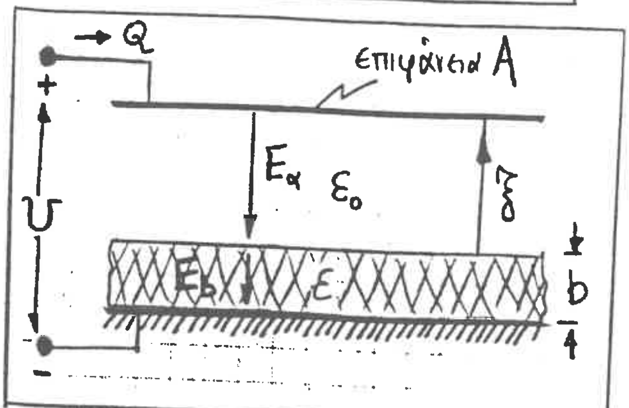
ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΟ (ΜΑΓΝΗΤΟ) ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

(1) Δύναμη σε οπλισμό πυκνωτή



Ζητείται η δύναμη που ασκείται στο επάνω ηλεκτρόδιο (το κάτω είναι σταθερό) όταν εφαρμοσθεί τάση U. Το διηλεκτρικό μεταξύ των ηλεκτροδίων αποτελείται από το κενό μ... σε ύψος (ξ) και το υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε. Έχουμε:

$$\boxed{U = \int_{+}^{-} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \xi E_a + b E_b} \qquad (a)$$

Ο νόμος του Gauss για την επιφάνεια του υλικού (συνέχεια των εγκαρσίων συνιστωσών της διηλεκτρικής μετατόπισης) δίνει:

$$\boxed{\varepsilon_0 E_\alpha = \varepsilon E_b} \qquad (\beta)$$

οπότε ο συνδυασμός (α) και (β) δίνει τελικά:

$$\boxed{E_\alpha = \frac{U}{\xi + b\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}} \qquad (\gamma)$$

Το φορτίο του πάνω ηλεκτροδίου είναι:

$$\boxed{Q = D_a A = \varepsilon_0 E_\alpha A = \frac{\varepsilon_0 U A}{\xi + b\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}} \qquad (\delta)$$

οπότε η χωρητικότητα $C = Q/U$ του συστήματος είναι:

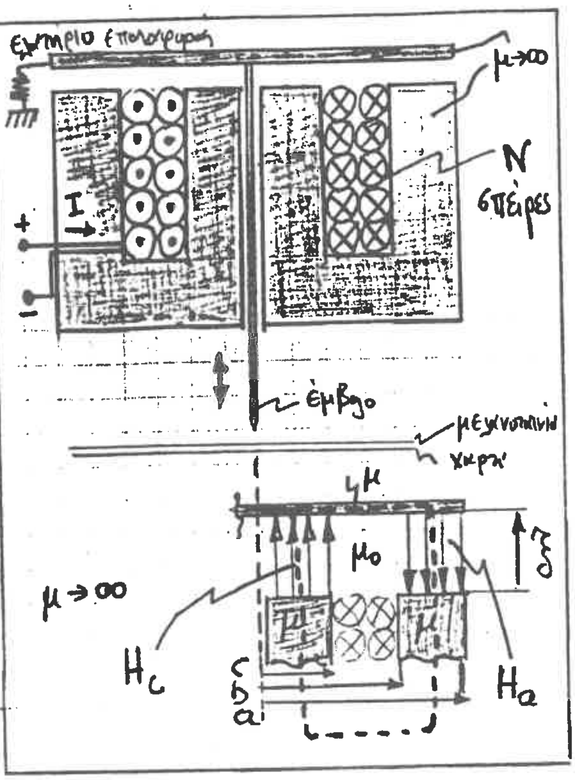
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{\xi + b\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}} \qquad (\varepsilon)$$

Εφαρμογή της (187) δίνει:

$$\boxed{\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\ f &= -\frac{dW_e}{d\xi} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{d\xi} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\varepsilon_0 A}{\left(\xi + b\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2} \end{aligned}} \qquad (\sigma\tau)$$

Εξ ορισμού, η f είναι θετική όταν δρα κατά την κατεύθυνση αύξησης του ξ. Εδώ η (στ) δίνει ότι η f είναι αρνητική, πράγμα αναμενόμενο λόγω έλξης των ηλεκτροδίων μεταξύ τους.

(2) Μαγνητικό έμβολο - οδηγός ακίδων σε εκτυπωτή ακίδων



Το έμβολο είναι πολύ λεπτό και είναι προσδεδεμένο σε δίσκο από υλικό πολύ υψηλής μαγνητικής διαπερατότητας. Ο δίσκος αφήνει ένα πολύ μικρό διάκενο από τον οδηγό του εμβόλου, κατασκευασμένο από το ίδιο υλικό. Σε ειδική κυλινδρική θήκη σκαμμένη στο υλικό του οδηγού είναι εγκατεστημένο πηνίο N σπειρών το οποίο φέρει ρεύμα I. Η μαγνητικό πεδίο οδηγείται τελείως από το υλικό του δίσκου και του οδηγού διότι $\mu \to \infty$: η μαγνητική δυναμική ροή όπου γίνεται στο διάκενο [illegible] στο διάκενο και μέσα στο υλικό όπου λόγω της υψηλής [illegible] μαγνητική ροή (B) το πεδίο H είναι μηδενικό (ή αμελητέο, [illegible] σε σχέση με την τιμή του στο διάκενο. Εφαρμογή του νόμου του Ampere όπως στο σχήμα (κλειστός δρόμος που περικλείει το συνολικό ρεύμα) δίνει:

$$\boxed{H_a \xi + H_c \xi = NI} \qquad (\alpha)$$

Επειδή όλες οι μαγνητικές γραμμές οδηγούν από το διάκενο στο υλικό και πάλι στο διάκενο ($\mu \to \infty$) η ροή στις θέσεις του H_a και H_c είναι η ίδια, δηλαδή:

$$\boxed{\Psi_m = \mu_0 H_a \pi (a^2 - b^2) = \mu_0 H_c \pi c^2} \qquad (\beta)$$

Η ροή αυτή συζεύγνυται με κάθε σπείρα του πηνίου. Επομένως, η συνολική ροή που συζεύγνυται με το πηνίο είναι $N\Psi_m$, ή με χρήση των (α) και (β):

$$\boxed{N\psi_m = \frac{\mu_0 N^2 \pi c^2}{\xi\left(1+\frac{c^2}{a^2-b^2}\right)} I \equiv LI} \quad (\gamma)$$

όπου L ο συντελεστής αυτεπαγωγής $L \equiv \psi_{m\,\text{πεπλεγμένη}}/I \equiv \psi_{m\,\text{ολική}}/I$ ("πεπλεγμένη" αναφέρεται στο άθροισμα $N\psi_m$). Η μαγνητική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο σύστημα είναι:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2} \quad (\delta)$$

ενώ, η συνενέργεια:

$$\boxed{W_m' = LI^2 - W_m = \frac{1}{2}LI^2} \quad (\varepsilon)$$

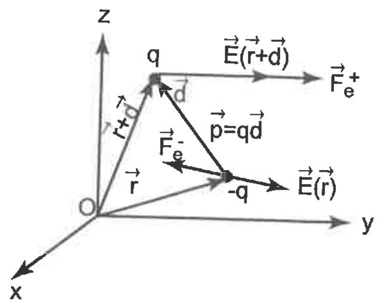
Εφαρμογή της (19β) μας δίνει τη δύναμη f:

$$f = \frac{1}{2}I^2\frac{dL}{d\xi} = -\frac{1}{2}I^2\frac{\mu_0 N^2 \pi c^2}{\xi^2\left(1+\frac{c^2}{a^2-b^2}\right)} \quad (\sigma\tau)$$

Η δύναμη τείνει να μειώσει το ξ. Άρα είναι ελκτική ανεξάρτητα από τη φορά του I. Το ελατήριο επαναφοράς επιστρέφει το δίσκο στη θέση ισορροπίας του όταν το I μηδενίζεται.

9. Δυνάμεις στα διηλεκτρικά υλικά

Θεωρούμε ένα δίπολο ροπής $\vec{p}$, το οποίο βρίσκεται μέσα σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο που δεν είναι, γενικά, ομοιόμορφο (Σχ.1). Έστω $\vec{E}(\vec{r})$ και $\vec{E}(\vec{r}+\vec{d})$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση του αρνητικού και στη θέση του θετικού φορτίου του διπόλου, αντίστοιχα. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτά τα φορτία είναι $\vec{F}_e^- = -q\vec{E}(\vec{r})$ και $\vec{F}_e^+ = q\vec{E}(\vec{r}+\vec{d})$. Η συνισταμένη δύναμη είναι



Σχήμα 1

$$\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^- = q\left[\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - \vec{E}(\vec{r})\right] =$$

$$= q\left[\vec{E}(\vec{r}) + dx\frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial x} + dy\frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial y} + dz\frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial z} - \vec{E}(\vec{r})\right] =$$

$$= (q\vec{d}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}) \qquad (1)$$

Στην (1) χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα Taylor για το $\vec{E}(\vec{r}+\vec{d})$, στο οποίο διατηρήθηκαν όροι μέχρι πρώτης τάξης, διότι το $\vec{d}$ του διπόλου είναι πολύ μικρό $(\vec{d} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz)$. Από την (1) είναι προφανές ότι αν το πεδίο είναι ομοιόμορφο, δηλαδή αν $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E} =$ σταθερό, τότε $\vec{F}_e = 0$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει εύκολα από την αρχή, διότι σ' αυτή την περίπτωση είναι $\vec{F}_e^- = -q\vec{E}$, $\vec{F}^+ = q\vec{E}$ και $\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^- = 0$.

Αν υπάρχει κατανομή διπόλων σε κάποιο διηλεκτρικό, η στοιχειώδης ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο όγκου dV προκύπτει από την (1) και είναι $d\vec{F}_e = (d\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$ ή, με χρήση της (5.2), $d\vec{F}_e = (\vec{P}\cdot\nabla)\vec{E}dV$, όπου $\vec{P}$ είναι η πόλωση του διηλεκτρικού. Τότε, η χωρική πυκνότητα $\vec{f}_e = d\vec{F}_e / dV$ της ηλεκτρικής δύναμης είναι

$$\vec{f}_e = (\vec{P}\cdot\nabla)\vec{E} \tag{2}$$

Αν στο διηλεκτρικό υπάρχουν και ελεύθερα χωρικά φορτία με πυκνότητα ρ, η (2) γενικεύεται στη σχέση

$$\vec{f}_e = \rho\vec{E} + (\vec{P}\cdot\nabla)\vec{E} \tag{3}$$

Βέβαια στο διηλεκτρικό που περιέχει και ελεύθερα φορτία η χωρική πυκνότητα της ηλεκτρικής δύναμης δίνεται και από τις σχέσεις

$$\vec{f}_e = (\rho + \rho_p)\vec{E} = \varepsilon_o(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} = \rho\vec{E} - (\nabla\cdot\vec{P})\vec{E}, \tag{4}$$

όπου έγινε χρήση των (6.5). Η (4) διαφέρει από την (3) αλλά αποδεικνύεται ότι και οι δύο, αν ολοκληρωθούν σε όλο τον όγκο του διηλεκτρικού, δίνουν την ίδια συνολική δύναμη που ασκείται σ' αυτό.

$+ : \cancel{\hat{x}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{h}\right)^2\right]} - \hat{x}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{h}\right)^2\right)$

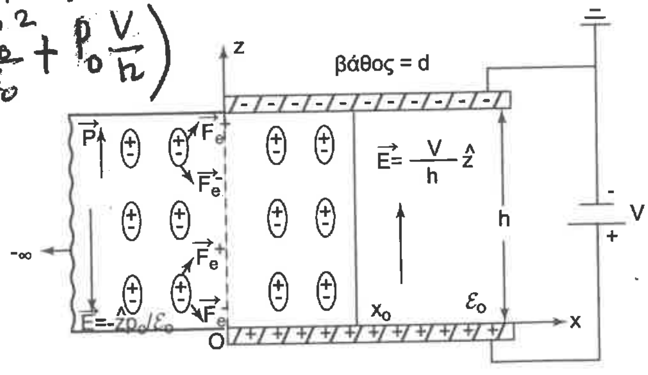
$- : \cancel{\hat{x}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{h}\right)^2\right]} + \hat{x}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{V}{h}\right)^2\right) + \hat{x}P_0\frac{V}{h} + \hat{x}P_0^2/\varepsilon_0$

9.1 Παραδείγματα

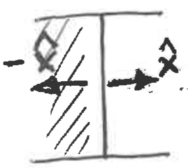
Παράδειγμα 1

Ο πυκνωτής παράλληλων, επίπεδων, αγώγιμων πλακών του Σχ.2 συνδέεται με πηγή συνεχούς τάσης V και περιέχει, αρχικά, αέρα σαν διηλεκτρικό. Η απόσταση h μεταξύ των πλακών του είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις τους

Σύνολο: $\hat{x}\left(\frac{P_0^2}{\varepsilon_0} + P_0\frac{V}{h}\right)$



Σχήμα 2



$\vec{E}_+ = \hat{z}\frac{V}{h}$

$\vec{D}_+ = \varepsilon_0\hat{z}\frac{V}{h}$

$\vec{E}_- = \hat{z}\frac{V}{h}$

$\vec{D}_- = \varepsilon_0\hat{z}\frac{V}{h} + \hat{z}P_0$

και το βάθος είναι d. Μεταξύ των πλακών του πυκνωτή εισάγεται μία πλάκα από ηλεκτρήτη, επίσης πάχους h και βάθους d, μέχρι τη θέση $x=x_o$. Έξω από τον πυκνωτή, στην κατεύθυνση x, ο ηλεκτρήτης εκτείνεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, θεωρητικά έως $x \to -\infty$. Αν η πόλωση του είναι σταθερή $\vec{P} = P_o \hat{z}$, να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται σ' αυτόν.

Λύση:

Το πεδίο μεταξύ των πλακών του πυκνωτή (στον αέρα) είναι ομοιόμορφο, κατά τα γνωστά, και ισούται με

$$\vec{E} = \frac{V}{h}\hat{z} \tag{5}$$

Το πεδίο μέσα στην πλάκα του ηλεκτρήτη, σε μεγάλη απόσταση από τον πυκνωτή, είναι σύμφωνα με το παράδειγμα 6.6.1α επίσης ομοιόμορφο και ίσο με

$$\vec{E} = -\frac{P_o}{\varepsilon_o}\hat{z} \qquad (x \to -\infty) \tag{6}$$

Κανένα από τα δύο αυτά ομοιόμορφα πεδία δεν συνεισφέρει στη ζητούμενη δύναμη, σύμφωνα με τη (2), διότι οι κλίσεις τους είναι μηδενικές.

Η δύναμη προκύπτει από το ανομοιόμορφο πεδίο κοντά στα άκρα των πλακών του πυκνωτή, το οποίο συνήθως θεωρείται αμελητέο, αλλά εδώ είναι αυτό ακριβώς που θα μας δώσει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Λόγω της ανομοιομορφίας του πεδίου, ασκείται μεγαλύτερη δύναμη στα άκρα των διπόλων που βρίσκονται πιο κοντά σε μία από τις πλάκες του πυκνωτή, απ' ότι στα άλλα άκρα. Η συνολική δύναμη σε κάθε δίπολο είναι $\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^-$, όπως φαίνεται στο Σχ.2, με αποτέλεσμα να προκύπτει τελικά μία συνισταμένη δύναμη προς την κατεύθυνση x. Αυτή τη δύναμη θα υπολογίσουμε. Με μια πρώτη ματιά το πρόβλημα φαίνεται πολύ δύσκολο, διότι δεν είναι γνωστό το πεδίο που την προκαλεί. Όμως, επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο, ισχύει ότι

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{7}$$

και επομένως η x-συνιστώσα της χωρικής πυκνότητας της ηλεκτρικής δύναμης είναι, σύμφωνα με τις (2) και (7),

$$f_{ex} = P_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = P_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(P_z E_z) - E_z \cancelto{0}{\frac{\partial P_z}{\partial x}} \tag{8}$$

Ο τελευταίος όρος στην (8) είναι μηδενικός, διότι P_z=P_o=σταθερό. Η συνολική δύναμη είναι

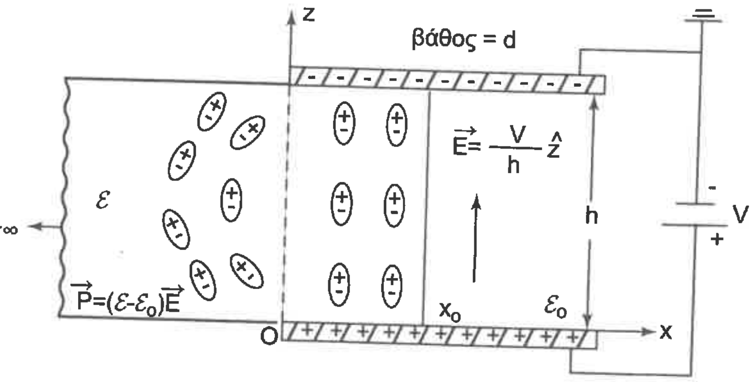
$$F_{ex} = \int_V f_{ex} dV = \int_{x=-\infty}^{x_o}\int_{y=0}^{d}\int_{z=0}^{h} \frac{\partial}{\partial x}(P_z E_z)\,dxdydz = \int_{y=0}^{d}\int_{z=0}^{h}\left[P_z E_z\right]_{x=-\infty}^{x_o} dydz =$$

$$= hd\left[P_o \frac{V}{h} + \frac{P_o^2}{\varepsilon_o}\right] = P_o V d + \frac{P_o^2 hd}{\varepsilon_o}, \qquad (9)$$

διότι στις θέσεις x=x_o και x= $-\infty$ οι ολοκληρώσεις ως προς y και z είναι απλοί πολλαπλασιασμοί ως προς d και h, αντίστοιχα, εφόσον τα P_z και E_z εκεί είναι ανεξάρτητα από τα y και z. Στην (9) χρησιμοποιήθηκαν οι (5) και (6). Από την (9) φαίνεται ότι υπάρχει μη μηδενική δύναμη ακόμη και αν αποσυνδεθεί η πηγή τάσης (V=0). Η δύναμη αυτή ωθεί τον ηλεκτρήτη μεταξύ των πλακών του πυκνωτή, λόγω του πεδίου που δημιουργούν τα επιφανειακά φορτία των πλακών, τα οποία επάγονται εξαιτίας του ηλεκτρήτη. Η φορά της δύναμης δεν αλλάζει ακόμη κι αν $\vec{P} = -P_o\hat{z}$ (εξαρτάται από το P_o^2). Η προηγούμενη δύναμη αυξάνεται αν το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή και η πόλωση είναι ομόρροπα, όπως στο Σχ.2 [εξ. (9)], και ελαττώνεται αν είναι αντίρροπα. Μάλιστα, στην τελευταία περίπτωση η φορά της αντιστρέφεται και ωθεί τον ηλεκτρήτη έξω από τον πυκνωτή, αν V>$P_o h/\varepsilon_o$.

Παράδειγμα 2

Να επαναληφθεί το προηγούμενο παράδειγμα, αν μεταξύ των πλακών του πυκνωτή εισάγεται μία πλάκα από ένα συνηθισμένο διηλεκτρικό υλικό σταθερής επιτρεπτότητας ε, αντί της πλάκας του ηλεκτρήτη (Σχ.3).



Σχήμα 3

__*Λύση:*__

Το πεδίο μεταξύ των πλακών του πυκνωτή δίνεται πάλι από την (5). Τώρα η πόλωση στη διηλεκτρική πλάκα δεν είναι σταθερή, αλλά είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, στην οποία οφείλεται και της οποίας έχει τη διεύθυνση και φορά. Έτσι, στην περιοχή του ανομοιόμορφου πεδίου, κοντά στα άκρα των πλακών του πυκνωτή, η πόλωση θα έχει *x*– και *z*– συνιστώσες. Η δύναμη που ασκείται σε κάθε δίπολο είναι $\vec{F}_e = \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^-$, όπως και στο Σχ.2. Τα δίπολα τείνουν να προσανατολιστούν προς την κατεύθυνση του $\vec{E}$, με τα θετικά τους άκρα να έλκονται από τα φορτία της αρνητικής πλάκας και τα αρνητικά τους άκρα από τα φορτία της θετικής πλάκας. Επειδή τα πλέον απομακρυσμένα άκρα τους βρίσκονται σε ελαφρά ασθενέστερο πεδίο, υπάρχει τελικά μία συνισταμένη δύναμη προς την κατεύθυνση *x*, η οποία ωθεί το διηλεκτρικό προς το εσωτερικό του πυκνωτή. Η *x*–συνιστώσα της χωρικής πυκνότητας της ηλεκτρικής δύναμης προκύπτει από τη (2) και είναι

$$f_{ex} = P_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + P_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \qquad (10)$$

Αντικαθιστώντας στη (10) από την (7) βρίσκουμε ότι

$$f_{ex} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_o)\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x^2 + E_z^2\right) \qquad (11)$$

Η συνολική δύναμη είναι

$$F_{ex} = \int_V f_{ex} dV = \int_{x=-\infty}^{x_o} \int_{y=0}^{d} \int_{z=0}^{h} \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_o)\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x^2 + E_z^2\right) dx dy dz =$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_o) h d \left[E_x^2 + E_z^2\right]_{x=-\infty}^{x_o} =$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_o) h d \frac{V^2}{h^2} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_o)\frac{V^2 d}{h} \qquad (12)$$

Στη (12) χρησιμοποιήθηκε η (5) καθώς και το γεγονός ότι σε πολύ μεγάλη απόσταση από τον πυκνωτή ($x \to -\infty$) είναι $\vec{E} = 0$. Η δύναμη είναι τώρα ανεξάρτητη από την πολικότητα της τάσης (ανάλογη του V^2) και πάντοτε ωθεί το διηλεκτρικό προς το εσωτερικό του πυκνωτή ($\varepsilon > \varepsilon_o$).

10. *Δυνάμεις στα μαγνητικά υλικά*

Θα υπολογίσουμε αρχικά τη μαγνητική δύναμη η οποία εξασκείται σε ένα μαγνητικό δίπολο ροπής $\vec{m}$ τοποθετημένο σε ανομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Θεωρούμε το μαγνητικό δίπολο του Σχ.3.1, με σχήμα ορθογωνικού βρόχου. Οι δυνάμεις που εξασκούνται σε κάθε πλευρά του βρόχου είναι

$$\Delta\vec{F}_1 = -I\Delta x\left(B_{y_1}\hat{z} - B_{z_1}\hat{y}\right), \quad \Delta\vec{F}_2 = I\Delta x\left(B_{y_2}\hat{z} - B_{z_2}\hat{y}\right),$$
$$\Delta\vec{F}_3 = I\Delta y\left(-B_{x_3}\hat{z} + B_{z_3}\hat{x}\right), \quad \Delta\vec{F}_4 = -I\Delta y\left(-B_{x_4}\hat{z} + B_{z_4}\hat{x}\right) \tag{1}$$

και η συνισταμένη δύναμη δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα

$$\Delta\vec{F} = \Delta\vec{F}_1 + \Delta\vec{F}_2 + \Delta\vec{F}_3 + \Delta\vec{F}_4 = I\Delta x\Delta y\left[-\frac{B_{y_1} - B_{y_2}}{\Delta y}\hat{z} + \frac{B_{z_1} - B_{z_2}}{\Delta y}\hat{y} - \frac{B_{x_3} - B_{x_4}}{\Delta x}\hat{z} + \right.$$
$$\left. + \frac{B_{z_3} - B_{z_4}}{\Delta x}\hat{x}\right] \tag{2}$$

Στο όριο καθώς $\Delta x, \Delta y \to 0$, οι όροι μεταξύ των αγκυλών ορίζουν μερικές παραγώγους, ενώ το γινόμενο $I\Delta x\Delta y$ εκφράζει τη μαγνητική διπολική ροπή $\vec{m} = m_z\hat{z} = I\Delta x\Delta y\hat{z}$. Έτσι, η (2) δίνει τη μαγνητική δύναμη $\vec{F}_m$, η οποία εξασκείται στο μαγνητικό δίπολο του Σχ.3.1 και είναι

$$\vec{F}_m = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \Delta\vec{F} = m_z\left[\frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{y} - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right)\hat{z}\right] \tag{3}$$

Εφαρμογή των νόμων Gauss και Ampere για το μαγνητικό πεδίο δίνει τις σχέσεις

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{4}$$

και

$$\nabla\times\vec{B} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Η (3) με χρήση των (4) και (5) γράφεται

$$\vec{F}_m = m_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z} \right) = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \qquad (6)$$

Στην (5) θεωρήσαμε ότι το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ υπάρχει στο κενό, όπου $\vec{J} = 0$.

Αν έχουμε κατανομή διπόλων σε κάποιο μαγνητικό υλικό, η στοιχειώδης μαγνητική δύναμη, η οποία εξασκείται στο στοιχείο όγκου dV, προκύπτει από την (6) και είναι $d\vec{F}_m = (d\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}$ ή, με χρήση της (7.2), $d\vec{F}_m = (\vec{M} \cdot \nabla)\vec{B}\,dV$, όπου $\vec{M}$ είναι η μαγνήτιση του υλικού. Στην περίπτωση αυτή η χωρική πυκνότητα της μαγνητικής δύναμης είναι

$$\vec{F}_m = \frac{d\vec{F}_m}{dV} = (\vec{M} \cdot \nabla)\vec{B} \qquad (7)$$

Από τις (6) και (7) είναι προφανές ότι αν το $\vec{B}$ είναι ομοιόμορφο η μαγνητική δύναμη είναι μηδενική. Από την (7) και τις (8.18) και (8.19) προκύπτει ότι στα διαμαγνητικά υλικά το $\vec{M}$ είναι αντίρροπο του $\vec{B}$, ενώ σ' όλα τα υπόλοιπα υλικά είναι ομόρροπο του $\vec{B}$. Γι' αυτό το λόγο η μαγνητική δύναμη στα πρώτα έχει φορά τέτοια ώστε να τα απωθεί από την περιοχή του ισχυρού μαγνητικού πεδίου, ενώ στα δεύτερα η φορά της είναι τέτοια, ώστε να τα έλκει προς την περιοχή του ισχυρού μαγνητικού πεδίου.

Οι εκφράσεις (6) και (7) προκύπτουν αμέσως από τις (9.1) και (9.2) του Κεφ.9, αν θεωρήσουμε ότι το μαγνητικό δίπολο σχηματίζεται από δύο αντίθετα σημειακά μαγνητικά φορτία σε μικρή απόσταση μεταξύ τους, όπως στο Σχ.8.16, και χρησιμοποιήσουμε τις αναλογίες $\vec{p} \leftrightarrow \mu_o \vec{m}$, $\vec{P} \leftrightarrow \mu_o \vec{M}$ και $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$.

Αν υπάρχει και ροή ρευμάτων ελεύθερων φορτίων με πυκνότητα $\vec{J}$, τα δεξιά μέλη των τριών εξισώσεων (5) είναι $\mu_o J_x$, $\mu_o J_y$ και $\mu_o J_z$, αντίστοιχα, και η (6) γενικεύεται στην

$$\vec{F}_m = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B} + \mu_o \vec{m} \times \vec{J} \qquad (8)$$

Επίσης, η (7) γενικεύεται στην

$$\vec{F}_m = (\vec{M} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{J} \times \vec{B} \qquad (9)$$

Η συνολική δύναμη είναι το ολοκλήρωμα της (9) σ' όλο τον όγκο V του υλικού. Στις (7) και (9) $\vec{B}$ είναι η μαγνητική επαγωγή που προέρχεται απ' όλες τις πηγές εκτός του υλικού. Το υλικό θεωρούμε ότι περιβάλλεται από το κενό, δηλαδή για το αντίστοιχο $\vec{H}$ ισχύει ότι $\vec{H} = \vec{B} / \mu_o$.

Παράδειγμα 1

Μία πλάκα από μόνιμο μαγνήτη πάχους h και βάθους d εισάγεται, μέχρι τη θέση $x{=}x_o$, στο διάκενο αέρα ενός μαγνητικού κυκλώματος με ομοιόμορφο πεδίο $\vec{H} = H_o\hat{z}$ (Σχ.1). Το h υποτίθεται πολύ μικρότερο από τις υπόλοιπες διαστάσεις. Έξω από το διάκενο, στην κατεύθυνση $-x$, ο μαγνήτης εκτείνεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, θεωρητικά έως $x \to -\infty$. Αν η μαγνήτιση του είναι σταθερή, $\vec{M} = M_o\hat{z}$, να υπολογιστεί η δύναμη που εξασκείται σ' αυτόν.

Λύση:

Η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού του μαγνητικού κυκλώματος είναι πολύ μεγάλη και θεωρείται πρακτικά άπειρη. Επομένως, η ένταση του μαγνητικού πεδίου σ' αυτό θεωρείται μηδενική.

Το πεδίο μέσα στην πλάκα του μόνιμου μαγνήτη, σε μεγάλη απόσταση από το διάκενο, είναι σύμφωνα με το παράδειγμα 8.2.1α

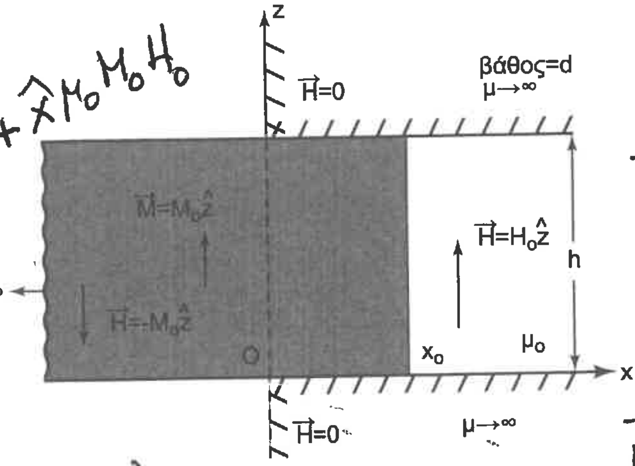
$$\vec{H} = -M_o\hat{z} \quad (x \to -\infty), \tag{10}$$

δηλαδή επίσης ομοιόμορφο. Τα δύο ομοιόμορφα πεδία δεν συνεισφέρουν στη ζητούμενη δύναμη, σύμφωνα με την (7), διότι οι κλίσεις τους είναι μηδενικές. Η δύναμη προκύπτει από το ανομοιόμορφο πεδίο κοντά στα άκρα του διακέ-

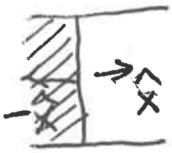
⊕ $-\hat{x}\frac{\mu_0 H_0^2}{2}$

⊖ $+\hat{x}\frac{\mu_0 H_0^2}{2} + \hat{x}\mu_0 M_0 H_0$

$+\hat{x}\mu_0 M_0^2$



Σχήμα 1



$\vec{H}_+ = \hat{z}H_0$

$\vec{B}_+ = \mu_0\hat{z}H_0$

$\vec{H}_- = \hat{z}H_0$

$\vec{B}_- = \mu_0\hat{z}H_0 + \mu_0\hat{z}M_0$

Σύνολο:

$\hat{x}\left(\mu_0 M_0^2 + \mu_0 M_0 H_0\right)$

νου, σε αναλογία με την ερμηνεία που δόθηκε στο παράδειγμα 9.1.1 του Κεφ.9 για την ηλεκτρική δύναμη που προκαλείται από το ομοιόμορφο πεδίο στα άκρα των πλακών ενός πυκνωτή. Υποτίθεται ότι εδώ χρησιμοποιούμε το μοντέλο των μαγνητικών φορτίων. Η δύναμη έχει την κατεύθυνση x. Από την (7) βρίσκουμε ότι

$$f_{mx} = M_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \tag{11}$$

Επειδή είναι $\vec{J} = 0$, ισχύει ότι

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{12}$$

Όμως, είναι $B_x = \mu_o (H_x + M_x) = \mu_o H_x$, διότι $M_x = 0$. Επομένως προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_o \frac{\partial H_x}{\partial z} = \mu_o \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{13}$$

Αντικαθιστώντας από τη (13) στην (11) έχουμε ότι

$$f_{mx} = \mu_o M_z \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mu_o \frac{\partial}{\partial x}(M_z H_z) - \mu_o H_z \cancelto{0}{\frac{\partial M_z}{\partial x}}, \tag{14}$$

διότι $\partial M_z / \partial x = \partial M_o / \partial x = 0$.

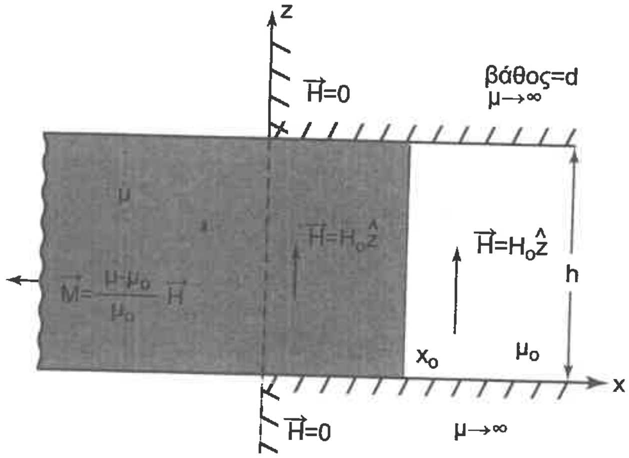
Η συνολική δύναμη είναι

$$\begin{aligned} F_{mx} &= \int_V f_{mx} dV = \int_{x=-\infty}^{x_o} \int_{y=0}^{d} \int_{z=0}^{h} \mu_o \frac{\partial}{\partial x}(M_z H_z) dx dy dz = \mu_o \left[M_z H_z \right]_{x=-\infty}^{x_o} hd = \\ &= \mu_o hd \left(M_o H_o + M_o^2 \right) \end{aligned} \tag{15}$$

Στη (15) χρησιμοποιήθηκε η (10), καθώς και η τιμή $\vec{H} = H_o \hat{z}$ της έντασης στο διάκενο του αέρα. Ακόμη κι αν H_o=0, είναι $F_{mx} \neq 0$. Η δύναμη αυτή ωθεί τον μόνιμο μαγνήτη στο εσωτερικό του διακένου. Επειδή εξαρτάται από το M_o^2, η φορά της δεν αλλάζει ακόμη κι αν είναι $\vec{M} = -M_o \hat{z}$. Η δύναμη μεγαλώνει αν το μαγνητικό πεδίο του διακένου είναι ομόρροπο με τη μαγνήτιση, όπως στο Σχ.1 [εξ. (15)], και μικραίνει αν είναι αντίρροπο. Στην τελευταία περίπτωση η φορά της αντιστρέφεται αν είναι $H_o > M_o$, και ωθεί τον μαγνήτη έξω απ' το διάκενο.

Παράδειγμα 2

Να επαναληφθεί το προηγούμενο παράδειγμα, αν στο διάκενο αέρα εισαχθεί μία πλάκα από συνηθισμένο μαγνητικό υλικό, με σταθερή διαπερατότητα μ (Σχ.2).



Σχήμα 2

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή η μαγνήτιση του υλικού δεν είναι σταθερή, αλλά είναι ανάλογη της έντασης του μαγνητικού πεδίου, με την οποία έχει την ίδια διεύθυνση και φορά. Επομένως, κοντά στο άκρο του διακένου, όπου το πεδίο είναι ανομοιόμορφο, η μαγνήτιση έχει x- και z-συνιστώσες. Η εικόνα είναι ανάλογη μ' αυτή του Σχ.9.3 στο παράδειγμα 9.2 του Κεφ.9, εφόσον χρησιμοποιηθεί το μοντέλο των μαγνητικών φορτίων. Ισχύουν αντίστοιχες παρατηρήσεις όπως και σ' εκείνο το παράδειγμα. Έτσι, η μαγνητική δύναμη έχει την κατεύθυνση x και ωθεί το μαγνητικό υλικό στο εσωτερικό του διακένου. Από την (7) προκύπτει ότι

$$f_{mx} = M_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + M_z \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_o M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + \mu_o M_z \frac{\partial H_x}{\partial z} =.$$

$$= \mu_o \frac{\mu - \mu_o}{\mu_o}\left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2}(\mu - \mu_o)\frac{\partial}{\partial x}\left(H_x^2 + H_z^2\right) \qquad (16)$$

Στη (16) χρησιμοποιήθηκαν οι (12) και (8.24), καθώς και το σχόλιο μετά την (9). Η συνολική δύναμη είναι

$$F_{mx} = \int_V f_{mx} dV = \frac{\mu - \mu_o}{2} \int_{x=-\infty}^{x_o} \int_{y=0}^{d} \int_{z=0}^{h} \frac{\partial}{\partial x}\left(H_x^2 + H_z^2\right) dx dy dz =$$

$$= \frac{\mu - \mu_o}{2} hd \left[H_x^2 + H_z^2\right]_{x=-\infty}^{x_o} = \frac{\mu - \mu_o}{2} hd H_o^2 \qquad (17)$$

Στη (17) χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι σε πολύ μεγάλη απόσταση από το διάκενο ($x \to -\infty$) είναι $\vec{H} = 0$. Η δύναμη είναι ανεξάρτητη από τη φορά του $\vec{H}$ στο διάκενο (ανάλογη του H_o^2) και ωθεί το μαγνητικό υλικό προς το εσωτερικό του διακένου αν είναι $\mu > \mu_o$ και προς το εξωτερικό του αν είναι $\mu < \mu_o$.