

**Παράδειγμα 1:** Στο εσωτερικό (διηλεκτρικής σταθεράς και μαγνητικής διαπερατότητας αυτών του κενού,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ) του απείρου μήκους και ακτίνας  $a$  κυλινδρικού σωλήνα του σχήματος υπάρχει ελεύθερο ηλεκτρικό φορτίο χώρου καθώς και ρεύμα χώρου τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$\rho_u = \rho_0 \cos(kz - \omega t), \quad \mathbf{J}_u = \hat{\mathbf{z}} J_0 \cos(kz - \omega t)$$

όπου  $J_0$  και  $\omega > 0$  είναι δεδομένες σταθερές, ενώ τα  $k > 0$  και  $\rho_0$ , θα προσδιορισθεί στη συνέχεια. Επιφανειακά ρεύματα και φορτία στην επιφάνεια του κυλίνδρου δεν υπάρχουν. Ο εξωτερικός χώρος είναι κενός υλικού και ελεύθερος φορτίων και ρευμάτων. Να προσδιορισθεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο, η ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας (Poynting) παντού καθώς και οι τιμές των  $\rho_0$  και  $k$ . Να προσδιορισθεί επίσης η τάση (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, ορθή και διατμητική) που μπορεί να ασκείται στην επιφάνεια του σωλήνα.

Ο νόμος διατήρησης του φορτίου μας δίνει:

$$kJ_0 = \omega\rho_0$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο παίρνουμε:

$$E_r = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r \cos(kz - \omega t), & 0 \leq r \leq \alpha^- \\ \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{\alpha^2}{r} \cos(kz - \omega t), & \alpha^+ \leq r \end{cases}$$

Εφαρμογή του ολοκληρωτικού νόμου του Ampere μας δείνει:

$$H_\phi = \begin{cases} \frac{J_0}{2} r \cos(kz - \omega t), & 0 \leq r \leq \alpha^- \\ \frac{J_0}{2} \frac{\alpha^2}{r} \cos(kz - \omega t), & \alpha^+ \leq r \end{cases}$$

Ο νόμος του Gauss για την μαγνητική επαγωγή ( $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ) επαληθεύεται με τη μοναδική αυτή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Πρέπει να ελεγχθεί τώρα ο νόμος του Faraday (καταλήγει σε μία μόνο εξίσωση:

$$-\mu_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{E})_\phi = \frac{\partial E_r}{\partial z} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} k r \sin(z - \omega t) = \mu_0 \omega \frac{J_0}{2} r \sin(kz - \omega t), & 0 \leq r \leq \alpha^- \\ \frac{\rho_0 k}{2\epsilon_0} \frac{\alpha^2}{r} \sin(z - \omega t) = \mu_0 \omega \frac{J_0}{2} \frac{\alpha^2}{r} \sin(kz - \omega t), & \alpha^+ \leq r \end{cases}$$

που ικανοποιείται εάν:

$$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} k = \mu_0 \omega J_0$$

Έτσι έχουμε (για θετικό  $k$ ):

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \rho_0 = \frac{J_0}{c}$$

Εύκολα φαίνεται ότι στην επιφάνεια  $r = a$  δεν ασκούνται δυνάμεις και δεν υφίστανται ρεύματα ή φορτία. Το Poynting επίσης είναι:

$$\mathbf{N} = \hat{\mathbf{z}} E_r H_\phi = \begin{cases} \frac{J_0^2}{4\epsilon_0 c} r^2 \cos^2\left(\frac{\omega}{c} z - \omega t\right), & 0 \leq r \leq \alpha^- \\ \frac{J_0^2}{4\epsilon_0} \frac{\alpha^4}{r^2} \cos^2\left(\frac{\omega}{c} z - \omega t\right), & \alpha^+ \leq r \end{cases}$$

**Παράδειγμα 2:** Φορτισμένο σωματίο φορτίου  $q$  και μάζας  $m$  κινείται με στιγμιαία ταχύτητα  $\mathbf{v}$  υπό την επίδραση ομογενούς στατικού ηλεκτρικού και ομογενούς στατικού μαγνητικού πεδίου των οποίων τα αντίστοιχα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Ναδειχθεί ότι μέρος της συνιστώσας της ταχύτητάς του εγκάρσια στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα αυτά είναι σταθερή και ίση με  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ , δηλαδή το

σωμάτιο, κατά την κίνησή του υπό την επιδραση αυτών των πεδίων, ολισθαίνει ταυτόχρονα με ταχύτητα σταθερή και ανεξάρτητη της μάζας και του φορτίου του.

Χωρίζουμε διανυσματικά την ταχύτητα σε δύο συνιστώσες εκ των οποίων η μια είναι η δοσμένη προς απόδειξη ολίσθηση, δηλαδή:

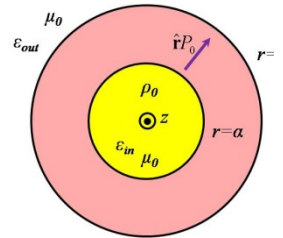
$$\mathbf{v} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 + \mathbf{u}$$

Η δύναμη Lorentz καταλήγει τελικά:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Δηλαδή, το σωματίο μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση λόγω μαγνητικής δύναμης που εμπλέκει μόνο την συνιστώσα  $\mathbf{u}$ .

**Παράδειγμα 3:** Το κέλυφος πάχους  $\delta$  που περιβάλλει τον κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας  $a$  είναι μόνιμα πολωμένο ακτινικά με πόλωση που δίνεται από τη σχέση  $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{r}}P_0$ . Στο εσωτερικό του σωλήνα υπάρχει ελεύθερο ηλεκτρικό φορτίο χώρου πυκνότητας  $\rho_0$ . Ο εσωτερικός ( $r < a$ ) και ο εξωτερικός ( $r > a + \delta$ ) του σωλήνα χώρος καταλαμβάνονται από υλικά με διηλεκτρικές σταθερές  $\epsilon_{in}$  και  $\epsilon_{out}$  αντίστοιχα. Να προσδιορισθούν τα πεδία παντού.



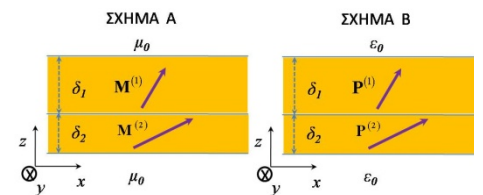
Απλή εφαρμογή του νόμου του Gauss δίνει για τις 3 περιοχές (in, ηλεκτρήτης, out):

$$D_r = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2} r, & 0 \leq r \leq a^- \\ \frac{\rho_0}{2} \frac{a^2}{r}, & a^+ \leq r \end{cases}$$

και

$$E_r = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\epsilon_{in}} r, & 0 \leq r \leq a^- \\ \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{r} - \frac{P_0}{\epsilon_0}, & a^+ \leq r \leq a + \delta^- \\ \frac{\rho_0}{2\epsilon_{out}} \frac{a^2}{r}, & a + \delta^+ \leq r \end{cases}$$

**Παράδειγμα 4:** Οι απέραντες πλάκες του σχηματος A (1 και 2) είναι σε επαφή και είναι μόνιμοι μαγνήτες με μαγνητίσεις  $\mathbf{M}^{(1,2)} = \hat{\mathbf{z}}M_z^{(1,2)} + \hat{\mathbf{x}}M_x^{(1,2)}$ . Στο σχήμα B οι πλάκες (1 και 2) είναι ηλεκτρήτες σε επαφή με μόνιμες πολώσεις  $\mathbf{P}^{(1,2)} = \hat{\mathbf{z}}P_z^{(1,2)} + \hat{\mathbf{x}}P_x^{(1,2)}$ . Να προσδιορισθούν τα πεδία και στις δύο περιπτώσεις



Από την εφαρμογή των σχέσεων για τις 3 διαχωριστικές επιφάνειες (το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό εκτός των πλακών) παίρνουμε:

$$\text{εκτός } B_x = B_z = 0, H_x = H_z = 0,$$

$$\text{πλάκες } B_x^{(1,2)} = \mu_0 M_x^{(1,2)}, B_z^{(1,2)} = 0, H_x^{(1,2)} = 0, H_z^{(1,2)} = -M_z^{(1,2)}$$

Για την περίπτωση των ηλεκτρητών θα έχουμε: (το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό εκτός των πλακών) παίρνουμε:

$$\text{εκτός } D_x = D_z = 0, E_x = E_z = 0,$$

$$\text{πλάκες } D_x^{(1,2)} = P_x^{(1,2)}, D_z^{(1,2)} = 0, E_x^{(1,2)} = 0, E_z^{(1,2)} = -P_z^{(1,2)} / \epsilon_0$$