεί ηλεκτρικό πεδίο που έχει και σταθερή (χρονικά στατική) συνιστώσα.



Τα πολικά υλικά έχουν προϋπάρχοντα δίπολα και χωρίς την επίδραση κάποιου εξωτερικού πεδίου. Όμως, τα δίπολα αυτά μπορεί να είναι κατανεμημένα κατά τέτοιο τρόπο που ακόμη και σε μικρή κλίμακα (μερικών ή και αρκετών μορίων) δεν παρουσιάζουν πόλωση. Όταν όμως εφαρμοσθεί εξωτερικό πεδίο, τα δίπολα τείνουν να ευθυγραμμισθούν με αποτέλεσμα την ανάπτυξη πόλωσης σε μικρο- και μακρο-σκοπικό επίπεδο. Κλασσικό παράδειγμα είναι αυτό του νερού. Αν, η κατανομή των διπόλων είναι τέτοια που να υπάρχει πόλωση εξ αρχής, τότε τα υλικά αυτά ανήκουν στην ειδική υποκατηγορία των ηλεκτρητών. Τέλος υπάρχουν και υλικά (πολικά) τα οποία, μετά από υποβολή σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, παρουσιάζουν παραμένουσα πόλωση, δηλαδή μετατρέπονται σε ηλεκτρίτες. Τα υλικά αυτά καλούνται <u>σιδηρο-ηλεκτρικά</u> (ferroelectrics) επειδή η παραμένουσα πόλωση ομοιάζει αυτής της μαγνήτισης του σιδήρου.

ΠΟΣΟΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

<u>Διπολική ροπή</u> : διανυσματικό μέγεθος ίσο προς το γινόμενο της απόστασης μεταξύ των γεωμετρικών κέντρων των κατανομών θετικού και αρνητικού φορτίου, και της απόλυτου τιμής του φορτίου. Έχει κατεύθυνση <u>πάντα</u> από το αρνητικό στον θετικό φορτίο (πόλο) του ζεύγους. Τυπικές τιμές για τυπικά υλικά : 10^{-30} C·m



$$\boxed{\vec{p} \equiv |q|d} \qquad (23)$$

Το χρησιμοποιούμενο σύμβολο είναι το μικρό "p", και η μονάδα μέτρησης το C·m. Το |q| είναι το συνολικό θετικό φορτίο στη κατανομή θετικού φορτίου. Πρέπει να τονισθεί ότι η διπολική ροπή είναι μεν μικροσκοπική ποσότητα αλλά δεν περιορίζεται κατ' ανάγκη σε μονοατομική ή απλή μοριακή κλίμακα. Έτσι το q μπορεί να είναι από ένα μέχρι αρκετά (δεκάδες-εκατοντάδες) στοιχειώδη φορτία σε μέγεθος. Αν, π.χ., $|q| = 8e \sim 10^{-18}\,C$, τότε $10^{-30}\,Cm = p$ συνεπάγεται χαρακτηριστική απόσταση $d \sim 10^{-12}\,m \sim 10^{-10}\,cm$, δηλαδή περίπου το 1/50 της ακτίνας του Bohr (για το άτομο του υδρογόνου).

<u>Πυκνότητα διπολικής ροπής (Πόλωση, ισοδύναμα)</u>

$$\boxed{\vec{P} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \vec{p}_j = \vec{P}(\vec{r}, t)} \qquad (24)$$

Στο βαθμό που υπάρχει αυτό το όριο μπορεί να ορισθεί η πεδιακή συνάρτηση της πόλωσης και είναι λεία. Γενικά όμως, η πόλωση (λεία ή μη : συνήθης ή ιδιόμορφη) μετρά κατά μέσο όρο και κατά προσέγγιση (όταν η διακριτότητα δεν μπορεί παρά να ληφθεί υπ' όψη) τη συγκέντρωση (m^{-3}) διπολικών ροπών στην γειτονιά ενός σημείου $\vec{r}$, τη χρονική στιγμή t.

Εάν ορίσουμε τη μέση τιμή της διπολικής ροπής στη γειτονιά ενός σημείου $\vec{r}$

σαν,

$$\boxed{\langle \vec{p} \rangle \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta N} \sum_{\substack{j \in \Delta V \\ j=1}}^{\Delta N} \vec{p}_j} \qquad (25)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (24)-(25) παίρνουμε γενικά,

$$\boxed{\vec{P} = n_p(\vec{r}, t) \cdot \langle \vec{p} \rangle} \qquad (26)$$

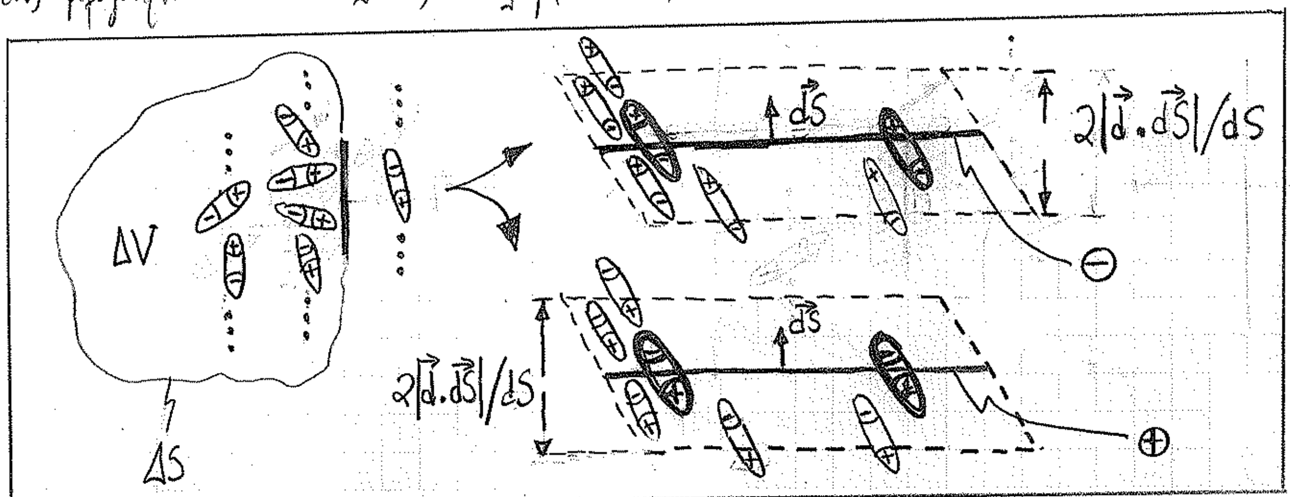
δηλαδή, η πόλωση είναι ανάλογη της αριθμητικής πυκνότητας διπόλων (που μπορεί να είναι και γενικά συνάρτηση πεδιακή) επί τη μέση τιμή της διπολικής ροπής.

Εάν το υλικό μέσο χαρακτηρίζεται από ποικιλία διπόλων με πυκνότητα (μερικές) το καθένα $n_{pa}(\vec{r}, t)$ και μέση διπολική ροπή (το "μέση" τώρα αναφέρεται στο διανυσματικό μέσο των, κατά τα άλλα, ιδίου μέτρου, διπολικών ροπών ενός των συστατικών του μίγματος) $\langle \vec{p}_a \rangle$ τότε προφανώς,

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{a} n_{pa}(\vec{r}, t) \langle \vec{p}_a \rangle \equiv \sum_a \vec{P}_a} \qquad (27)$$

Παράγωγες πυκνότητες φορτίων πόλωσης και $\vec{P}$

Ας εξετάσουμε ένα μικρό κομμάτι πολικού μέσου (τα ίδια ισχύουν και για μη πολικά μέσα). Το κομμάτι αυτό αποτελεί μέρος ενός μεγαλύτερου σε έκταση υλικού, καταλαμβάνει όγκο ΔV και περικλείεται από επιφάνεια ΔS



Επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας σε ένα μικρό μέρος της επιφάνειας του κομματιού, $\vec{dS}$. Όταν εμφανίσει πόλωση το μέσο, το αποτέλεσμα της ευθυγράμμισης των διπόλων στην επιβολή του εξωτερικού πεδίου οδηγεί στα εξής δύο ενδεχόμενα: Εάν μεν $\vec{d}\cdot\vec{dS} > 0$, τότε τα δίπολα συναθροίζονται προβάλλοντας τις θετικές κεφαλές εκτός του ΔV, ενώ εάν $\vec{d}\cdot d\vec{S} < 0$, συμβαίνει το ίδιο με τις ουρές. Και στις δύο όμως περιπτώσεις στη στιβάδα την αφοσαρμένη στο $d\vec{S}$ και σε βάθος ίσο με την προβολή του $\vec{d}$ στην διεύθυνση του $d\vec{S}$, παρουσιάζεται περίσσευμα αρνητικού και θετικού φορτίου αντίστοιχα. Δηλαδή τα σκαρα (στο σχήμα) δίπολα είναι αυτά που τελικά συνεισφέρουν στην εμφάνιση περισσεύματος φορτίου, διότι τα άλλα (ή μάλλον οι ουρές και οι κεφαλές τους) είναι ίσες στον αριθμό εντός του στρώματος αυτού. Επομένως,

όταν $\vec{d}\cdot d\vec{S} > 0$: $dQ_p^- = -|q|\vec{d}\cdot d\vec{S}\, n_p < 0$

-‖- $\vec{d}\cdot d\vec{S} < 0$: $dQ_p^+ = |q|(-\vec{d}\cdot d\vec{S})\, n_p > 0$

όπου n_p η αριθμητική πυκνότητα διπόλων εντός του στρώματος. Έτσι λοιπόν, πάντα

$$\boxed{dQ_p(+\text{ή}-) = -|q|\vec{d}\cdot d\vec{S}\, n_p = -\vec{P}\cdot d\vec{S}} \tag{28}$$

και συνολικά, αν ολοκληρώσουμε επί όλου του επιφανειακού στρώματος του κομματιού:

$$\boxed{\Delta Q_p = -\oint_{\Delta S(\Delta V)} \vec{P}\cdot d\vec{S}} \tag{29}$$

Απλά μαθηματικά (Θεώρημα Gauss) οδηγούν στην τιμή αυτού του επιφανειακού ολοκληρώματος με ολοκλήρωμα στον όγκο ΔV της απόκλισης του διανύσματος $\vec{P}$:

$$\boxed{\Delta Q_p = -\int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{P}\, dV} \tag{30}$$

πράγμα, που στο όριο $\Delta V \to 0$ οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό πυκνότητας φορτίων πόλωσης

$$\boxed{\rho_p \equiv \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta Q_p}{\Delta V} = -\nabla\cdot\vec{P}} \tag{31}$$

Από την παραπάνω ανάλυση, είναι φανερό ότι μπορεί να οριστεί επιφανειακή πυκνότητα φορτίων πόλωσης, σ_p, απλά σαν το άθροισμα των dQ_p/dS και στις δύο όψεις του στοιχείου dS. Δηλαδή [από την (28)] έχουμε:

$$\boxed{\sigma_p \equiv \left(\frac{dQ_p}{dS}\right)_+ + \left(\frac{dQ_p}{dS}\right)_- = -\frac{\vec{P}^{(+)}\cdot d\vec{S}^{(+)} - \vec{P}^{(-)}\cdot d\vec{S}^{(-)}}{dS} = -\left(\vec{P}^{(+)} - \vec{P}^{(-)}\right)\cdot\vec{i}_n} \tag{32}$$

όπου συμβατικά πάντα ορίζουμε $\vec{i}_n \equiv \vec{dS}^{(+)}/dS \; (\equiv \vec{i}_+)$ και διακρίναμε την πόλωση σε $\vec{P}^{(+)}$ και $\vec{P}^{(-)}$ για τις περιπτώσεις που παρουσιάζεται ασυνέχεια καθιερωμένη. Τότε φυσικά μόνο παρατηρείται και επιφανειακή κατανομή φορτίων πόλωσης (όπως, π.χ., στην επιφάνεια ενός πλακιδίου μέσου για και οπερίβλημα κενού χώρο στεφάνια δίπολα)

Ρεύμα Πόλωσης, $\vec{J}_p$

Εάν τα δίπολα που συνεισφέρουν στη παρουσία φορτίου στο στοιχείο $\vec{dS}$ του σχήματος της σελίδας 17, είτε αλλάζουν χρονικά σε αριθμό ή αλλάζουν σε χαρακτηριστικά (π.χ. λόγω μεταβολής του $\vec{d}$), τότε από ισοδύναμη μεταφορά φορτίου δια μέσου του dS. Επειδή η εμφάνιση θετικού φορτίου στο ΔS οφείλεται σε μεταφορά αρνητικών φορτίων εκτός επιφανείας ενώ η εμφάνιση αντίστοιχα αρνητικών οφείλεται σε μεταφορά θετικών φορτίων, ο ρυθμός μεταφοράς ανά μονάδα χρόνου θα είναι $-\frac{d}{dt}dQ_p\,(+ \text{ ή } -)$, οπότε από την (28) έχουμε,

$$\boxed{di_p \equiv -\frac{d}{dt}(dQ_p) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\cdot \vec{dS}} \qquad (33)$$

όπου di_p είναι τα Ampère που αντιστοιχούν στη dS και στη μεταφορά αυτή. Επομένως μπορεί κανείς να ορίσει πυκνότητα ρεύματος πόλωσης $\vec{J}_p$ έτσι ώστε $di_p = \vec{J}_p\cdot\vec{dS}$ ή, λόγω της (33):

$$\boxed{\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} \qquad (34)$$

Σημαντική παρατήρηση (✱) (← ΠΡΟΣΟΧΗ!): Το στοιχείο dS πρέπει να θεωρηθεί ακίνητο.

Νόμος διατήρησης φορτίων πόλωσης

Είναι προφανές ότι (εκ κατασκευής) οι σχέσεις (31) και (34) οδηγούν άμεσα στον νόμο διατήρησης:

$$\boxed{\frac{\partial \varrho_p}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J}_p = 0} \qquad (35)$$

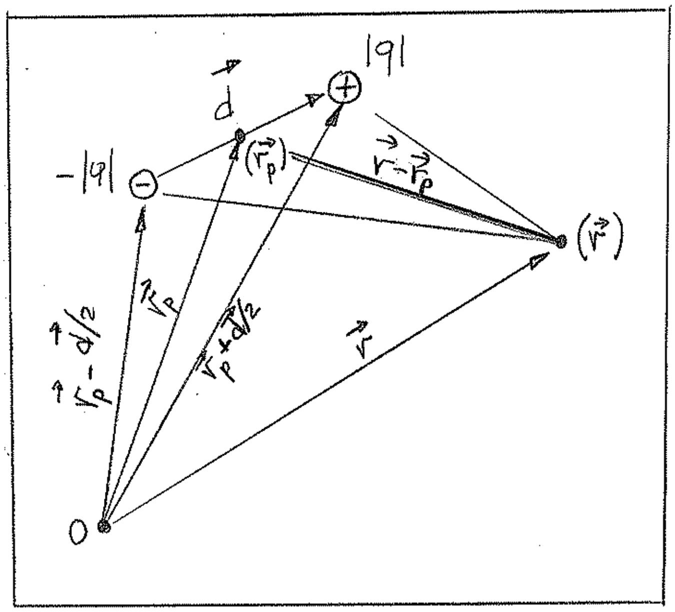
Είναι λοιπόν προφανές ότι τα "ελεύθερα" φορτία, τα φορτία πόλωσης και φυσικά το άθροισμά τους (ας θυμηθούμε ότι $\rho_{ολ} = \rho_u + \rho_p = \rho_u - \nabla\cdot\vec{P}$) υπακούουν το καθένα το νόμο διατήρησης φορτίου. Ας σημειωθεί ότι σαν ολικό ρεύμα μπορούμε να θεωρήσουμε το

$$\boxed{\vec{J}_{ολ} = \vec{J}_u + \vec{J}_p + \nabla\times\vec{M}} \qquad (36)$$

καθότι η απόκλιση του $\nabla\times\vec{M}$ μηδενίζεται ταυτοτικά και έτσι η μαγνήτιση δεν υπεισέρχεται καθόλου στους νόμους διατήρησης των φορτίων.

Δυναμικό λόγω φορτίων πόλωσης

1ος τρόπος (δυναμικό διπόλου)



Το δυναμικό στη θέση $(\vec{r})$ (ως προς το άπειρο) είναι (επαλληλίζοντας τις συνεισφορές της ουράς και της κεφαλής του διπόλου του σχήματος):

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{|q|}{|\vec{r}-\vec{r}_p-\vec{d}/2|} - \frac{|q|}{|\vec{r}-\vec{r}_p+\vec{d}/2|}\right\}$$

όπου $\vec{r}_p$ υποδηλώνει τη θέση του γεωμετρικού κέντρου του διπόλου. Η σχέση αυτή γίνεται:

$$\phi_p = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_p|}\left\{\left[1+\frac{d^2/4-\vec{d}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_p)}{|\vec{r}-\vec{r}_p|^2}\right]^{-1/2} - \left[1+\frac{d^2/4+\vec{d}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_p)}{|\vec{r}-\vec{r}_p|^2}\right]^{-1/2}\right\}$$

Αν τώρα, $d \ll |\vec{r}-\vec{r}_p|$ τότε,

$$\phi_p \simeq \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_p|}\left\{\left[1-\frac{\vec{d}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_p)}{|\vec{r}-\vec{r}_p|^2}\right]^{-1/2} - \left[1+\frac{\vec{d}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_p)}{|\vec{r}-\vec{r}_p|^2}\right]^{-1/2}\right\}$$

$$\simeq \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_p|}\left\{\left[1+\frac{\vec{d}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_p)}{|\vec{r}-\vec{r}_p|^2}\right]^{1/2} - \left[1-\frac{\vec{d}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_p)}{|\vec{r}-\vec{r}_p|^2}\right]^{1/2}\right\}$$

$$\simeq \frac{|q|\,\vec{d}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_p)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_p|^3} = \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_p)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_p|^3}$$

όπου κάνουμε χρήση των προσεγγίσεων ($\xi \ll 1$): $(1\pm\xi)^{-1} \simeq 1\mp\xi$ και $(1\pm\xi)^{1/2} \simeq 1 \pm \xi/2$. Αν ορίσουμε $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_p$ δηλαδή το διάνυσμα από το κέντρο του διπόλου <u>προς</u> το σημείο μέτρησης του δυναμικού, έχουμε:

$$\boxed{\phi_p \simeq \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \equiv \frac{\vec{p}\cdot\vec{i}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,, \quad \vec{i}_R \equiv \frac{\vec{R}}{R}} \tag{37}$$

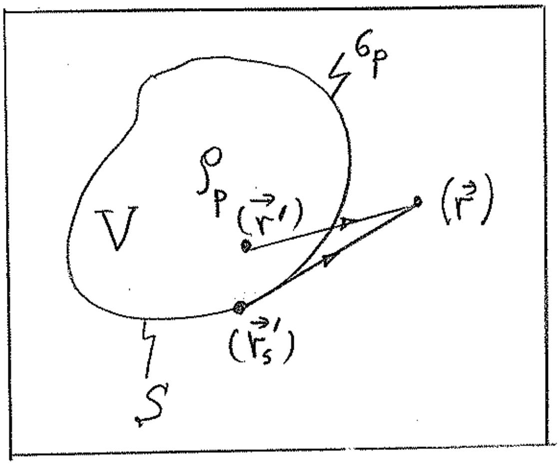
Αν, πάλι, υποθέσουμε ότι υπάρχουν πολλά δίπολα στον χώρο

$$\boxed{\phi_{p\,o\lambda} = \sum_j \frac{\vec{p}_j\cdot\vec{R}_j}{4\pi\varepsilon_0 R_j^3}} \tag{38}$$

και στο συνεχές όριο και όταν μπορεί να ορισθεί η πυκνότητα διπολικής ροπής (ή πόλωση) $\vec{P}$, έτσι ώστε $\vec{p}_j \to d\vec{p} = \vec{P}\,dV$ τότε έχουμε το εξής ολοκλήρωμα επαλληλίας:

$$\boxed{\phi_{p\,o\lambda}(\vec{r},t) = \int_V dV' \frac{\vec{P}(\vec{r}',t)\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}} \tag{39}$$

$2^{ος}$ ΤΡΟΠΟΣ (φορτία πόλωσης)



Εδώ, γίνεται απ' ευθείας εφαρμογή του ολοκληρώματος επαλληλίας σε κάποια θέση του χώρου, δεδομένων των κατανομών ρ_p και σ_p στο υλικό μέσο. Δηλαδή:

$$\varphi_p(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho_p\frac{(\vec{r}',t)\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S(V)} dS' \frac{\sigma_p(\vec{r}_s',t)}{|\vec{r}-\vec{r}_s'|}$$

ή, εφαρμόζοντας τις (31) και (32):

$$\varphi_p(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{p}'\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \oint_{S(V)} dS' \frac{\vec{i}_n\cdot(\underbrace{\cancel{\vec{p}_s^{(+)}}}_{0} - \vec{p}_s^{(-)})\,dS'}{|\vec{r}-\vec{r}_s'|}\right]$$

όπου ο μηδενισμός της $\vec{p}^{(+)}$ οφείλεται στο ότι το (+) αναφέρεται στον εξωτερικό της επιφανείας χώρο. Επειδή, $\nabla'\cdot\vec{p}'/|\vec{r}-\vec{r}'| = \nabla'(\vec{p}'/|\vec{r}-\vec{r}'|) - \vec{p}'\cdot\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$ έχουμε

Τελικά,

$$\phi_p(\vec r,t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \nabla'\left(\frac{\vec P'}{|\vec r-\vec r'|}\right)dV' - \int_V \vec P'\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)dV' - \oint_{S(V)} \frac{d\vec S'\cdot\vec P_s'}{|\vec r-\vec r_s'|}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cancel{\oint_{S(V)} \frac{d\vec S'\cdot\vec P_s'}{|\vec r-\vec r_s'|}} - \int \vec P'\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)dV' - \cancel{\oint \frac{d\vec S'\cdot\vec P_s'}{|\vec r-\vec r_s'|}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec P'\cdot(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}\,dV'$$

όπως τελικά περιμέναμε.

ΑΠΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΠΟΛΩΣΗΣ

α. Πόλωση λόγω κίνησης δεσμευμένου ηλεκτρονίου κατά την επίδραση ενός αρμονικού ηλεκτρικού πεδίου

Εάν ξ είναι η μετακίνηση από τη θέση ισορροπίας (μηδενικό συνολικό φορτίο) του ηλεκτρονίου μάζας M_e, τότε η μεν αδρανειακή δύναμη είναι $M_e\frac{d^2\xi}{dt^2}$, ενώ η δύναμη επαναφοράς λόγω του δεσμού μπορεί να προσεγγισθεί γραμμικά (όπως στο μηχανικό ανάλογο του ελατηρίου) με $k\xi$ όπου k θετική σταθερά χαρακτηριστική του δεσμού. Υποθέτουμε επίσης ότι κατά την κίνησή του το ηλεκτρόνιο επηρεάζεται από τα πεδία των θερμικά κινούμενων γειτονικών ατομικών συγκροτημάτων, πράγμα που υποθέτουμε ότι προκαλεί ανάσχεση στην κίνησή του: δηλαδή, η δύναμη "τριβής" που προκαλεί ανάσχεση έστω ότι είναι $M_e\delta\frac{d\xi}{dt}$ όπου δ είναι μία δεύτερη θετική σταθερά. Έτσι, η εξίσωση της κίνησης γίνεται (*: βλέπε σημείωση σελίδα 24)

$$M_e\frac{d^2\xi}{dt^2} + M_e\delta\frac{d\xi}{dt} + k\xi = eE(t)$$

Εάν εισάγουμε φασιθέτες: $\xi = Re\,\xi_\omega e^{-j\omega t}$, $E = Re\,E_\omega e^{-j\omega t}$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$-M_e\omega^2\xi_\omega - j\omega M_e\delta\xi_\omega + k\xi_\omega = eE_\omega$$

οπότε, ο φασιθέτης της μετακίνησης, γίνεται:

$$\xi_\omega = \frac{-e}{M_e\omega^2 + j\omega M_e\delta - K}\,E_\omega$$

ή εάν ορίσουμε την ιδιοσυχνότητα (επαναφοράς) $\omega_0 = (K/M_e)^{1/2}$, θα έχουμε

$$\xi_\omega = \frac{-e/M_e}{\omega^2 - \omega_0^2 + j\omega\delta}\,E_\omega$$

και έτσι

$$\boxed{\xi(t) = Re\left(\frac{-e/M_e\,E_\omega e^{-j\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + j\omega\delta}\right)} \qquad (40)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε ένα πλήθος τέτοιων χρονικά μεταβαλλόμενων διπόλων, όλων ομοίων και, επιπλέον, υποθέτουμε ότι (μια και ήδη λάβαμε υπ' όψη την "τριβή" των γειτόνων), διατυπωμένα στη βάση της σχέσης (40), μπορούν να θεωρηθούν ως ανεξάρτητα και μη επηρεαζόμενα. Έτσι λοιπόν, αν n_p είναι η αριθμητική τους πυκνότητα θα έχουμε για την πόλωση:

$$P(t) = -Re\left(\frac{e^2 n_p/M_e\,E_\omega e^{-j\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + j\omega\delta}\right)$$

ή

$$\boxed{P_\omega = \varepsilon_0\frac{\omega_e^2 E_\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\delta} \quad \text{με} \quad \omega_e^2 \equiv \frac{e^2 n_p}{\varepsilon_0 M_e}} \qquad (41)$$

όπου ω_e καλείται συχνότητα πλάσματος ηλεκτρονίων – πυρήνων. Εφ' όσον, τώρα, $\vec{D}_\omega = \varepsilon_0\vec{E}_\omega + \vec{P}_\omega$ έχουμε τελικά,

$$\boxed{D_\omega = \varepsilon_0\left(1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\delta}\right)E_\omega \equiv \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)E_\omega} \qquad (42)$$

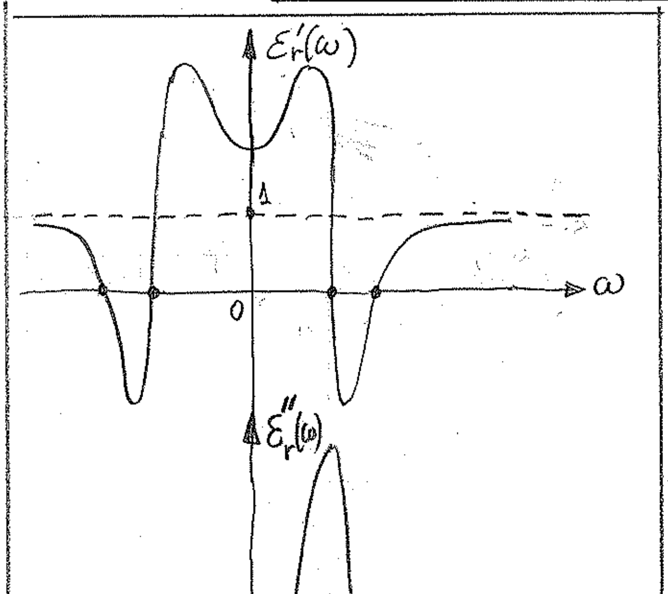
(*) Πρέπει να σημειωθεί ότι όταν $E>0$ (στο σύστημα μέτρησης του ξ με αρχή τον άξονα στη θέση του θετικού ιόντος) τότε $\xi<0$ και αντίστροφα ← ΠΡΟΣΟΧΗ !

Επομένως, η σχετική ηλεκτρική επιτρεπτότητα στο συχνοτικό χώρο είναι μιγαδική ποσότητα

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_r(\omega) &= 1+\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2-\omega^2-j\omega\delta}\\ &\equiv \varepsilon_r'(\omega)+j\,\varepsilon_r''(\omega)\end{aligned}} \qquad (43)$$

όπου $\varepsilon_r'(\omega)$ και $\varepsilon_r''(\omega)$ είναι αντίστοιχα το πραγματικό και φανταστικό μέρος, ήτοι:

$$\boxed{\varepsilon_r'(\omega)=1+\frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\delta^2}\,,\quad \varepsilon_r''(\omega)=\frac{\omega_p^2\,\omega\,\delta}{(\omega_p^2-\omega^2)^2+\omega^2\delta^2}} \qquad (44)$$



Στα διπλανά σχήματα βλέπουμε τυπικές μορφές των συναρτήσεων αυτών. Για μεγάλη συχνότητα ηλεκτρικού πεδίου, η επιτρεπτότητα πλησιάζει τη μονάδα δηλαδή αυτή του κενού ενώ το φανταστικό μέρος που αντανακλά την ανασχετική επίδραση των μεμονών (ανάλογο του δ) εκμηδενίζεται. Το τελευταίο μάλιστα μεγιστοποιείται για συχνότητες πολύ κοντά στη συχνότητα πλάσματος. Για την ακρίβεια,

$$\omega^2_{\varepsilon''\to max}=(\omega_p^4+\delta^4)^{1/2}-\delta^2\simeq\omega_p^2$$

για μικρό δ. Παρατηρούμε επίσης ότι το πραγματικό μέρος μηδενίζεται, δηλαδή η διηλεκτρική μετατόπιση μηδενίζεται κατά το πραγματικό της μέρος (του φασιθέτη) για συχνότητα πλησίον της $\omega_p^2+\omega_0^2$ (για μικρό δ):

$$\omega^2_{\varepsilon'\to 0}=\frac{\omega_p^2+\delta^2+2\omega_0^2\pm\left[(\omega_p^2+\delta^2)^2+4\omega_0^2\delta^2\right]^{1/2}}{2}$$

β. Πόλωση λόγω κίνησης ηλεκτρονίων (ελευθέρων) σε περιβάλλον ακίνητων ιόντων (βαρέων) κατά την επίδραση ενός αρμονικού ηλεκτρικού πεδίου.

Η περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν υποπερίπτωση της (α) στην περίπτωση που απουσιάζουν τόσο η δύναμη επαναφοράς (η του "ελατηρίου") καθώς και η "τριβή". Έτσι λοιπόν έχουμε για την διηλεκτρική μετατόπιση σε πλάσμα νέφους ηλεκτρονίων σε περιβάλλον εξουδετέρωσης βαρέων ακίνητων ιόντων [από τη σχέση (42)]:

$$D_\omega = \varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right)E_\omega \equiv \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)E_\omega \qquad (45)$$

Η διηλεκτρική μετατόπιση αυτή παρουσιάζει συντονισμό (απειρίζεται δηλαδή) για $\omega \simeq \omega_e$ ενώ τη τιμή αυτή του κενού (~ 1) για συχνότητες πολύ μεγάλες σε σχέση με τη συχνότητα πλάσματος.

γ. Γυροτροπικό μέσο: Πλάσμα σε ομογενές στατικό μαγνητικό πεδίο.

Αν υποθέσουμε ότι υφίσταται ομογενές στατικό πεδίο $\vec{B}_0$, τότε η εξίσωση κίνησης διανυσματικά (δύναμη Lorentz) μπορεί να γραφεί για ένα ηλεκτρόνιο:

$$M_e\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\left[\vec{E}(t)+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}_0\right]$$

Επειδή η 2η παράγωγος της μετατόπισης των ηλεκτρονίων και αυτή της πόλωσης που αναπτύσσεται λόγω δράσης εξατερικής ηλεκτρικής δύναμης, είναι διανύσματα αντίρροπα, ενώ στην περίπτωση της μαγνητικής δύναμης η 2η παράγωγος είναι ομόρροπη του γινομένου $\frac{d\vec{P}}{dt}\times\vec{B}_0$ (*), για πυκνότητα πλάσματος n_e:

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = -en_e\frac{d^2\vec{\xi}}{dt^2} = -en_e\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{e^2n_e}{M_e}\left[\vec{E}(t)+\frac{1}{en_e}\frac{d\vec{P}}{dt}\times\vec{B}_0\right]$$

ή, αν ορίσουμε τη συχνότητα Larmor $\vec{\omega}_c \equiv \frac{e\vec{B}_0}{M_e}$

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} = \varepsilon_0\frac{e^2n_e}{M_e\varepsilon_0}\left[\vec{E}(t)-\frac{M_e}{e^2n_e}\vec{\omega}_c\times\frac{d\vec{P}}{dt}\right] = \varepsilon_0\omega_e^2\vec{E}(t)-\vec{\omega}_c\times\frac{d\vec{P}}{dt}$$

ή

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2}+\vec{\omega}_c\times\frac{d\vec{P}}{dt} = \varepsilon_0\omega_e^2\vec{E}(t)$$

(*) Βλέπε σελίδα (27)

Με χρήση φασιθετών θα έχουμε πάλι,

$$\boxed{-\omega^2\vec{P}_\omega + j\omega\vec{\omega}_c\times\vec{P}_\omega = -\varepsilon_0\omega_e^2\vec{E}_\omega} \qquad (46)$$

Η διανυσματική αυτή εξίσωση μπορεί εύκολα να λυθεί:

$$-\omega^2\vec{\omega}_c\cdot\vec{P}_\omega = -\varepsilon_0\omega_e^2\vec{E}_\omega\cdot\vec{\omega}_c$$ και

$$\omega^2\vec{\omega}_c\times\vec{P}_\omega + j\omega\,\vec{\omega}_c\times(\vec{\omega}_c\times\vec{P}_\omega) = -\varepsilon_0\omega_e^2\vec{\omega}_c\times\vec{E}_\omega$$ ή ισοδύναμα

$$-\omega^2\vec{\omega}_c\times\vec{P}_\omega + j\omega\left[(\vec{\omega}_c\cdot\vec{P}_\omega)\vec{\omega}_c - \omega_c^2\vec{P}_\omega\right] = -\varepsilon_0\omega_e^2\vec{\omega}_c\times\vec{E}_\omega$$ ή επίσης ισοδύναμα

$$j\omega\vec{\omega}_c\times\vec{P}_\omega + \varepsilon_0\frac{\omega_e^2}{\omega^2}(\vec{E}_\omega\cdot\vec{\omega}_c)\vec{\omega}_c + \omega_c^2\vec{P}_\omega = -j\varepsilon_0\omega_e^2\frac{\vec{\omega}_c}{\omega}\times\vec{E}_\omega$$ η οποία λόγω της (46) γίνεται:

$$-\varepsilon_0\omega_e^2\vec{E}_\omega - \omega^2\vec{P}_\omega + \varepsilon_0\frac{\omega_e^2}{\omega^2}(\vec{E}_\omega\cdot\vec{\omega}_c)\vec{\omega}_c + \omega_c^2\vec{P}_\omega = -j\varepsilon_0\frac{\omega_e^2\vec{\omega}_c}{\omega}\times\vec{E}_\omega$$ ή

$$(\omega_c^2-\omega^2)\frac{\vec{P}_\omega}{\varepsilon_0} = -\omega_e^2\vec{E}_\omega - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\vec{\omega}_c(\vec{\omega}_c\cdot\vec{E}_\omega) - j\frac{\omega_e^2\vec{\omega}_c}{\omega}\times\vec{E}_\omega$$ ή

$$\boxed{\vec{P}_\omega = \varepsilon_0\left[\frac{\omega_e^2}{\omega_c^2-\omega^2}\vec{E}_\omega - \frac{\omega_e^2\vec{\omega}_c}{\omega^2(\omega_c^2-\omega^2)}(\vec{\omega}_c\cdot\vec{E}_\omega) - j\frac{\omega_e^2}{\omega(\omega_c^2-\omega^2)}\vec{\omega}_c\times\vec{E}_\omega\right]} \qquad (47)$$

Σε καρτεσιανό σύστημα, η διηλεκτρική μετατόπιση γράφεται (σημειώστε ότι αν το εξωτερικό πεδίο είναι κατά τη διεύθυνση z τότε $\vec{\omega}_c = \vec{i}_z\omega_c$):

$$D_{\omega,x} = \varepsilon_0\left[\left(1-\frac{\omega_e^2}{\omega^2-\omega_c^2}\right)E_{\omega,x} - j\frac{\omega_e^2\omega_c}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)}E_{\omega,y}\right]$$

$$D_{\omega,y} = \varepsilon_0\left[\left(1-\frac{\omega_e^2}{\omega^2-\omega_c^2}\right)E_{\omega,y} + j\frac{\omega_e^2\omega_c}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)}E_{\omega,y}\right]$$

$$D_{\omega,z} = \varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right)E_{\omega,z}$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\boxed{\vec{D}_\omega = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r(\omega) \circ \vec{E}_\omega} \qquad (48)$$

δηλαδή, στην περίπτωση αυτή η ηλεκτρική επιτρεπτότητα γίνεται τανυστής:

$$\boxed{\overleftrightarrow{\varepsilon}_r(\omega) \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{r\perp}(\omega) & -j\,\varepsilon_{rg}(\omega) & 0 \\ j\,\varepsilon_{rg}(\omega) & \varepsilon_{r\perp}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{r\parallel}(\omega) \end{pmatrix}} \qquad (49)$$

όπου, στο εγκάρσιο (ως προς $\vec{B}$) πεδίο, η σχετική επιτρεπτότητα δίνεται από:

$$\boxed{\varepsilon_{r\perp}(\omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_c^2}} \qquad (50\alpha)$$

κατά μήκος του άξονα επιβολής του πεδίου το πλάσμα συμπεριφέρεται σαν αμαγνήτιστο:

$$\boxed{\varepsilon_{r\parallel}(\omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}} \qquad (50\beta)$$

ενώ υπάρχουν και δύο συζυγή στοιχεία εκτός διαγωνίου (φανταστικά και αντίθετα) $\pm j\,\varepsilon_{rg}(\omega)$ που δίνονται από τη σχέση:

$$\boxed{\varepsilon_{rg}(\omega) = \frac{\omega_e^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}} \qquad (50\gamma)$$

Παρατήρηση για τη δράση μαγνητικής δύναμης επί της πόλωσης λόγω μετατόπισης ηλεκτρονίων

$$M_e d^2\vec{P} = e\, d\vec{P} \times \vec{B}_0\, dt$$