Υπολογισμός δυνάμεων και ροπών σε πηνία και πυκνωτές
με τη χρήση της ενεργειακής μεθόδου

Διατήρηση ΗΜ ενέργειας σε κλειστό και περιορισμένο σύστημα με δυνατότητα χωρικών και γωνιακών μετατοπίσεων *($\{\xi_n\}$, $\{\varphi_n\}$* αντίστοιχα) στα μέρη των κυκλωματικών του στοιχείων :

$$\frac{dW_{em}(V)}{dt} + \oiint_{S(V)} \vec{\mathbf{N}}.\hat{\mathbf{n}}\, dS = -P_{\mu\eta\chi} = -\sum_n F_n \frac{d\xi_n}{dt} - \sum_n T_n \frac{d\vartheta_n}{dt}$$

Ηλεκτροστατική

$$\oiint_{S(V)} \vec{\mathbf{N}}.\hat{\mathbf{n}}\, dS = -\oiint_{S(V)} \left(\nabla\phi_e \times \vec{\mathbf{H}}\right).\hat{\mathbf{n}}\, dS = \oiint_{S(V)} \phi_e \left(\nabla \times \vec{\mathbf{H}}\right).\hat{\mathbf{n}}\, dS - \oiint_{S(V)} \hat{\mathbf{n}}.\nabla \times \left(\phi_e \vec{\mathbf{H}}\right) dS$$

$$= \oiint_{S(V)} \phi_e \vec{\mathbf{J}}_u.\hat{\mathbf{n}}\, dS = \sum_n \phi_{e,n} I_{in,n} = -\sum_n \phi_{e,n} \frac{dQ_n}{dt}$$

Άρα:

$$dW_e = -\sum_n F_n d\xi_n - \sum_n T_n d\vartheta_n + \sum_n \phi_{e,n} dQ_n$$

Μαγνητοστατική

$$\oiint_{S(V)} \vec{\mathbf{N}}.\hat{\mathbf{n}}\, dS = \oiint_{S(V)} \left(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}\right).\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{0}} \ (\varepsilon\kappa\tau o\varsigma\ \rho\varepsilon\upsilon\mu\alpha\tau o\varphi o\rho\omega\nu\ \kappa\lambda\alpha\delta\omega\nu) \Rightarrow \vec{\mathbf{H}} = -\nabla\phi_M$$

$$\oiint_{S(V)} \vec{\mathbf{N}}.\hat{\mathbf{n}}\, dS = \oiint_{S(V)} \left(\nabla\phi_M \times \vec{\mathbf{E}}\right).\hat{\mathbf{n}}\, dS = -\oiint_{S(V)} \phi_M \left(\nabla \times \vec{\mathbf{E}}\right).\hat{\mathbf{n}}\, dS + \oiint_{S(V)} \hat{\mathbf{n}}.\nabla \times \left(\phi_M \vec{\mathbf{E}}\right) dS$$

$$= \oiint_{S(V)} \phi_M \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}.\hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Όμως:

$$\oint_{C(dS)} \vec{\mathbf{H}}.d\vec{\mathbf{l}} = I_{in}(dS) = -\oint_{C(dS)} \nabla\phi_M.d\vec{\mathbf{l}} = \phi_{M0} - \phi_M(dS) \Rightarrow \phi_M(dS) = \phi_{M0} - I_{in}(dS)$$

Τελικά λοιπόν:

$$\oiint_{S(V)} \vec{\mathbf{N}}.\hat{\mathbf{n}}\, dS = \oiint_{S(V)} \phi_M \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}.\hat{\mathbf{n}}\, dS = -\oiint_{S(V)} I_{in} \frac{\partial (d\psi_M)}{\partial t} = -\sum_n I_n^{in} \frac{d\psi_{Mn}}{dt}$$

οπότε:

$$dW_m = -\sum_n F_n d\xi_n - \sum_n T_n d\vartheta_n + \sum_n I_n^{in} d\psi_{Mn}$$

Αν λοιπόν:

$$W_e = W_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, Q_n\right\}\right)$$

τότε για ένα ηλεκτρικό υποσύστημα πυκνωτών με απομονωμένους οπλισμούς (σταθερό φορτίο) υπό ηλεκτροστατική θεώρηση, έχουμε:

$$F_n = -\frac{\partial W_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, Q_n\right\}\right)}{\partial \xi_n}, T_n = -\frac{\partial W_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, Q_n\right\}\right)}{\partial \vartheta_n}, \phi_{e,n} = \frac{\partial W_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, Q_n\right\}\right)}{\partial Q_n}$$

Γιά ένα ηλεκτρικό υποσύστημα πυκνωτών με οπλισμούς σε σταθερό δυναμικό, μπορούμε να ορίσουμε την ηλεκτρική συν-ενέργεια, αλλάζοντας την συναρτησιακή εξάρτηση:

$$W'_e = W'_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \phi_{e,n}\right\}\right) \equiv \sum_n \phi_{e,n} Q_n - W_e$$

οπότε

$$F_n = \frac{\partial W'_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \phi_{e,n}\right\}\right)}{\partial \xi_n}, T_n = \frac{\partial W'_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \phi_{e,n}\right\}\right)}{\partial \vartheta_n}, Q_n = \frac{\partial W'_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \phi_{e,n}\right\}\right)}{\partial \phi_{e,n}}$$

Επίσης, για ένα μαγνητικό υποσύστημα πηνίων με σταθερές μαγνητικές ροές αν θέσουμε:

$$W_m = W_m\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \psi_{Mn}\right\}\right)$$

παίρνουμε:

$$F_n = -\frac{\partial W_m\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \psi_{Mn}\right\}\right)}{\partial \xi_n}, \ T_n = -\frac{\partial W_m\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \psi_{Mn}\right\}\right)}{\partial \vartheta_n}, I_n^{in} = \frac{\partial W_m\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \psi_{Mn}\right\}\right)}{\partial \psi_{Mn}}$$

ενώ για μαγνητικό υποσύστημα πηνίων με σταθερή τροφοδοσία μπορούμε, αλλαζοντας την συναρτησιακή εξέρτηση, να ορίσουμε τη συνάρτηση της μαγνητικής συν-ενέργειας:

$$W'_m\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, I_n^{in}\right\}\right) \equiv \sum_v I_n^{in} \psi_{Mn} - W_m$$

τότε:

$$F_n = \frac{\partial W'_m\left(\left\{\xi_n, \varphi_n, I_n^{in}\right\}\right)}{\partial \xi_n}, T_n = \frac{\partial W'_m\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, I_n^{in}\right\}\right)}{\partial \vartheta_n}, \psi_{Mn} = \frac{\partial W'_m\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, I_n^{in}\right\}\right)}{\partial I_n^{in}}$$

Για γραμμικά κυκλώματα φυσικά:

$$W'_e\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, \phi_{e,n}\right\}\right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \hat{C}_{ij}\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n\right\}\right) \phi_{e,i} \phi_{e,j} = W_e$$

$$W'_m\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n, I_{in,n}\right\}\right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij}\left(\left\{\xi_n, \vartheta_n\right\}\right) I_i^{in} I_j^{in} = W_m$$

δηλαδή υπάρχει ποσοτική και μόνο (όχι συναρτησιακή) ταύτιση μεταξύ των ενεργειών και των συν-ενεργειών.