

Διηλεκτρικά Υλικά

Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Β (Τμήμα Μ-Π)

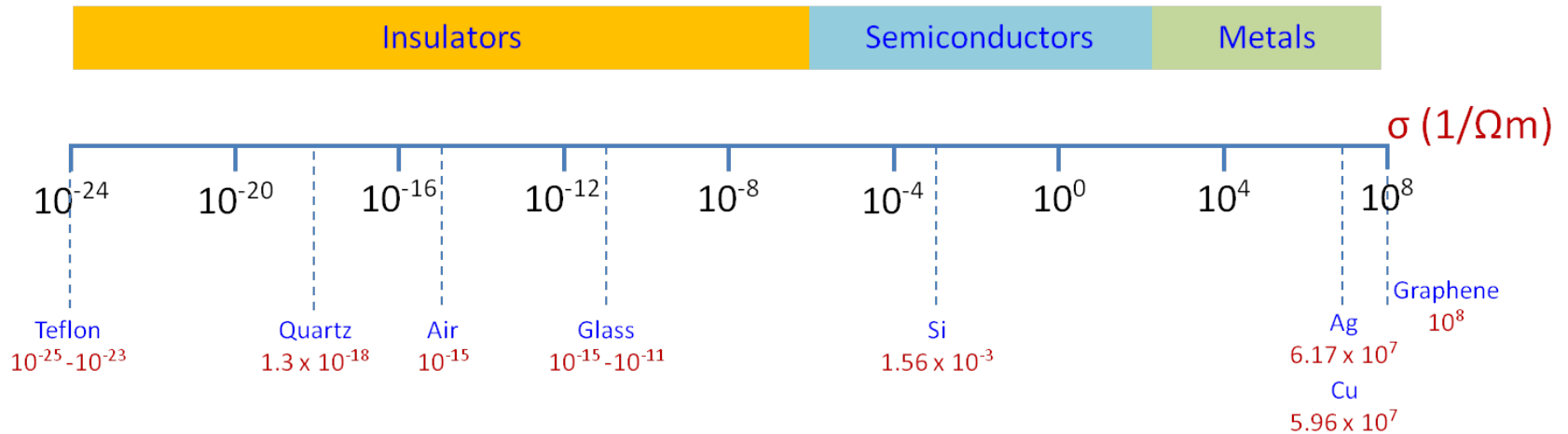
Καθ. Ηλίας Ν. Γλύτσης



*Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*

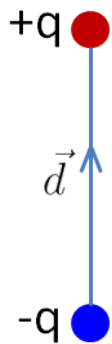
Διηλεκτρικά Υλικά

Ειδική Αγωγιμότητα (conductivity)



Τα διηλεκτρικά υλικά αποτελούνται από μόρια που συνίστανται από θετικά και αρνητικά φορτία (ιόντα, πυρήνες, ηλεκτρόνια). Εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο ασκεί δυνάμεις στα φορτία και δημιουργεί **ηλεκτρικά δίπολα**.

Ηλεκτρικό Δίπολο



Δύο ίσα και αντίθετα σημειακά φορτία σε απόσταση d σχηματίζουν ένα ηλεκτρικό δίπολο

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Ροπή Ηλεκτρικού Διπόλου \vec{p}

Διπολική Συμπεριφορά Διηλεκτρικών Υλικών

Ηλεκτρονική Πόλωση (electronic polarization): Το ηλεκτρονικό νέφος κάθε ατόμου μετακινείται σχετικά με τον πυρήνα λόγω της επίδρασης εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου

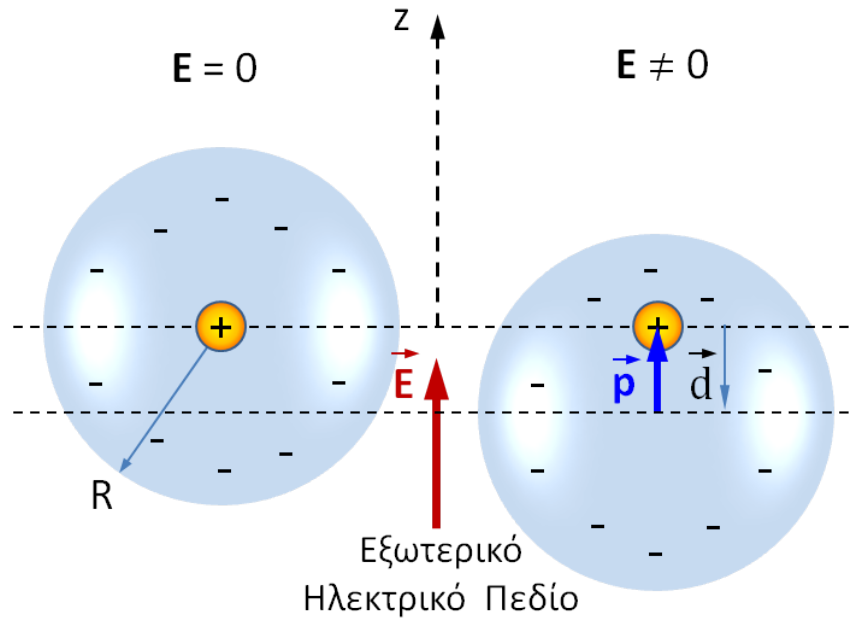
Ιοντική Πόλωση (ionic polarization): Τα μόρια αποτελούνται από ιόντα (ανιόντα και κατιόντα) τα οποία μετακινούνται λόγω της επίδρασης εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου

Πόλωση Προσανατολισμού (orientation polarization): Μερικά μόρια μπορεί να έχουν μόνιμη διπολική ροπή. Συνήθως αυτές οι διπολικές ροπές είναι τυχαία προσανατολισμένες. Υπό την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου προκαλείται μερικός προσανατολισμός των διπολικών ροπών

Διπολική Συμπεριφορά Διηλεκτρικών Υλικών

Ηλεκτρονική Πόλωση (electronic polarization)

Απλοποιημένο Ατομικό Μοντέλο



$$\vec{p}_e = \alpha_e \vec{E}$$

$$\alpha_e = \text{Ηλεκτρονική πολωσιμότητα (C m}^2\text{/V)}$$

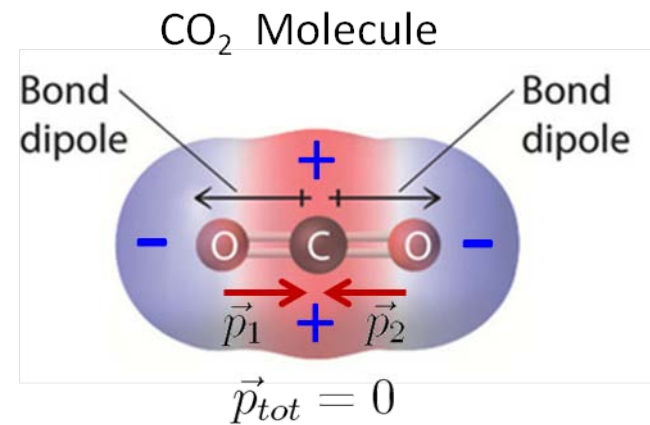
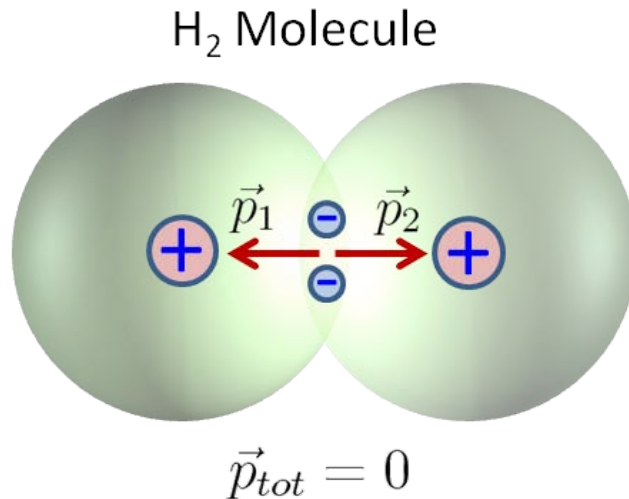
$$\alpha_e \simeq 4\pi\epsilon_0 R^3$$

Διπολική Συμπεριφορά Διηλεκτρικών Υλικών

Χημικοί Δεσμοί (chemical bonds)

- Ομοιοπολικός Δεσμός (covalent bond)
- Πολωμένος Ομοιοπολικός Δεσμός (polar covalent bond)
- Ιοντικός Δεσμός (ionic bond)

Ομοιοπολικοί Δεσμοί



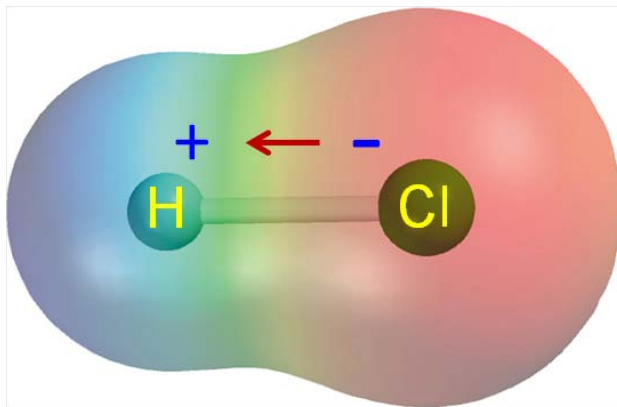
[https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_\(Physical_and_Theoretical_Chemistry\)/Physical_Properties_of_Matter/Atomic_and_Molecular_Properties/Dipole_Moments](https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Physical_Properties_of_Matter/Atomic_and_Molecular_Properties/Dipole_Moments)

Διπολική Συμπεριφορά Διηλεκτρικών Υλικών

Ιοντική Πόλωση (ionic polarization)

Πολωμένος Ομοιοπολικός Δεσμός
(polar covalent bond)

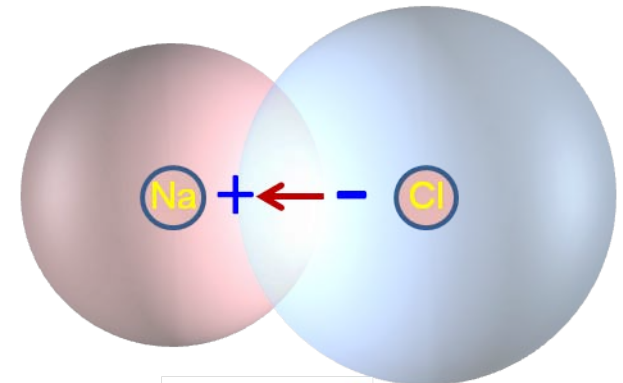
HCl Molecule



$$\vec{p}_{tot} \neq 0$$

Ιοντικός Δεσμός
(ionic bond)

NaCl Molecule

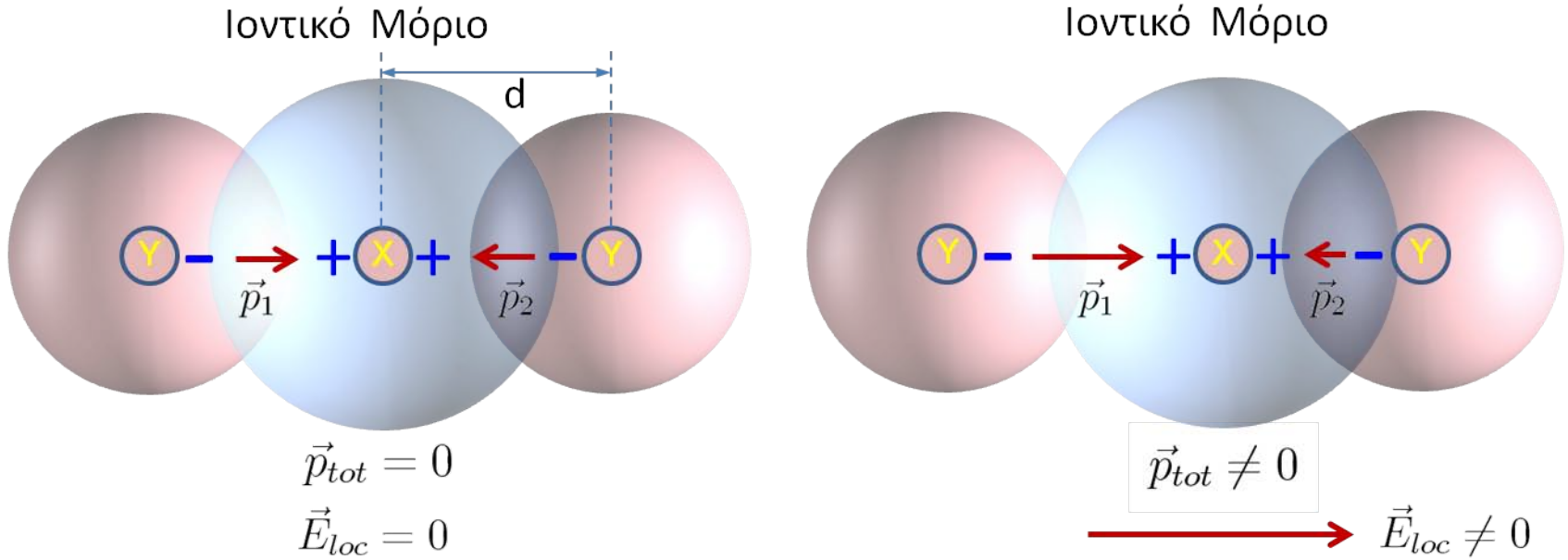


$$\vec{p}_{tot} \neq 0$$

https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fstatic-assets.imageservice.cloud%2F4629097%2Fc34-ions-and-ionic-bonds-igcse-aid.jpg&imgrefurl=http%3A%2F%2Funi.lotap.renstra.fr09.org%2Fion-diagram.html&tbnid=7KwGbc9bvTuZoM&vet=10CBUQxiAoBGoxChMlqKvvyI-v6wIVAAAAAB0AAAAEAY..i&docid=c_35Xb_dJawROM&w=256&h=355&itg=1&q=nacl%20ionic%20bond&ved=0CBUQxiAoBGoxChMlqKvvyI-v6wIVAAAAAB0AAAAEAY

Διπολική Συμπεριφορά Διηλεκτρικών Υλικών

Ιοντική Πόλωση (ionic polarization)



REPULSIVE EXPONENT n

Type of closed shell structure	Representative ions	n
He	Li ⁺ Be ²⁺	5
Ne	O ²⁻ F ⁻ Na ⁺ Mg ²⁺	7
A	S ²⁻ Cl ⁻ K ⁺ Ca ²⁺	9
Kr	Br ⁻	10
Xe	I ⁻	12

$$\vec{p}_i = \alpha_i \vec{\mathcal{E}}$$

$\alpha_i =$ Ιοντική πολωσιμότητα (C m²/V = F m²)

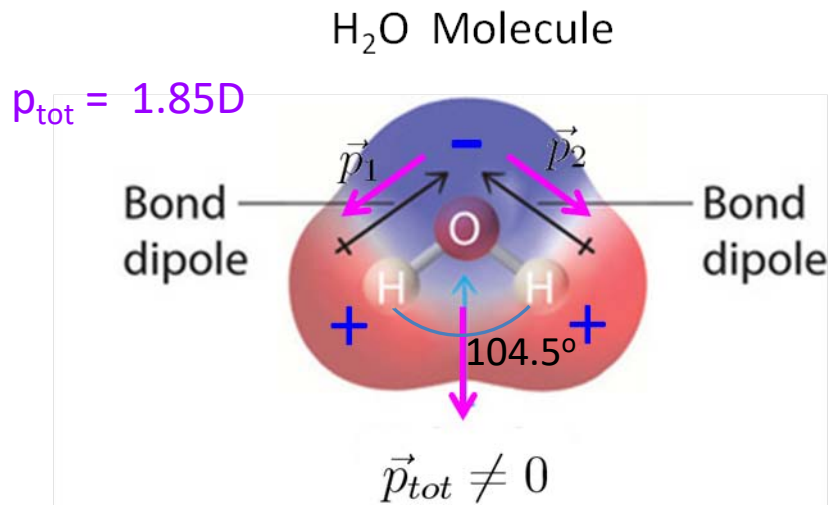
$$\alpha_i \approx \frac{64\epsilon_0 d^3}{7(n+1) - 16}, \quad d = \text{Απόσταση ιόντων}$$

R. S. Elliott, *Electromagnetics: History, Theory, and Applications*, IEEE Press 1993.

Διπολική Συμπεριφορά Διηλεκτρικών Υλικών

Πόλωση Προσανατολισμού (orientational polarization)

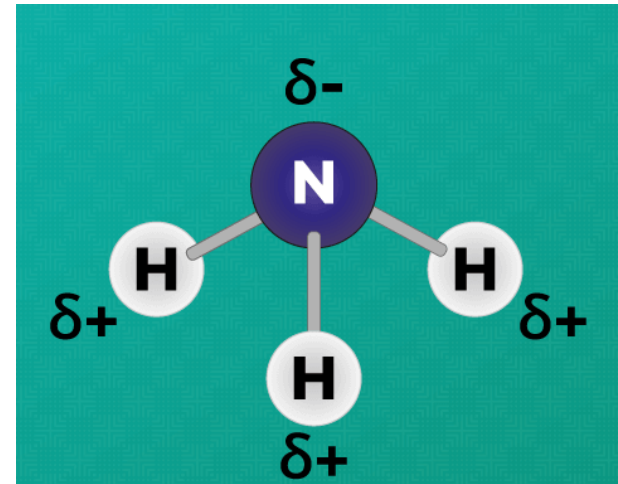
Πολικά Μόρια (polar molecules) = Υπάρχει μόνιμη διπολική ροπή χωρίς εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο



[https://cnem.uoregona.edu/booksneives/physical_and_theoretical_chemistry_textbook_Maps/Supplemental_Modules_\(Physical_and_Theoretical_Chemistry\)/Physical_Properties_of_Matter/Atomic_and_Molecular_Properties/Dipole_Moments](https://cnem.uoregona.edu/booksneives/physical_and_theoretical_chemistry_textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Physical_Properties_of_Matter/Atomic_and_Molecular_Properties/Dipole_Moments)

Συνήθης μονάδα διπολικής ροπής για μόρια
1 Debye = 1 D = 3.335641×10^{-30} Cm

NH₃ Molecule $\rho_{tot} = 1.46D$



<https://sciencenotes.org/polar-and-nonpolar-molecules/>

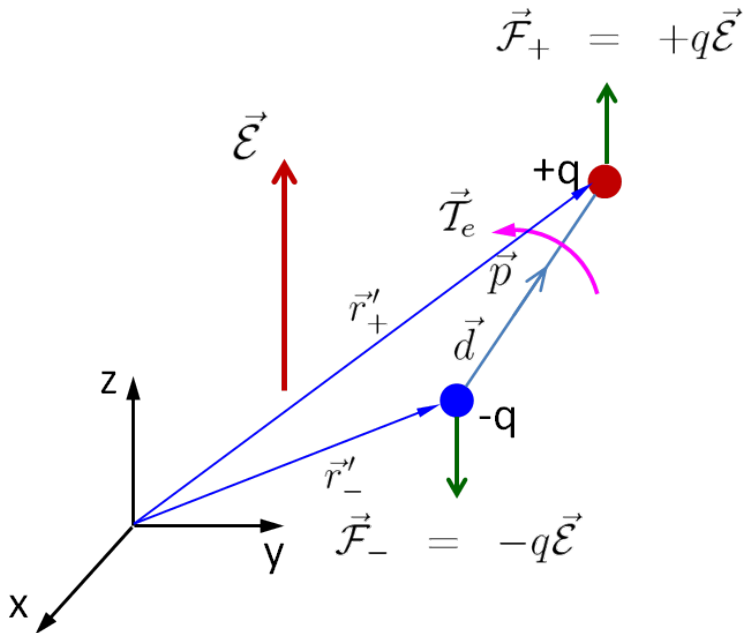
$$\vec{p}_{tot} \simeq 1.85D \implies |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = 0.812|\vec{p}_{tot}|$$

$$|\vec{d}| \simeq 96 \text{ pm} = 0.96 \text{ \AA}$$

$$q \simeq 0.40|e|$$

Διπολική Συμπεριφορά Διηλεκτρικών Υλικών

Πόλωση Προσανατολισμού (orientational polarization)



Τα **πολικά μόρια** υπό την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου τείνουν να προσανατολίσουν την διπολική τους ροπή προς την διεύθυνση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου.

$$\begin{aligned}\vec{T}_e &= \vec{r}'_+ \times \vec{F}_+ - \vec{r}'_- \times \vec{F}_- \\ &= \vec{d} \times \vec{F}_+ = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}\end{aligned}$$

$$[(\text{Cm})(\text{V/m}) = \text{CV} = \text{AsV} = \text{J} = \text{Nm}]$$

Ηλεκτροστατική ενέργεια δίπολου παρουσία ηλεκτρικού πεδίου

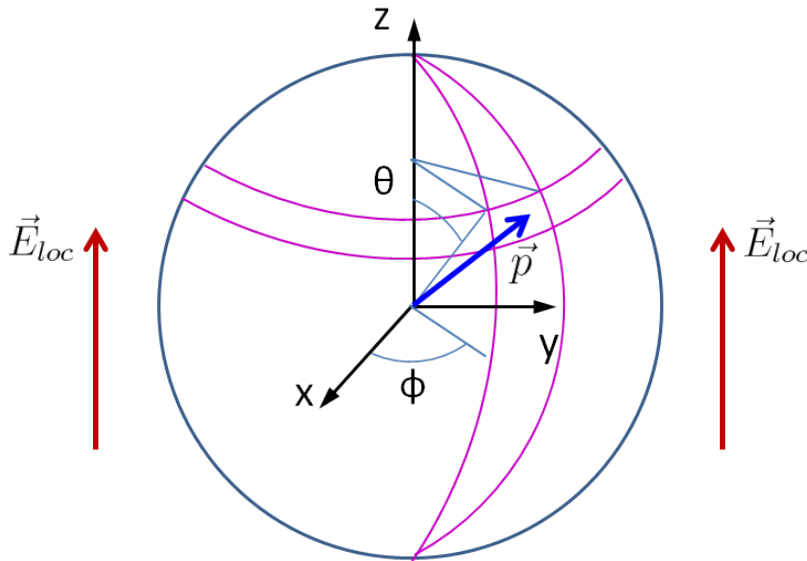
$$W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$$

$$\vec{p}_o = \alpha_o \vec{E}$$

$$\alpha_o = \text{πολωσιμότητα προσανατολισμού (C m}^2\text{/V)}$$

Πόλωση Προσανατολισμού

Ηλεκτροστατική ενέργεια δίπολου παρουσία ηλεκτρικού πεδίου



$$W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$$

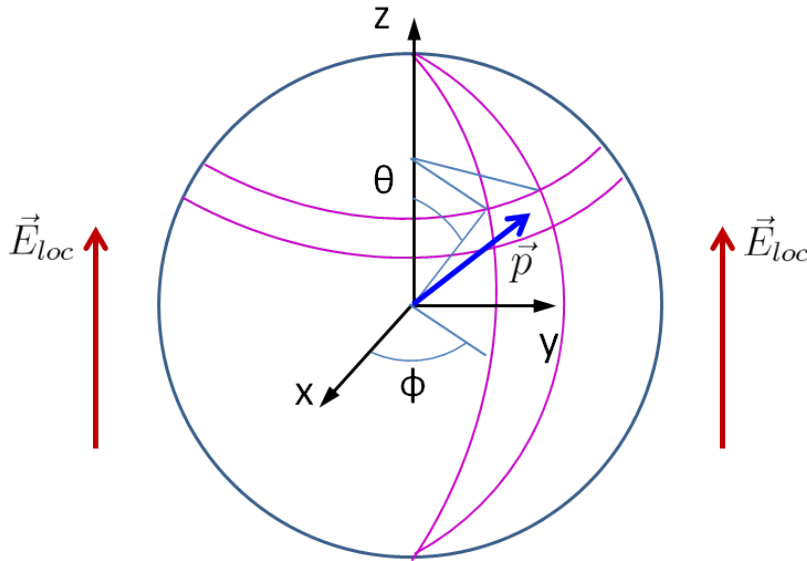
Έστω N_V ο αριθμός των μορίων ανά όγκο.

Η κατανομή $N(\theta, \phi)$ των διπολικών ροπών λόγω εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου ακολουθεί στατιστική Boltzmann: $\exp(-W_e/k_B T)$.

(k_B = σταθερά Boltzmann = $1.38064852 \times 10^{-23}$ J/K, και T η απόλυτη θερμοκρασία σε βαθμούς Κ.

$$N(\theta, \phi) d\Omega = K e^{-W_e(\theta, \phi)/k_B T} d\Omega$$
$$\int_{\Omega} N(\theta, \phi) d\Omega = N_V \implies \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} K e^{-W_e(\theta, \phi)/k_B T} \sin \theta d\theta d\phi = N_V \implies$$
$$K = N_V \frac{\beta}{4\pi \sinh(\beta)}, \quad \beta = \frac{pE}{k_B T}$$

Πόλωση Προσανατολισμού



$$\begin{aligned}
 p_o &= \frac{1}{N_V} \int_{\Omega} p \cos \theta N(\theta, \phi) d\Omega \\
 &= \frac{1}{N_V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p \cos \theta K e^{-W_e(\theta, \phi)/k_B T} \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= p \left[\coth(\beta) - \frac{1}{\beta} \right] = p \mathcal{L}(\beta), \quad \beta = \frac{pE}{k_B T}
 \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(\beta) =$ **συνάρτηση Langevin**

$$\mathcal{L}(\beta) \simeq \frac{\beta}{3} \quad \text{for } \beta \ll 1$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \{\mathcal{L}(\beta)\} = 1$$

$$p \sim \text{Debye} \sim 10^{-30} \text{ Cm}, \quad E \sim 10^7 \text{ V/m}$$

$$k_B(T = 300^\circ \text{K}) \sim 4.14 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\frac{pE}{k_B T} \sim 10^{-2} \ll 1$$

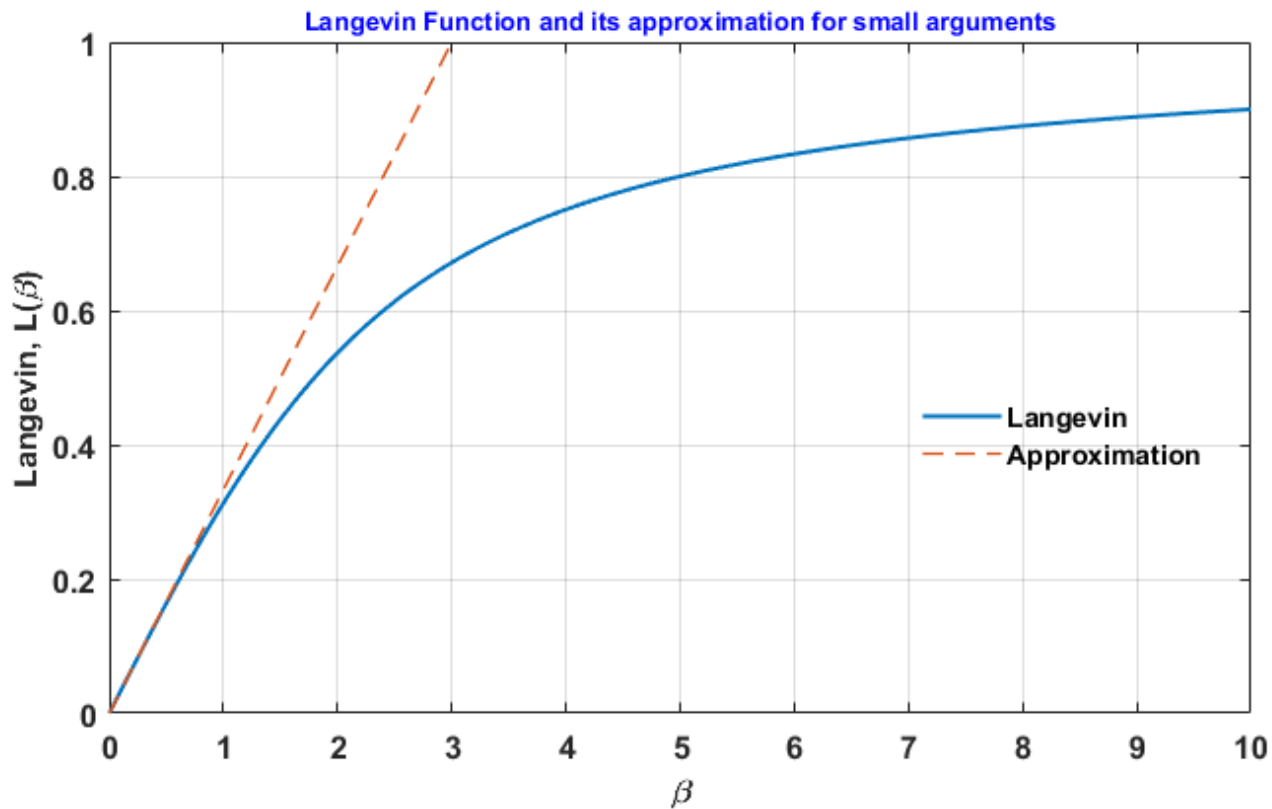
$$p_o \simeq p \frac{\beta}{3} = \frac{p^2 E}{3k_B T} \implies \alpha_o \simeq \frac{p^2}{3k_B T}$$

Πόλωση Προσανατολισμού

Συνάρτηση Langevin

$$\mathcal{L}(\beta) \simeq \frac{\beta}{3} \quad \text{for } \beta \ll 1$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \{\mathcal{L}(\beta)\} = 1$$



Διπολική Συμπεριφορά Διηλεκτρικών Υλικών

Η συνολική διπολική ροπή κάθε μορίου είναι το άθροισμα της ηλεκτρονικής, ιοντικής, και της προσανατολισμού συνεισφοράς.

$$\vec{p} = [\alpha_e + \alpha_i + \alpha_o] \vec{E}_{loc} = \alpha \vec{E}_{loc}$$

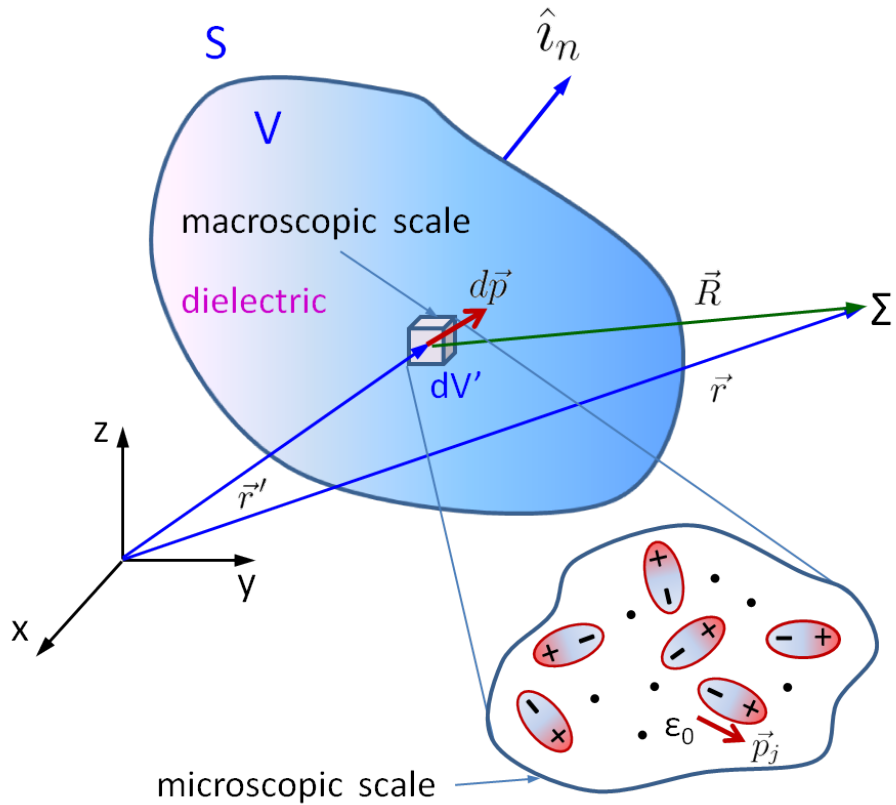
$$\alpha = \text{ολική πολωσιμότητα (C m}^2\text{/V = F m}^2\text{)}$$

$$\vec{E}_{loc} = \text{τοπικό (local) ηλεκτρικό πεδίο}$$

(δεν λαμβάνεται υπόψη το πεδίο λόγω του ίδιου μορίου)

- Η ηλεκτρονική πολωσιμότητα ανταποκρίνεται γρήγορα σε μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία λόγω της μικρής μάζας του ηλεκτρονίου (μέχρι συχνότητες $\sim 10^{15}$ Hz)
- Η ιοντική πολωσιμότητα ανταποκρίνεται βραδύτερα σε μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία λόγω της μεγαλύτερης μάζας των ιόντων (μέχρι συχνότητες $\sim 10^{13}$ Hz)
- Η πολωσιμότητα προσανατολισμού ανταποκρίνεται ακόμη βραδύτερα σε μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία λόγω της μεγαλύτερης μάζας των μορίων (μέχρι συχνότητες $\sim 10^6 - 10^9$ Hz)

Πόλωση Διηλεκτρικών Υλικών



$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \vec{p}_j \right\} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{d\vec{p} \cdot \hat{i}_R}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P} \cdot \hat{i}_R}{R^2} dV'$$

$$\vec{\nabla}' \cdot (f\vec{A}) = \vec{\nabla}' f \cdot \vec{A} + f \vec{\nabla}' \cdot \vec{A}$$

$$f = \frac{1}{R}$$

$$\vec{A} = \vec{P}$$

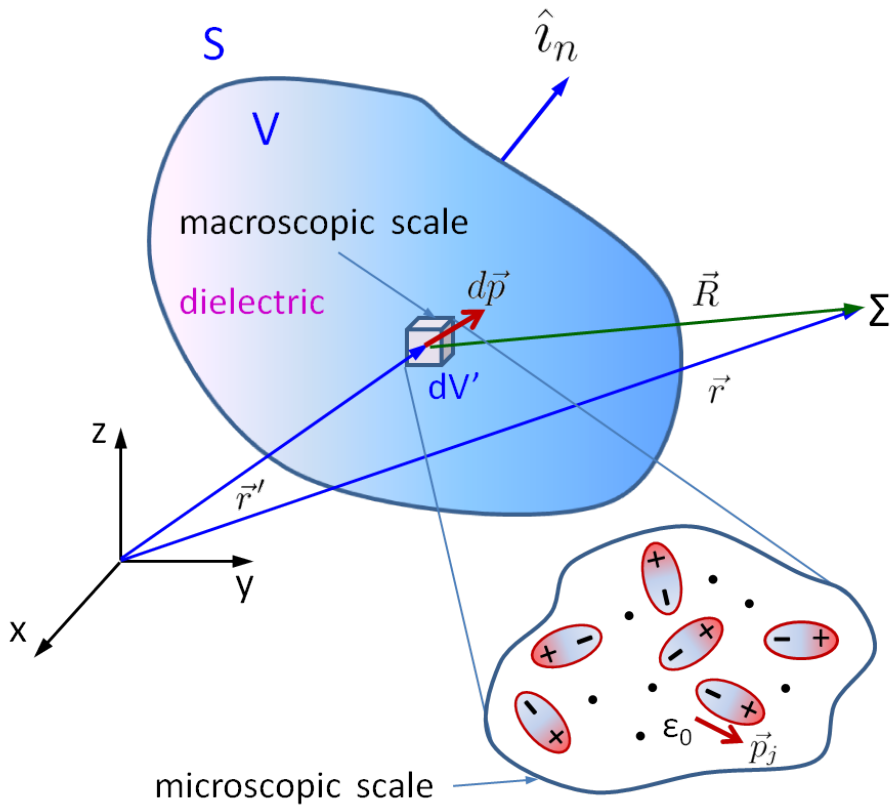
$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \vec{P} + \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}$$

$$\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) = + \frac{\hat{i}_R}{R^2}$$

$$\frac{\vec{P} \cdot \hat{i}_R}{R^2} = \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) - \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}$$

Πόλωση Διηλεκτρικών Υλικών



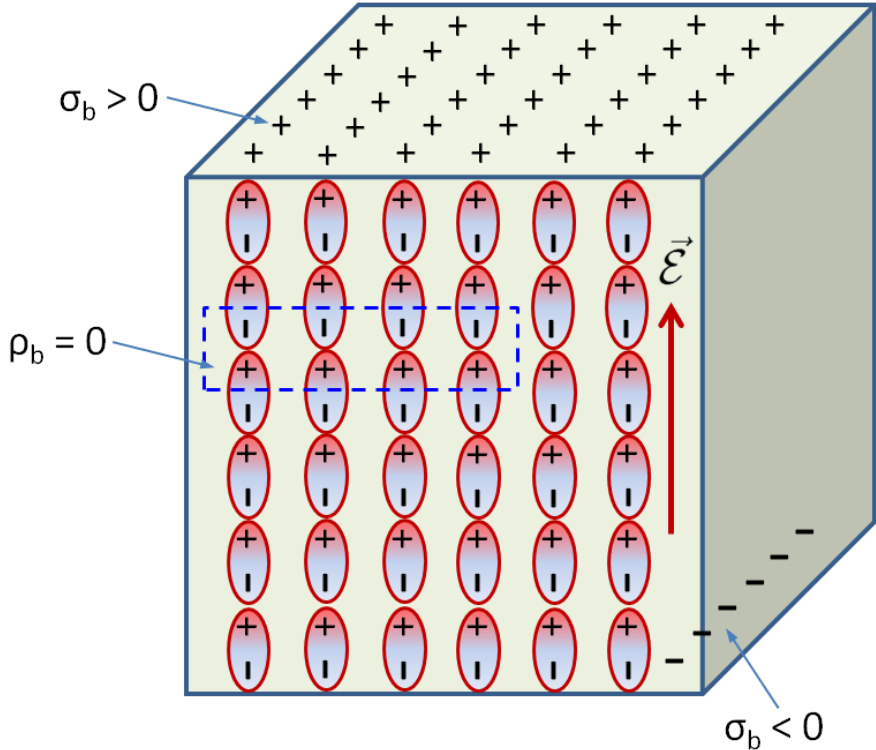
$$\begin{aligned}
 \Phi_{\Sigma} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P} \cdot \hat{i}_R}{R^2} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}}{R} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{i}_n}{R} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}}{R} dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_b}{R} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{R} dV'
 \end{aligned}$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P} \quad \text{χωρική πυκνότητα δέσμιων φορτίων}$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{i}_n \quad \text{επιφανειακή πυκνότητα δέσμιων φορτίων}$$

Πόλωση Διηλεκτρικών Υλικών

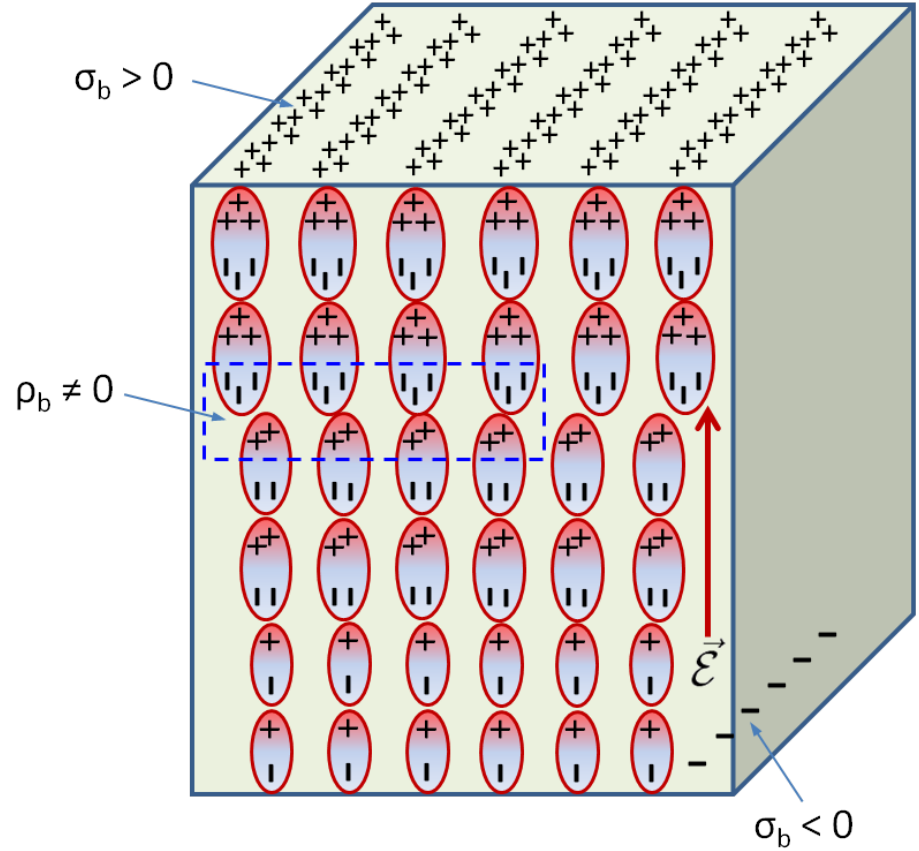
Διηλεκτρικό σε ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο



$$\rho_b = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{i}_n$$

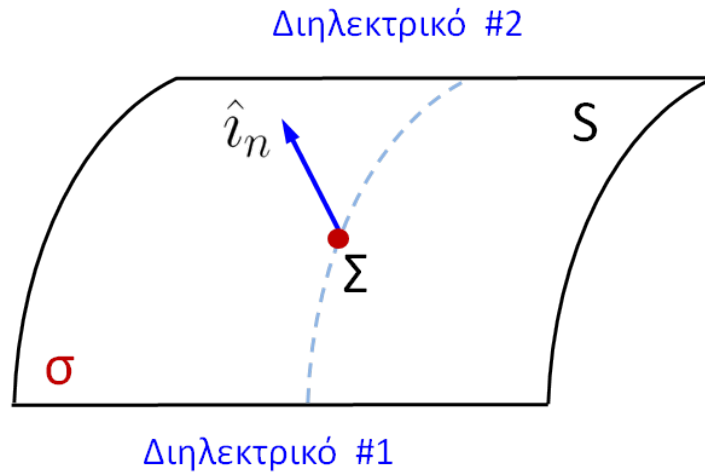
Διηλεκτρικό σε ανομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο



$$\begin{aligned} \iiint_V \rho_b dV + \iint_S \sigma_b dS &= \iiint_V (-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}) dV + \iint_S (\vec{P} \cdot \hat{i}_n) dS \\ &= \iint_S -(\vec{P} \cdot \hat{i}_n) dS + \iint_S (\vec{P} \cdot \hat{i}_n) dS = 0 \end{aligned}$$

Πεδιακές Εξισώσεις παρουσία Διηλεκτρικών Υλικών

Οι πεδιακές εξισώσεις στα διηλεκτρικά υλικά προκύπτουν από την επέκταση των αντιστοίχων εξισώσεων στο κενό. Έστω οι πεδιακές εξισώσεις στην **σημειακή** τους μορφή (σε στατική κατάσταση).



Εξέταση συνοριακών συνθηκών

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho + \rho_b \implies$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \implies$$

$$\vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} = \rho \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\hat{i}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\hat{i}_n \cdot [\epsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] = \sigma + \sigma_b$$

$$= \sigma + (\hat{i}_{n2} \cdot \vec{P}_2 + \hat{i}_{n1} \cdot \vec{P}_1)$$

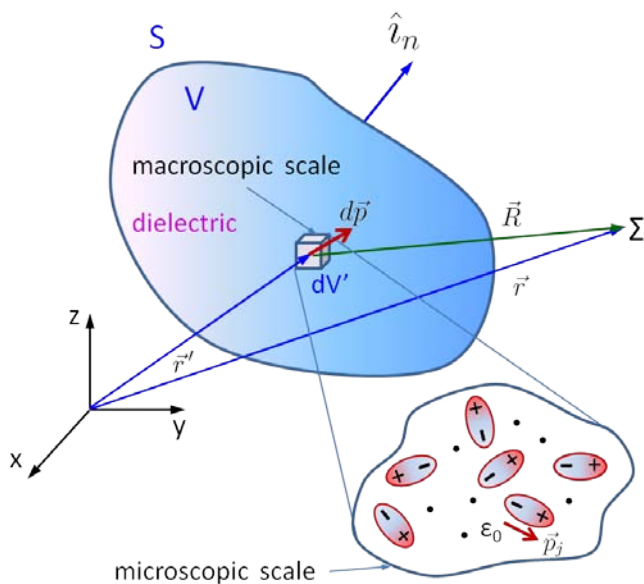
$$\hat{i}_{n1} = \hat{i}_n = -\hat{i}_{n2}$$

$$\hat{i}_n \cdot [\epsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] = \sigma + (-\hat{i}_n \cdot \vec{P}_2 + \hat{i}_n \cdot \vec{P}_1) \implies$$

$$\hat{i}_n \cdot \left[\underbrace{(\epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2)}_{\vec{D}_2} - \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1)}_{\vec{D}_1} \right] = \sigma \implies \hat{i}_n \cdot [\vec{D}_2 - \vec{D}_1] = \sigma$$

Πεδιακές Εξισώσεις παρουσία Διηλεκτρικών Υλικών

Οι πεδιακές εξισώσεις στα διηλεκτρικά υλικά προκύπτουν από την επέκταση των αντιστοιχών εξισώσεων στο κενό. Έστω οι πεδιακές εξισώσεις στην **ολοκληρωτική** τους μορφή (σε στατική κατάσταση).



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\oiint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV + \iiint_V \rho_b dV \implies$$

$$= \iiint_V \rho dV + \iiint_V (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV \implies$$

$$\oiint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV - \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Πόλωση Διηλεκτρικών Υλικών

Η πόλωση \mathbf{P} του διηλεκτρικού είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ της μακροσκοπικής και της μικροσκοπικής θεώρησης του διηλεκτρικού.

$$\vec{E} = \vec{E}_{loc} + \vec{E}_d$$

$$\vec{E}_d = \text{Ηλεκτρικό πεδίο λόγω το μορίου (διπόλου) (Depolarization Field)}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{P} = N \vec{p} = N (\alpha_e + \alpha_i + \alpha_o) \vec{E}_{loc} = N \alpha \vec{E}_{loc}$$

$$N = \text{Αριθμός ατόμων/μορίων (διπόλων) ανά μονάδα όγκου}$$

$$\vec{E}_d = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (\text{for spherical molecules})$$

$$\vec{E}_d = -\gamma \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Εξίσωση Clausius-Mossetti

Περιορισμοί:

(α) Γραμμικά, ιστροπικά, ομογενή υλικά

(β) Σφαιρικά άτομα/μόρια (non-polar) (επαγόμενη πολωσιμότητα)

(γ) Αλληλεπιδράσεις μικρής εμβέλειας αμελούνται (van der Waals, Born repulsion, dipole-dipole interactions κλπ.)

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}$$

Πόλωση Διηλεκτρικών Υλικών

Χρονική εξάρτηση

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^{\infty} G_e(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

$$\chi_e(\omega) = \mathcal{F} \{G_e(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_e(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} G_e(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{causal})$$

$$\chi_e(\omega) = \chi_e'(\omega) - j\chi_e''(\omega)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \underbrace{[1 + \chi_e'(\omega) - j\chi_e''(\omega)]}_{\epsilon_r' - j\epsilon_r''} \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 [\epsilon_r'(\omega) - j\epsilon_r''(\omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$\epsilon_r'(\omega) = 1 + \chi_e'(\omega)$$

$$\epsilon_r''(\omega) = \chi_e''(\omega)$$

Πόλωση Διηλεκτρικών Υλικών

Σχέσεις Kramers-Kronig

$$\chi'_e(\omega) = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \mathcal{V} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{s \chi''_e(s)}{\omega^2 - s^2} ds \right\}$$

$$\chi''_e(\omega) = +\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \mathcal{V} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\chi'_e(s)}{\omega^2 - s^2} ds \right\}$$

$$\varepsilon'_r(\omega) = 1 + \chi'_e(\omega) = -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \mathcal{V} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{s \varepsilon''_r(s)}{\omega^2 - s^2} ds \right\}$$

$$\varepsilon''_r(\omega) = \chi''_e(\omega) = +\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \mathcal{V} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{[\varepsilon'_r(s) - 1]}{\omega^2 - s^2} ds \right\}$$

Μοντέλο Κλασσικού Ταλαντωτή

$$\chi''_e(\nu) = \frac{Ne^2}{16\pi^2 m_e \nu_0 \epsilon_0} \frac{\Delta\nu}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2}$$

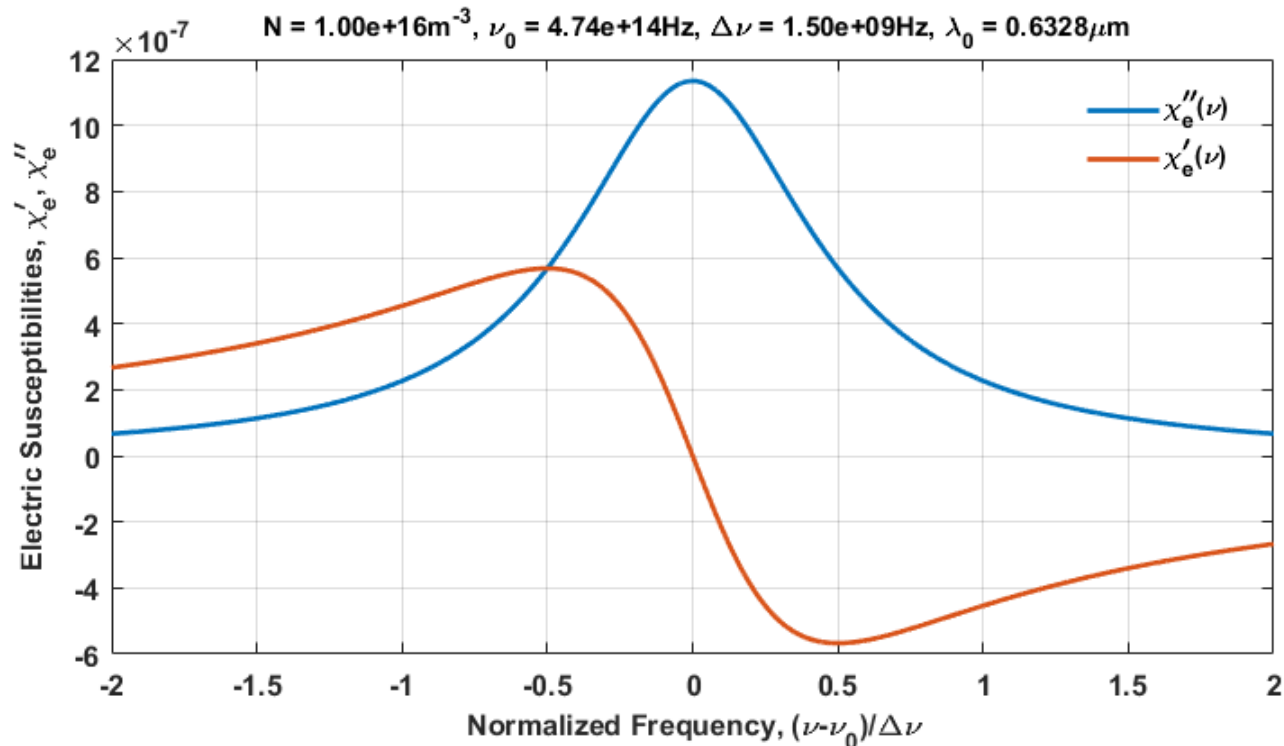
$$\chi'_e(\nu) = \frac{2(\nu_0 - \nu)}{\Delta\nu} \chi''_e(\nu) = \frac{Ne^2}{8\pi^2 m_e \nu_0 \epsilon_0} \frac{\nu_0 - \nu}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2}$$

Πόλωση Διηλεκτρικών Υλικών

Μοντέλο Κλασσικού Ταλαντωτή

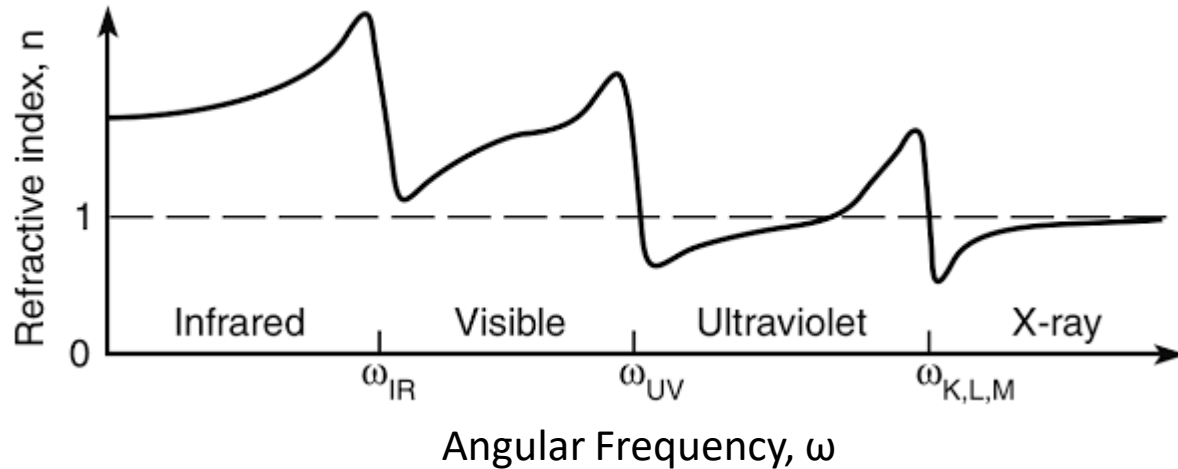
$$\chi_e''(\nu) = \frac{Ne^2}{16\pi^2 m_e \nu_0 \epsilon_0} \frac{\Delta\nu}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2}$$

$$\chi_e'(\nu) = \frac{2(\nu_0 - \nu)}{\Delta\nu} \chi_e''(\nu) = \frac{Ne^2}{8\pi^2 m_e \nu_0 \epsilon_0} \frac{\nu_0 - \nu}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2}$$



Ιδιότητες Διηλεκτρικών Υλικών σαν Συνάρτηση της Συχνότητας

Εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την συχνότητα ω



http://1.bp.blogspot.com/-kcHWNW81dI4/UR_qgF5B9dl/AAAAAAAAACNg/h5oijsP_gTs/s640/figure+3.png

Ηλεκτρίτες

Ηλεκτρίτες είναι διηλεκτρικά υλικά που παρουσιάζουν **μόνιμη** πόλωση ανεξάρτητα του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου (ανάλογα με τους μαγνήτες για το μαγνητικό πεδίο). Επομένως για τους ηλεκτρίτες δεν μπορεί να οριστεί κάποια επιτρεπτότητα!

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \vec{P}(\vec{r}, \omega)$$

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) \neq \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

Στατικά Πεδία

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

Σημειακές Σχέσεις

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \implies \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})] = \rho + \rho_b = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \implies$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

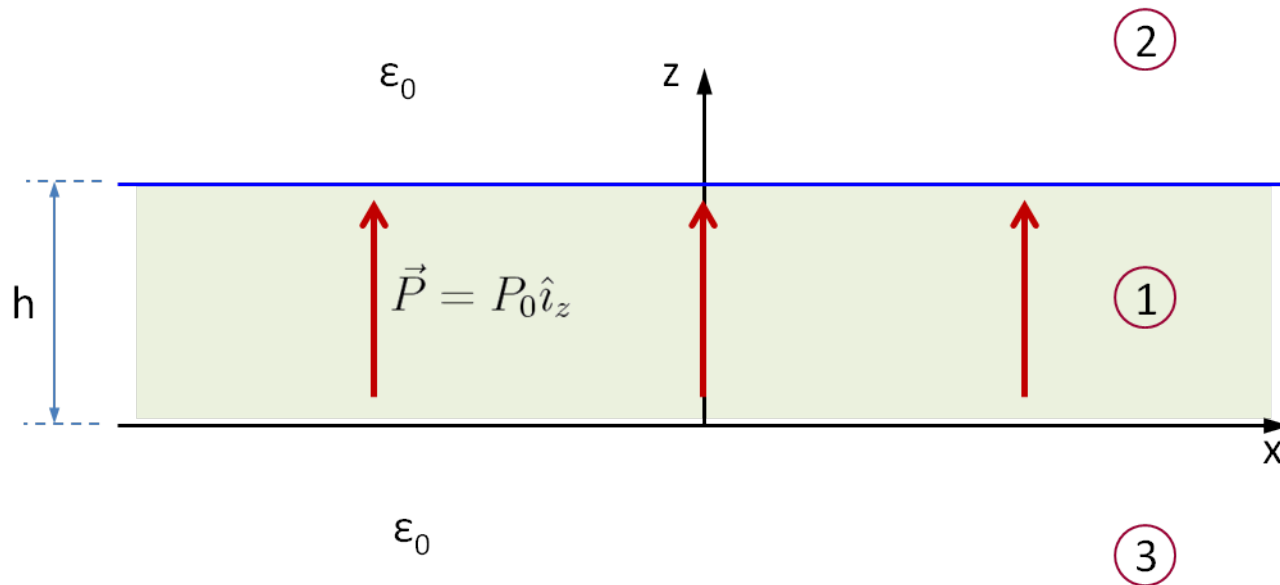
Ολοκληρωτικές Σχέσεις

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

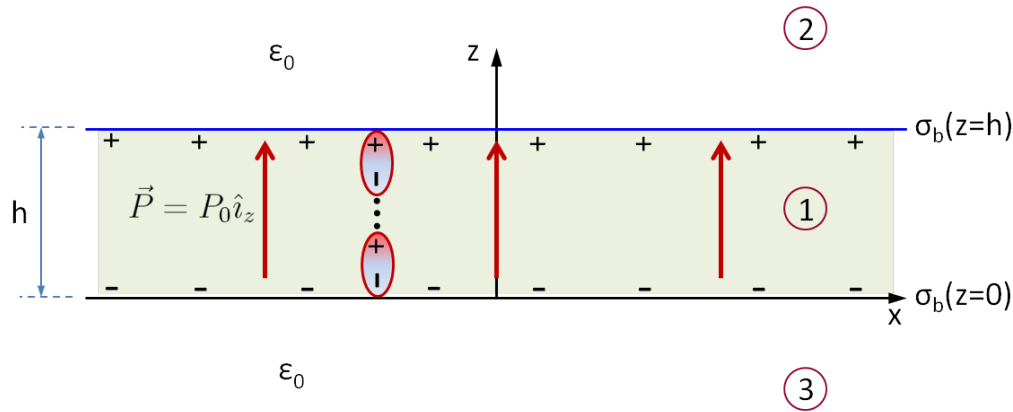
$$\oiint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV + \iiint_V \rho_b dV$$

Παράδειγμα: Άπειρη Πλάκα Ηλεκτρίτη

Να υπολογιστούν τα φορτία πόλωσης, το δυναμικό, και το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο. Αναφορά δυναμικού $\Phi(z=0) = 0$.



Παράδειγμα: Άπειρη Πλάκα Ηλεκτρίτη



Ολοκληρωτικές Σχέσεις (δέσμοι φορτία)

$$\vec{P} = P_0 \hat{i}_z$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right] = 0$$

$$\sigma_b(z=0) = (-\hat{i}_z) \cdot \vec{P}(z=0) = -P_0$$

$$\sigma_b(z=h) = (+\hat{i}_z) \cdot \vec{P}(z=h) = +P_0$$

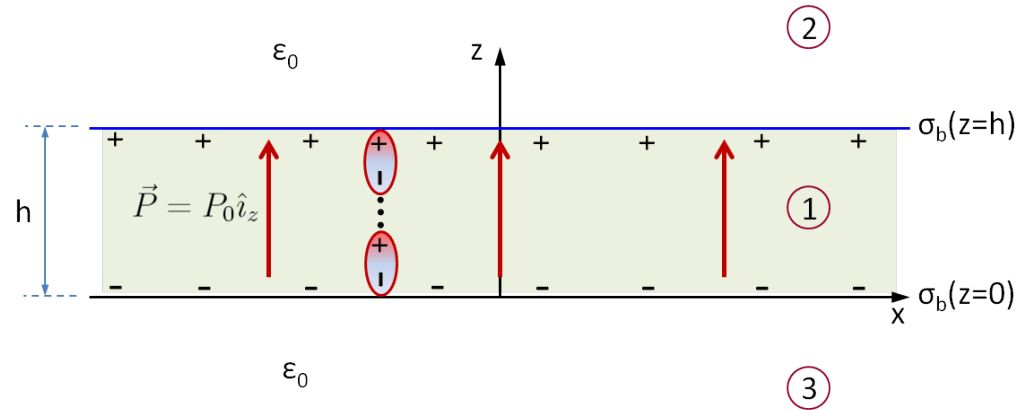
Επαλληλία φορισμένων πλακών

$$\vec{E} = \hat{i}_z \begin{cases} \frac{\sigma_b(z=0)}{2\epsilon_0} (+1) + \frac{\sigma_b(z=h)}{2\epsilon_0} (-1) = -\frac{P_0}{\epsilon_0}, & 0 < z < h \\ \frac{\sigma_b(z=0)}{2\epsilon_0} (+1) + \frac{\sigma_b(z=h)}{2\epsilon_0} (+1) = 0, & z > h \\ \frac{\sigma_b(z=0)}{2\epsilon_0} (-1) + \frac{\sigma_b(z=h)}{2\epsilon_0} (-1) = 0, & z < 0 \end{cases}$$

Διηλεκτρική Μετατόπιση D

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \hat{i}_z \begin{cases} \epsilon_0 \left(-\frac{P_0}{\epsilon_0} \right) + P_0 = 0, & 0 < z < h \\ \epsilon_0 (0) + 0 = 0, & z > h \\ \epsilon_0 (0) + 0 = 0, & z < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα: Άπειρη Πλάκα Ηλεκτρίτη

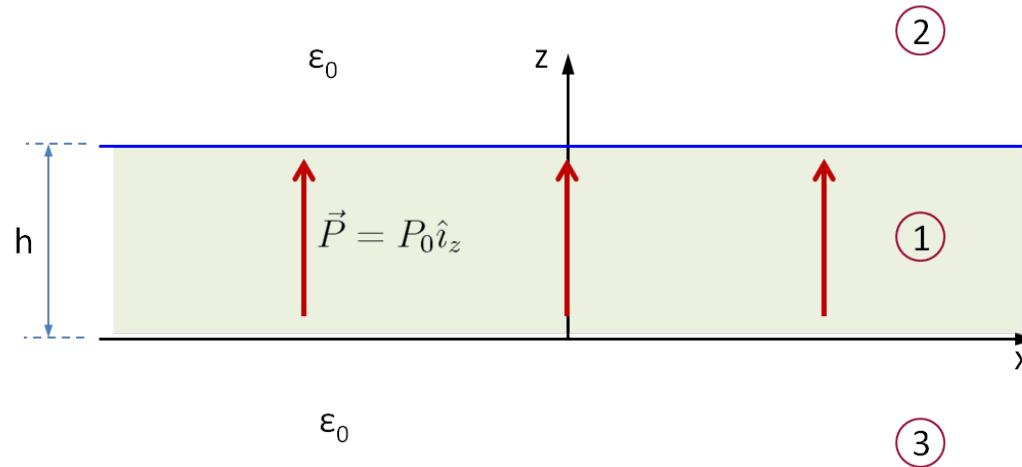


Ηλεκτρικό Δυναμικό Φ

$$\Phi(z) - \Phi(z_0) = - \int_{z_0}^z \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \begin{cases} - \int_{z_0=0}^z \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} = - \int_{z_0=0}^z \left(-\frac{P_0}{\epsilon_0} \hat{i}_z \right) \cdot \hat{i}_z dz = \frac{P_0}{\epsilon_0} z, & 0 \leq z \leq h \\ - \int_{z_0=h}^z \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = - \int_{z_0=h}^z 0 \hat{i}_z \cdot \hat{i}_z dz = 0, & z \geq h \\ - \int_{z_0=0}^z \vec{E}_3 \cdot d\vec{\ell} = - \int_{z_0=0}^z 0 \hat{i}_z \cdot \hat{i}_z dz = 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{P_0}{\epsilon_0} z, & 0 \leq z \leq h \\ \Phi(z=h) = \frac{P_0}{\epsilon_0} h, & z \geq h \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα: Άπειρη Πλάκα Ηλεκτρίτη



Σημειακές Σχέσεις - Ηλεκτροστατικό Δυναμικό

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \implies \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0 \implies \Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1 = A_1 z + B_1, & 0 \leq z \leq h \\ \Phi_2 = A_2 z + B_2, & z \geq h \\ \Phi_3 = A_3 z + B_3, & z \leq 0 \end{cases}$$

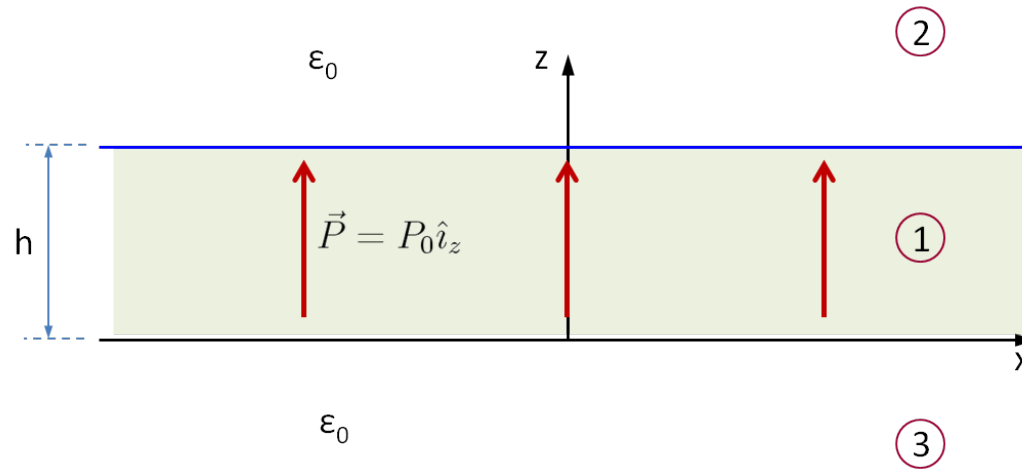
Συνέχεια Δυναμικού Φ

$$\Phi_1(z=0) = \Phi_3(z=0) \implies B_1 = B_3$$

$$\Phi_1(z=0) = 0 \implies B_1 = B_3 = 0$$

$$\Phi_1(z=h) = \Phi_2(z=h) \implies A_1 h = A_2 h + B_2$$

Παράδειγμα: Άπειρη Πλάκα Ηλεκτρίτη



Δυναμικό Φ

Ηλεκτρικό Πεδίο E

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_1 = A_1 z, & 0 \leq z \leq h \\ \Phi_2 = A_2 z + B_2, & z \geq h \\ \Phi_3 = A_3 z, & z \leq 0 \end{cases} \quad \vec{E}(z) = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dz}\hat{i}_z = \hat{i}_z \begin{cases} -A_1, & 0 < z < h \\ -A_2, & z > h \\ -A_3, & z < 0 \end{cases}$$

Συνοριακές Συνθήκες

$$\Phi_1(z=h) = \Phi_2(z=h) \implies A_1 h = A_2 h + B_2$$

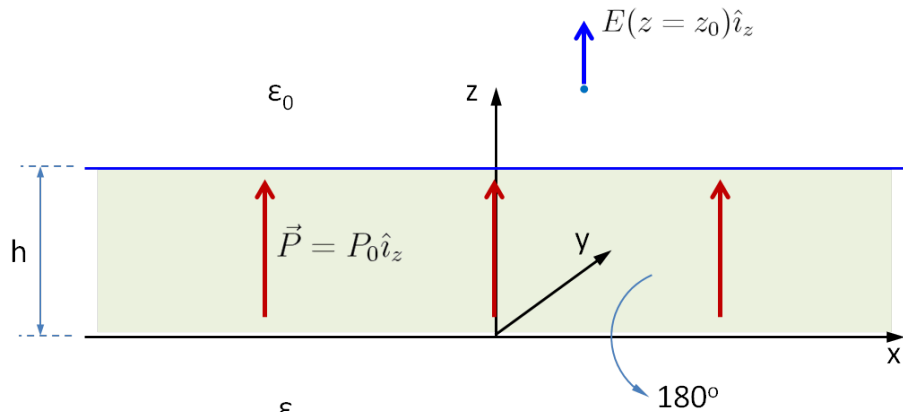
$$\hat{i}_z \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \implies D_{2z}(z=h) = D_{1z}(z=h)$$

$$\implies \epsilon_0(-A_2) + 0 = \epsilon_0(-A_1) + P_0 \implies \epsilon_0(A_1 - A_2) = P_0$$

$$\hat{i}_z \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_3) = 0 \implies D_{1z}(z=0) = D_{3z}(z=0)$$

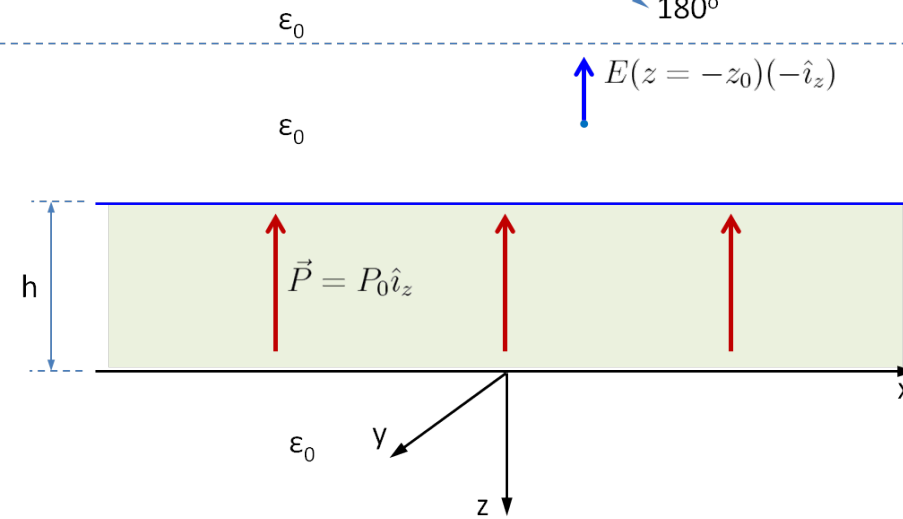
$$\implies \epsilon_0(-A_1) + P_0 = \epsilon_0(-A_3) + 0 \implies \epsilon_0(A_1 - A_3) = P_0$$

Παράδειγμα: Άπειρη Πλάκα Ηλεκτρίτη



$$E(z_0) = -E(-z_0) \quad (|z_0| > h)$$

$$-A_2 = -(-A_3)$$

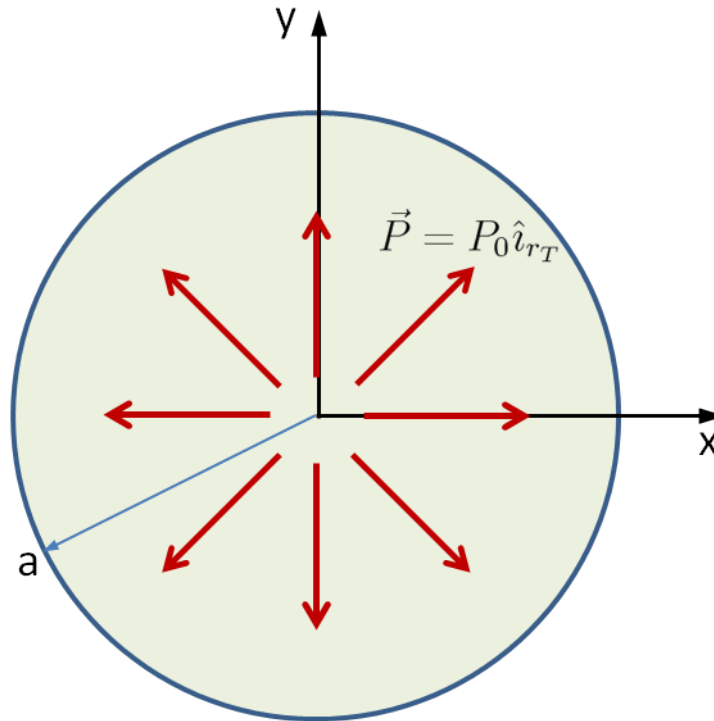


$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{P_0}{\epsilon_0} \\ B_2 &= \frac{P_0}{\epsilon_0} h \\ A_2 &= A_3 = 0 \end{aligned}$$

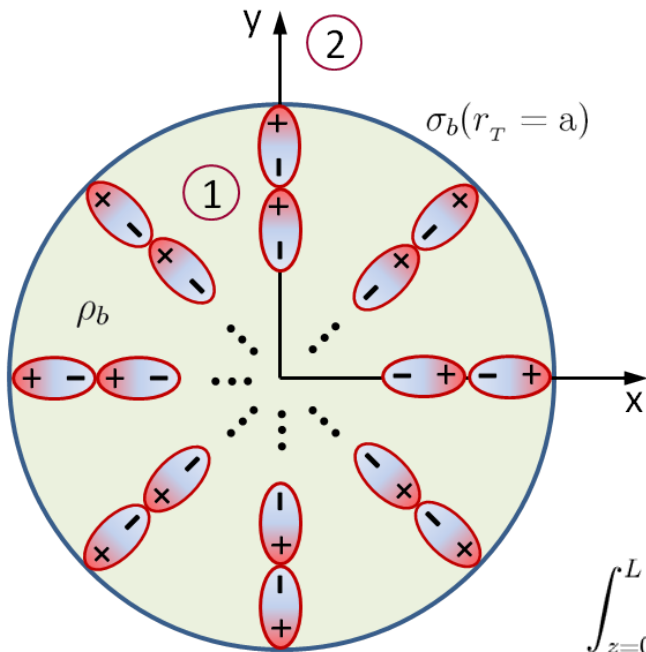
$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{P_0}{\epsilon_0} z, & 0 \leq z \leq h \\ \Phi(z = h) = \frac{P_0}{\epsilon_0} h, & z \geq h \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα: Άπειρος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης

Να υπολογιστούν τα φορτία πόλωσης, το δυναμικό, και το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο. Αναφορά δυναμικού $\Phi(r_T=a) = 0$.



Παράδειγμα: Άπειρος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης



Ολοκληρωτικές Σχέσεις (δέσμια φορτία)

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{r_T} \frac{\partial(r_T P_{r_T})}{\partial r_T} + \frac{1}{r_T} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{P_0}{r_T}$$

$$\sigma_b(r_T = a) = \hat{i}_n \cdot \vec{P}(r_T = a) = \hat{i}_{r_T} \cdot P_0 \hat{i}_{r_T} = P_0$$

Επαλληλία κυλινδρικά-συμμετρικών φορτίων

$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV + \iiint_V \rho_b dV \quad (r_T < a)$$

$$\int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} (\epsilon_0 E_1(r'_T) \hat{i}_{r_T}) \cdot \hat{i}_{r_T} r'_T d\phi dz = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r'_T=0}^{r_T} -\frac{P_0}{r'_T} r'_T d\phi dr'_T dz \implies$$

$$\epsilon_0 E_1(r_T) 2\pi r_T L = -P_0 2\pi r_T L \implies E_1(r_T) = -\frac{P_0}{\epsilon_0}$$

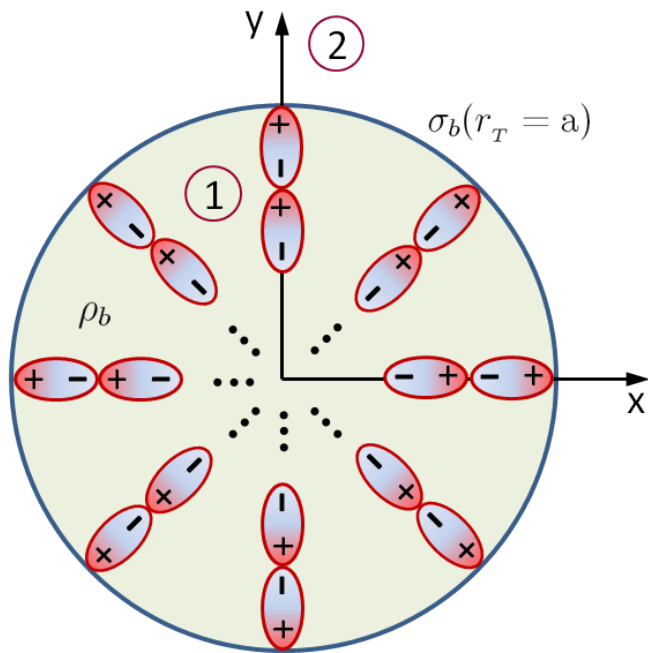
$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV + \iiint_V \rho_b dV \quad (r_T > a)$$

$$\int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} (\epsilon_0 E_2(r_T) \hat{i}_{r_T}) \cdot \hat{i}_{r_T} r_T d\phi dz = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r_T=0}^a -\frac{P_0}{r'_T} r'_T d\phi dr'_T dz +$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} P_0 a d\phi dz \implies$$

$$\epsilon_0 E_2(r_T) 2\pi r_T L = -P_0 2\pi a L + P_0 2\pi a L = 0 \implies E_2(r_T) = 0$$

Παράδειγμα: Άπειρος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης



Ηλεκτρικό Πεδίο E

$$\vec{E} = \hat{i}_{r_T} \begin{cases} -\frac{P_0}{\epsilon_0}, & r_T < a \\ 0, & r_T > a \end{cases}$$

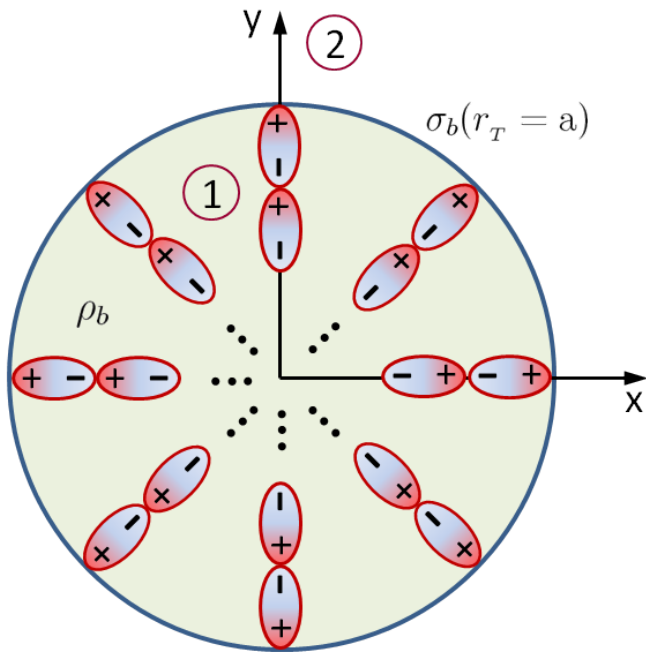
Διηλεκτρική Μετατόπιση D

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \hat{i}_{r_T} \begin{cases} \epsilon_0 \left(-\frac{P_0}{\epsilon_0} \right) + P_0 = 0, & r_T < a \\ 0, & r_T > a \end{cases}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό Φ

$$\Phi(r_T) - \Phi(r_{T0}) = - \int_{r_{T0}}^{r_T} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \begin{cases} - \int_{r_{T0}=0}^{r_T} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} = - \int_{r_{T0}=0}^{r_T} \left(-\frac{P_0}{\epsilon_0} \hat{i}_z \right) \cdot \hat{i}_{r_T} dr_T = \frac{P_0}{\epsilon_0} r_T, & r_T \leq a \\ - \int_{r_{T0}=a}^{r_T} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = - \int_{r_{T0}=a}^{r_T} 0 \hat{i}_{r_T} \cdot \hat{i}_{r_T} dr_T = 0, & r_T \geq a \end{cases}$$

Παράδειγμα: Άπειρος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης



Ηλεκτρικό Δυναμικό Φ

$$\Phi(r_T) - \Phi(0) = \frac{P_0}{\epsilon_0} r_T, \quad (r_T \leq a)$$

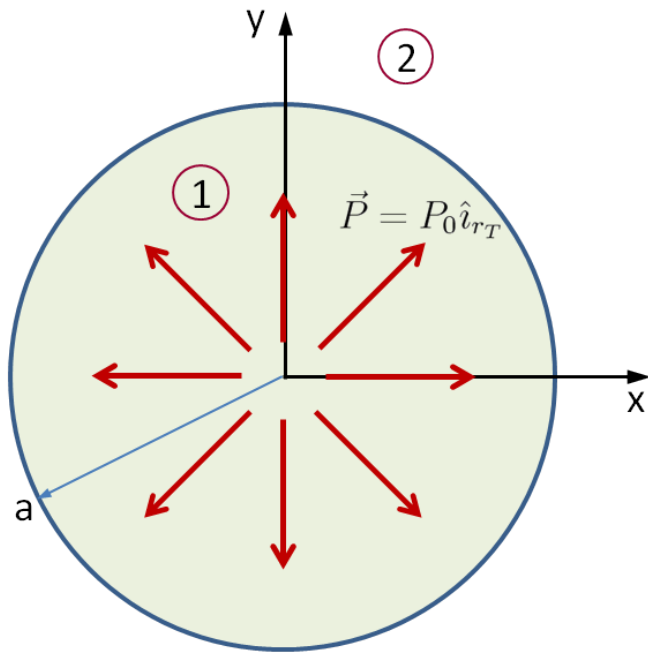
$$\Phi(a) = 0$$

$$\Phi(0) = -\frac{P_0}{\epsilon_0} a$$

$$\Phi(r_T) - \Phi(a) = 0, \quad (r_T \geq a) \implies$$

$$\Phi(r_T) = \begin{cases} \frac{P_0}{\epsilon_0} (r_T - a), & r_T \leq a \\ 0 & r_T \geq a \end{cases}$$

Παράδειγμα: Άπειρος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης



Σημιακές Σχέσεις - Ηλεκτροστατικό Δυναμικό

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \implies \frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T} \left(r_T \frac{d\Phi}{dr_T} \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \implies$$

$$\frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T} \left(r_T \frac{d\Phi}{dr_T} \right) = \begin{cases} \frac{P_0}{\epsilon_0} \frac{1}{r_T}, & r_T \leq a \\ 0, & r_T \geq a \end{cases} \implies$$

$$\Phi(r_T) = \begin{cases} \Phi_1 = \frac{P_0}{\epsilon_0} r_T + A_1 \ln r_T + B_1, & r_T \leq a \\ \Phi_2 = A_2 \ln r_T + B_2, & r_T \geq a \end{cases}$$

Συνέχεια/Πεπερασμένο Δυναμικού Φ

$$|\Phi_1(r_T \rightarrow 0)| < \infty \implies A_1 = 0$$

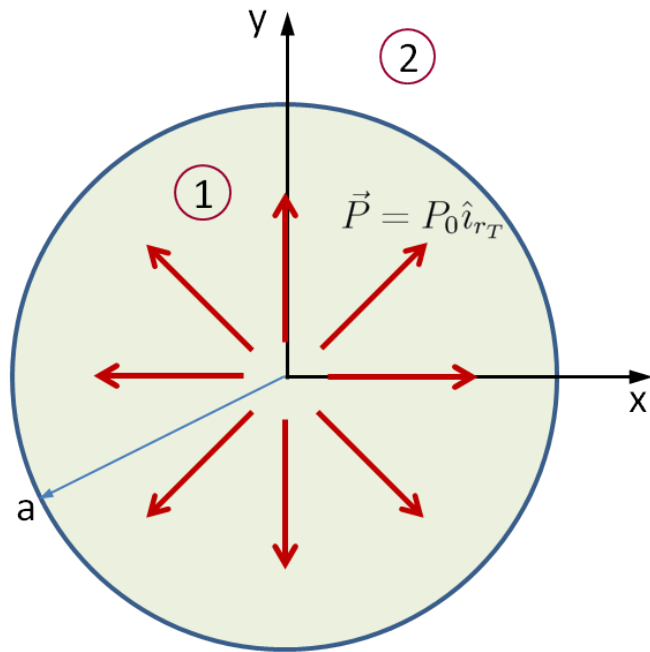
$$\Phi_1(r_T = a) = 0$$

$$\Phi_1(r_T = a) = \Phi_2(r_T = a) \implies \frac{P_0}{\epsilon_0} a + B_1 = A_2 \ln a + B_2$$

$$B_1 = -\frac{P_0}{\epsilon_0} a$$

$$A_2 \ln a + B_2 = 0$$

Παράδειγμα: Άπειρος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης



Συνοριακή συνθήκη για D

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \implies D_{r_{T1}} = D_{r_{T2}} \implies$$

$$\epsilon_0 \left(-\frac{P_0}{\epsilon_0} \right) + P_0 = \epsilon_0 \left(-\frac{A_2}{a} \right) + 0 \implies A_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 0 \\ B_1 = -\frac{P_0}{\epsilon_0} a \\ A_2 = B_2 = 0 \end{array} \right\} \implies \Phi = \begin{cases} \frac{P_0}{\epsilon_0} (r_T - a), & r_T \leq a \\ 0, & r_T \geq a \end{cases}$$

Ηλεκτρικό Πεδίο E

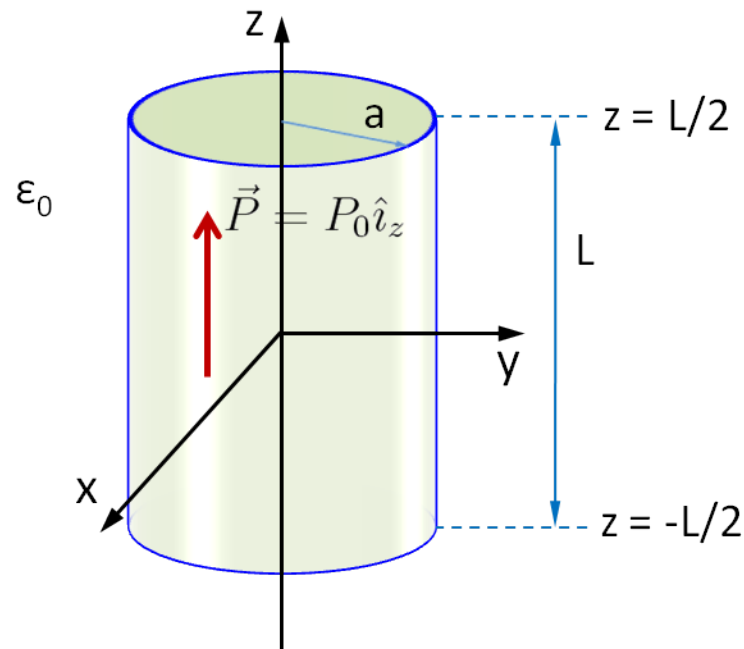
$$\vec{E} = \hat{i}_{r_T} \begin{cases} -\frac{P_0}{\epsilon_0}, & r_T < a \\ 0, & r_T > a \end{cases}$$

Διηλεκτρική Μετατόπιση D

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \hat{i}_{r_T} \begin{cases} \epsilon_0 \left(-\frac{P_0}{\epsilon_0} \right) + P_0 = 0, & r_T < a \\ 0, & r_T > a \end{cases}$$

Παράδειγμα: Πεπερασμένος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης

Κυλινδρικός ηλεκτρίτης ακτίνας a και μήκους L έχει ομοιόμορφη πόλωση P_0 κατά μήκος του άξονα z . Να υπολογιστούν τα φορτία πόλωσης, το δυναμικό, και το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του άξονα z . Αναφορά δυναμικού $\Phi(r_T = \infty) = 0$.



Επίλυση με χρήση δέσμιων φορτίων

Παράδειγμα: Πεπερασμένος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης

Δέσμια φορτία

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T P_{r_T}) + \frac{1}{r_T} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 0$$

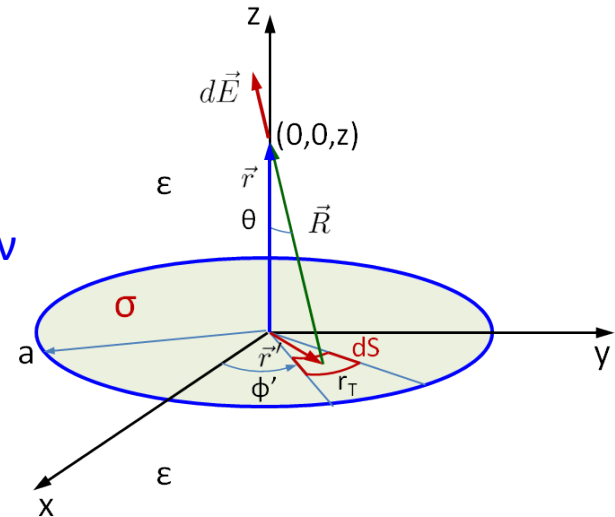
$$\sigma_b(r_T = a) = \vec{P} \cdot \hat{i}_n = P_0 \hat{i}_z \cdot \hat{i}_{r_T} = 0$$

$$\sigma_{b+} = \sigma(z = L/2) = \vec{P} \cdot \hat{i}_n = P_0 \hat{i}_z \cdot \hat{i}_z = P_0$$

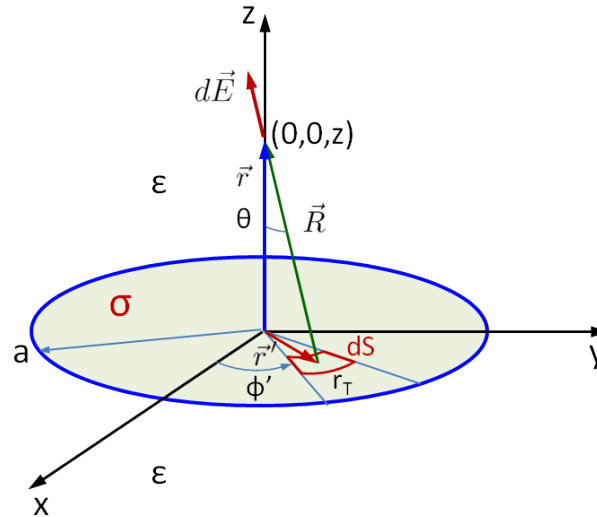
$$\sigma_{b-} = \sigma(z = -L/2) = \vec{P} \cdot \hat{i}_n = P_0 \hat{i}_z \cdot (-\hat{i}_z) = -P_0$$

Ισοδύναμο Πρόβλημα

Επαλληλία Φορτισμένων Δίσκων



Παράδειγμα: Πεπερασμένος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης

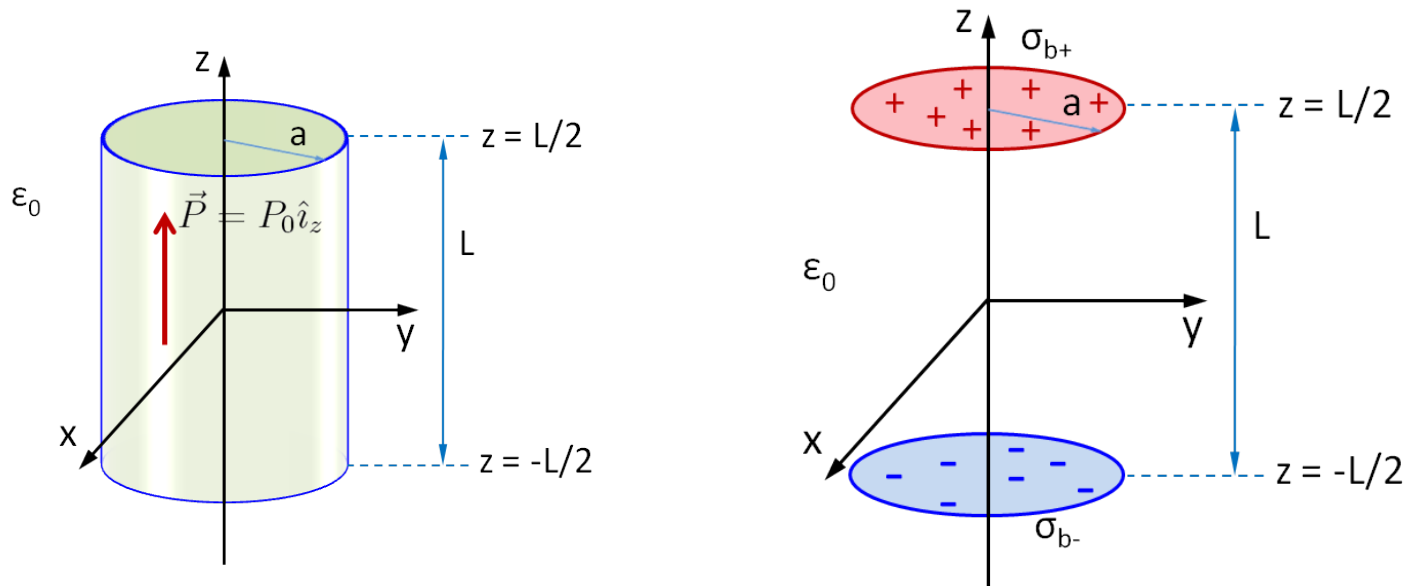


$$d\Phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \frac{r'_T d\phi' dr'_T}{[r'^2_T + z^2]^{1/2}}$$

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r'_T d\phi' dr'_T}{[r'^2_T + z^2]^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right]$$

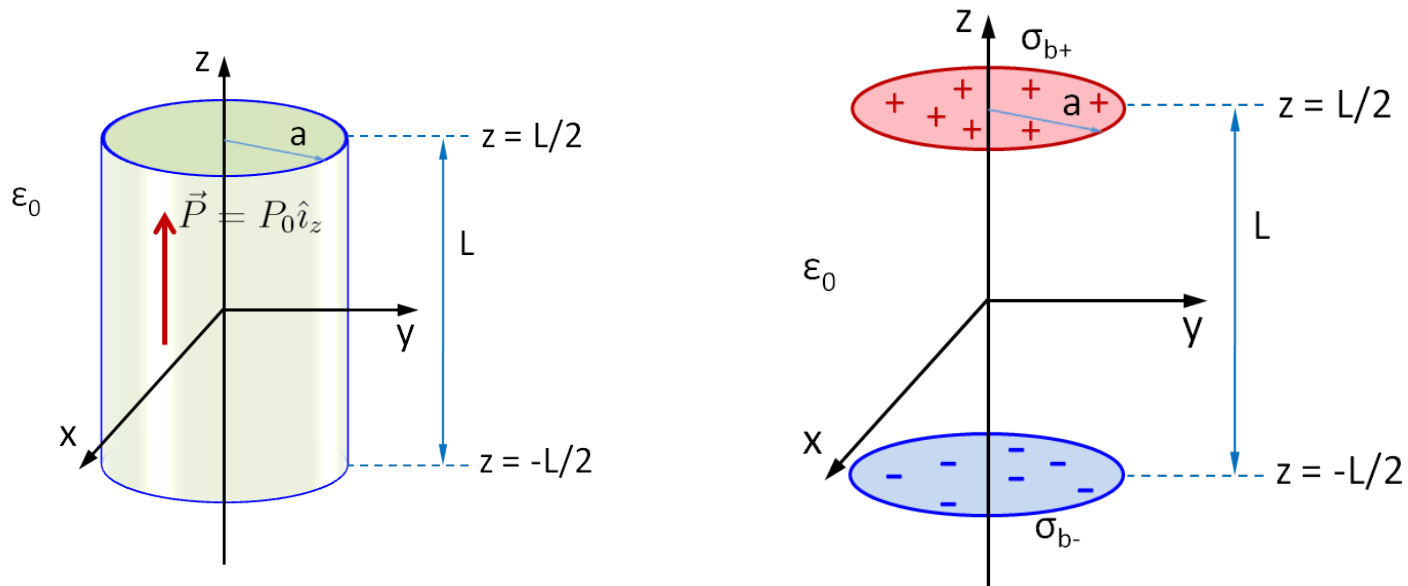
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \hat{i}_z \frac{\sigma}{2\epsilon} \begin{cases} 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}, & z > 0 \\ -\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right), & z < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα: Πεπερασμένος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης



$$\Phi(z) = \frac{P_0}{2\epsilon_0} \begin{cases} \left[\left(z - \frac{L}{2} \right)^2 + a^2 \right]^{1/2} - \left[\left(z + \frac{L}{2} \right)^2 + a^2 \right]^{1/2} + L, & z \geq \frac{L}{2} \\ \left[\left(z - \frac{L}{2} \right)^2 + a^2 \right]^{1/2} - \left[\left(z + \frac{L}{2} \right)^2 + a^2 \right]^{1/2} + 2z, & -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \\ \left[\left(z - \frac{L}{2} \right)^2 + a^2 \right]^{1/2} - \left[\left(z + \frac{L}{2} \right)^2 + a^2 \right]^{1/2} - L, & z \leq -\frac{L}{2} \end{cases}$$

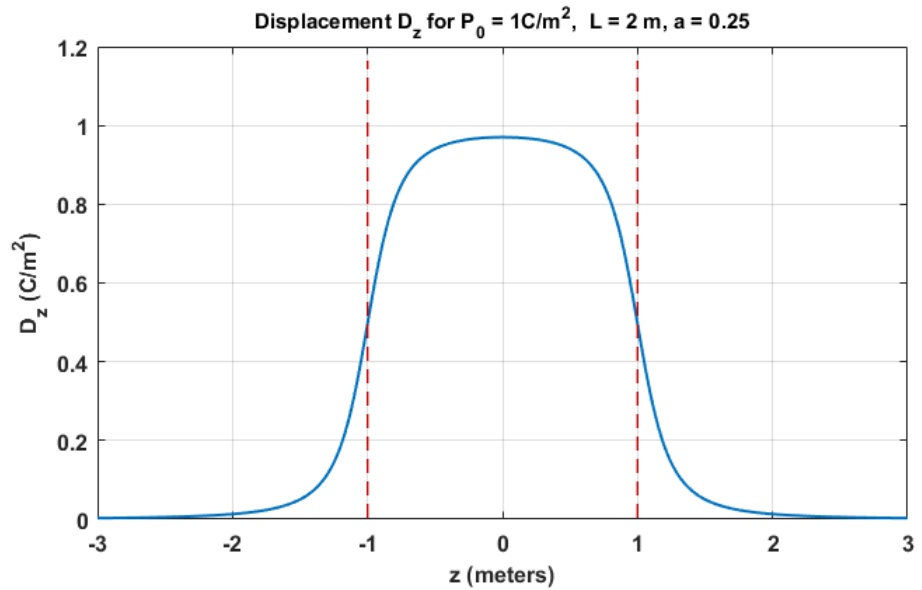
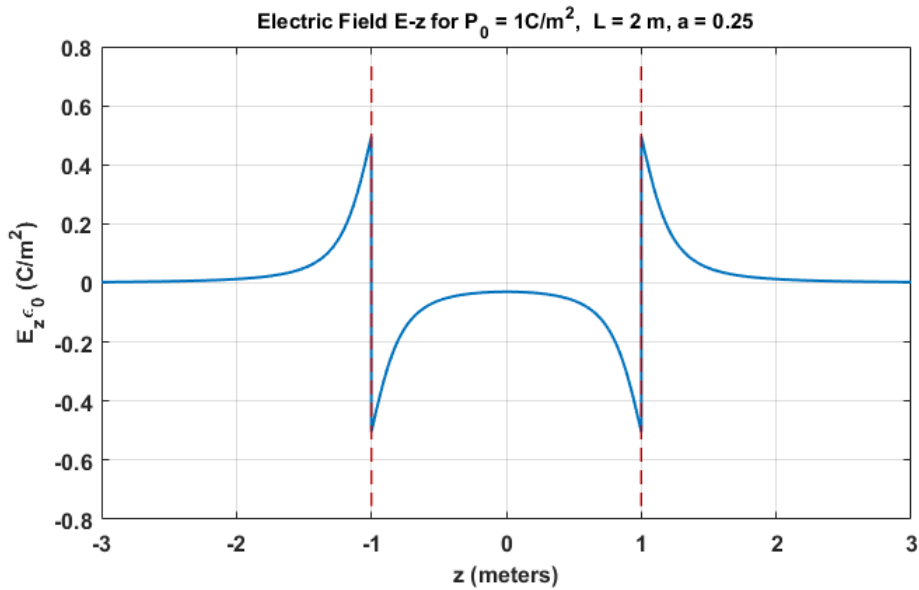
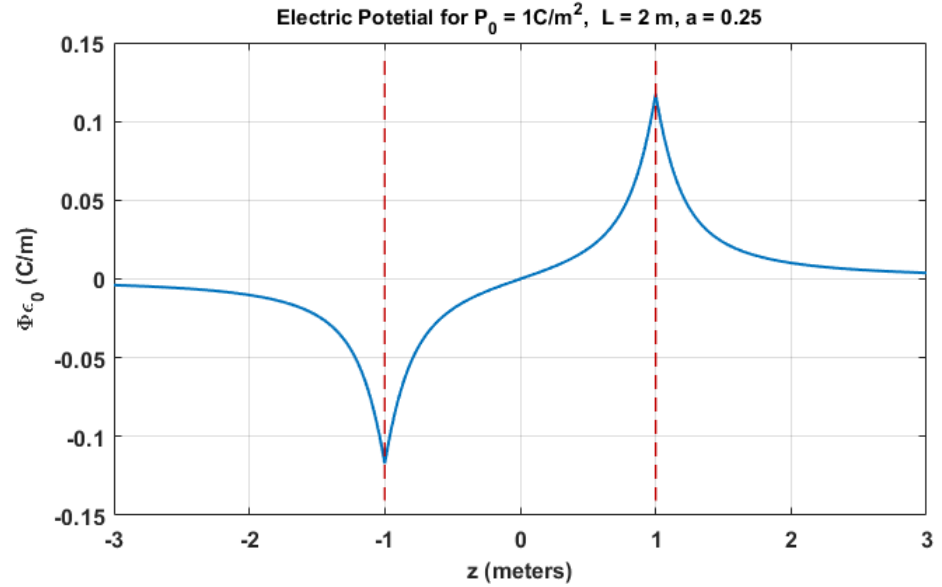
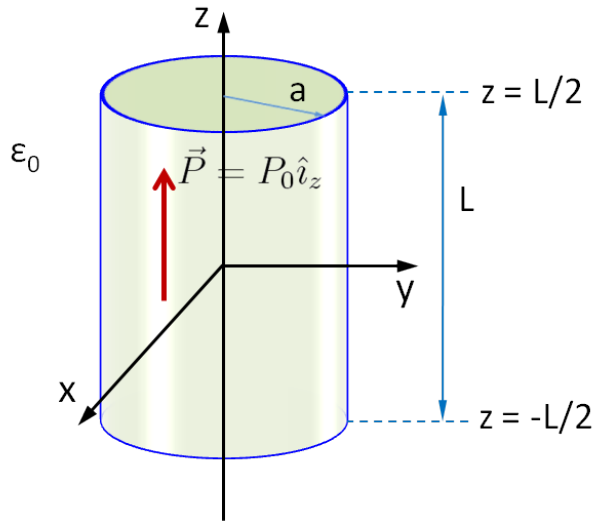
Παράδειγμα: Πεπερασμένος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης



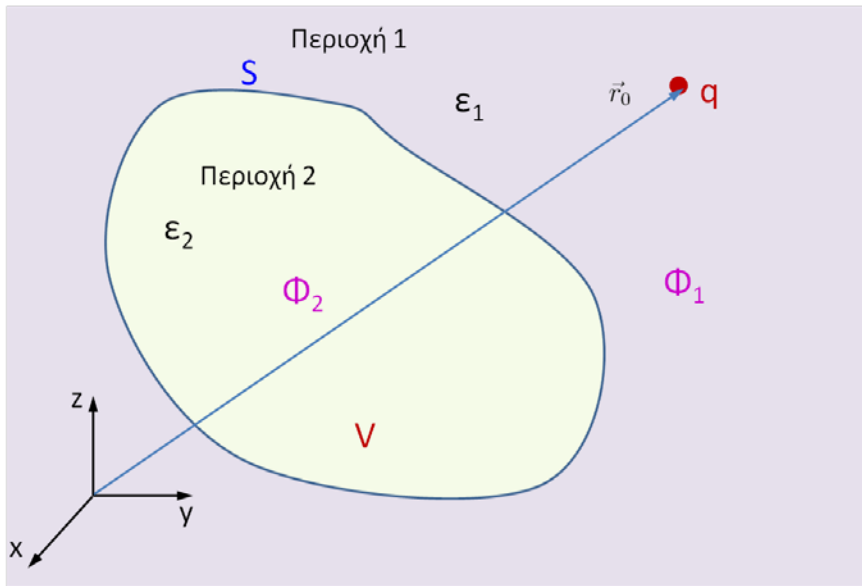
$$\vec{E}(z) = \hat{i}_z \frac{P_0}{2\epsilon_0} \begin{cases} \frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}}, & z \geq \frac{L}{2} \\ \frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}} - 2, & -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \\ \frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}}, & z \leq -\frac{L}{2} \end{cases}$$

$$\vec{D}(z) = \hat{i}_z \frac{P_0}{2} \left\{ \frac{z + L/2}{\sqrt{(z + L/2)^2 + a^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{(z - L/2)^2 + a^2}} \right\}$$

Παράδειγμα: Πεπερασμένος Κυλινδρικός Ηλεκτρίτης



Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά



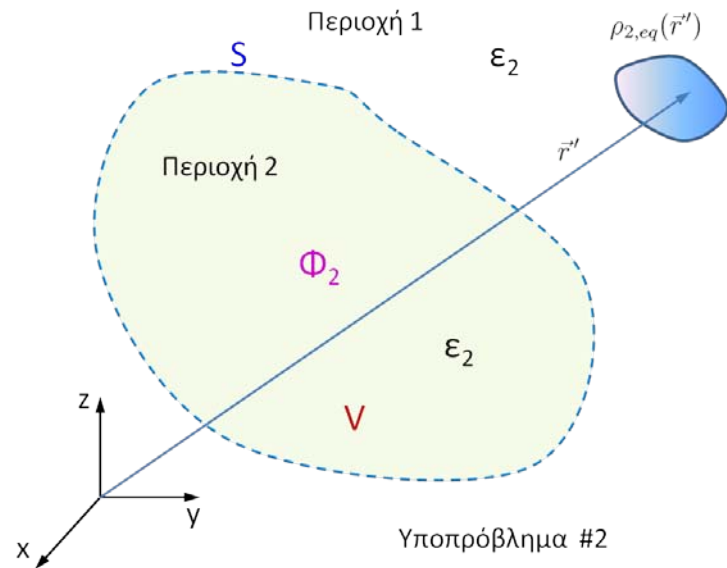
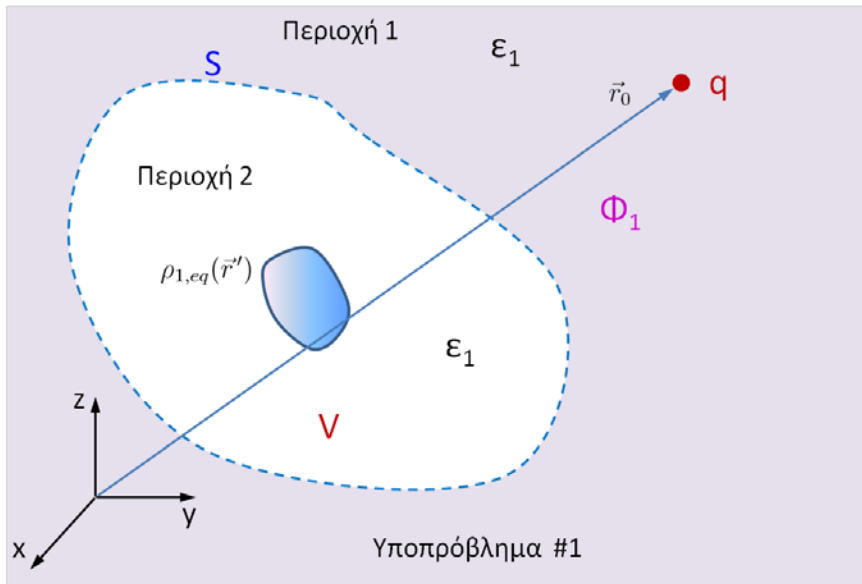
$$\nabla^2 \Phi_1 = -\frac{q}{\epsilon_1} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0$$

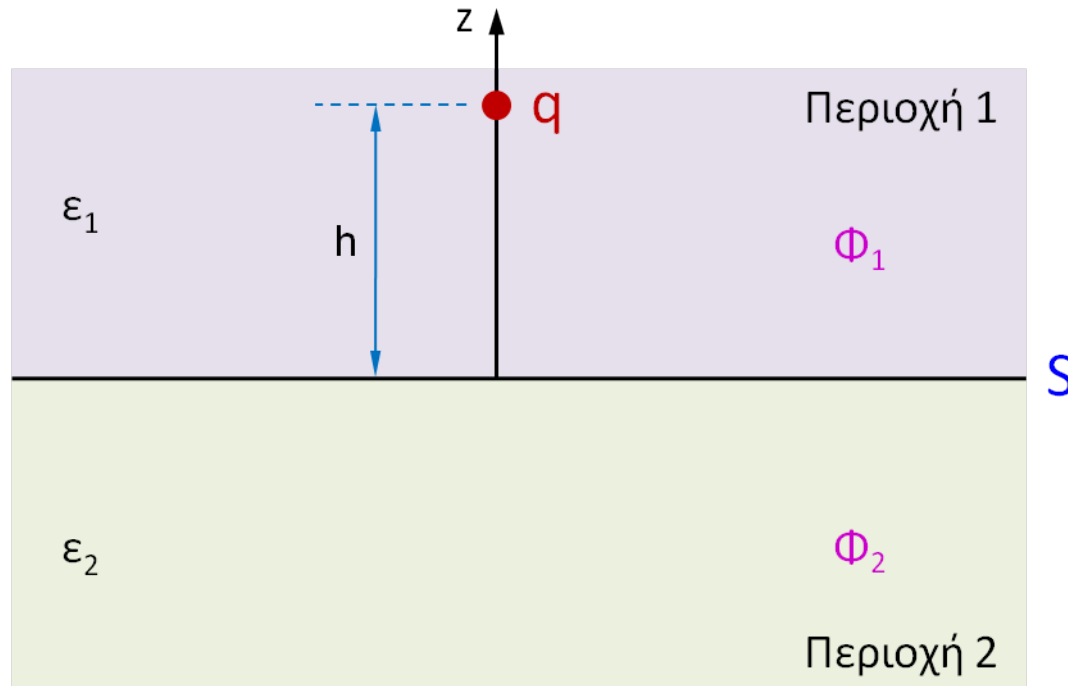
$$\Phi_1|_{S_\infty} = 0$$

$$\Phi_1|_S = \Phi_2|_S$$

$$\hat{i}_n \cdot \vec{D}_1|_S = \hat{i}_n \cdot \vec{D}_2|_S$$



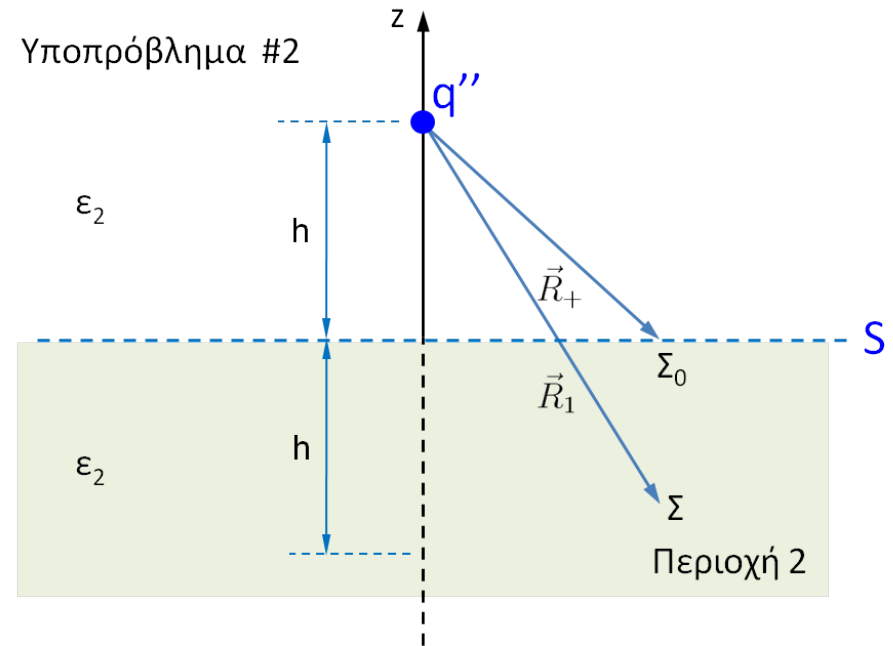
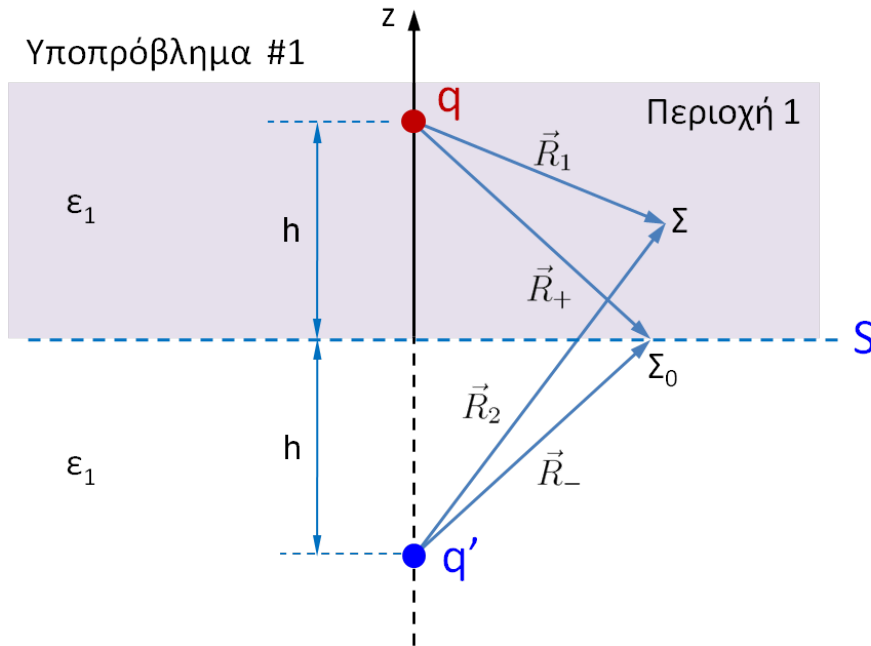
Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά
Σημειακό φορτίο πάνω από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια
μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών



$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi_1 &= -\frac{q}{\epsilon_1}\delta(\vec{r}-h\hat{i}_z) \\ \nabla^2\Phi_2 &= 0 \\ \Phi_1|_{|z|\rightarrow\infty} &= 0 \\ \Phi_1|_{z=0} &= \Phi_2|_{z=0} \\ D_{1z}(z=0) &= D_{2z}(z=0)\end{aligned}$$

Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά

Σημειακό φορτίο πάνω από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών



$$\nabla^2 \Phi_1 = -\frac{q}{\epsilon_1} \delta(\vec{r} - h\hat{z}_z)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0$$

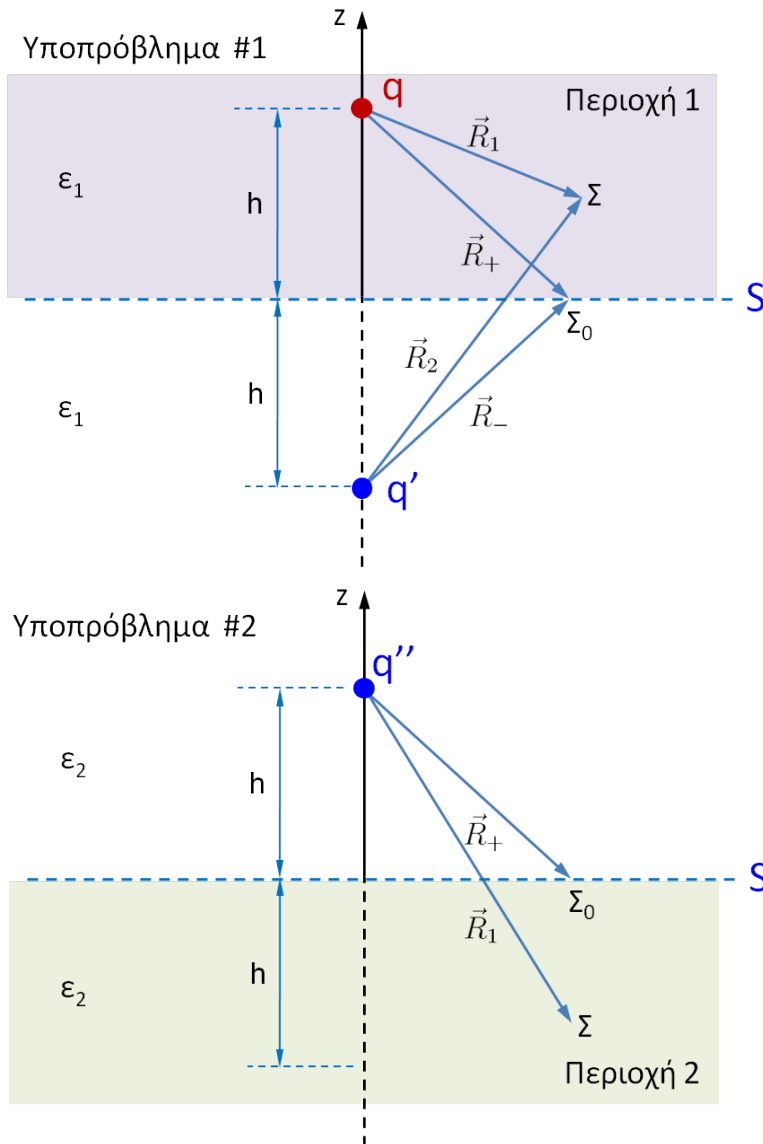
$$\Phi_1|_{|z| \rightarrow \infty} = 0$$

$$\Phi_1|_{z=0} = \Phi_2|_{z=0}$$

$$D_{1z}(z=0) = D_{2z}(z=0)$$

Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά

Σημειακό φορτίο πάνω από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών



Περιοχή 1: $z \geq 0$

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{q}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}} + \frac{q'}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{1/2}} \right\}$$

$$\vec{E}_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{q[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z - h)\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{3/2}} + \frac{q'[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z + h)\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{3/2}} \right\}$$

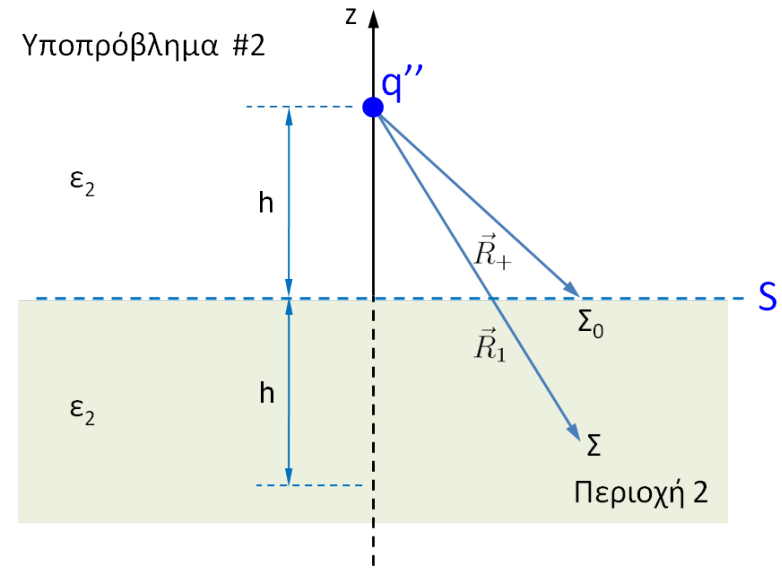
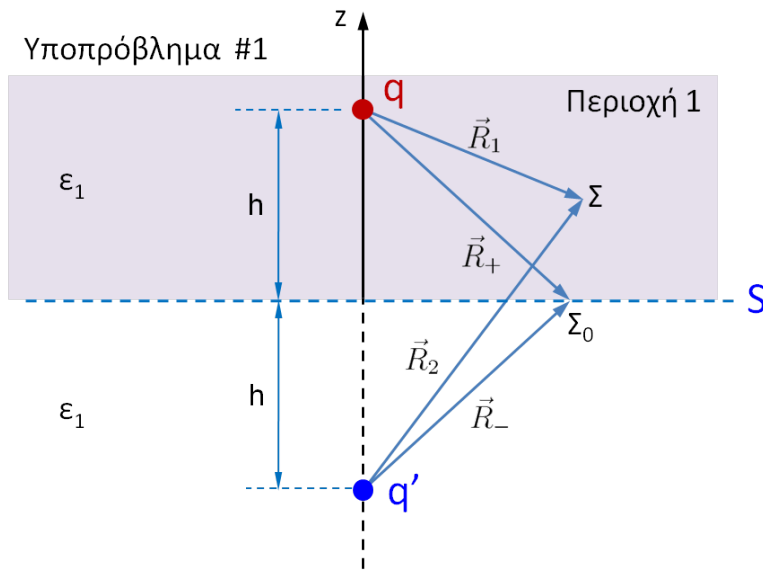
Περιοχή 2: $z \leq 0$

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{q''}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}} \right\}$$

$$\vec{E}_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{q''[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z - h)\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{3/2}} \right\}$$

Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά

Σημειακό φορτίο πάνω από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών



$$\Phi_1|_{z=0} = \Phi_2|_{z=0} \implies$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{q}{[x^2 + y^2 + h^2]^{1/2}} + \frac{q'}{[x^2 + y^2 + h^2]^{1/2}} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{q''}{[x^2 + y^2 + h^2]^{1/2}} \right\} \implies$$

$$\frac{1}{\epsilon_1}(q + q') = \frac{1}{\epsilon_2}q''$$

$$D_{1z}(z=0) = D_{2z}(z=0)$$

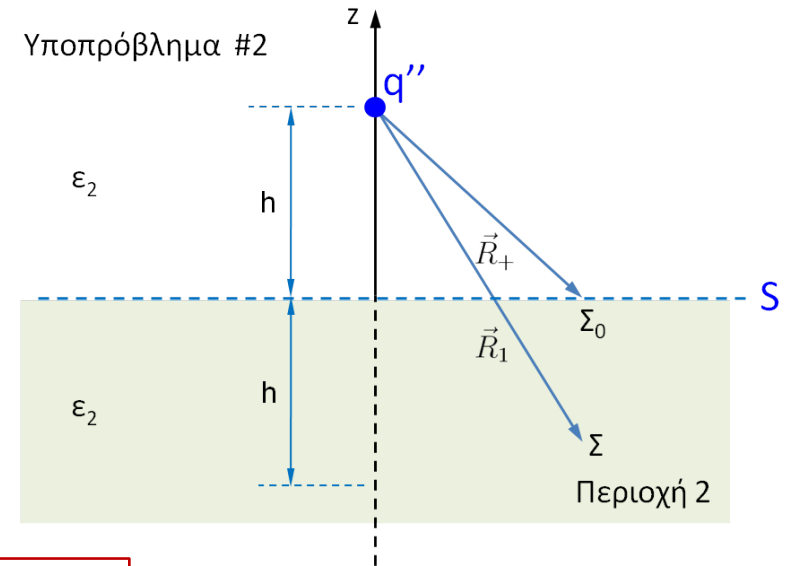
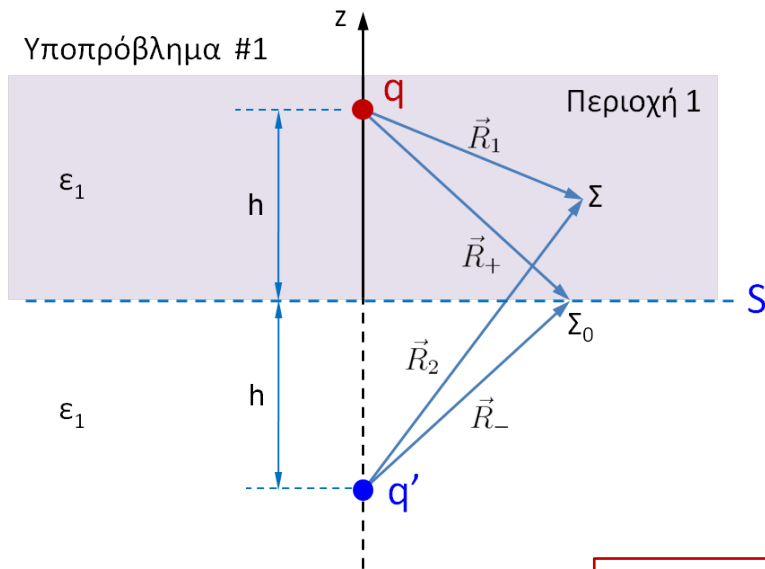
$$\epsilon_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{q[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y - h\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}} + \frac{q'[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + h\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}} \right\} = \epsilon_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{q''[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y - h\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}} \right\} \implies$$

$$-q + q' = -q''$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi_1 &= -\frac{q}{\epsilon_1}\delta(\vec{r} - h\hat{i}_z) \\ \nabla^2\Phi_2 &= 0 \\ \Phi_1|_{|z|\rightarrow\infty} &= 0 \\ \Phi_1|_{z=0} &= \Phi_2|_{z=0} \\ D_{1z}(z=0) &= D_{2z}(z=0) \end{aligned}$$

Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά

Σημειακό φορτίο πάνω από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών

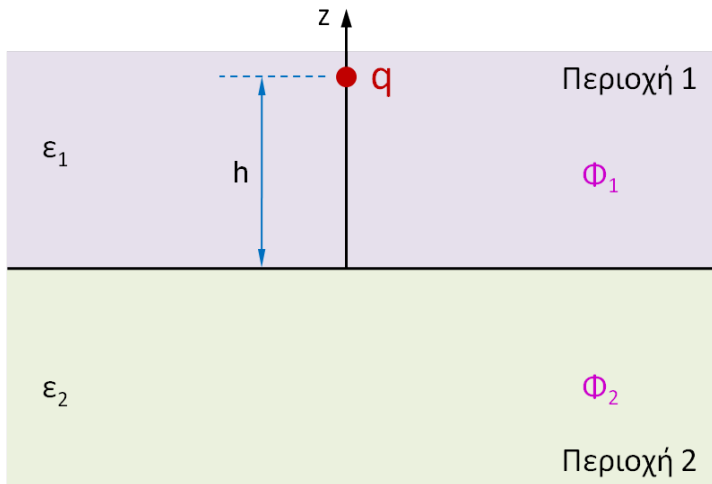


$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά

Σημειακό φορτίο πάνω από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια
μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών



Περιοχή 1: $z \geq 0$

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{q}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}} + \frac{q'}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{1/2}} \right\}$$

$$\vec{E}_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{q[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z - h)\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{3/2}} + \frac{q'[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z + h)\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{3/2}} \right\}$$

Περιοχή 2: $z \leq 0$

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{q''}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}} \right\}$$

$$\vec{E}_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{q''[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z - h)\hat{i}_z]}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{3/2}} \right\}$$

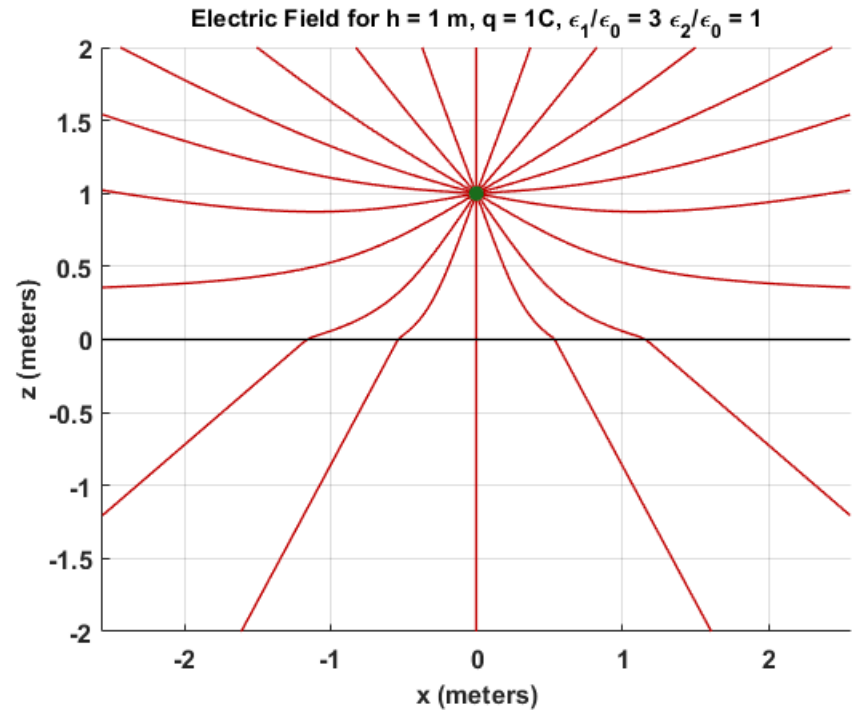
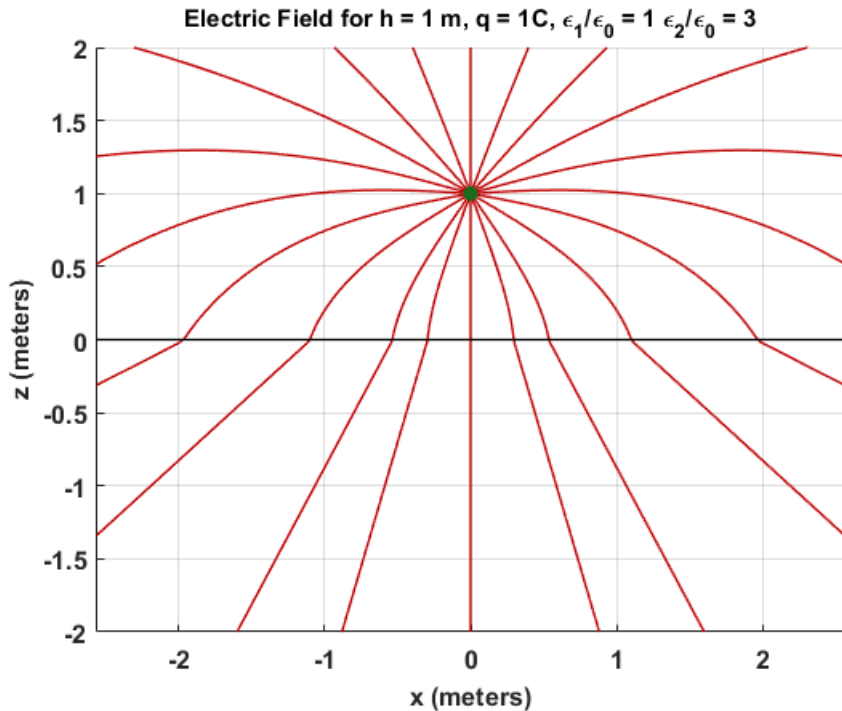
$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά

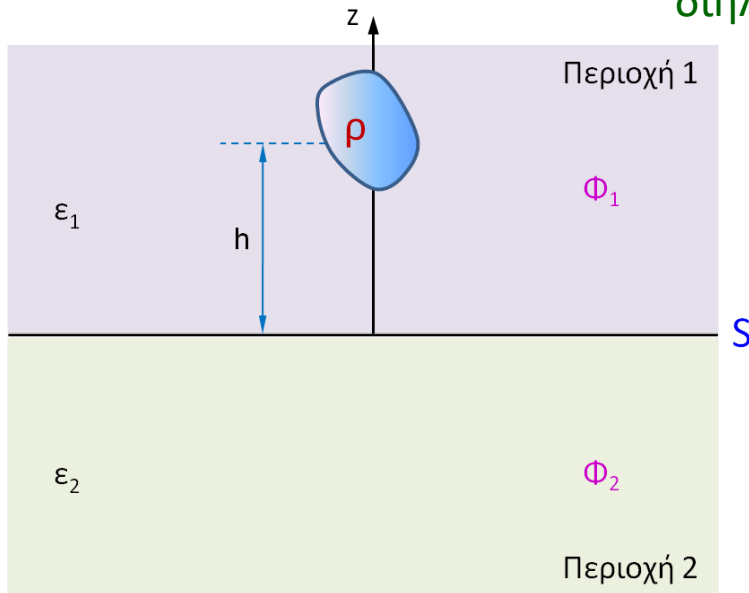
Σημειακό φορτίο πάνω από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια
μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών

Παράδειγμα



Μέθοδος των Ειδώλων σε Διηλεκτρικά Υλικά

Φορτίο πάνω από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών υλικών



$$\rho'(\vec{r}') = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho(\vec{r}')$$

$$\rho''(\vec{r}'') = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rho(\vec{r}'')$$

