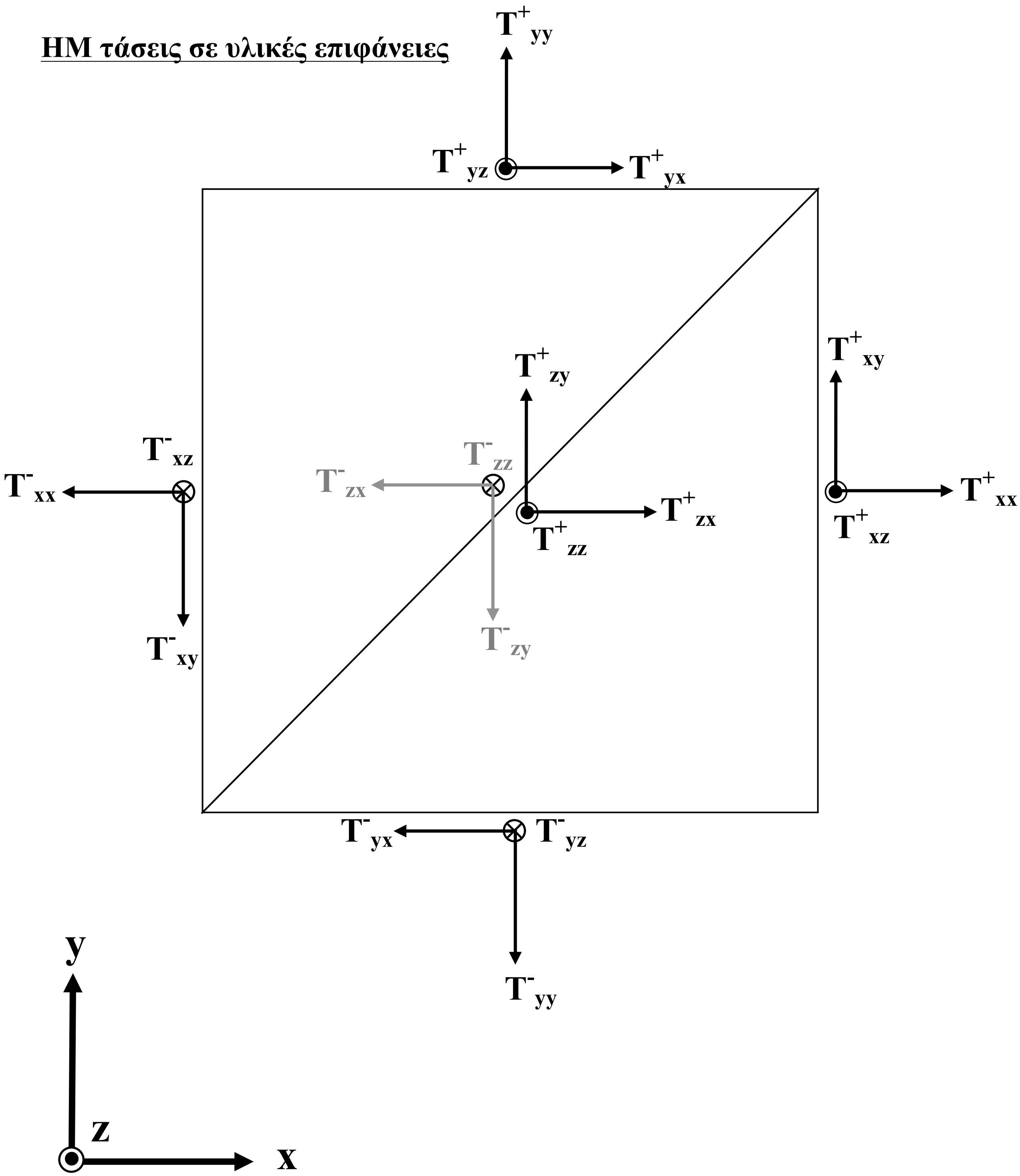
<u>ΗΜ τάσεις σε υλικές επιφάνειες</u>



ΗΜ τάση: Δύναμη ανα μονάδα επιφάνειας
(T_{xx},T_{xy},T_{xz}): Οι 3 συνιστώσες της ΗΜ τάσης σε επιφάνεια κάθετη στο **x**
(T_{yx},T_{yy},T_{yz}): Οι 3 συνιστώσες της ΗΜ τάσης σε επιφάνεια κάθετη στο **y**
(T_{zx},T_{zy},T_{zz}): Οι 3 συνιστώσες της ΗΜ τάσης σε επιφάνεια κάθετη στο **z**

Ο τανυστής του Maxwell και το θεώρημα διατήρησης της ΗΜ ορμής

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{em} = -\mathbf{T}$$

$$\vec{\mathbf{p}}_{em} = \vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{B}} : \ \textit{χωρικη πυκνοτητα ΗΜ ορμης}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{p}}_{em}}{\partial t} \right)_{\mu\varepsilon\tau} : \ \textit{ρυθμος μετατροπης της πυκνοτητας της ΗΜ ορμης}$$

Ο τανυστής του Maxwell ταυτίζεται με την ροή (διάνυσμα) της ΗΜ ορμής (επίσης διάνυσμα). Αναλυτικά έχουμε:

$$(T_{em,xx}, T_{em,yx}, T_{em,zx}) = (-T_{xx}, -T_{yx}, -T_{zx})$$

Οι 3 συνιστώσες της ροής της x συνιστώσας της ΗΜ ορμής

$$(T_{em,xy}, T_{em,yy}, T_{em,zy}) = (-T_{xy}, -T_{yy}, -T_{zy})$$

Οι 3 συνιστώσες της ροής της y συνιστώσας της ΗΜ ορμής

$$(T_{em,xz}, T_{em,yz}, T_{em,zz}) = (-T_{xz}, -T_{yz}, -T_{zz})$$

Οι 3 συνιστώσες της ροής της z συνιστώσας της ΗΜ ορμής

Η ΗΜ ορμή μετατρέπεται σε δύναμη που ασκείται πάνω σε φορτία και ρεύματα. Άρα:

$$\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{p}}_{em}}{\partial t} \right)_{\mu\varepsilon\tau} = -\vec{\mathbf{f}}_L = -\rho_u \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{J}}_u \times \vec{\mathbf{B}}$$

Ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της ΗΜ ορμής:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(S)} \vec{\mathbf{p}}_{em} \, dV + \oiint_{S(V)} \hat{\mathbf{n}} . \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{em} dS = \int_{V(S)} \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{p}}_{em}}{\partial t} \right)_{\mu\varepsilon\tau} dV = -\int_{V(S)} \left(\rho_u \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{J}}_u \times \vec{\mathbf{B}} \right) dV$$

Διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της ΗΜ ορμής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{B}} \right) + \nabla . \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{em} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{B}} \right) - \nabla . \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = -\rho_u \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{J}}_u \times \vec{\mathbf{B}}$$

Σημειωτέον ότι: $\left(\nabla . \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \right)_{i=1,2,3} \equiv \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial T_{ji}}{\partial \xi_j}, \ \xi_{j=1,2,3} = x, y, z, \ (1,2,3) \equiv (x, y, z)$

<u>Γραμμικά ανισοτροπικά υλικά μέσα χωρίς απώλειες</u>

Η ΗΜ τάση επι επιφανείας πλευράς επιφάνειας $\hat{\mathbf{n}}$ δηλαδη, της πλευράς που «βλέπει» προς την θετική έννοια του μοναδιαίου (και κάθετου στην επιφάνεια) διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$, στην περίπτωση που η πόλωση και η μαγνήτιση εξαρτάται αποκλειστικα από την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα ανεξαρτήτως θέσεως στο υλικό δὶνεται γενικά από τη σχέση:

$$\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{ED}+\mathbf{HB}\right)-\hat{\mathbf{n}}\left(\int^{\mathbf{E}}\mathbf{D}'.d\mathbf{E}'+\int^{\mathbf{H}}\mathbf{B}'.d\mathbf{H}'\right)$$

Για γραμμικά υλικά χωρίς απώλειες η παραπάνω σχέση εξειδικεύεται στη:

$$\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{ED}+\mathbf{HB}\right)+\hat{\mathbf{n}}\left(w_{em}-\mathbf{D}.\mathbf{E}-\mathbf{B}.\mathbf{H}\right)$$

ὀπου w_{em} ειναι η πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στην εν λόγω πλευρά. Ο δεύτερος προσθεταίος της παραπάνω έκφρασης είναι η ορθή τάση επι της επιφανείας της πλευράς. Ενώ ο πρώτος περιέχει και ορθή τάση αλλά και διατμηση. Έτσι, η μεν **ορθή τάση** προκύπτει πολλαπλασιαζοντας πρώτα βαθμωτα (με την πράξη εσωτερικού γινομένου) με το διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ και το αποτέλεσμα μετά παλι με $\hat{\mathbf{n}}$ για να εκφράσουμε το αποτέλεσμα **διανυσματικά.** Έτσι λοιπόν η ορθή τάση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{D}\right)+\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{B}\right)+\hat{\mathbf{n}}w_{em}-\hat{\mathbf{n}}\mathbf{D}.\mathbf{E}-\hat{\mathbf{n}}\mathbf{B}.\mathbf{H}$$

Η διατμητική τάση είναι διανυσματικό μέγεθος και προκύπτει από το αρνητικό διπλό εξωτερικό γινόμενο της τάσης με το διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$, δηλαδή μέσω της πάξης $-\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\right)$(*). Έτσι η **διατμητική τάση** γίνεται:

$$-\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{D}\right)-\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{B}\right)$$

Συνοψίζοντας:

ορθή τάση πλευράς $\left(\hat{\mathbf{n}}\right)=\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{D}\right)+\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{B}\right)-\hat{\mathbf{n}}w_{em}$

διατμητική τάση πλευράς $\left(\hat{\mathbf{n}}\right)=-\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{D}\right)-\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{B}\right)$

Προφανώς, σε αλλαγή πλευράς θα πρέπει να θέσουμε $\hat{\mathbf{n}}\rightarrow-\hat{\mathbf{n}}$, Θεωρώντας ότι η "πάνω" πλευρά, με το $\hat{\mathbf{n}}$ ειναι η (+) και η "κάτω" πλευρά με το $-\hat{\mathbf{n}}$ ειναι η (-) (δηλαδή το μαναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ έχει κατεύθυνση $-\rightarrow+$), για να υπολογίσουμε την συνολική τάση επί της επιφάνειας σε συγκεκριμένο σημείο, θα πρέπει να αθροίσουμε διανυσματικα τις παραπάνω εκφράσεις για $\hat{\mathbf{n}}$ και $-\hat{\mathbf{n}}$. Αρα:

(*) Διότι: $-\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{a}\right)\equiv\mathbf{a}-\left(\mathbf{a}.\hat{\mathbf{n}}\right)\hat{\mathbf{n}}$

ορθή τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(-\rightarrow+)\perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}^{(+)}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{D}^{(+)}\right)+\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}^{(+)}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{B}^{(+)}\right)-\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}^{(-)}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{D}^{(-)}\right)-\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}^{(-)}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{B}^{(-)}\right)-\hat{\mathbf{n}}w_{em}^{(+)}+\hat{\mathbf{n}}w_{em}^{(-)}$$

διατμητική τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(-\rightarrow+)\perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$-\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}^{(+)}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{D}^{(+)}\right)-\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}^{(+)}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{B}^{(+)}\right)+\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}^{(-)}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{D}^{(-)}\right)+\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}^{(-)}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{B}^{(-)}\right)$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες Maxwell για τις επιφάνειες:

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(-\rightarrow+)\perp \text{ στην επιφάνεια}\right]\\
&\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{D}^{(+)}-\mathbf{D}^{(-)}\right)=\sigma_u, \quad \hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{B}^{(+)}-\mathbf{B}^{(-)}\right)=0,\\
&\hat{\mathbf{n}}\times\left(\mathbf{E}^{(+)}-\mathbf{E}^{(-)}\right)=\mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{n}}\times\left(\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{H}^{(-)}\right)=\mathbf{K}_u
\end{aligned}$$

και τις σχέσεις για κάθε υλικό μέσο:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}&=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P},\\
\mathbf{B}&=\mu_0\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{M}
\end{aligned}$$

παίρνουμε:

ορθή τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(-\rightarrow+)\perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$\varepsilon_0\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{E}^{(+)}-\mathbf{E}^{(-)}\right)\mathbf{E}^{(-)}.\hat{\mathbf{n}}+\mu_0\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{H}^{(-)}\right)\mathbf{H}^{(-)}.\hat{\mathbf{n}}+\hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}^{(+)}\right)\sigma_u$$

$$+\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{E}^{(+)}-\mathbf{E}^{(-)}\right)\mathbf{P}^{(-)}.\hat{\mathbf{n}}+\mu_0\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{H}^{(-)}\right)\mathbf{M}^{(-)}.\hat{\mathbf{n}}-\hat{\mathbf{n}}w_{em}^{(+)}+\hat{\mathbf{n}}w_{em}^{(-)}$$

διατμητική τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(-\rightarrow+)\perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$-\varepsilon_0\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{E}^{(+)}-\mathbf{E}^{(-)}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^{(-)}\right)-\mu_0\hat{\mathbf{n}}.\left(\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{H}^{(-)}\right)\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^{(-)}\right)-\mu_0\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}^{(+)}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{K}_u\right)$$

$$-\hat{\mathbf{n}}\times\left[\hat{\mathbf{n}}\times\left(\mathbf{P}^{(+)}\mathbf{E}^{(+)}-\mathbf{P}^{(-)}\mathbf{E}^{(-)}\right).\hat{\mathbf{n}}\right]-\mu_0\hat{\mathbf{n}}\times\left[\hat{\mathbf{n}}\times\left(\mathbf{M}^{(+)}\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{M}^{(-)}\mathbf{H}^{(-)}\right).\hat{\mathbf{n}}\right]$$

Απλά ισοτροπικά υλικά μέσα

Για γραμμικά υλικά στα οποία μπορούμε να θέσουμε:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$$

οι τάσεις αυτές γίνονται:

ορθή τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(- \rightarrow +) \perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$\frac{\varepsilon^{(+)}}{2}\hat{\mathbf{n}}\left(\left|\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}^{(+)}\right|^2-\left|\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^{(+)}\right|^2\right)-\frac{\varepsilon^{(-)}}{2}\hat{\mathbf{n}}\left(\left|\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{E}^{(-)}\right|^2-\left|\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^{(-)}\right|^2\right)$$

$$+\frac{\mu^{(+)}}{2}\hat{\mathbf{n}}\left(\left|\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}^{(+)}\right|^2-\left|\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^{(+)}\right|^2\right)-\frac{\mu^{(-)}}{2}\hat{\mathbf{n}}\left(\left|\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{H}^{(-)}\right|^2-\left|\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^{(-)}\right|^2\right)$$

διατμητική τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(- \rightarrow +) \perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$-\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^{(+)}\right)\sigma_u-\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{K}_u\left(\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{B}^{(+)}\right)$$

΄0ταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι μόνο εγκάρσιο στις δύο πλευρές της επιφανειας **δεν υφίσταται διατμητική ηλεκτρική τάση**, παρά μόνο ορθή και, λόγω του νόμου του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο, θα πάρουμε:

ορθή ηλεκτρικη τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(- \rightarrow +) \perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$\hat{\mathbf{n}}\left(w_e^{(+)}-w_e^{(-)}\right)$$

Όταν το μαγνητικό πεδίο είναι μόνο εγκάρσιο στις δύο πλευρές της επιφανειας, δεν υφίσταται διατμητική μαγνητική τάση, παρά μόνο ορθή:

ορθή μαγνητικη τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(- \rightarrow +) \perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$\hat{\mathbf{n}}\left(w_m^{(+)}-w_m^{(-)}\right)$$

Όταν τώρα το ηλεκτρικό πεδίο είναι μόνο εφαπτομενικό στις δύο πλευρές της επιφανειας, με δεδομένο τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου (νόμος Faraday) **δεν υφίσταται ορθή ηλεκτρική τάση**.

Στην περίπτωση εφαπτομενικού μαγνητικου πεδίου στις δυο πλευρές της επιφάνειας έχουμε:

ορθή μαγνητική τάση σε επιφάνεια πλευρών (+) και (−) $\left[\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{P}(- \rightarrow +) \perp \text{ στην επιφάνεια}\right]$

$$\hat{\mathbf{n}}\left(w_m^{(-)}-w_m^{(+)}\right)$$

και **η αντίστοιχη διατμητική μαγνητική τάση μηδενίζεται.**