Χαρακτηριστικά μεγέθη πλάσματος

Μήκος Debye

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα πλήθος από φορτισμένα σωμάτια διαφόρων κατηγοριών τα οποία, όσον αφορά τα φορτία τους και τους πληθυσμούς κάθε είδους βρίσκονται σε ισορροπία, δηλαδή:

$$\sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha = 0 \quad \text{με} \quad n_{\alpha 0} = \frac{N_\alpha}{V} \qquad (1)$$

όπου N_α, q_α είναι ο αριθμός των σωματίων και το φορτίο του καθενός (αντιστοίχως) για το είδος "α". Υποθέτουμε ότι τα σωμάτια βρίσκονται σε άτακτη-θερμική κίνηση και ότι κάθε είδος χαρακτηρίζεται από μια θερμοκρασία T_α. Τότε, απουσία αλληλεπιδράσεων ενέργειας που να οδηγούν σε εξίσωση των θερμοκρασιών τους (αραιό αέριο σωματίων) θα είχαμε για κάθε είδος

$$n_\alpha(\vec{r}) = n_{\alpha 0}\, e^{-q_\alpha \phi / k_B T_\alpha} \qquad (2)$$

όπου ϕ: το ηλεκτροστατικό δυναμικό (με $|q_\alpha \phi| \ll k_B T_\alpha$) μέσα στο οποίο τα σωμάτια αυτά κινούνται (Υποθέτουμε ότι ισχύει η ηλεκτροστατική προσέγγιση). Η εξίσωση Poisson που διέπει τη χωρική διαμόρφωση του ϕ είναι:

$$\nabla^2 \phi = -\sum_\alpha \frac{n_\alpha(\vec{r})\, q_\alpha}{\varepsilon_0} = -\sum \frac{n_{\alpha 0} q_\alpha}{\varepsilon_0} e^{-q_\alpha \phi / k_B T_\alpha} \qquad (3)$$

ή, εφόσον $e^{-q_\alpha \phi / k_B T_\alpha} \simeq 1 - \frac{q_\alpha \phi}{k_B T_\alpha}$

$$\nabla^2 \phi = -\sum \frac{n_{\alpha 0} q_\alpha}{\varepsilon_0} + \sum_\alpha \frac{n_{\alpha 0} q_\alpha^2}{\varepsilon_0 k_B T_\alpha}\phi \qquad (4)$$

η οποία, λόγω της (1) γίνεται:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\lambda_D^2}\right)\phi = 0 \qquad (5)$$

όπου,

$$\frac{1}{\lambda_D^2} \equiv \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_{D\alpha}^2} \quad \text{με} \quad \lambda_{D\alpha} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_\alpha}{n_{\alpha 0} q_\alpha^2}} \qquad (6)$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι φορτίο q_0 έχει εισαχθεί στο σημείο $\vec{r} = 0$, η (5) γίνεται μη ομογενής,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\lambda_D^2}\right)\phi = -\frac{q_0\, \delta^{(3)}(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad (7)$$

όπου $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες). Δεδομένου ότι η σφαιρική συμμετρία (με κέντρο το φορτίο) είναι επιβεβλημένη στο σύστημα και θερμικά ισορροπεί ομαλά, θα έχουμε

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\phi\right) - \frac{\phi}{\lambda_D^2} = -\frac{q_0\, \delta(r)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

ή

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) - \frac{\phi}{\lambda_D^2} = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\delta(r) \qquad (8)$$

της οποίας η λύση είναι

$$\phi = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \equiv \phi_0 e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \qquad (9)$$

όπου ϕ_0 είναι το δυναμικό του εξωτερικού (και μόνου) φορτίου q_0:

$$\phi_0 \equiv -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (10)$$

Επομένως, η συνύπαρξη των θερμικά κινούμενων σωματιδίων δημιουργεί τις προϋποθέσεις για την εξασθένηση του δυναμικού του "γυμνού" φορτίου, με χαρακτηριστικό μήκος εξασθένησης το μήκος Debye λ_D.

$\boxed{\text{Συχνότητα Πλάσματος}}$

Η πυκνότητα κάθε είδους α μπορεί να οριστεί τυπολογικά ως εξής:

$$\rho_\alpha(\vec{r}) = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} \delta(\vec{r}-\vec{r}_{i_\alpha}) \qquad \left(\text{σημ: } \int_V \rho_\alpha(\vec{r})\, dV = N_\alpha\right) \qquad (11)$$

Στο χώρο Fourier, εξ' άλλου, $\left(\hat{\rho}_\alpha(\vec{k}) = \int dV \rho_\alpha(\vec{r}) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)$

$$\hat{\rho}_\alpha(\vec{k}) = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i_\alpha}} \qquad (12)$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε χρήση της σχέσης μεταξύ συνεχούς και διακριτής παράστασης

$$\iiint \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \leftrightarrow \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \qquad (13)$$

για τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

Παραγωγίζοντας την σχέση (12) δυο φορές παίρνουμε:

$$\frac{d^2\hat{\rho}_\alpha(\vec{k})}{dt^2} = -\sum_{i_\alpha}^{N_\alpha}\left[(\vec{k}\cdot\vec{v}_{i_\alpha})^2 + j\vec{k}\cdot\frac{d\vec{v}_{i_\alpha}}{dt}\right]e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i_\alpha}} \qquad (14)$$

Όμως, η επιτάχυνση $\frac{d\vec{v}_{i_\alpha}}{dt}$ μπορεί να υπολογισθεί σύμφωνα στην ηλεκτροστατική προσέγγιση:

$$m_\alpha\frac{d\vec{v}_{i_\alpha}}{dt} = q_\alpha\vec{E} \qquad (15)$$

όπου

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad \mu\varepsilon \quad \phi = \sum_\beta\sum_{i_\beta=1}^{N_\beta}\frac{q_\beta}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_{i_\beta}|} \qquad (16)$$

δηλαδή ισχύει το θεώρημα επαλληλίας. Έτσι η (15) ξαναγράφεται

$$m_\alpha\frac{d\vec{v}_{i_\alpha}}{dt} = -\frac{q_\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\beta q_\beta\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}^{N_\beta}\nabla_{i_\alpha}\frac{1}{|\vec{r}_{i_\alpha}-\vec{r}_{i_\beta}|} \qquad (17)$$

Επειδή όμως ο μετασχηματισμός Fourier του $\frac{1}{|\vec{r}_{i_\alpha}-\vec{r}_{i_\beta}|}$ είναι $\frac{4\pi}{|\vec{k}|}$ (όπου $\vec{k}\to\vec{r}_{i_\alpha}-\vec{r}_{i_\beta}$) και $\nabla_{i_\alpha}\frac{1}{|\vec{r}_{i_\alpha}-\vec{r}_{i_\beta}|}$ έχει ως επι ταύτα μετασχηματισμό Fourier $j\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\frac{4\pi}{|\vec{k}|} = j\frac{4\pi\vec{k}}{k^2}$, η (17) γίνεται

$$\frac{d\vec{v}_{i_\alpha}}{dt} = -j\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha V}\sum_\beta q_\beta\sum_{\vec{k}}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}^{N_\beta}\frac{\vec{k}}{k^2}e^{j\vec{k}\cdot(\vec{r}_{i_\alpha}-\vec{r}_{i_\beta})} \qquad (18)$$

η οποία, λόγω της (12) γίνεται:

$$\frac{d\vec{v}_{i\alpha}}{dt} = -j\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta \frac{n_{\beta 0} q_\beta}{N_\beta}\sum_{\vec{k}} \frac{\vec{k}}{k^2}\hat{\rho}_\beta(\vec{k}) e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i\alpha}} \qquad (19)$$

όπου $n_{\beta 0} = \frac{N_\beta}{V}$. Αντικαθιστώντας στην 14 έχουμε:

$$\frac{d^2\hat{\rho}_\alpha(\vec{k})}{dt^2} = -\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}(\vec{k}\cdot\vec{v}_{i\alpha})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i\alpha}}$$

$$-\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta\frac{n_{\beta 0} q_\beta}{N_\beta}\sum_{\vec{\ell}}\frac{\vec{k}\cdot\vec{\ell}}{\ell^2}\hat{\rho}_\beta(\vec{\ell})e^{j\vec{r}_{i\alpha}(\vec{\ell}-\vec{k})}$$

η οποία, πάλι λόγω της (12) γίνεται:

$$\frac{d^2\hat{\rho}_\alpha(\vec{k})}{dt^2} = -\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}(\vec{k}\cdot\vec{v}_{i\alpha})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i\alpha}}$$

$$-\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta\frac{n_{\beta 0} q_\beta}{N_\beta}\sum_{\vec{\ell}}\frac{\vec{k}\cdot\vec{\ell}}{\ell^2}\hat{\rho}_\beta(\vec{\ell})\hat{\rho}_\alpha(\vec{k}-\vec{\ell})$$

η οποία μπορεί να διαχωριστεί (στο άθροισμα $\sum_{\vec{\ell}}$) σε $\vec{\ell}\neq\vec{k}$ και $\vec{\ell}=\vec{k}$:

$$\frac{d^2\hat{\rho}_\alpha(\vec{k})}{dt^2} = -\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}(\vec{k}\cdot\vec{v}_{i\alpha})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i\alpha}}$$

$$-\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta\frac{n_{\beta 0} q_\beta}{N_\beta}\hat{\rho}_\beta(\vec{k})\hat{\rho}_\alpha(0)$$

$$-\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta\frac{n_{\beta 0} q_\beta}{N_\beta}\sum_{\vec{\ell}\neq\vec{k}}\frac{\vec{k}\cdot\vec{\ell}}{\ell^2}\hat{\rho}_\beta(\vec{\ell})\hat{\rho}_\alpha(\vec{k}-\vec{\ell}) \qquad (20)$$

Όμως, $\hat{\rho}_\alpha(0) = N_\alpha$, οπότε

$$\frac{d^2\hat{\rho}_\alpha(\vec{k})}{dt^2} = -\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\left(\vec{k}\cdot\vec{v}_{i\alpha}\right)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i\alpha}}$$
$$-\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta \frac{n_{\beta 0}q_\beta N_\alpha}{N_\beta}\hat{\rho}_\beta(\vec{k})$$
$$-\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta \frac{n_{\beta 0}q_\beta}{N_\beta}\sum_{\vec{l}\neq\vec{k}}\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{l^2}\hat{\rho}_\beta(\vec{l})\hat{\rho}_\alpha(\vec{k}-\vec{l}) \qquad (21)$$

ή

$$\frac{d^2\hat{\rho}_\alpha(\vec{k})}{dt^2} + \frac{q_\alpha^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 m_\alpha}\hat{\rho}_\alpha(\vec{k}) = -\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{q_\alpha q_\beta}{\varepsilon_0 m_\alpha}n_{\alpha 0}\hat{\rho}_\beta(\vec{k})$$
$$(22) \qquad -\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\left(\vec{k}\cdot\vec{v}_{i\alpha}\right)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i\alpha}} - \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta\frac{n_{\beta 0}q_\beta}{N_\beta}\sum_{\vec{l}\neq\vec{k}}\frac{\vec{k}\cdot\vec{l}}{l^2}\hat{\rho}_\beta(\vec{l})\hat{\rho}_\alpha(\vec{k}-\vec{l})$$

διότι $n_{\beta 0}\frac{N_\alpha}{N_\beta} = n_{\alpha 0}$.

Οι όροι δεξιά της (22) αποτελούν αντίστοιχα την συνεισφορά της αλληλεπίδρασης των άλλων ειδών, την επίδραση της κίνησης των σωματιδίων του ιδίου είδους και, τέλος, την επίδραση των άλλων χωρικών κλιμάκων όλων των ειδών. Παρατηρούμε ότι η κλίμακα $\vec{l}=\vec{0}$ δεν συνεισφέρει στον τρίτο δεξιά όρο διότι όταν $\vec{l}=0$ έχουμε:

$$-\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\sum_\beta\frac{n_{\beta 0}q_\beta}{N_\beta}N_\beta\hat{\rho}_\alpha(\vec{k})\frac{\vec{0}\cdot\vec{k}}{0^2}$$

$$= -\frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha}\hat{\rho}_\alpha(\vec{k})\frac{\vec{0}\cdot\vec{k}}{0^2}\,0 \qquad \left(\text{λόγω του } \sum_\beta q_\beta n_{\beta 0} = 0\right)$$

δυναμική μπορεί να παραληφθεί, επειδή θα εισαγάγει απροσδιορίστου είδους συνεισφορά.

Η επίδραση της κίνησης των σωματίων μπορεί να εκτιμηθεί εάν υποθέσουμε ότι οι ταχύτητές τους κατανέμονται κατά Maxwell-Boltzmann. Δηλαδή, εάν:

$$f(\vec{v}_{i_\alpha}) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T_\alpha}\right)^{3/2} e^{-\frac{K_{i\alpha}}{k_B T_\alpha}} \qquad (23)$$

με $K_\alpha = \frac{p_{i\alpha}^2}{2m_\alpha} = \frac{m_\alpha v_{i\alpha}^2}{2}$ και $\int d^3v\, f(\vec{v}_{i_\alpha}) = 1$, τότε

η μέση (με συνάρτηση βάρους την $f(\vec{v}_{i_\alpha})$) τιμή του όρου

$$-\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} (\vec{k}\cdot\vec{v}_{i_\alpha})\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i_\alpha}}$$ είναι:

$$-\int d^3v \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} (\vec{k}\cdot\vec{v}_{i_\alpha})\, e^{-j\vec{k}\vec{r}_{i_\alpha}} f(\vec{v}_{i_\alpha}) =$$

$$= -k^2 \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} \int d^3v\, v_{i_\alpha}^2 f(\vec{v}_{i_\alpha})\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}_{i_\alpha}}$$

το οποίο, λόγω της (12) και της μορφής της $f(\vec{v}_{i_\alpha})$ δίνει

$$-k^2 \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha} \hat{\rho}_\alpha(\vec{k}) \qquad (24)$$

Έτσι, η (22) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{q_\alpha^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 m_\alpha} + k^2 \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha}\right) \hat{\rho}_\alpha(\vec{k}) = \text{λοιποί όροι} \qquad (25)$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ (ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ)

ΚΑΤΑΝΟΜΗ KLIMONTOVICH ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

Χώρος Φάσεων 6-διαστάσεων (ειδική περίπτωση του χώρου μ της στατιστικής μηχανικής).

$$\vec{X} \equiv (\vec{r}, \vec{p}) \qquad (1)$$

θέση, ορμή

Οι δυναμικές εξισώσεις που χαρακτηρίζουν την εξέλιξη ενός σωματίου μάζας m_α και φορτίου q_α στο χώρο αυτό είναι:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m_\alpha} = \vec{v} : \text{ταχύτητα} \qquad (2a)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q_\alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) : \text{δύναμη Lorentz} \qquad (2\beta)$$

Έστω σύστημα N πανομοιότυπων σωματίων σε χώρο όγκου V.

Μικροσκοπική πυκνότητα στο χώρο των φάσεων η συνάρτηση Klimontovich

$$N(\vec{X}; \{\vec{X}_i(t)\}) = \sum_{i=1}^{N} \delta^{(6)}(\vec{X} - \vec{X}_i(t)) \qquad (3)$$

όπου τα $\vec{X}_i(t)$ διέπονται από τη (2)

Η (3) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$N(\vec{X}; t; \{\vec{X}_{i0}\}) = \sum_{i=1}^{N} \delta^{(6)}(\vec{X} - \vec{X}_i(t; \{\vec{X}_{i0}\})) \qquad (4)$$

με $\vec{X}_{i0} = \vec{X}_i(t=0)$, δεδομένου ότι, με δεδομένες αρχικές συνθήκες για κάθε σωμάτιο, $\vec{X}_{i0}$ και δεδομένη χρονική στιγμή t, τα $\vec{X}_i(t)$ είναι

Ο αριθμός των σωματίων σε στοιχείο όγκου του χώρου των φάσεων

$$(d\vec{X}) \equiv (d\vec{p})(d\vec{r})$$

$$\equiv dp_x\, dp_y\, dp_z\, dx\, dy\, dz \qquad (5)$$

και προφανώς,

$$dN = \mathcal{N}(\vec{X}; t; \{\vec{X}_{io}\})(d\vec{p})(d\vec{r}) \qquad (6)$$

γιατί η συνάρτηση Klimontovich αποτελεί πυκνότητα στον χώρο των φάσεων (και έχει διαστάσεις, λόγω του ορισμού της, αντίστροφη ορμή εις τον κύβο και αντίστροφο όγκο). Το ολοκλήρωμα της εξ' άλλου στον συνολικό χώρο των φάσεων απλά δίνει τον συνολικό αριθμό των σωματίων. Ο αριθμός αυτός θεωρείται σταθερός, δηλαδή δεν εισέρχονται ούτε εξέρχονται στο σύστημα μας σωμάτια. Υπό αυτή την έννοια ο χώρος των φάσεων θεωρείται κλειστός, δηλαδή χωρίς εισροές και εκροές και καταλαμβάνει όλη την διαθέσιμη περιοχή (ιδιαίτερα στον υπόχωρο των ορμών) που επιβάλλουν τα εφαρμοζόμενα από εμάς η/μ πεδία καθώς και τα αυτο-πεδία τα ίδια N σωμάτια δημιουργούν με την κίνηση και το φορτίο τους. Λόγω και αυτών των παραγόντων η συνάρτηση πυκνότητας $\mathcal{N}$ διέπεται από την εξίσωση συνεχείας στον χώρο των φάσεων:

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \nabla_{\vec{X}} \cdot (\dot{\vec{X}} \mathcal{N}) = 0 \qquad (7)$$

όπου $\dot{\vec{X}} \equiv \dfrac{d\vec{X}}{dt}$ και $\nabla_{\vec{X}} \equiv (\nabla_{\vec{r}}, \nabla_{\vec{p}})$ ενώ το $\dot{\vec{X}}\mathcal{N}$ αποτελεί ρεύμα χώρου των φάσεων.

Επειδή όμως $\vec{p}$ και $\vec{r}$ θεωρούνται ανεξάρτητες μεταβλητές, η (7) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \dot{\vec{X}}\cdot\nabla_{\vec{X}} N = 0 \qquad (8\alpha)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}} N + \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\nabla_{\vec{p}} N = 0 \qquad (8\beta)$$

όπου τα $\vec{v}$ και $\frac{d\vec{p}}{dt}$ παρέχονται από τις (2). Το διάνυσμα μετατόπισης του $\vec{X}$, δηλαδή το $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$ είναι εφαπτόμενο στην τροχιά στο χώρο των φάσεων που περνά από το συγκεκριμένο σημείο $(\vec{r}, \vec{p})$ που μπορεί να θεωρηθεί ως εσωτερικό σημείο στοιχειώδους όγκου $(d\vec{X})$. Το διάνυσμα $\left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$ αποτελεί την ταχύτητα και τη δύναμη που ασκείται σε ένα αντιπροσωπευτικό των σωματιδίων τμήματος στο $(d\vec{X})$ σωματίδιο, ενώ η (8β) αποτελεί έκφραση της δυναμικής της αλλαγής της N λόγω των δυνάμεων και της κίνησης που ασκείται στο αντιπροσωπευτικό αυτό σωματίδιο. Η εξίσωση (8β) είναι η εξίσωση του Klimontovich (ή αλλιώς Klimontovich–Dupree) και φυσικά είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{dN}{dt} = 0 \qquad (9)$$

Εξειδικεύοντας την υπόθεσή μας στην (2β) έχουμε:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_i\,, \quad \vec{B} = \vec{B}_e + \vec{B}_i \qquad (10)$$

τα "e" και "i" υποδηλώνουν "εξωτερικά" (εξηγημένα από ... καθορίσως) και "εσωτερικά" (γιγνόμενα από την κίνηση όλων των N σωματίων) πεδία. Τα πεδία αυτά ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell ξεχωριστά (ανεξάρτητα). Έτσι για τα εσωτερικά πεδία έχουμε:

$$\nabla \cdot \vec{B}_i = 0 \qquad (11\alpha)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i + \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} = 0 \qquad (11\beta)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_i = \rho_u \qquad (11\gamma)$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} = \vec{J}_u + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} \qquad (11\delta)$$

Όμως, η πυκνότητα ελεύθερου φορτίου ρ_u είναι προφανώς,

$$\rho_u(\vec{r}, t) = q\left(\int (d\vec{p}) N(\vec{X}; t \ldots) - 1\right) \qquad (12)$$

και το ρεύμα $\vec{J}_u$ είναι,

$$\vec{J}_u(\vec{r}, t) = q\left(\int (d\vec{p}) \vec{v} N(\vec{X}; t \ldots)\right) \qquad (13)$$

Το "-1" στην (12) υποδηλώνει ότι στα υπολογισμό των εσωτερικών πεδίων στη γειτονιά του $\vec{r}$, εξαιρούμε το σωμάτιο στο $\vec{r}$. Σημειωτέον ότι στην περίπτωση πολλών ειδών οι (12) και (13) τροποποιούνται ως εξής:

$$\rho_u(\vec{r}, t) = \sum_\beta q_\beta \left[\int (d\vec{p}) N_\beta - \delta_{\alpha\beta}\right] \qquad (14)$$

$$\vec{J}_u(\vec{r}, t) = \sum_\beta q_\beta \left[\int (d\vec{p}) \frac{\vec{p}}{m_\beta} N_\beta\right] \qquad (15)$$

όπου m_β στη σχετικιστική περίπτωση είναι η μάζα ηρεμίας $m_{0\alpha}$ πολλαπλασιασμένη με τον σχετικιστικό παράγοντα $(1+p^2/m_{0\alpha}^2c^2)^{1/2}$. Οι (14) (15) εισέρχονται στον καθορισμό των εξαρτημένων πεδίων που στη συνέχεια καθορίζουν την εξέλιξη της εξίσωσης Klimontovich για σωμάτιο του είδους α, δηλαδή της,

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha}\cdot\nabla_{\vec{r}} N_\alpha + \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_\alpha \cdot \nabla_{\vec{p}} N_\alpha = 0 \qquad (16)$$

Στη συνέχεια θα θεωρούμε ένα μόνο είδος α και όπου χρειάζεται θα αναφέρονται αλλά οι γενικεύσεις σε πολλά είδη. Αυτό το κάνουμε για την απλότητα των εκφράσεων.

Οι εξισώσεις Maxwell (11) είναι προτιμότερο να αντικατασταθούν με τις εξισώσεις Helmholtz για τα δυναμικά ϕ και $\vec{A}$ (βαθμωτό και διανυσματικό-μαγνητικό) αφού αλληλοσυνδέονται τα εσωτερικά πεδία. Δηλαδή για $\vec{E}_i = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ και $\vec{B}_i = \nabla\times\vec{A}$, έχουμε,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\left[\int (d\vec{p})\, N - 1\right] \qquad (17\alpha)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\frac{q\mu_0}{m}\int (d\vec{p})\,\vec{p}\, N \qquad (17\beta)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε για ευκολία την ηλεκτροστατική (ανάλογη της μη σχετικιστικής, $c\to\infty$) περίπτωση, ενώ θα σχολιάσουμε κατά την γενική ηλεκτρομαγνητική περίπτωση. Στην ηλεκτροστατική προσέγγιση η (17α) γίνεται η εξίσωση Poisson, ενώ τα μαγνητικά πεδία B_i θεωρούνται αμελητέα. Τότε το ηλεκτρικό πεδίο E_i δίνεται από το ολοκλήρωμα επαλληλίας,

$$\vec{E}_i = -\nabla\phi$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{(d\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\int(d\vec{p}')\,N(\vec{X}';t,\dots)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\vec{E}_i = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int(d\vec{X}')\frac{N(\vec{r}',\vec{p}';t,\dots)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (18)$$

Η εσωτερική δύναμη Lorentz είναι $q\vec{E}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$ και η εξωτερική $q(\vec{E}_e+\vec{v}\times\vec{B}_e)$. Συνδυάζοντας την (18), τη δύναμη Lorentz και την (8β) έχουμε εύκολα σε συμπαγή μορφή:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+L(\vec{X},t)-\int(d\vec{X}')\,V(\vec{X},\vec{X}')\,N(\vec{X}';t,\dots)\right]N(\vec{X};t,\dots) = 0 \qquad (19)$$

όπου $L(\vec{X},t)$ περιλαμβάνει την ελεύθερη "κίνηση" της N καθώς και την εξέλιξη λόγω των εξωτερικών πεδίων, δηλαδή:

$$L(\vec{X},t) = \vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}} + q(\vec{E}_e+\vec{v}\times\vec{B}_e)\cdot\nabla_{\vec{p}} \qquad (20)$$

και ο πυρήνας-τελεστής $V(\vec{X},\vec{X}')$ εκφράζει την αλληλεπίδραση λόγω ηλεκτροστατικών δυνάμεων (και άρα στην $N(\vec{X};t)$):

$$V(\vec{X},\vec{X}') = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\nabla_{\vec r}\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)\cdot\nabla_{\vec p} \qquad (21)$$

Η (19) αποτελεί την πλήρη εξίσωση του Klimontovich για ηλεκτροστατικές αλληλεπιδράσεις. Στη γενική περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων ($c<\infty$ και $\vec B'\neq 0$) η (19) γενικεύεται ως εξής (μετά από διεξοδική ανάλυση):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}(\vec X,t)-\int(d\vec X')\int_{-\infty}^{t}dt'\,N(\vec X';t';\dots)\,V_{em}(\vec X,t;\vec X',t')\right]N(\vec X,t)=0 \qquad (22)$$

όπου ο ηλεκτρομαγνητικός πυρήνας-τελεστής είναι δύο χρόνων, θεωρείται αναπόφευκτο στην περίπτωση που οι αλληλεπιδράσεις κινούνται με ταχύτητα c. Η δομή του V_{em} είναι της μορφής

$$V_{em} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\vec a(\vec X,t;\vec X',t')\cdot\nabla_{\vec p} \qquad (23)$$

Οι εξισώσεις Klimontovich (19) και (22) αποτελούν τις κινητικές εξισώσεις που περιγράφουν τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις με τη δυναμική στο χώρο των φάσεων. Είναι απόλυτα ακριβείς (στην κλασική τους εκδοχή) αλλά και απόλυτα άχρηστες(!), διότι είναι ολοκληρωτικο-διαφορικές εξισώσεις μη γραμμικές (λόγω γινομένων) και αφορούν μία τυχαία, ακριβή συνάρτηση κατανομής, την κατανομή Klimontovich. Είναι βέβαια απόλυτα χρήσιμες σαν βάση για στατιστική επεξεργασία.

βάση για την ακτιβισμένη επεξεργασία στις εξισώσεις Klimontovich είναι οι παράμετροι $\{\vec{X}_{io}\}$ που υπεισέρχονται ο ορισμός της (δηλώνονται με "o" μέχρι τώρα). Δηλαδή, επειδή ακριβής γνώση των αρχικών συνθηκών όλων των σωματίων είναι αδύνατη, μια στατιστική θεώρηση προσφέρεται. Μάλιστα, η ... και μόνο της στατιστικής θεώρησης θα δώσει ένα οδηγό χρήσιμα μοντέλα, χωρίς να χρειάζεται προσδιορισμός της στατιστικής κατανομής αυτής καθαυτής. Αμέσως, στη συνέχεια θα ... διαφορά στην κατανομή Liouville.

Η μικροσκοπική κατάσταση των N σωματίων περιγράφεται στον χώρο Γ (6N-διάστατο ή, ισοδύναμα, Nγ διάστατο) με πυκνότητα Liouville, $\rho(\{\vec{X}_i\}, t)$ η οποία με στοιχείο όγκου $(d\{\vec{X}_i\})$ στον Γ χώρο, ορίζεται ως εξής:

$$\rho(\{\vec{X}_i\}, t)(d\{\vec{X}_i\}) \equiv \lim_{M\to\infty} \left(\frac{\text{αριθμός καταστάσεων μέσα στο } (d\{\vec{X}_i\}) \text{ με κέντρο το } \{\vec{X}_i\} \text{ που χαρακτηρίζονται από τα ίδια μετρήσιμα-παρατηρήσιμα μεγέθη}}{M \text{ (αριθμός των "ταυτιζομένων" καταστάσεων)}} \right)$$

Προφανώς,

$$\int_{\Gamma} (d\{\vec{X}_i\})\, \rho = 1 \qquad (25)$$

και δεδομένου, ότι $\rho(\{\vec{X}_i\}, t) \equiv \rho(\{\vec{X}_i(t)\})$

$$\equiv \rho(\{\vec{X}_{io}\}, t) \qquad (26)$$

συνάρτηση αυτή μπορεί να παίξει το ρόλο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για την επιλογή των αρχικών συνθηκών όπως αυτές υπεισέρχονται στην συνάρτησης και εξίσωση του Klimontovich. Σημειώνεται ότι η συνάρτηση Liouville ικανοποιεί με βάση την εξίσωση συνέχειας στο χώρο Γ την Liouville,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{X}_i}{dt} \cdot \nabla_{\vec{X}_i} \rho = 0 \qquad (27)$$

η οποία εν τελευταίω είναι η κίνηση ενός ασυμπίεστου συνόλου σημείων – αρχικών συνθηκών στο χώρο Γ. Λόγω των αλληλεπιδράσεων. Η εξίσωση αυτή αποτελεί μία από τις πιο γενικές (άρα και λιγότερο χρήσιμες από μόνες τους) εξισώσεις εξέλιξης στη στατιστική φυσική.

Επιστρέφοντας τώρα στη χρήση της ρ ορίζουμε με τον ακόλουθο τρόπο τη μέση τιμή μιας συνάρτησης του χώρου των φάσεων (γ):

$$(28)\quad \langle A(\vec{X}; \{\vec{X}_{i0}\}; t)\rangle \equiv \int_{\Gamma} (d\{\vec{X}_{i0}\})\, \rho(\{\vec{X}_{i0}\}, t)\, A(\vec{X}; \{\vec{X}_{i0}\}, t)$$

δηλαδή η διαδικασία της μέσης τιμής έχει να κάνει με την ολοκλήρωση πάνω σε όλες τις αρχικές συνθήκες, που αντιστοιχούν στην ίδια θερμοδυναμική συμπεριφορά με συνάρτηση βάρους την συνάρτηση Liouville. Έτσι, η συνάρτηση κατανομής ενός σωματίου, $f(\vec{X},t)$, ορίζεται ως εξής (για $N \to \infty$)

$$f_1(\vec{X},t) \equiv \frac{V}{N} \int (d\{\vec{X}_{i0}\})\, \rho(\{\vec{X}_{i0}\}, t)\, N(\vec{X}; t; \{\vec{X}_{i0}\})$$

$$\equiv \frac{1}{n_0} \langle N(\vec{X}; t; \{\vec{X}_{i0}\}) \rangle \qquad (29)$$

του V είναι ο όγκος του συστήματος και $n_0 \equiv \frac{N}{V}$.
Πιθανότητα

$$(d\vec{X})\,\frac{f_1(\vec{x},t)}{V} \qquad (30)$$

εκφράζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σωμάτιο μέσα στο $(d\vec{X})$ που είναι στη γειτονιά του $\vec{X}$ τη χρονική στιγμή t. Είναι δηλαδή η $f(\vec{X},t)$ μια νέα συνάρτηση. Λόγω του ορισμού της N, καθώς την (29) έχουμε:

$$f_1(\vec{X},t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n_0}\int_{\Gamma} \left(d\{\vec{X}_{i0}\}\right)\rho\left(\{\vec{X}_{i0}\},t\right)\delta^{(6)}\left(\vec{X}-\vec{X}_i(\{\vec{X}_{i0}\},t)\right)$$

και επειδή $\left(d\{\vec{X}_{i0}\}\right)\rho\left(\{\vec{X}_{i0}\},t\right)$

$$= \left(d\{\vec{X}_i(t)\}\right)\rho\left(\{X_i(t)\}\right)$$

και λόγω του αδιάκριτου μεταξύ των σωματίων (του ίδιου είδους) παίρνουμε τελικά:

$$f_1(\vec{X}_1,t) = \frac{1}{V}\int (d\vec{X}_2)\int (d\vec{X}_3)\cdots\int (d\vec{X}_N)\,\rho\left(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\vec{X}_3,\ldots,\vec{X}_N\right)$$

Δηλαδή η συνάρτηση κατανομής ενός σωματίου είναι ένα μερικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης Liouville στο χώρο Γ αφού του υπόχωρου που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{X}$.

Κατ' αναλογία ορίζονται και άλλα μεγέθη π.χ.: κατανομή δύο σωματίων π.χ. ορίζεται ως εξής (για $N\to\infty$)

$$f_2(\vec X,\vec X',t) \equiv \frac{1}{V^2}\int(d\vec X_3)\int(d\vec X_4)\dots\int(d\vec X_N)\,\rho(\vec X(t),\vec X'(t),\vec X_3,\vec X_4,\dots\vec X_N) \qquad (32)$$

δηλαδή πάλι ολοκλήρωμα της Liouville στον χώρο Γ μείον τον χώρο που αντιστοιχεί στα $\vec X$ και $\vec X'$. Τότε η ποσότητα

$$(d\vec X)(d\vec X')\,\frac{f_2(\vec X,\vec X',t)}{V^2} \qquad (33)$$

εκφράζει την διαφορική συνδυασμένη πιθανότητα (joint probability) ένα σωμάτιο να είναι στο $(d\vec X)$ γύρω από το $\vec X$, και το άλλο στο $(d\vec X')$ γύρω από το $\vec X'$. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι (ασκήσεις ορισμών):

$$\langle N(\vec X;t,\{\vec X_{i0}\})\,N(\vec X',t,\{\vec X_{i0}\})\rangle$$

$$= n_0^2 f_2(\vec X,\vec X',t) + n_0\,\delta^{(6)}(\vec X-\vec X')\,f_1(\vec X,t) \qquad (34)$$

Γενικά τώρα, η κατανομή m σωματίων ορίζεται ως εξής (για $N\to\infty$)

$$f_m(\vec X_1,\vec X_2,\dots\vec X_m,t) \equiv \frac{1}{V^m}\int\frac{(d\{\vec X_i\})}{\prod_{j=1}^{m}(d\vec X_j)}\,\rho \qquad (35)$$

δηλαδή μερικό ολοκλήρωμα της ρ. Η (34) εξ άλλου σχετίζεται (χρήσιμα εργαλεία) στη μέση των γνωστών τελεστών συσχετίσεων Klimontovich:

$$
\begin{aligned}
&\langle N(\vec{X},t,\ldots)\,N(\vec{X}',t,\ldots)\,N(\vec{X}'',t,\ldots)\rangle \\
&= n_0^3 f_3(\vec{X},\vec{X}',\vec{X}'',t) + n_0^2\,\delta(\vec{X}-\vec{X}')\,f_2(\vec{X},\vec{X}'',t) \\
&+ n_0^2\,\delta(\vec{X}-\vec{X}'')\,f_2(\vec{X},\vec{X}',t) + n_0^2\,\delta(\vec{X}'-\vec{X}'')\,f_2(\vec{X},\vec{X}'',t) \\
&+ n_0\,\delta(\vec{X}-\vec{X}')\,\delta(\vec{X}'-\vec{X}'')\,f_1(\vec{X},t) \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Παίρνοντας τη μέση τιμή της εξίσωσης-Klimontovich (19) έχουμε, κάνοντας χρήση και των (29) και (34):

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(\vec{X},t)\right] f_1(\vec{X},t) &= \frac{1}{n_0}\int (d\vec{X}')\,\bar{V}(\vec{X},\vec{X}';t)\,\langle N(\vec{X}',t)\,N(\vec{X},t)\rangle \\
&= \int (d\vec{X}')\,\bar{V}(\vec{X},\vec{X}';t)\,\delta^{(6)}(\vec{X}-\vec{X}'')\,f_1(\vec{X},t) \\
&+ n_0 \int (d\vec{X}')\,\bar{V}(\vec{X},\vec{X}';t)\,f_2(\vec{X},\vec{X}',t) \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Λόγω συμμετρίας (εμφανίζεται η $\nabla_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$) στο $\bar{V}(\vec{X},\vec{X}';t)$ ο πρώτος όρος στο δεξιό μέρος της (37) είναι μηδέν οπότε η (37) ξαναγράφεται ως εξής:

$$
\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(\vec{X},t) - n_0\int (d\vec{X}')\,f_1(\vec{X}',t)\,\bar{V}(\vec{X},\vec{X}',t)\right] f_1(\vec{X},t) = n_0\int (d\vec{X}')\,\bar{V}(\vec{X},\vec{X}';t)\,g(\vec{X},\vec{X}',t) \qquad (38)
$$

όπου:

$$
\begin{aligned}
g(\vec{X},\vec{X}',t) &\equiv f_2(\vec{X},\vec{X}',t) - f_1(\vec{X},t)\,f_1(\vec{X}',t) \qquad (39) \\
&\equiv \text{συσχέτιση}
\end{aligned}
$$

Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί για την εύρεση εξίσωσης για την $f_2(\vec{X},\vec{X}',t)$ ή (ισοδύναμα) της συσχέτισης $g(\vec{X},\vec{X}',t)$, οδηγώντας σε ολόκληρη ιεραρχία ολοκληρωματικών διαφορικών εξισώσεων κινητικής πρακτικής αξίας. Κλείσιμο μπορεί να επιτευχθεί στην (38) κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις (ασθενείς ηλεκτρομαγνητικές διαταραχές)

Συνεχίζοντας την (38) έχουμε:

$$\Bigg[\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\mathcal{L}(\vec{X},t)}_{\substack{\text{μεταφορά λόγω}\\ \text{ροής ή λόγω δράσης}\\ \text{των εξωτερικών πεδίων}}} - \underbrace{n_0 \int (d\vec{X}')\, f_1(\vec{X}',t)\, V(\vec{X},\vec{X}',t)}_{\substack{\text{ροή λόγω δράσης του}\\ \text{στατιστικά μέσου μικροσκοπικού}\\ \text{πεδίου όλων των σωματιδίων}}}\Bigg] f_1(\vec{X},t)$$

$$= \underbrace{n_0 \int (d\vec{X}')\, V(\vec{X},\vec{X}',t)\, g(\vec{X},\vec{X}',t)}_{\substack{\text{ολοκληρωτικά συσχετισμένο κομμάτι της κατανομής (2)}\\ \text{ή ολοκλήρωμα συγκρούσεων}}} \qquad (40)$$

Η εξίσωση αυτή καλείται εξίσωση Vlasov με συγκρούσεις. (*)

(*) Σημ: το αριστερό μέρος της εξίσωσης αυτής είναι πανομοιότυπο με αυτό της εξίσωσης Klimontovich μόνο που εδώ η f_1 είναι λεία συνάρτηση.

ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

- Γραμμική σχέση μεταξύ ηλεκτρικών διαταραχών και αποτελεσμάτων τους
- Η αδιατάρακτη κατάσταση του μέσου είναι ομοιογενές χωρικά και μόνιμη χρονικά. Αυτό εκφράζεται στη σύνδεση αιτίας - αποτελέσματος.
- Τα αποτελέσματα οφείλονται μόνο σε παρούσες και παρελθούσες διαταραχές (αιτιότητα)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{J}(\vec{r},t) &= \int_V d\vec{r}\,' \int_{-\infty}^{t} dt'\, \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') \cdot \vec{E}(\vec{r}\,',t') \\ &= \int_V d\Delta\vec{r} \int_0^{\infty} d\tau\, \overleftrightarrow{\sigma}(\Delta\vec{r},\tau) \cdot \vec{E}(\vec{r}-\Delta\vec{r}, t-\tau) \qquad (2.1)\end{aligned}}$$

Εάν ορίσουμε αμφίπλευρους μετασχηματισμούς Fourier για τα $\vec{J}$ και $\vec{E}$ και μονόπλευρο για τον πυρήνα $\overleftrightarrow{\sigma}(\Delta\vec{r},\tau)$ (λόγω ακριβώς της αιτιότητας)

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}_{\vec{k},\omega} \\ \vec{J}_{\vec{k},\omega} \end{Bmatrix} = \int_V d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{J}(\vec{r},t) \end{Bmatrix} e^{-j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k},\omega} = \int_V d\vec{r} \int_0^{\infty} dt\, \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)\, e^{-j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

τότε η εξίσωση (2.1) γίνεται,

$$L_{e,i} = \frac{P_{e,i}}{\cancel{1} - C_{e,i}}$$

$$R_{e,i} = \frac{P_{e,i}}{1 + C_{e,i}}$$

$$C_e = - \frac{w_{ce}}{w}$$

$$C_i = \frac{w_{ci}}{w}$$

$$P_e = - \left(\frac{\omega_{pe,i}}{\omega}\right)^2$$

$$\boxed{\vec{J}_{\vec{k},\omega} = \overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k},\omega} \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega}} \quad (2.2)$$

δηλαδή μία σχέση μεταξύ φασιθετών και επιπλέον ισχύουν οι εξής σχέσεις λόγω του ότι όλες οι εμπλεκόμενες ποσότητες είναι πραγματικές,

$$\left\{\begin{matrix} \vec{E}^{*}_{\vec{k},\omega} \\ \vec{J}^{*}_{\vec{k},\omega} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{E}_{-\vec{k},-\omega} \\ \vec{J}_{-\vec{k},-\omega} \end{matrix}\right\}, \quad \overleftrightarrow{\sigma}^{*}_{\vec{k},\omega} = \overleftrightarrow{\sigma}_{-\vec{k},-\omega} \quad (2.3)$$

Ο τανυστής-φασιθέτης $\overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k},\omega}$ καλείται τανυστής αγωγιμότητας.

Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί ορίζονται ως εξής:

$$\left\{\begin{matrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{J}(\vec{r},t) \end{matrix}\right\} = (2\pi V)^{-1} \sum_{\vec{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{\begin{matrix} \vec{E}_{\vec{k},\omega} \\ \vec{J}_{\vec{k},\omega} \end{matrix}\right\} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$= (2\pi)^{-4} \int d\vec{k} \int d\omega \left\{\begin{matrix} \vec{E}_{\vec{k},\omega} \\ \vec{J}_{\vec{k},\omega} \end{matrix}\right\} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (2.4)$$

όπου η αντιστοίχηση $\sum_{\vec{k}} \rightarrow V\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}$ χρησιμοποιείται για το πέρασμα από σύστημα πεπερασμένου όγκου (σειρά Fourier) σε άπειρο σύστημα (ολοκλήρωμα Fourier).

Δεδομένου ότι το σύστημα υποτέθηκε χωρικά ομοιογενές η παράμετρος V (όγκος) δεν παίζει κανένα πρακτικό ρόλο.

Από την άλλη πλευρά τώρα, και λόγω του ορισμού του τανυστή αγωγιμότητας ων μονόπλευρο μετασχηματισμό Fourier (στο χρόνο) του τανυστή $\overleftrightarrow{\sigma}$, ο φασιθέτης $\overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k}\omega}$ θα είναι αναλυτική συνάρτηση στο άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου των συχνοτήτων. Μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά (όπως και τα ιδιόμορφα σημεία του $\overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k}\omega}$ βρίσκονται) και στο κάτω ημιεπίπεδο. Έτσι,

$$\boxed{\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t) &= (2\pi V)^{-1}\sum_{\vec{k}}\int_C d\omega\, \overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k}\omega}\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ t\geq 0 \quad & \\ &= (2\pi)^{-4}\int d\vec{k}\int_C d\omega\, \overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k}\omega}\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (2.5) \end{aligned}}$$

όπου η καμπύλη ολοκλήρωσης C εκτείνεται από $-\infty \to +\infty$ στο πάνω ημιεπίπεδο έτσι ώστε τα ιδιόμορφα σημεία του $\overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k}\omega}$ να κείνται από κάτω.

Για χρόνους δε $t<0$ είναι προφανώς $\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t)=0$.

● Ο ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΓΕΝΙΚΑ

Μέσα στο πνεύμα της γραμμικής σύνδεσης αιτίας-αποτελέσματος, διαχωρίζουμε τα επιβαλλόμενα ρεύματα και φορτία, $\vec{J}_{ext}$, ρ_{ext}, από τα επαγόμενα $\vec{J}_{ind}$, ρ_{ind}. Τα ολικά ρεύματα και φορτία, $\vec{J}_{ext}+\vec{J}_{ind}$, $\rho_{ext}+\rho_{ind}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell του κενού χώρου. Τα επιβαλλόμενα ρεύματα και φορτία φυσικά ικανοποιούν τη σχέση διατήρησης του φορτίου. Την ίδια σχέση ικανοποιούν ανεξάρτητα και τα επαγόμενα ρεύματα και φορτία. Εχουμε δηλαδή,

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{ext} + \vec{J}_{ind}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_{ext} + \rho_{ind}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{ind}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_{ind} = 0 \qquad (2.6)$$

όπου $c^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0$. Εάν τώρα, στο χώρο Fourier επικαλεστούμε τη σχέση (2.2), $\vec{J}_{ind\,\vec{k},\omega} = \overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k},\omega} \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega}$, έχουμε από την (2-6),

$$\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k},\omega} - \omega \vec{B}_{\vec{k},\omega} = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_{\vec{k},\omega} + \frac{\omega}{c^2} \overleftrightarrow{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega} = -j\mu_0 \vec{J}_{ext}$$

$$\vec{k} \cdot \overleftrightarrow{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega} = -j \frac{\rho_{ext}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_{\vec{k},\omega} = 0 \qquad (2.7)$$

όπου τώρα ο διηλεκτρικός τανυστής $\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega)$ ορίζεται σαν,

$$\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega) = \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega), \quad \overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega) = \overleftrightarrow{I} - \frac{\overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k},\omega}}{j\varepsilon_0 \omega} \qquad (2.8)$$

Ο τανυστής $\overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega)$ ονομάζεται ηλεκτρική δεκτικότητα. Το $\overleftrightarrow{I}$ αναφέρεται στον μοναδιαίο τανυστή δ_{ij}. Όπως είναι αναμενόμενο η διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}_{\vec{k},\omega}$ θα είναι τώρα,

$$\boxed{\vec{D}_{\vec{k},\omega} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\vec{k},\omega} + \vec{P}_{\vec{k},\omega} \quad \text{με} \quad \vec{P}_{\vec{k},\omega} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega}} \tag{2.9}$$

- ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Απαλοιφή του $\vec{B}_{\vec{k},\omega}$ στις σχέσεις (2.7) οδηγεί αμέσως στη σχέση,

$$\boxed{\left(\overleftrightarrow{\epsilon}_r - \eta^2 \overleftrightarrow{I}_T\right) \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega} = -j \vec{J}_{ext\,\vec{k},\omega} / \varepsilon_0 \omega} \tag{2.10}$$

όπου $\eta^2 = k^2c^2/\omega^2$ και $\overleftrightarrow{I}_T \equiv \overleftrightarrow{I} - \vec{k}\vec{k}/k^2$. Το η αποτελεί τον δείκτη διάθλασης του κενού χώρου ή, ισοδύναμα, το λόγο της ταχύτητας του φωτός προς τη φασική ταχύτητα (ω/k) του κύματος της διαταραχής.

Ο τανυστής $\overleftrightarrow{I}_T$, εξ' άλλου, αποτελεί συμπλήρωμα του $\overleftrightarrow{I}_L \equiv \vec{k}\vec{k}/k^2$. Οι δύο στοιχειώδεις αυτοί τανυστές (εγκάρσιος και διαμήκης) είναι ορθογώνιοι αμοιβαία (δηλ. $\overleftrightarrow{I}_T \cdot \overleftrightarrow{I}_L = \overleftrightarrow{I}_L \cdot \overleftrightarrow{I}_T = 0$). Ο τανυστής που περιγράφει το φασιδιάγραμμα της ηλεκτρικής διαταραχής,

$$\boxed{\overleftrightarrow{\Delta}(\vec{k},\omega) \equiv \overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega) - n^2 \overleftrightarrow{I}_T} \quad (2.11)$$

…εγεται τανυστής διασποράς. Η σημασία του φαίνεται άμεσα από το ότι, σε περίπτωση μηδενικής εξωτερικής διαταραχής (ή, έστω, απειροστής), δηλαδή όταν $\vec{J}_{ext\,\vec{k},\omega}=0$, τότε οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης(;) διεγέρσεις διαδίδονται με σχέση μεταξύ κυματοδιανύσματος και συχνότητας που απορρέει από τη λύση της (μιγαδικής) εξίσωσης, …

$$\boxed{\det \overleftrightarrow{\Delta}(\vec{k},\omega) = 0} \quad (2.12)$$

Η εξίσωση αυτή απηχεί τη σχέση διασποράς του μέσου.

ΙΣΟΤΡΟΠΙΚΑ ΜΕΣΑ

Στα μέσα αυτά η μόνη έννοια κατευθυντικότητας θα είναι (εξ ορισμού) αυτή που επιβάλλει το κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$. Από την άλλη μεριά, η όποια κατευθυντικότητα θα είναι εκφρασμένη στη μορφή του τανυστή $\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega)$. Εφ' όσον υποθέτουμε ότι η κατευθυντικότητα επιβάλλεται από το $\vec{k}$ μόνο, ο $\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega)$ θα πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός συνεχίζονται γωνιακά που περιέχουν το $\vec{k}$ και μόνον αυτό. Οι διαγώνιοι από αυτή θα πρέπει σαν βάση να είναι αμοιβαία ορθογώνιοι. Έτσι, οδηγούμαστε άμεσα στην ανάλυση του $\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega)$ στις "κατευθύνσεις" των $\overleftrightarrow{I}_T$ και $\overleftrightarrow{I}_L$ που ήδη ορίσαμε:

$$\boxed{\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega) = \overleftrightarrow{I}_L\,\epsilon_L(k,\omega) + \overleftrightarrow{I}_T\,\epsilon_T(k,\omega)} \tag{2-13}$$

Τα μέτρα των συνιστωσών, $\epsilon_L(k,\omega)$, $\epsilon_T(k,\omega)$ είναι, με βάση τη συζήτηση για την κατευθυντικότητα, συναρτήσεις μόνο του μέτρου του $\vec{k}$.

Αποκαλούνται δε τις λεγόμενες διαμήκη και εγκάρσια διηλεκτρική συνάρτηση. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι,

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_L(k,\omega) &= \vec{k}\cdot\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega)\cdot\vec{k}/k^2 \\ \epsilon_T(k,\omega) &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}\,\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega) - \epsilon_L(k,\omega)\right] \end{aligned}} \tag{2-14}$$

Η σχέση διασποράς, εξάλλου γίνεται στην περίπτωση αυτή,

$$\boxed{\epsilon_L(k,\omega) = 0 \quad \text{ή/και} \quad \epsilon_T(k,\omega) = n^2} \tag{2.15}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει ένας πλήρης διαχωρισμός κυμάτων ικανών που μπορεί ενδεχόμενα να αναπτυχθούν στο μέσο: Αυτοί που αντιστοιχούν στην μερική σχέση $\epsilon_L = 0$ και αυτοί που αντιστοιχούν στην αποσυζευγμένη σχέση διασποράς $\epsilon_T = n^2$. Οι σχέσεις αυτές αναφέρονται στη διασπορά των διαμήκων και εγκαρσίων κυμάτων ρυθμών αντίστοιχα. Ο λόγος είναι απλός: εάν $\overleftrightarrow{I}_L \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega} \neq 0$ (υπάρχει δηλαδή και διαμήκης συνιστώσα) τότε ικανοποιείται η σχέση διασποράς $\epsilon_L(k,\omega) = 0$ και, πάλι, $\overleftrightarrow{I}_T \cdot \vec{E}_{\vec{k},\omega} \neq 0$ (υπάρχει δηλαδή και εγκάρσια συνιστώσα) τότε ικανοποιείται η σχέση διασποράς $\epsilon_T(k,\omega) = n^2$.

- ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΛΟΓΩ ΠΡΟΣΑΓΩΓΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

Υποθέτουμε ότι εξωτερικό φορτίο φάσματος $\rho_{ext\,\vec{k},\omega}$ προσάγεται στο μέσο. Η επαγόμενη διαταραχή φορτίου $\rho_{ind\,\vec{k},\omega}$ μαζί με το προσαγόμενο συναπαρτίζουν το συνολικό φάσμα πυκνότητας φορτίου $\rho_{tot\,\vec{k},\omega} = \rho_{ind\,\vec{k},\omega} + \rho_{ext\,\vec{k},\omega}$. Σαν διηλεκτρική συνάρτηση απόκρισης, $\epsilon_r(\vec{k},\omega)$, ορίζουμε το βαθμωτό λόγο της φασματικής συνιστώσας του προσαγόμενου φορτίου

...ση τη συνολική συνιστώσα Fourier της πυκνότητας φορτίου. Έχουμε δηλαδή,

$$\boxed{\epsilon_r(\vec{k},\omega) = \frac{\rho_{ext\,\vec{k},\omega}}{\rho_{tot\,\vec{k},\omega}}} \quad (2.15)$$

Προφανώς η σχέση αυτή μπορεί πιο παραστατικά να γραφτεί ως εξής:

$$\boxed{\rho_{ind\,\vec{k},\omega} = -\left[1 - \frac{1}{\epsilon_r(\vec{k},\omega)}\right]\rho_{ext\,\vec{k},\omega}} \quad (2.16)$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το γεγονός ότι ακόμη και με απειροστή (μηδενική) εξωτερική διέγερση-προσδιορισμό φορτίου, μπορούν να αναπτυχθούν αυθόρμητες διαταραχές πυκνότητα φορτίου με χαρακτηριστικά $\vec{k},\omega$ αρκεί τα χαρακτηριστικά αυτά να αποτελούν λύση της εξίσωσης

$$\boxed{\epsilon_r(\vec{k},\omega) = 0} \quad (2.17)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τη σχέση διασποράς των αυθόρμητων διαταραχών πυκνότητας φορτίου στο υπό μελέτη μέσο διάδοσης.

Η βαθμωτή συνάρτηση $\epsilon_r(\vec{k},\omega)$ μπορεί να υπολογιστεί απλά από την εξίσωση Poisson. Επειδή,

$$k^2 \phi_{\vec{k},\omega} = -\frac{\rho_{tot,\vec{k},\omega}}{\varepsilon_0}, \quad \vec{E}_{\vec{k},\omega} = -j\vec{k}\,\phi_{\vec{k},\omega}$$

έχουμε (ϕ : ηλεκτροστατικό δυναμικό),

$$\vec{E}_{\vec{k},\omega} = -j\frac{\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}\rho_{tot\,\vec{k},\omega}, \quad \vec{J}_{ind\,\vec{k},\omega} = -j\frac{\overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k},\omega}\cdot\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}\rho_{tot\,\vec{k},\omega}$$

Από τη σχέση διατήρησης φορτίου, εξ' άλλου, έχουμε

$$\vec{k}\cdot\vec{J}_{ind,\vec{k},\omega} = \omega\,\rho_{ind\,\vec{k},\omega}.$$

Συνδυάζοντας, λοιπόν, τις παραπάνω σχέσεις έχουμε τελικά,

$$\boxed{\epsilon_r(\vec{k},\omega) = 1 - \frac{\vec{k}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}_{\vec{k},\omega}\cdot\vec{k}}{j\varepsilon_0\omega k^2} \equiv \frac{\vec{k}\cdot\overleftrightarrow{\epsilon}_r(\vec{k},\omega)\cdot\vec{k}}{k^2} \qquad (2.18)}$$

Παρατηρούμε άμεσα ότι η συνάρτηση διάκρισης $\epsilon_r(\vec{k},\omega)$ αποτελεί γενίκευση της διηλεκτρικής διαμήκους συνάρτησης $\epsilon_L(k,\omega)$· συμπίπτει δηλαδή με την τελευταία στην περίπτωση ισοτροπικών μέσων.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ ΒΑΣΙΣΜΕΝΟΣ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

I) ΠΛΑΣΜΑ ΧΩΡΙΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ (≡ "ΑΜΑΓΝΗΤΙΣΤΟ")

A. Εξίσωση Vlasov

$$\boxed{\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\nabla}_v f_\alpha = 0 \qquad (3.1)}$$

όπου α: το είδος (φορτίου q_α και μάζας m_α), $\vec{\nabla}_r$ ο τελεστής κλίσης στο χώρο και $\vec{\nabla}_v$ ο αντίστοιχος στο χώρο ταχυτήτων. Η συνάρτηση κατανομής $f_\alpha(\vec{r},\vec{v};t)$ ορίζεται έτσι ώστε,

$$n_\alpha(\vec{r},t) = n_{0\alpha}\int d\vec{v}\, f_\alpha(\vec{r},\vec{v};t)$$

με $n_{0\alpha} \equiv N_\alpha/V$. Υπενθυμίζεται ότι, η συνάρτηση αυτή αποτελεί τη μέση τιμή της συνάρτησης κατανομής του Klimontovich, $N_\alpha(\vec{r},\vec{v};\{\vec{r}_{i0},\vec{v}_{i0}\},t)$ πάνω στο σύνολο των αρχικών συνθηκών όλων των σωματιδίων $\{\vec{r}_{i0},\vec{v}_{i0}\}$, θεωρουμένων σαν διακριτών οντοτήτων, παρμένη (η μέση τιμή) κατά τέτοιο τρόπο ώστε να οδηγεί στις ίδιες μακροσκοπικά καλώς ορισμένες ποσότητες (ρευστοδυναμικού ορίου $N_\alpha, V\to\infty$) αδιακρίτως τιμών των αρχικών αυτών συνθηκών.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ($\vec{E}$ και $\vec{B}$) που υπεισέρχεται στην εξίσωση (3.1) αποτελείται από την συνεισφορά των εξωτερικών πεδίων ($\vec{E}_{ext}=0$ και $\vec{B}_{ext}=0$ στην περίπτωσή μας) και των πεδίων λόγω των ίδιων των σωματιδίων ($\vec{E}_{ind}$, $\vec{B}_{ind}$) για τα οποία ισχύουν φυσικά οι εξισώσεις του Maxwell,

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E}_{ind} &= -\frac{\partial \vec{B}_{ind}}{\partial t} \\
\vec{\nabla}\times\vec{B}_{ind} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_{ind}}{\partial t} + \mu_0 \sum_\alpha \int q_\alpha n_{o\alpha} \vec{v} f_\alpha(\vec{r},\vec{v};t)\, d\vec{v} \qquad (3.2) \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{ind} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_\alpha \int q_\alpha n_{o\alpha} f_\alpha(\vec{r},\vec{v};t)\, d\vec{v} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_{ind} &= 0
\end{aligned}}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.1) και (3.2) αποτελεί την πλήρη κινητική περιγραφή του πλάσματος στο ρευστοδυναμικό όριο.

B. Διαταραχές

Υποθέτουμε ότι το πλάσμα είναι αρχικά ($t\to-\infty$) **ομογενές** ($f_\alpha(\vec{r},\vec{v};t) \to f_\alpha(\vec{v};t)$) και σε **μόνιμη** κατάσταση ($f_\alpha(\vec{v};t)\to f_\alpha(\vec{v})$). Ηλεκτρική διαταραχή εφαρμόζεται αδιαβατικά (δηλ. $\delta\vec{E}\to 0$ ενώ $t\to-\infty$).

Εξετάζουμε μία συνιστώσα (χρώμα) της διαταραχής αυτής με χαρακτηριστικά $(\vec{k},\omega)$

$$\boxed{\delta\vec{E}\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)+0^+ t} + \text{μιγαδικά συζυγές (c.c.)} \qquad (3.3)}$$

όπου $(\vec{k},\omega)$ είναι ο κυματαριθμός και η συχνότητα του χρώματος και 0^+ μία απειροστή θετική ποσότητα η οποία εξασφαλίζει τον αδιαβατικό τρόπο ένωσης της διαταραχής αυτής. Από τις εξισώσεις του Maxwell έχουμε,

$$\boxed{\vec{k}\times\delta\vec{E}\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)+0^+ t} + c.c. = \omega\,\delta\vec{B} + c.c. \qquad (3.4)}$$

Λόγω των διαταραχών αυτών έχουμε απόκλιση από την ομογενή και μόνιμη κατάσταση, δηλαδή

$$\boxed{f_\alpha(\vec{v}) \longrightarrow f_\alpha(\vec{v}) + \delta f_\alpha(\vec{v})\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+0^+ t)} + c.c. \qquad (3.5)}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (3.3−5) στην (3.1) έχουμε,

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r\right)\delta f_\alpha(\vec{v})\, e^{j(\vec{k}\vec{r}-\omega t+0^+ t)} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{\nabla}_v f_\alpha\cdot\left[\left(1-\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I}+\frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega}\right]\cdot\delta\vec{E}\; e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+0^+ t)} \qquad (3.6)}$$

όπου $\overleftrightarrow{I}$: μοναδιαίος πίνακας.

Από την άλλη μεριά, η διαταραχή $\delta f_\alpha(\vec{v})$ προκαλεί την εμφάνιση ρεύματος

$\delta\vec{J}_\alpha$. Το συνολικό ρεύμα $\sum_\alpha \delta\vec{J}_\alpha$ που επάγεται κατ' αυτόν τον τρόπο θα είναι (με τη βοήθεια της εξίσωσης 3.6),

$$\delta\vec{J} = \sum_\alpha q_\alpha n_{o\alpha} \int \vec{v}\, \delta f_\alpha(\vec{v})\, d\vec{v} = -\sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_{o\alpha}}{j m_\alpha} \int d\vec{v} \frac{\vec{v}}{\vec{k}\cdot\vec{v}-\omega-j0^+} \cdot \vec{\nabla}_v f_\alpha \cdot \left[\left(1-\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I} + \frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega}\right] \cdot \delta\vec{E}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με το $\vec{J}(\vec{k},\omega) = -j\omega\varepsilon_o \overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega)\cdot\vec{E}(\vec{k},\omega)$ έχουμε,

$$\overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega) = -\sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega} \int d\vec{v} \frac{\vec{v}}{\vec{k}\cdot\vec{v}-\omega-j0^+} \cdot \vec{\nabla}_v f_\alpha \cdot \left[\left(1-\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I} + \frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega}\right]$$

ή, κατόπιν παραγοντικής ολοκλήρωσης,

$$\boxed{\overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\overleftrightarrow{I} - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{v}\vec{v}\, \vec{k}\cdot\vec{\nabla}_v f_\alpha}{\vec{k}\cdot\vec{v}-\omega-j0^+} \qquad (3.7)}$$

όπου ω_α, ω_p είναι οι συχνότητες πλάσματος σωματιδίων τύπου α και η συνολική συχνότητα πλάσματος αντίστοιχα $\left(\omega_p^2 = \sum_\alpha \omega_\alpha^2\right)$.

Είναι άξιο προσοχής ότι η εξίσωση (3.7) γιά την ηλεκτρική δεκτικότητα του αμαγνήτιστου πλάσματος (σημ.: $\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\chi}_e$) περιέχει ένα ιδιόμορφο ολοκλήρωμα λόγω του πόλου $\vec{k}\cdot\vec{v} = \omega$ όταν $Im(\omega + j0^+) \to 0$.

Παρατηρούμε ότι ο αδιαβατικός τρόπος επέκτασης της διατάραξης (μέσω της εισαγωγής του όρου $j0^+$) υπαγορεύει τον τρόπο υπολογισμού των ολοκληρωμάτων. Δηλαδή θα υπολογίζεται με $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ και η περιοχή $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ θα αποτελεί προϊόν αναλυτικής επέκτασης. Εξ' άλλου, λόγοι αιτιότητας επιβάλλουν όπως είδαμε, την αναλυτικότητα του τανυστή αγωγιμότητας στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ και την αναλυτική του επέκταση στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Im}\,\omega < 0$. Τέλος, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $\omega \to \infty$, η δεκτικότητα τείνει στο εξής όριο,

$$\boxed{\overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega) \to -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\overleftrightarrow{I} \qquad (3.8)}$$

δεδομένου ότι ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (3.7) τείνει γρηγορότερα στο μηδέν (σαν ω^{-3}).

Η σχετική διηλεκτρική απόκριση $\left[\varepsilon_r(\vec{k},\omega) \equiv \rho_{ext}(\vec{k},\omega)/\rho_{tot}(\vec{k},\omega)\right]$ εξ' άλλου γίνεται στην περίπτωσή μας,

$$\boxed{\varepsilon_r(\vec{k},\omega) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{k^2}\int d\vec{v}\, \frac{\vec{k}\cdot\nabla_v f_\alpha(\vec{v})}{\vec{k}\cdot\vec{v} - \omega - j0^+} \qquad (3.9)}\,.$$

- **ΠΛΑΣΜΑ ΣΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ (ΟΜΟΓΕΝΕΣ)**

Θεωρούμε ότι το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι της μορφής $\vec{B} = \vec{1}_z B_0$

Αν Ω_α είναι η συχνότητα Larmor ($\Omega_\alpha \equiv q_\alpha B_0/m_\alpha$) τότε η εξίσωση Vlasov γράφεται στην περίπτωση αυτή,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r + \Omega_\alpha(\vec{v}\times\vec{i}_z)\cdot\vec{\nabla}_v\right]\delta f_\alpha(\vec{v})\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)+0^+ t}$$

$$= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{\nabla}_v f_\alpha \cdot\left[\left(1-\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I} + \frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega}\right]\cdot\delta\vec{E}\, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)+0^+ t} \qquad (3.10)$$

Ο διαφορικός τελεστής στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.10) μπορεί να ταυτιστεί (στα πλαίσια της μεθόδου των **χαρακτηριστικών**) με ένα ολικό χρονικό τελεστή

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{\nabla}_r + \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{\nabla}_v$$

όπου $\vec{r}=\vec{r}(t)$ και $\vec{v}=\vec{v}(t)$ παριστούν μία **χαρακτηριστική**, δηλαδή μία τροχιά στον φασικό χώρο $(\vec{r},\vec{v})$ που διέπεται από τις εξισώσεις κίνησης,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) \quad \text{και} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \Omega_\alpha \vec{v}(t)\times\vec{i}_z \qquad (3.11)$$

Έτσι, ο εν λόγω τελεστής παριστάνει διαφόριση κατά μήκος μιας τέτοιας τροχιάς. Ας δούμε λοιπόν ποιά είναι η λύση του συστήματος (3.11):

Είναι σχετικά εύκολο να δειχθεί ότι η λύση $(\vec{r}'(t'), \vec{v}'(t'))$ μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει των γνωστών θέσεων στο φασικό χώρο $(\vec{r}(t), \vec{v}(t))$ με $t' \neq t$ (έστω, π.χ. $t' > t$) με τον εξής συνοπτικό τρόπο:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}'(t') &= \overleftrightarrow{B}_\alpha(t-t') \cdot \vec{v}(t) \\ \vec{r}'(t') &= \vec{r}(t) + \Omega_\alpha^{-1} \overleftrightarrow{H}_\alpha(t-t') \cdot \vec{v}(t) \end{aligned}} \qquad (3.12)$$

όπου οι τανυστές (στροφής, λόγω κίνησης Larmor) $\overleftrightarrow{B}_\alpha(t-t')$ και $\overleftrightarrow{H}_\alpha(t-t')$ είναι συναρτήσεις της χρονικής διαφοράς $t-t'$ και δίδονται από τις σχέσεις $(t-t'=\tau)$,

$$\boxed{\overleftrightarrow{H}_\alpha(\tau) = \begin{bmatrix} \sin\Omega_\alpha\tau & 1-\cos\Omega_\alpha\tau & 0 \\ -1+\cos\Omega_\alpha\tau & \sin\Omega_\alpha\tau & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_\alpha\tau \end{bmatrix}, \quad \overleftrightarrow{B}_\alpha(\tau) = \Omega_\alpha^{-1} \frac{d\overleftrightarrow{H}_\alpha(\tau)}{d\tau}} \qquad (3.13)$$

Με ολοκλήρωση κατά μήκος μιας χαρακτηριστικής μπορεί να αντιστραφεί ο τελεστής της εξίσωσης (3.10) δίνοντας προφανώς,

$$\boxed{\delta f_\alpha(\vec{v}) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_0^\infty \vec{\nabla}_{v'} f_\alpha(\vec{v}') \cdot \left[\left(1 - \frac{\vec{k}\cdot\vec{v}'}{\omega}\right) \overleftrightarrow{I} + \frac{\vec{k}\vec{v}'}{\omega} \right] \cdot \delta\vec{E}\, e^{-j\phi(\tau) - 0^+\tau} d\tau} \qquad (3.14)$$

όπου $\tau \equiv t'-t$, $\phi(\tau) \equiv \vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,') - \omega\tau$ και $\vec{r}\,', \vec{v}\,'$ συνδέονται με τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$ μέσω των σχέσεων (3.12). Εύκολα φαίνεται ότι η (3.14) ισχύει και για την περίπτωση του αμαγνήτιστου πλάσματος, όπου όμως η (3.12) εκφράζεται στην:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{v}\,'(t') = \vec{v}(t) \\ &\vec{r}\,'(t') = \vec{r}(t) + (t-t')\,\vec{v}(t) \end{aligned}} \qquad (3.12')$$

Το ρεύμα εξ' άλλου που αντιστοιχεί στη διαταραχή $\delta f_\alpha(v)$, για σωμάτια α, είναι $\sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \int d\vec{v}\, \vec{v}\, \delta f_\alpha(\vec{v})$. Επειδή οι εξισώσεις κίνησης (3.12) μπορεί εύκολα να εκφραστούν στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων για τις ταχύτητες $(v_\parallel, v_\perp, \vartheta)$, όπου $v_\parallel = \vec{v}\cdot\vec{i}_z$, $v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2$, $v_x = \vec{v}\cdot\vec{i}_x$, $v_y = \vec{v}\cdot\vec{i}_y$ και $\vartheta = \tan^{-1} v_y/v_x$,

$$\boxed{\begin{aligned} &v_x' = v_\perp \cos(\Omega_\alpha\tau + \vartheta), \quad v_y' = v_\perp \sin(\Omega_\alpha\tau + \vartheta) \\ &v_z' = v_\parallel = \text{σταθερό} \\ &v_\perp = \text{σταθερό} \end{aligned}} \qquad (3.15)$$

Το διαφορικό $d\vec{v}$ γίνεται $d\vec{v} \to d\vartheta\, v_\perp dv_\perp dv_\parallel$ και έτσι,

$$\delta\vec{J} = -\sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_{o\alpha}}{m_\alpha}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} \upsilon_\perp d\upsilon_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d\upsilon_\parallel \int_0^{\infty} d\tau\, \vec{v}\, \vec{\nabla}_{v'} f_\alpha(\vec{v}')\cdot\left[\left(1-\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}'}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I} + \frac{\vec{k}\vec{v}'}{\omega}\right]\cdot\delta\vec{E}\, e^{-j\phi(\tau)-0^+\tau}$$

η, ισοδύναμα, η ηλεκτρική δεκτικότητα γίνεται,

$$\overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega) = -j\sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} \upsilon_\perp d\upsilon_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d\upsilon_\parallel \int_0^{\infty} d\tau\, \vec{v}\, \vec{\nabla}_{v'} f_\alpha(\vec{v}')\cdot\left[\left(1-\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}'}{\omega}\right)\overleftrightarrow{I} + \frac{\vec{k}\vec{v}'}{\omega}\right] e^{-j\phi(\tau)-0^+\tau}$$

Αλλά, $\frac{d}{d\tau}\, e^{-j\phi(\tau)-0^+\tau} = -j(\vec{k}\cdot\vec{v}'-\omega)\, e^{-j\phi(\tau)-0^+\tau}$ και έτσι φαίνεται

αμέσως ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε παραγοντικά το κομμάτι $(1-\vec{k}\cdot\vec{v}'/\omega)$ του

ας άνω ολοκληρώματος παίρνοντας τελικά,

$$\boxed{\overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\overleftrightarrow{I} + \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} \upsilon_\perp d\upsilon_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d\upsilon_\parallel \int_0^{\infty} d\tau\, \vec{v}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{\nabla}_{v'} f_\alpha(\vec{v}') - j\vec{k}\cdot\vec{\nabla}_{v'} f_\alpha(\vec{v}')\vec{v}'\right] e^{-j\phi(\tau)-0^+\tau}} \quad (3.16)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αυτού επιλέγουμε το σύστημα συντεταγμένων

έτσι ώστε το κυματοδιάνυσμα να πέφτει στο επίπεδο x-z: $\vec{k} = k_\perp \vec{i}_x + k_\parallel \vec{i}_z$.

Επίσης, είναι εύκολο να δειχθεί ότι,

$$\boxed{\nabla_{v'} f_\alpha(\vec{v}') = \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\parallel}\vec{i}_z + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\perp}\left[\vec{i}_x\cos(\Omega_\alpha\tau+\vartheta) + \vec{i}_y\sin(\Omega_\alpha\tau+\vartheta)\right]} \quad (3.17)$$

Ακόμη, επειδή η **φάση** (διαφορά φάσης) $\phi(\tau)$ αναγκαστικά είναι τώρα,

$$\boxed{\phi(\tau) = \xi\left[\sin(\Omega_\alpha \tau + \vartheta) - \sin\vartheta\right] + (k_\parallel v_\parallel - \omega)\tau} \qquad (3.18)$$

με $\xi \equiv k_\perp v_\perp / \Omega_\alpha$, κάνοντας χρήση εκθετικού αναπτύγματος τριγωνομετρικών συναρτήσεων(*), έχουμε τελικά:

$$\boxed{\overleftrightarrow{\chi}_e(\vec{k},\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\overleftrightarrow{I} - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \frac{\frac{n\Omega_\alpha}{v_\perp}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\perp} + k_\parallel \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\parallel}}{n\Omega_\alpha + k_\parallel v_\parallel - \omega - j0^+} \overleftrightarrow{\Pi}_\alpha(v_\perp, v_\parallel; n)} \qquad (3.19)$$

όπου ο τανυστής $\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha(v_\perp, v_\parallel; n)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha(v_\perp, v_\parallel; n) = \begin{bmatrix} \frac{n^2\Omega_\alpha^2}{k_\perp^2} J_n^2 & j v_\perp \frac{n\Omega_\alpha}{k_\perp} J_n J_n' & v_\parallel \frac{n\Omega_\alpha}{k_\perp} J_n^2 \\ -j v_\perp \frac{n\Omega_\alpha}{k_\perp} J_n J_n' & v_\perp^2 J_n'^2 & -j v_\parallel v_\perp J_n J_n' \\ v_\parallel \frac{n\Omega_\alpha}{k_\perp} J_n^2 & j v_\parallel v_\perp J_n J_n' & v_\parallel^2 J_n^2 \end{bmatrix}} \qquad (3.20)$$

Τα J_n' εκφράζουν τις παραγώγους των Bessel J_n ως προς το όρισμά τους (ξ). Όπως και στην περίπτωση του αμαγνήτιστου πλάσματος, στο όριο $\omega \to \infty$, $\overleftrightarrow{\chi}_e \to -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\overleftrightarrow{I}$, δηλαδή η ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου γίνεται αδιάφορη.

Η συνάρτηση διηλεκτρικής απόκρισης που, όπως είδαμε, περιγράφει τη δυναμική

(*) $$e^{-j\phi(\tau) - 0^+\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\xi) J_m(\xi) e^{-j\left[n(\Omega_\alpha\tau + \vartheta) - m\vartheta + (k_\parallel v_\parallel - \omega)\tau\right] - 0^+\tau}$$

όπου J_n συναρτήσεις Bessel n-τάξης.

συμπεριφορά (διαταραχή πυκνότητας και μήκος της απόσβεσης διάδοσης της ηλεκτρομαγνητικής διαταραχής), γίνεται στην περίπτωση του μαγνητισμένου πλάσματος,

$$\varepsilon_r(\vec{k},\omega) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty 2\pi dv_\perp v_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \frac{J_n^2(\xi)\left(\frac{n\Omega_\alpha}{v_\perp}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\perp} + k_\parallel \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\parallel}\right)}{n\Omega_\alpha + k_\parallel v_\parallel - \omega - j0^+} \qquad (3.21)$$

Παρατηρούμε ότι εκτός από την περίπτωση $n=0$ που αντιστοιχεί σε πόλο $k_\parallel v_\parallel = \omega$ (αν $Im(\omega + j0^+) = 0$) υπάρχουν και άπειροι άλλοι ($n \neq 0$) που ονομάζονται συντονισμοί μετατοπισμένοι κατά Doppler λόγω περιστροφικής κίνησης γύρω από τις μαγνητικές γραμμές. Ο βασικός πόλος $k_\parallel v_\parallel = \omega$ αποτελεί συντονισμό από τη σκοπιά του ότι η παράλληλη ταχύτητα έπεται σωματιδίων ταυτίζεται με την αντίστοιχη φασική ταχύτητα του κύματος της διαταραχής $\omega/k_\parallel$. Αν εξαιρέσουμε όλους τους πόλους με $n \neq 0$ (μετά, έστω, $\Omega_\alpha \to 0$) τότε το εναπομένον $\varepsilon_r(\vec{k},\omega)$ ομοιάζει με αυτό του αμαγνήτιστου πλάσματος (σημ: $J_0(\xi \to 0) = 1$).

Υπάρχει όμως μια σημαντική διαφορά: Το κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$ αντικαθίσταται τώρα από το $k_\parallel \vec{i}_z$ και η συνάρτηση κατανομής είναι ήδη διαμορφωμένη έτσι ώστε να αντικατοπτρίζεται η κυλινδρική συμμετρία που απορρέει η εφαρμογή, έστω και ελαχίστου, μαγνητικού πεδίου.

ΔΙΑΜΗΚΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΑΞΓΟΥΕΛΙΑΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Εστω πλάσμα ηλεκτρονικού αερίου (πρακτικά ακίνητα ιόντα). Η κατανομή σε θερμοδυναμική ισορροπία θα είναι

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \qquad (4.1)$$

όπου m, T είναι η μάζα και η θερμοκρασία των ηλεκτρονίων αντίστοιχα, k_B η σταθερά Stefan-Boltzmann και $v^2 \equiv \vec{v}\cdot\vec{v}$. Η (4.1) εκφράζει πυκνότητα στον χώρο των ταχυτήτων. Εαν x είναι η διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής (ηλεκτροστατικής απουσία εξωτερικού πεδίου) τότε η συνάρτηση διασποράς γίνεται,

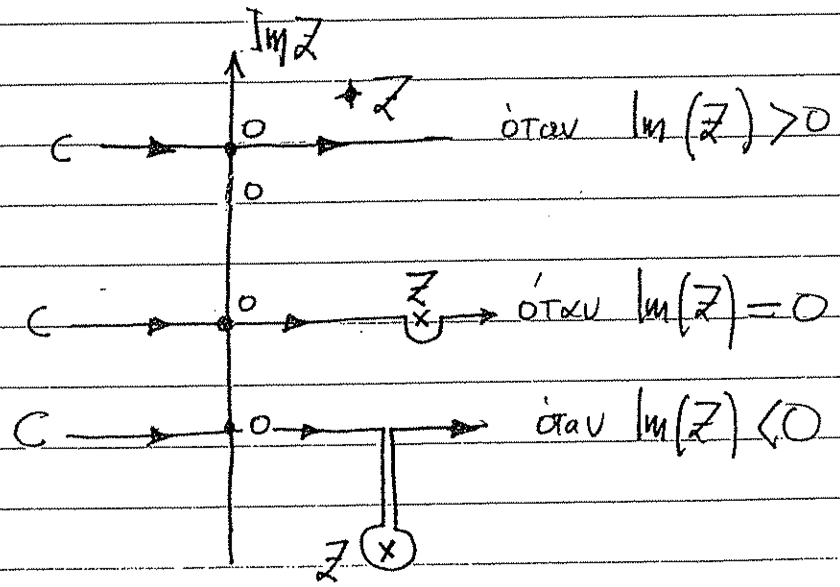
$$\epsilon(k,\omega) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{k(k_B T/m)^{1/2}}\right)$$

$$= 1 + \frac{k_D^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{k v_{th}}\right) \qquad (4.2)$$

εάν ορίσουμε $k_D \equiv 1/\lambda_D$ και $v_{th}^2 \equiv k_B T/m$. Η συνάρτηση $W(z)$, z: μιγαδικός, είναι μια καλά ορισμένη αναλυτική συνάρτηση στο άνω z-ημιεπίπεδο που επεκτείνεται αναλυτικά στο κάτω. Εάν στον παρακάτω ορισμό της μέσω επικαμπυλίου ολοκληρώματος, η καμπύλη ολοκλήρωσης πρέπει να είναι έτσι ώστε το Z να βρίσκεται πάντοτε πάνω από αυτή· δηλαδή, στο

$$\boxed{W(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_C dx\, \frac{x}{x-Z-j0^+}\, e^{-x^2/2}} \qquad (4.3)$$

Θα έχουμε για το C:



Η W(Z) μπορεί επίσης να γραφεί και σε ισοδύναμη μορφή που μπορεί να επεκταθεί και στο κάτω ημιεπίπεδο Z.

$$\boxed{W(Z) = 1 - Z e^{-Z^2/2}\int_0^Z dy\, e^{y^2/2} + j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, Z e^{-Z^2/2}} \qquad (4.4)$$

Για $|Z|<1$ η (4.4) έχει την εξής έκφραση με συγκλίνουσα σειρά,

$$W(z) = j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, z\, e^{-z^2/2} + 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{(2n+2)}}{(2n+1)!!} \qquad (4.5)$$

όπου $(2n+1)!! = 1.3.5\ldots(2n+1)$. Η ασυμπτωτική εξέλιξη έκφραση της $W(z)$ για μεγάλα z είναι,

$$W(z) = j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, z\, e^{-z^2/2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{z^{2n}} \qquad (4.6)$$

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ LANDAU

Η σχέση διασποράς που διέπει την διαμήκη συμπεριφορά των ηλεκτρονικών αερίων είναι προφανώς $\epsilon(k,\omega) = 0$, ή ισοδύναμα

$$1 + \frac{k_D^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{k v_{Th}}\right) = 0 \qquad (4.7)$$

Εάν υποθέσουμε ότι $\left|\frac{\omega}{k v_{th}}\right| \gg 1$, δηλαδή ότι η φασική ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής υπερβαίνει κατά πολύ τη μέση ταχύτητα (rms), δηλαδή τη θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων του αερίου, τότε με βάση την (4.6) θα έχουμε κατά προσέγγιση,

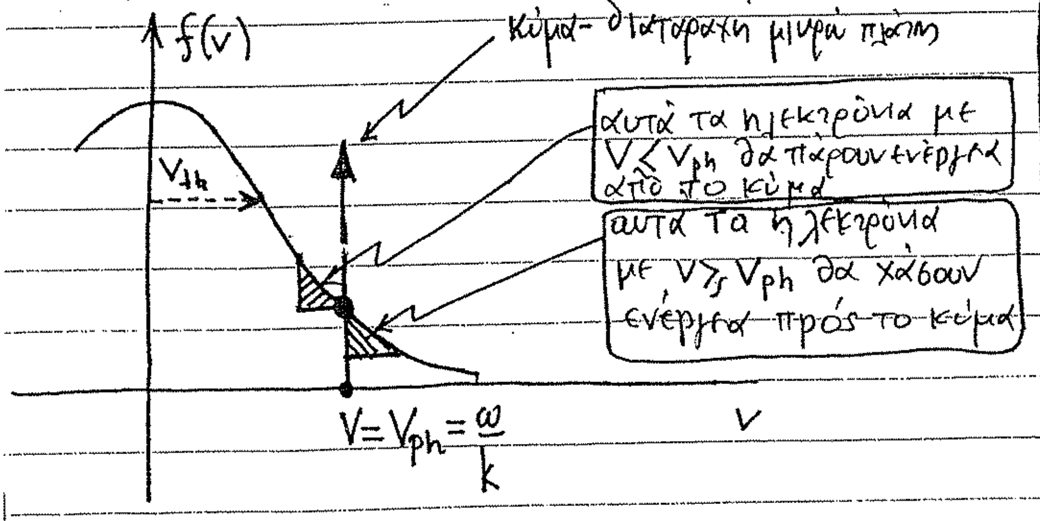
$$1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-3\frac{\omega_p^2 k^2 v_{th}^2}{\omega^4}\dots+j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega k_D^2}{k^3 v_{th}}\,e^{-\omega^2/2k^2v_{th}^2}=0$$

δεδομένου ότι $k_D v_{th}=\omega_p$. Το ω στη σχέση αυτή είναι φυσικά μιγαδικό. Έστω λοιπόν ότι $\omega=\omega_k+j\gamma_k$. Εάν υποθέσουμε ότι περιορίζουμε το πρόβλημα μόνο στην περίπτωση μικρού γ_k (μικροί δηλαδή ρυθμοί υπόσβεσης ή ενίσχυσης), δηλαδή, εάν $|\gamma_k/\omega_k|\ll 1$, τότε η λύση της παραπάνω εξίσωσης γίνεται,

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_k^2 &\simeq \omega_p^2+3v_{th}^2k^2\\ \gamma_k &\simeq -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\omega_p\,\frac{k_D^3}{k^3}\,e^{-\omega_k^2/2k^2v_{th}^2}\end{aligned}} \qquad (4.8)$$

Για να ισχύει η αρχική μας υπόθεση $\left|\omega/kv_{th}\right|\gg 1$ θα πρέπει προφανώς να έχουμε $k\ll k_D$ πράγμα που εξασφαλίζει αυτόματα και την ισχύ της υπόθεσης μικρού γ_k το οποίο, μάλιστα, προκύπτει και αρνητικό. Άρα για μήκη κύματος αρκετά (σχετική έννοια) μεγαλύτερα από το μήκος Debye, δηλαδή μια διαταραχή διαμήκης που δεν έρχεται σε "σύγκρουση" με τη συνισταμένη θεώρηση (δεν επηρεάζουν δηλαδή τη σφαίρα Debye), η συχνότητα των διαταραχών είναι κυρίως ω_p. Υπάρχει και μια μικρή διόρθωση $\frac{3}{2}\omega_p k^2\lambda_D^2$ ($\omega_k \simeq \omega_p + \frac{3}{2}\omega_p k^2\lambda_D^2$) η οποία παρουσιάζει διασπορά (εξάρτηση από το k) και που οφείλεται στη θερμική κίνηση των ηλεκτρονίων.

Όμως, η εμφάνιση αρνητικά γ_k συνεπάγεται ότι η ταλάντωση πλάσματος με τη μικρή θερμική διασπορά δεν μπορεί παρά να αποσβεσθεί τελικά. Το φαινόμενο αυτό καλείται απόσβεση Landau. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να εξηγηθεί στη βάση της επόμενης αντιστροφής πληθυσμού.



Εφ' όσον στην περίπτωση της Μαξγουελιανής κατανομής η $f(v)$ πέφτει όταν το V αυξάνει απότομα, στο ισοζύγιο τα ηλεκτρόνια με ταχύτητες κοντά στην φασική ταχύτητα του κύματος θα είναι κατά μέσο όρο κερδισμένα (υπάρχουν περισσότερα που θα πάρουν ενέργεια από αυτά που θα δώσουν). Έτσι η διαταραχή θα εξασθενίσει. Βέβαια σε περιπτώσεις που η κλίση της κατανομής είναι τέτοια ώστε το $f(v)$ να αυξάνει όταν το v αυξάνει απότομα (ασταθείς περιπτώσεις) έχουμε ενίσχυση Landau σε βάρος της κατανομής, η οποία τότε μειώνει την κλίση της (λόγω ασταθούς διαταραχής) ώστε να μετριασθεί μέχρι μηδενισμού το φαινόμενο.

- ΣΥΛΛΟΓΙΚΗ ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ-ΙΟΝΤΩΝ. (ΔΥΟ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ).

Έστω ότι τα ιόντα έχουν φορτίο e (πρωτόνια για παράδειγμα) και οι κατανομές των διαφορετικών τύπων θερμοκρασίας δίνονται από την σχέση,

$$\boxed{f_\alpha(\vec{v}) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_\beta T_\alpha}\right)^{3/2} e^{-m_\alpha v^2/2k_\beta T_\alpha}, \quad \alpha = e, i \qquad (4.a)}$$

Λόγω μακροσκοπικής ουδετερότητας θα πρέπει προφανώς $n_e = n_i = n$. Η ύπαρξη (η δυνατότητα) κατανομών διαφορετικής θερμοκρασίας είναι δυνατή διότι η προσέγγιση προς την ισορροπία μέσω των συγκρούσεων γίνεται με ταχύτερους ρυθμούς για τα ηλεκτρόνια (από συγκρούσεις e-e)· ενώ για τα ιόντα είναι βραδύτερη. Ακόμη βραδύτερη είναι και η διαδικασία τελικής ισορροπίας και εξίσωσης των θερμοκρασιών e και i μέσω e-i συγκρούσεων. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.24)-(1.26) μπορούμε να πούμε ότι σε τάξη μεγέθους έχουμε,

$$\boxed{\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} \sim 1 : \left(m_i/m_e\right)^{1/2} : \left(m_i/m_e\right)} \quad (4.10)$$

Εφ' όσον λοιπόν $m_i/m_e \gg 1$, μπορούμε να πούμε ότι για διάστημα χρόνου μπορεί να συντηρηθεί πλάσμα διαφορετικών ηλεκτρονικών και ιοντικών θερμοκρασιών.

Η διηλεκτρική συνάρτηση γίνεται τώρα,

$$\boxed{\epsilon(k,\omega) = 1 + \frac{k_e^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{k v_{the}}\right) + \frac{k_i^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{k v_{thi}}\right)} \quad (4.11)$$

όπου k_e και k_i είναι τα ~~μήκη~~ αντίστροφα Debye ηλεκτρονίων και ιόντων αντίστοιχα. Για πολύ μικρές συχνότητες $(\omega \to 0)$ η συνάρτηση χνή γίνεται $\left(|\omega| \ll kV_{thi} \ll kV_{the}\right)$

$$\boxed{\epsilon(k, \omega \to 0) \to 1 + \frac{k_D^2}{k^2} > 1 \qquad (4.12)}$$

όπου, τώρα, $k_D^2 = k_e^2 + k_i^2$. Η πόλωση του πλάσματος δύο συνιστωσών είναι προφανώς $P(k) = \varepsilon_0 \frac{k_D^2}{k^2} E(k)$.

Στην περίπτωση μεγάλων συχνοτήτων, $|\omega| \gg kV_{the} \gg kV_{thi}$ μπορούμε να θέσουμε προσεγγιστικά,

$$1 - \frac{\omega_e^2 + \omega_i^2}{\omega^2} + 3\frac{\omega_e^2}{\omega^4}k^2V_{the}^2 + 3\frac{\omega_i^2}{\omega^4}k^2V_{thi}^2 - j\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{\omega}{kV_{the}}\frac{k_e^2}{k^2}e^{-\omega^2/2k^2V_{the}^2} + \frac{\omega}{kV_{thi}}\frac{k_i^2}{k^2}e^{-\omega^2/2k^2V_{thi}^2}\right] \simeq 0.$$

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική όπως και πριν, καταλήγουμε τελικά ότι,

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_k^2 &= \omega_p^2 + 3k^2\left(\omega_e^2 V_{the}^2 + \omega_i^2 V_{thi}^2\right) \\ \gamma_k &= -\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\frac{\omega_k\,\omega_p^2}{k^3}\left[\frac{k_e^2}{V_{the}}e^{-\omega_k^2/2k^2V_{the}^2} + \frac{k_i^2}{V_{thi}}e^{-\omega_k^2/2k^2V_{thi}^2}\right] \qquad (4.13) \end{aligned}}$$

όπου $\omega_p^2 = \omega_e^2 + \omega_i^2$. Οι σχέσεις αυτή φυσικά αποτελούν καλή προσέγγιση της συλλογικής συμπεριφοράς του πλάσματος εφ' όσον βέβαια $k^2 \ll \min(k_e^2, k_i^2)$. Η δεύτερη των σχέσεων (4.13) παρέχει την απόσβεση Landau επί των ηλεκτρονίων και των ιόντων.

Δεν παρατηρούμε λοιπόν τίποτα ποιοτικά διαφορετικό από αυτό της περίπτωσης των ηλεκτρονικών αερίων. Για την ενδιάμεση όμως περιοχή ισχύουσα

$kv_{thi} \ll |\omega| \ll kv_{the}$ η οποία είναι χρήσιμη αφού λόγω το ότι $v_{thi} \ll v_{the}$ (αν υποθέσουμε ότι $T_e > T_i$ ή εάν $T_e < T_i$ T_e και T_i δεν είναι και πολύ διαφορετικές). Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $W\left(\frac{\omega}{kv_{the}}\right)$ της (4.11) θα αναχθεί σύμφωνα με την (4.5) ενώ η $W\left(\frac{\omega}{kv_{thi}}\right)$ σύμφωνα με την (4.6). Έτσι λοιπόν, θα έχουμε:

$$1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2 v_{thi}^2}{\omega^2}\right) + \frac{k_e^2}{k^2} + j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\omega}{kv_{the}}\frac{k_e^2}{k^2} + \frac{\omega}{kv_{thi}}\frac{k_i^2}{k^2} e^{-\omega^2/2k^2 v_{thi}^2}\right] \simeq \epsilon(k,\omega)$$

Η σχέση διασποράς $\epsilon(k,\omega) = 0$ μπορεί πάλι να λυθεί θέτοντας $\omega = \omega_k + j\gamma_k$ με $|\gamma_k/\omega_k| \ll 1$,

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega \simeq \omega_k \left\{ \pm 1 - j\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-T_e/2T_i - 3/2}\right]\right. \\ &\omega_k = \left(\frac{T_e}{m_i} + \frac{3T_i}{m_i}\right)^{1/2} k \qquad (4.14) \end{aligned}}$$

οπότε για να ισχύει θα πρέπει,

$$\boxed{T_e / T_i \gg 1 \qquad (4.15)}$$

Η (4.14) περιγράφει τον λεγόμενο ιοντοακουστικό ρυθμό για $k^2 \ll k_e^2$. Λόγω της (4.15) προφανώς έχουμε

$$\boxed{\frac{\omega_k}{k} \simeq \underbrace{\left(\frac{T_e}{m_i}\right)^{1/2}}_{\doteq c_s} \quad \text{και} \quad \left|\frac{\gamma_k}{\omega_k}\right| \simeq \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}. \qquad (4.16)}$$

Η φασική ταχύτητα, όπως αυτή δίνεται από την (4.16) είναι αυτή του ήχου σε μέσο με θερμοκρασία προσδιοριζόμενη από την κινητικότητα των ηλεκτρονίων και με πυκνότητα στην οποία τα ιόντα (σαν πολύ μαζικότερα των ηλεκτρονίων) παίζουν τον κυρίαρχο ρόλο. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι εάν τα ηλεκτρόνια ήταν ψυχρά (και, ως εκ τούτου και τα ιόντα) είτε ο μόνος συλλογικός ρυθμός (οι) θα ήταν αυτός της ταλάντωσης πλάσματος. (με $\omega_k = \pm\omega_p$). Λόγω όμως του γεγονότος ότι $T_e > 0$ έχουμε τον χαμηλής συχνότητας ιοντοακουστικό ρυθμό.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΥ ΑΕΡΙΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ.

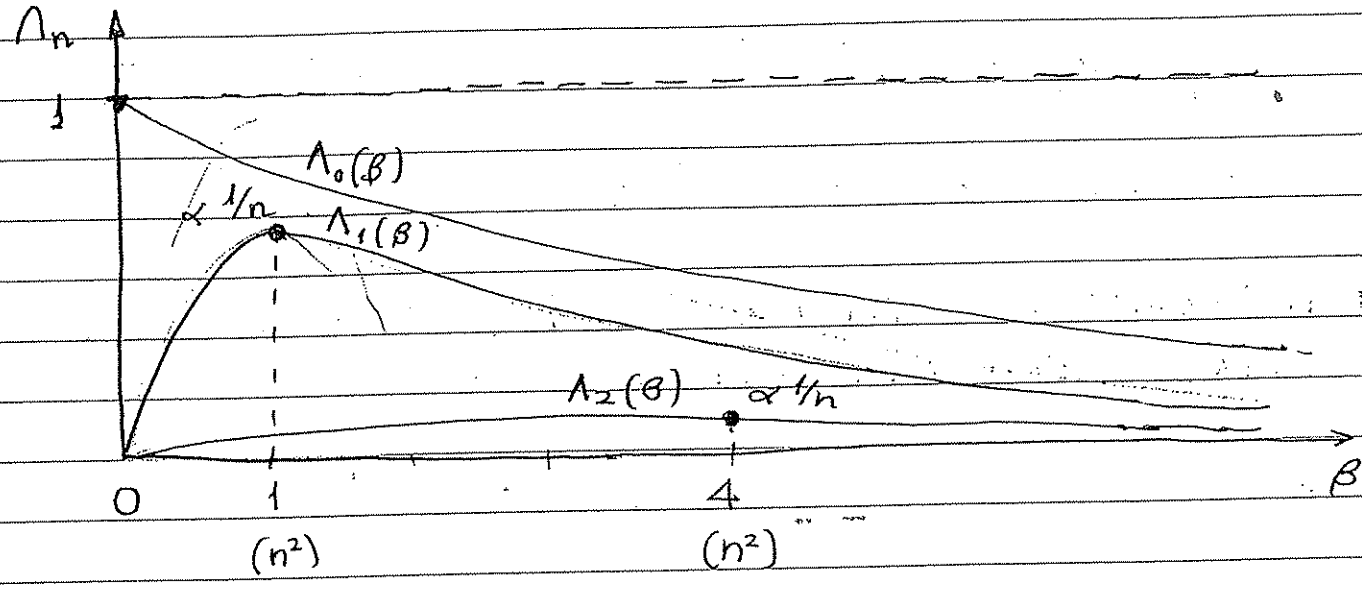
Θα μελετήσουμε τώρα την συνάρτηση (3.21) στην περίπτωση πάλι Μαξγουελιανής κατανομής,

$$f(\vec{V}) = f(V_\perp, V_\parallel) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{v_\perp^2 + v_\parallel^2}{2V_{th}^2}}$$

Μπορεί να δειχθεί λοιπόν ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε,

$$\boxed{\epsilon(k,\omega) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2}\left\{1 + \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega}\left[W\left(\frac{\omega - n\Omega}{|k_\parallel| V_{th}}\right) - 1\right]\Lambda_n\left(\frac{k_\perp^2 V_{th}^2}{\Omega^2}\right)\right\}} \quad (4.17)$$

όπου, $\Lambda_n(\beta) \equiv I_n(\beta)e^{-\beta}$ με $I_n(\beta)$: τροποποιημένη συνάρτηση Bessel n-τάξης. Ω είναι η ηλεκτρονική κυκλοτρονική συχνότητα (απόλυτη τιμή). Η συνάρτηση λάμδα (Λ_n) εμφανίζεται



Λn
1
Λ0(β)
∝ 1/n
Λ1(β)
Λ2(β)
∝ 1/n
0
1
4
β
(n²)
(n²)

αρκετά τακτικά στη μελέτη των Maxwellιανών μαγνητισμένων πλασμάτων. Μερικές από τις ιδιότητές της είναι: (1) $0 \leq \Lambda_n(\beta) \leq 1$, (2) $\Lambda_0(\beta)$ έχει μέγιστο το $\Lambda_0(0)=1$, (3) η $\Lambda_n(\beta)$ για $n \neq 0$ μηδενίζεται στο $\beta=0$, αυξάνεται για ένα διάστημα και μετά μειώνεται, (4) για μεγάλα β ή/και έχουμε $\Lambda_n(\beta) \simeq (2\pi\beta)^{-1/2} e^{-n^2/2\beta}$ (5) για μεγάλα n το μέγιστο της $\Lambda_n(\beta)$ είναι για $\beta \simeq n^2$ (ισοδύναμο με το $|n\Omega| \simeq k_\perp V_{th}$) η δε τιμή (μέγιστη αυτή) μειώνεται με το n (εξάρτηση μέγιστου της μορφής $1/|n|$).

Θεωρούμε την περίπτωση που το αέριο ηλεκτρονίων είναι ισχυρά μαγνητισμένο ($\Omega^2 \gg \omega_p^2$ δηλαδή). Για ω στη γειτονιά του $\pm\omega_p$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την (4.17) ως εξής,

$$\boxed{\epsilon(\vec{k},\omega) \simeq 1 + \frac{k_D^2}{k^2}\left\{\left[1-\Lambda_0(\beta)\right] + W\left(\frac{\omega}{|k_\parallel| V_{th}}\right)\Lambda_0(\beta)\right\} + \mathcal{O}\left(\frac{\omega_p^2}{\Omega^2}\right)} \quad (4.18)$$

όπου $\beta \equiv k_\perp^2 \rho_L^2$ με $\rho_L = V_{th}/\Omega$. Εάν επιπλέον $k^2 \ll k_D^2$ και $\Omega^2 \gg \omega_p^2$ (όπως υποθέσαμε), τότε προφανώς $\beta \ll 1$.

Αναζητώντας λύση της σχέσης διασποράς (διαμήκης συμπεριφορά) με $\omega = \pm\omega_{\vec{k}} + i\gamma_{\vec{k}}$ (το $\vec{k}$ είναι διάνυσμα τώρα) έχουμε

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\omega_{\vec{k}} &= \frac{|k_\parallel|}{k}\,\omega_p\sqrt{\Lambda_0(\beta)} \simeq \frac{|k_\parallel|}{k}\,\omega_p \\
\gamma_{\vec{k}}/\omega_{\vec{k}} &\simeq -\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\frac{k_D^3}{k^3}\left[\Lambda_0(\beta)\right]^{3/2} e^{-k_D^2\Lambda_0(\beta)/2k^2}
\end{aligned}
}
\qquad (4.19)
$$

Η διάδοση της παραπάνω διαταραχής γίνεται κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου (παύει να υπάρχει αν $k_\parallel=0$). Επίσης δε η διαταραχή αυτή μόνο εάν $k^2 \ll k_D^2\Lambda_0(\beta)$.

Εάν τώρα διερευνήσουμε διαταραχή με συχνότητα στην περιοχή κάποιας αρμονικής ($\omega \simeq n\Omega$; $n=\pm1,\pm2,\dots$) τότε η (4.17) γίνεται

$$
\boxed{
\epsilon(\vec{k},\omega) \simeq 1+\frac{k_D^2}{k^2}\left[1-\Lambda_0(\beta)\right]-\frac{k_D^2}{k^2}\frac{\omega}{\omega-n\Omega}\left[1-W\left(\frac{\omega-n\Omega}{|k_\parallel|v_{th}}\right)\right]\Lambda_n(\beta)
}
\qquad (4.20)
$$

προκύπτει,

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\omega_{\vec{k}} &= n\Omega\left(1+\Delta_{n,\vec{k}}\right)+j\gamma_{\vec{k}} \\
\Delta_{n,\vec{k}} &\equiv k_D^2\Lambda_n(\beta)\Big/\left\{k^2+k_D^2\left[1-\Lambda_0(\beta)\right]\right\} \\
\left|\frac{\gamma_{\vec{k}}}{n\Omega\left(1+\Delta_{n,\vec{k}}\right)}\right| &\simeq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{|n\Omega|\,\Delta_{n,\vec{k}}^2}{|k_\parallel|\,v_{th}}\,e^{-n^2\Omega^2\Delta_{n,\vec{k}}^2/2k_\parallel^2 v_{th}^2}
\end{aligned}
}
\qquad (4.21)
$$

Οι συνθήκες ισχυρής μαγνήτισης ($\omega_p^2 \ll \Omega^2$) και η

για $|\gamma_{\vec{k}}/\omega_{\vec{k}}| \ll 1$ έχουμε τελικά,

$$\boxed{|k_\parallel| \ll k_\perp \Delta_{n,\vec{k}} \qquad (4\text{-}22)}$$

Τα είδη αυτά διαταραχών διαδίδονται σχεδόν κάθετα στο μαγνητικό πεδίο και λέγονται ρυθμοί Bernstein. Ιδιαίτερα μάλιστα για $k_\parallel = 0$ (κάθετη διάδοση) δεν υπάρχει απόσβεση (διότι τότε μπορεί να δειχθεί ότι $\gamma_{\vec{k}} \to 0$). Η φυσική εικόνα της ανυπαρξίας απόσβεσης Landau είναι το ότι όταν το κύμα διαδίδεται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο δεν υπάρχει η δυνατότητα συντονισμού του με τα ηλεκτρόνια τα οποία είναι δεσμευμένα να εκτελούν την κυκλοτρονική τους κίνηση. Για διάδοση υπό γωνία, φυσικά θα υπάρχει η δυνατότητα συντονισμού: $|n\Omega| \simeq |k_\parallel v_\parallel|$.

ΔΙΑΔΟΣΗ Η/Μ ΚΥΜΑΤΩΝ ΜΙΚΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΣΕ ΨΥΧΡΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΛΑΣΜΑ

Ψυχρό: οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι οι ίδιες.
Άρα, η μέση ταχύτητα στην ρευστοδυναμική θεώρηση συμπίπτει με τις ταχύτητες των σωματιδίων (εννοείται, για κάθε είδος ξεχωριστά)

Μικρό πλάτος: Πρόκειται να γραμμικοποιήσουμε δηλαδή τις εξισώσεις που θα προκύψουν.

Ομογενές: Η πυκνότητα θεωρείται δεδομένη και σταθερή (n_α)

Ρεύμα: $\vec{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha$ ... (1)

Εξισώσεις Maxwell στο χώρο Fourier $(\vec{r}, t) \to (\vec{k}, \omega)$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \qquad (2)$$
$$\vec{k} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 (-j\omega) \vec{E}$$

όπου $\vec{E}, \vec{B}$ είναι οι φασιθέτες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα.

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega_0 \mu_0 \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha - j\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \qquad (3)$$

ή

φασιθέτης της ταχύτητας !!

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} + j\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \omega_0 \mu_0 \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha \qquad (3)$$

(χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \equiv (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$)

Εξ' άλλου η ταχύτητα $\vec{v}_\alpha$ (και ο φασιθέτης της) μπορεί να προσδιορισθεί από την σχέση της δύναμης Lorentz:

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = q_\alpha\left(\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}\right) \quad (\text{φυσικά μεγέθη}) \quad (4)$$

B) Υποθέτοντας ότι η διαταραχή στο μαγνητικό πεδίο είναι αμελητέα (*), μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\vec{B}$ με το στατικό εξωτερικό του μέρος. Υποθέτοντας επιπλέον ότι το στατικό πεδίο είναι ομογενές και δίνεται από τη σχέση $\vec{B} = \vec{i}_z B_0$, η σχέση (4) μετατρέπεται μέσω του μετασχηματισμού Fourier στην εξίσωση,

$$-j\omega m_\alpha \vec{V}_\alpha = q_\alpha\left(\vec{E} + \vec{V}_\alpha \times \vec{i}_z B_0\right) \quad (5)$$

όπου τα $\vec{V}_\alpha$ και $\vec{E}$ είναι τώρα φασιθέτες. Εάν υποθέσουμε ότι κρατάμε τη μαγνητική διαταραχή στην (4) και γραμμικοποιήσουμε (διαταραχή στο $\vec{v}_\alpha$ × διαταραχή στο $\vec{B}$ αμελητέο) τότε η (4) θα ήταν (σημ: δεν υπάρχει στατικό ηλ. πεδίο):

$$m\frac{d\delta\vec{v}_\alpha}{dt} \cong q_\alpha\left(\delta\vec{E} + \delta\vec{v}_\alpha \times \vec{B}_0 + \vec{v}_{\alpha 0} \times \delta\vec{B}\right) \quad (4)'$$

Η παραπάνω υπόθεσή μας (*) ισοδυναμεί με το να αμελήσουμε τον όρο $\vec{v}_\alpha \times \delta\vec{B}$ σε σχέση με τον $\delta\vec{E}$, δηλαδή με την υπόθεση: $|\vec{v}_{\alpha 0} \times \delta\vec{B}| / |\delta\vec{E}| \ll 1$. Όμως, το $\vec{v}_{\alpha 0}$ αναφέρεται στην αδιατάρακτη κίνηση των σωματίων. Άρα για συστήματα σωματίων που κινούνται με ταχύτητα πολύ μικρότερη κατά μέτρο από το λόγο $|\delta\vec{E}| / |\delta\vec{B}|$ μπορούμε να αμελήσουμε τον όρο αυτό. Με το μετασχηματισμό Fourier τα $\delta\vec{v}_\alpha$, $\delta\vec{E}$ μετατρέπονται στους φασιθέτες $\vec{V}_\alpha$ και $\vec{E}$ της σχέσης (5) (προσοχή: διατηρούμε το ίδιο σύμβολο για να αποφύγουμε τους δείκτες $\vec{k},\omega$ (δηλ. $\vec{V}_{\alpha \vec{k},\omega}$, $\vec{E}_{\vec{k},\omega}$)).

Επιστρέφοντας στην (5) και συνδυάζοντάς την με την (3) θα προκύψει μια εξίσωση για τον φασιθέτη της διαταραχής του ηλ. πεδίου. Προηγουμένως όμως θα πρέπει να λύσουμε διανυσματικά την (5) ως προς την $\vec{V}_\alpha$:

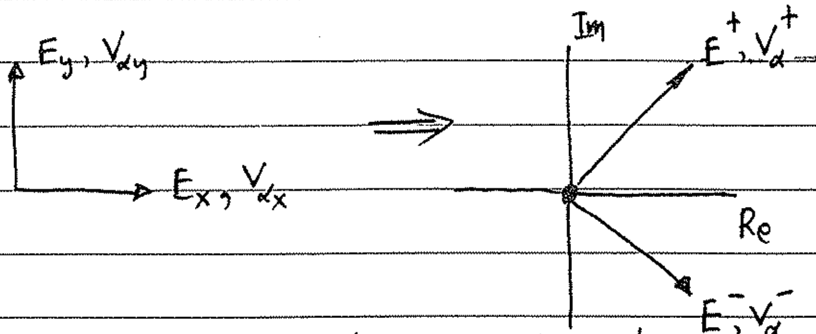
Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε τους εξής νέους φασιθέτες:

$$\vec{V}_\alpha = (V_{\alpha x}, V_{y\alpha}, V_{\alpha z}) \equiv (V_\alpha^+, V_\alpha^-, V_{\alpha z}) \qquad (6)$$

με $\quad V_\alpha^\pm \equiv V_{\alpha x} \pm j V_{\alpha y} \qquad (7)$

και $\quad \vec{E} = (E_x, E_y, E_z) \equiv (E^+, E^-, E_z) \qquad (8)$

με $\quad E^\pm = E_x \pm j E_y \qquad (9)$



Με την εισαγωγή των νέων μεγεθών $V_\alpha^\pm, E^\pm$ (τα $V_{\alpha z}$ και E_z παραμένουν ως έχουν) η λύση της (5) γίνεται:

$$V_\alpha^\pm = \frac{j}{B_0}\,\frac{\varepsilon_\alpha \Omega_\alpha}{\omega \mp \Omega_\alpha}\,E^\pm \qquad (10)$$

$$V_{\alpha z} = \frac{j}{B_0}\,\frac{\varepsilon_\alpha \Omega_\alpha}{\omega}\,E_z \qquad (11)$$

όπου, $\quad \varepsilon_\alpha \equiv \mathrm{sgn}(q_\alpha) \quad$ και $\quad \Omega_\alpha \equiv \left|\frac{q_\alpha B_0}{m_\alpha}\right|$.

Οι σχέσεις (10) και (11) φυσικά μπορούν να δώσουν πίσω τα $V_{\alpha x}$ και $V_{\alpha y}$ κάνοντας χρήση των ορισμών (7) και (9) στην (10). Έτσι τελικά η σχέση (3) οδηγείται σε ένα ομογενές σύστημα τριών εξισώσεων για τις συνιστώσες-φασιθέτες E_x, E_y, E_z το οποίο έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{pmatrix} S-\eta^2\cos^2\vartheta & -jD & \eta^2\cos\vartheta\sin\vartheta \\ jD & S-\eta^2 & 0 \\ \eta^2\cos\vartheta\sin\vartheta & 0 & P-\eta^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \qquad (12)$$

όπου $\eta = \left|\frac{\vec{k}c}{\omega}\right|$: δείκτης διάθλασης, $\vartheta = \widehat{\vec{k}\,\vec{z}}$ (η γωνία δηλαδή του διανύσματος διάδοσης, που βρίσκεται στο επίπεδο xz, με τον άξονα z) και,

$$S \equiv (R+L)/2 \,, \quad D \equiv (R-L)/2 \qquad (13)$$

με

$$R \equiv 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}\frac{\omega}{\omega+\varepsilon_\alpha \Omega_\alpha} \,, \quad L \equiv 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}\frac{\omega}{\omega-\varepsilon_\alpha \Omega_\alpha} \qquad (14)$$

και

$$P \equiv 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \qquad (15)$$

όπου $\omega_\alpha^2 \equiv q_\alpha^2 n_\alpha/\varepsilon_0 m_\alpha$: (συχνότητα πλάσματος)^2 για το είδος α. Η (12) οδηγεί στην σχέση διασποράς (ορίζουσα του πίνακα $=0$) η οποία είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το τετράγωνο του δείκτη διάθλασης,

$$A n^4 + B n^2 + C = 0 \qquad (16)$$

με

$$\begin{aligned} A &\equiv S\sin^2\vartheta + P\cos^2\vartheta \\ B &\equiv RL\sin^2\vartheta + PS(1+\cos^2\vartheta) \\ C &\equiv PRL \end{aligned} \qquad (17)$$

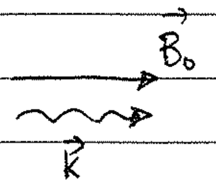
όπου έγινε χρήση της ταυτότητας: $S^2 - D^2 = RL$. Η λύση της (17) (δύο) είναι:

$$n^2 = \frac{B \pm F}{2A}, \quad F^2 \equiv (RL-PS)^2 \sin^4\vartheta + 4P^2D^2\cos^2\vartheta \geq 0 \qquad (18)$$

Άρα, οι λύσεις: $n = n(\omega, \vartheta; \{\varepsilon_\alpha, q_\alpha\})$ είναι πραγματικές ή καθαρά φανταστικές (όταν $n^2<0$). Η πρώτη περίπτωση (πραγματικών λύσεων) αντιστοιχεί σε διάδοση, ενώ η δεύτερη (φανταστικών λύσεων) σε εξασθένηση (evanescense). Οι Astrom και Allis διατύπωσαν την σχέση διασποράς (18) σε μορφή-λύση ως προς την γωνία:

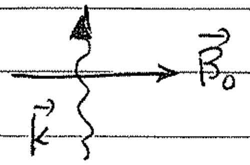
$$\tan^2\vartheta = -\frac{P(n^2-R)(n^2-L)}{(Sn^2-RL)(n^2-P)} \qquad (19)$$

Έτσι, για $\vartheta = 0$:



$$P=0 \text{ ή } n^2=R \text{ ή } n^2=L \qquad (20)$$

και για $\vartheta = \pi/2$:



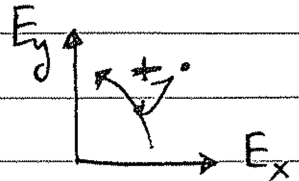
$$n^2 = \frac{RL}{S}, \quad n^2=P \qquad (21)$$

Οι (20) και (21) αποτελούν τις λύσεις (δυνατές λύσεις) $n = n(\omega; \{\varepsilon_\alpha, q_\alpha\})$ για διαταραχή Η/Μ, διαδιδόμενες παράλληλα και κάθετα στο μαγν. πεδίο αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που η ηλεκτρική διαταραχή είναι δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένη θα έχουμε:

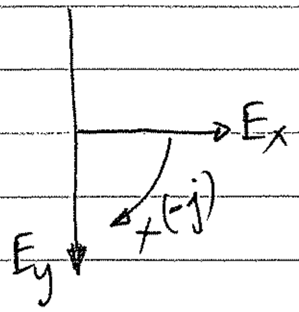
$$E_x = a\,\mathrm{Re}\, e^{-j\omega t}, \quad E_y = a(\mathrm{Re}\, j e^{-j\omega t}) \qquad (22)$$

για τις συνιστώσες των φυσικών μεγεθών ($a^2 \equiv |\vec{E}| = E_x^2+E_y^2$)



ενώ για αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένη ηλεκτρική διαταραχή θα έχουμε:

$$E_x = a\,\mathrm{Re}\,e^{-j\omega t}, \quad E_y = a\,\mathrm{Re}\left(-j e^{-j\omega t}\right) \qquad (23)$$



Σε ειδικό συμβολισμό φασιθετών θα έχουμε: $E_x = a e^{-j\omega t}$, $E_y = aje^{-j\omega t}$ (δεξ.) και $E_x = ae^{-j\omega t}$, $-aje^{-j\omega t}$ (αριστ.). Δηλαδή θα είναι ο λόγος jE_x/E_y:

δεξιόστροφα

$$j\frac{E_x}{E_y} = \pm 1, \text{ κυκλ. πόλωση.} \qquad (24)$$

αριστερόστροφα

Από την σχέση-σύστημα (12) ο λόγος $j\frac{E_x}{E_y}$ μπορεί να προσδιορισθεί στη γενική περίπτωση γενικής πόλωσης:

$$j\frac{E_x}{E_y} = \frac{n^2 - S}{D} \qquad (25)$$

Στην περίπτωση τώρα $\vartheta = 0$ και του ρυθμού $n^2 = R$ η (25) δίνει:

$$j\frac{E_x}{E_y} = +1 \quad \text{για} \quad n^2 = R \qquad (26)$$

ενώ για τον ρυθμό (πάλι $\vartheta = 0$) $n^2 = L$

$$j\frac{E_x}{E_y} = -1 \quad \text{για} \quad n^2 = L \qquad (27)$$

Άρα στην περίπτωση διάδοσης παράλληλα με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο υφίστανται πέραν του ρυθμού - ταλάντωσης πλάσματος ($P=0$) και δύο διαδιδόμενοι κυκλικά πολωμένοι ρυθμοί, ο ένας δεξιόστροφος ($n^2=R$) και ο άλλος ($n^2=L$) αριστερόστροφος.
Δεδομένου τώρα ότι οι ταχύτητες συνδέονται γραμμικά με την διαταραχή του ηλ. πεδίου, μπορούμε να προσδιορίσουμε και την πόλωση των εμπεδίων (στο μαγν. πεδίο) σωματιδίων της ταχύτητας—φασιδέτη. Έτσι, μπορεί να δειχθεί ότι ο λόγος πόλωσης είναι:

$$j\frac{V_{\alpha x}}{V_{\alpha y}}=\frac{(\varepsilon_\alpha\omega-\Omega_\alpha)(n^2-L)+(\varepsilon_\alpha\omega+\Omega_\alpha)(n^2-R)}{(\varepsilon_\alpha\omega-\Omega_\alpha)(n^2-L)-(\varepsilon_\alpha\omega+\Omega_\alpha)(n^2-R)} \qquad (28)$$

Έτσι, για την περίπτωση $\theta=0$, για τους κυκλικά πολωμένους ρυθμούς έχουμε

$$j\frac{V_{\alpha x}}{V_{\alpha y}}=+1 \quad \text{για } n^2=R \quad (\text{δεξιόστροφο}) \qquad (29)$$

και

$$j\frac{V_{\alpha x}}{V_{\alpha y}}=-1 \quad \text{για } n^2=L \quad (\text{αριστερόστροφο}) \qquad (30)$$

δηλαδή και η κίνηση (σημειοειδώς) είναι αντίστοιχα δεξιόστροφη και αριστερόστροφη. Επίσης για την περίπτωση (αντηχητικής γωνίας) που $\varepsilon_\alpha=+1$ και $\omega\to\Omega_\alpha$ η (28) δίνει:

$$j\frac{V_{\alpha x}}{V_{\alpha y}}=-1, \quad \omega\to\Omega_\alpha \quad \alpha: \text{ιόν} \qquad (31)$$

ενώ για $\varepsilon_\alpha=-1$ και $\omega\to\Omega_\alpha$

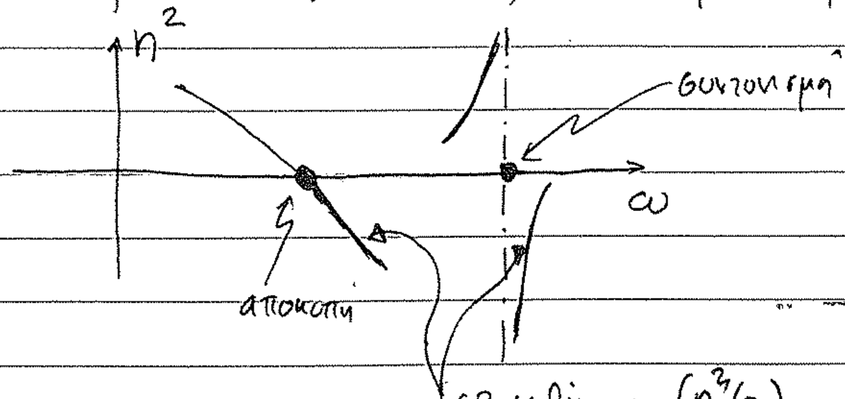
$$j\frac{V_{\alpha x}}{V_{\alpha y}}=+1, \quad \omega\to\Omega_\alpha \quad \alpha: \text{ηλεκτρόνιο} \qquad (32)$$

δηλαδή, ωράγμιας η κίνηση των ιόντων (θετικών) και των ηλεκτρονίων αριστερόστροφη και δεξιόστροφη αντίστοιχα.

Συντονισμοί και αποκοπές

Αποκοπή: $n^2 = 0$, δηλαδή παύση διάδοσης

Συντονισμός: $n^2 \to \infty$, δηλαδή μηδενισμός του μήκους κύματος.



Η κατάλληλη σχέση για την εύρεση των αποκοπών και των συντονισμών είναι οι εκφράσεις (16) και (17):
Για $n^2=0$ έχουμε $C=0$ ή ισοδύναμα:

$$\text{Αποκοπή} \quad P=0 \;\text{ή}\; R=0 \;\text{ή}\; L=0 \tag{33}$$

Η πρώτη δίνει αποκοπή στη καθαρή ταλάντωση πλάσματος $\omega^2=\sum_\alpha \omega_\alpha^2$ καθώς και δύο [illegible] συχνότητες που απορρέουν από τις σχέσεις $R=0$ και $L=0$ (ανεξάρτητες γωνίας διάδοσης!!):

$$\sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega(\omega+\varepsilon_\alpha \Omega_\alpha)} = 1 \;,\quad \sum_\alpha \frac{\omega_\alpha^2}{\omega(\omega-\varepsilon_\alpha \Omega_\alpha)} = 1 \tag{34}$$

Η κατάλληλη τώρα σχέση για την εύρεση των συντονισμών είναι η σχέση των Astrom και Allis (19). Έτσι

$$\lim_{n^2\to\infty} \tan^2\theta = \lim \left[-\frac{P(n^2-R)(n^2-L)}{(Sn^2-RL)(n^2-P)}\right] = -\frac{P}{S}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta\Big|_{\text{συντονισμό}} = -\frac{P}{S} \tag{35}$$

Η σχέση αυτή δίνει τη γωνία για την οποία συμβαίνει συντονισμός. Ειδικά τώρα, για $\theta = 0$ συντονισμός συμβαίνει όταν $S \to \pm\infty$, δηλαδή όταν $R \to \pm\infty \Rightarrow$ για $\omega = \Omega_e$ ή για $L \to \pm\infty \Rightarrow \omega = \Omega_i$. Αντίστοιχα για $\theta = \pi/2$ έχουμε συντονισμό όταν $S = 0$ (Σημειωτέον ότι κατά αυτό συντονισμό $n^2 < 0$). Οι συντονισμοί για $\theta = 0, \pi/2$ καλούνται κύριοι. Η εξίσωση (35) δίνει επίσης κύριο συντονισμό για $\theta = 0$ και $P = 0$ ταυτόχρονα. Όμως τότε όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης για το n^2 (A, B, C) γίνονται μηδενικοί οπότε η πραγματική (διαφορετική του $\pm\infty$) τιμή του n^2 εξαρτάται από τον τρόπο που θ και P τείνουν στο μηδέν. Συντονισμοί θα υπάρχουν στο διάγραμμα στο όριο (κυρίως με $\iota\kappa$ και $\theta \to 0°$) αλλά μόνο για αυστηρά καθορισμένο τρόπο προσέγγισης των διαφόρων αυτών ορίων. Μπορεί ακόμη να υπάρχουν και δρόμοι που οδηγούν $n^2 = 0$ (αποκοπή).

Πλάσμα δύο συνιστωσών (ηλεκτρόνια και ιόντα)

$$R = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega}\frac{1}{\omega - \Omega_e} - \frac{\omega_i^2}{\omega}\frac{1}{\omega + \Omega_i}$$

$$= 1 - \frac{\omega_e^2(\omega+\Omega_i) + \omega_i^2(\omega - \Omega_e)}{\omega(\omega-\Omega_e)(\omega+\Omega_i)} = 1 - \frac{\omega_e^2+\omega_i^2}{(\omega-\Omega_e)(\omega+\Omega_i)} - \cancel{\frac{\omega_e^2\Omega_i - \omega_i^2\Omega_e}{\omega(\omega-\Omega_e)(\omega+\Omega_i)}} \to 0$$

(διότι: $q_e n_e = q_i n_i$)

Άρα:

$$R = 1 - \frac{\omega^2\alpha}{(\omega-\Omega_e)(\omega+\Omega_i)} \qquad (36)$$

και (παρόμοια)

$$L = 1 - \frac{\omega^2\alpha}{(\omega+\Omega_e)(\omega-\Omega_i)} \qquad (37)$$

με $\alpha \equiv \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} \equiv \dfrac{\omega_e^2+\omega_i^2}{\omega^2}$ (38)

Τέλος, $P = 1 - \alpha$ (40)

Για $\theta = 0$, έχουμε:

από την $P = 0 \Rightarrow \omega^2 \simeq \omega_e^2$ (41)

αν αγνοήσουμε όρους ανάλογους του λόγου $\frac{m_e}{m_1} \equiv \frac{1}{\mu}$ $\left(\simeq \frac{1}{1862}\right)$

Επίσης για τους κυκλικά πολωμένους ρυθμούς ($n^2 = R$, $n^2 = L$) έχουμε πάλι προσεγγιστικά (αγνοώντας όρους ανάλογους του $1/\mu$):

$$\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 \mp \omega\Omega_e - \Omega_e\Omega_i - \omega_e^2}{(\omega \pm \Omega_i)(\omega \mp \Omega_e)} \qquad (42)$$

όπου το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί στον δεξιόστροφο, ενώ το κάτω στον αριστερόστροφο ρυθμό. Από την (42) έχουμε συντονισμό για τον δεξιόστροφο ρυθμό για $\omega = \Omega_e$ και για τον αριστερόστροφο για $\omega = \Omega_i$. Αυτοί οι συντονισμοί καλούνται ηλεκτρονικός και ιοντικός κυκλοτρονικός συντονισμός αντίστοιχα. Οι συχνότητες αποκοπής προκύπτουν από την:

$$\omega^2 \mp \omega\Omega_e - \Omega_e\Omega_i - \omega_e^2 = 0$$

$$\omega = \frac{\pm\Omega_e + \sqrt{\Omega_e^2 + 4(\omega_e^2 + \Omega_e\Omega_i)}}{2} \quad (\text{για } \omega > 0) \qquad (43)$$

Για $\theta = \pi/2$ έχουμε (από την (21))

$$k_x^2 c^2 \simeq \omega^2 - \omega_e^2 \qquad (44)$$

αγνοώντας όρους ανάλογους του $1/\mu$. Επίσης από την $n^2 = RL/S$ έχουμε

$$\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{(\omega^2 - \omega_{LH}^2)(\omega^2 - \omega_{UH}^2)} \qquad (45)$$

όπου

$$\omega_{LH}^{-2} \equiv \frac{1}{\omega_i^2 + \Omega_i^2} + \frac{1}{\Omega_i\Omega_e}, \quad \omega_{UH}^2 \equiv \Omega_e^2 + \omega_e^2 \qquad (46)$$

ενώ

$$\omega_{R,L}: \quad \omega_R^2 - \omega\Omega_e - \Omega_e\Omega_i - \omega_e^2 = 0$$

$$\omega_L^2 + \omega\Omega_e - \Omega_e\Omega_i - \omega_e^2 = 0 \qquad (47)$$

Οι συχνότητες ω_{LH} και ω_{UH} αποτελούν τους συντονισμούς για διάδοση εγκάρσια στο μαγνητικό πεδίο, ενώ οι ω_R και ω_L (λύσεις της (47)) των δίνονται για $\omega>0$ από την (43)).

Υδρομαγνητικά κύματα των Alfven και Astrom

Εικόνα: Η ροή της μάζας αιχμαλωτίζει το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική τάση που αναπτύσσεται από την παραμόρφωση αυτή (το σύστημα των γραμμών-χορδών) τείνει να αποκαταστήσει το πεδίο και έτσι δημιουργούνται ταλαντώσεις.

Περιοχή συχνοτήτων: $|\omega| \ll \Omega_i$

Όταν $|\omega| \ll \Omega_i$ τότε από τις (36) και (37) παίρνουμε

$$R \simeq L \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{\Omega_i\Omega_e} \equiv 1+\gamma \quad \text{με} \quad \gamma \equiv \frac{\omega_p^2}{\Omega_i\Omega_e} = \frac{\omega_e^2+\omega_i^2}{\Omega_i\Omega_e} \qquad (48)$$

και έτσι

$$S \simeq 1+\gamma, \quad D = 0 \qquad (49)$$

Δεδομένου ότι στις περισσότερες εφαρμογές $\omega_e^2 \gg \Omega_i$ (εκτός και μήπως για πολύ αραιές καταστάσεις) θα έχουμε

$$P = 1-\alpha \simeq -\alpha \qquad (50).$$

Έστω τώρα ότι κοιτάζουμε για διάδοση αυστηρά παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο (όχι όμως [illegible]). Τότε από τις (17) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
A &\simeq -\alpha\cos^2\vartheta \\
B &\simeq -\alpha(1+\gamma)(1+\cos^2\vartheta) \\
C &\simeq -\alpha(1+\gamma)^2
\end{aligned}
\qquad (51)
$$

Εύκολα διαπιστώνει ότι οι δύο ηλεκτρομαγνητικοί ρυθμοί από τη σχέση διασποράς είναι τελικά:

$$
n^2 = \begin{cases} 1+\gamma \\ \dfrac{1+\gamma}{\cos^2\vartheta} \end{cases} \qquad (52)
$$

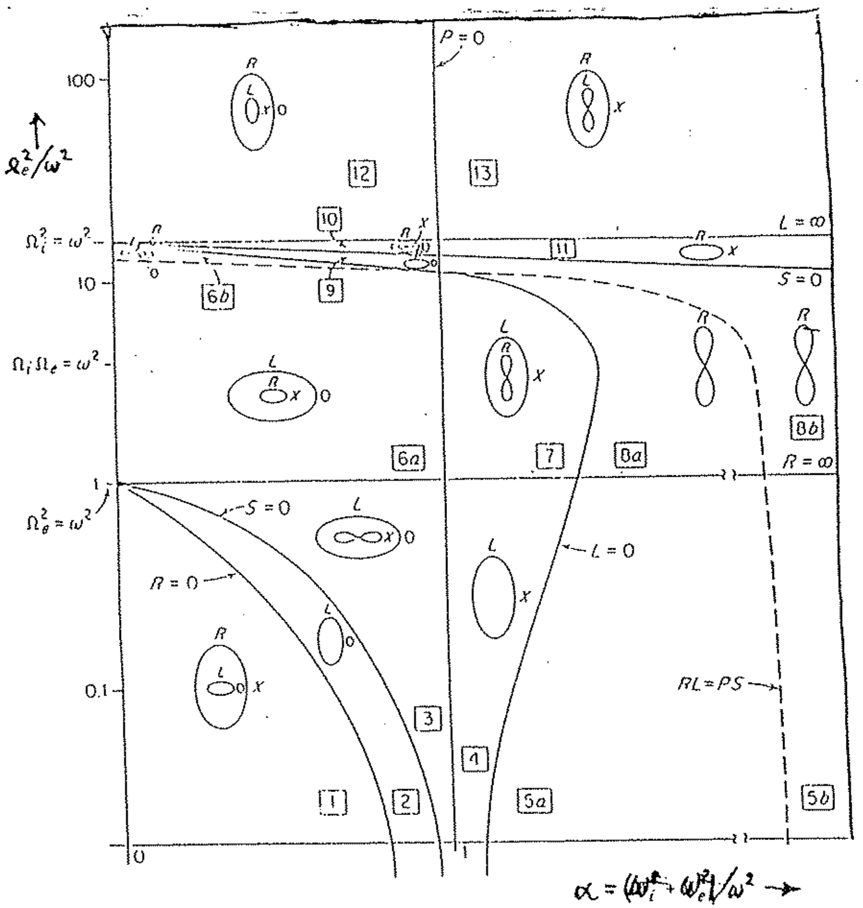
ή,

$$
\frac{k^2c^2\cos^2\vartheta}{1+\gamma} = \omega^2 \quad (\text{για } \vartheta_2 < 0^\circ) \qquad (53)
$$

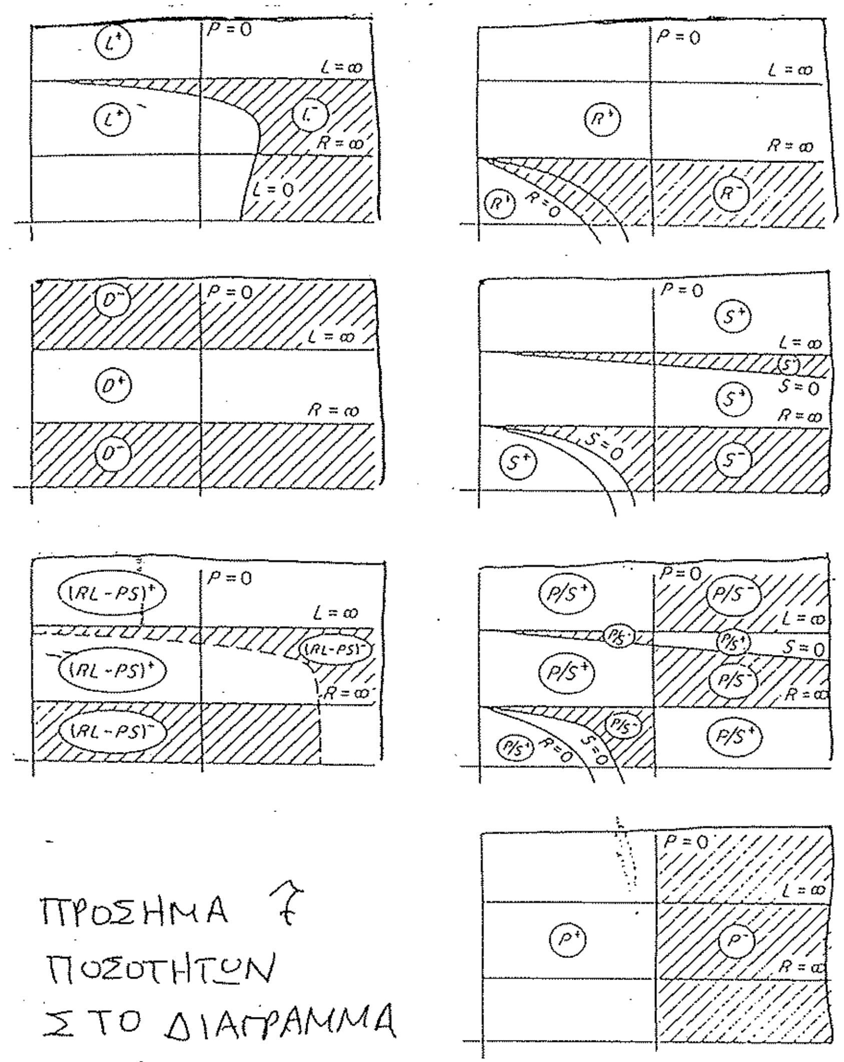
Η φασική ταχύτητα του ρυθμού αυτού $\omega/(k\cos\vartheta) = \omega/k_\parallel$ είναι τότε:

$$
U_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1+\gamma}} \equiv V_A : \text{ταχύτητα Alfven} \qquad (54)
$$

Ο ρυθμός $n^2 = 1+\gamma$ καλείται κανονικός Alfven ρυθμός, ενώ ο $n^2\cos^2\vartheta = 1+\gamma$ καλείται υπερκανονικός Alfven-ρυθμός.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ CMA



ΠΡΟΣΗΜΑ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΣΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ CMA