

**ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ  
ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΥΚΝΩΤΩΝ ΣΤΗΝ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ**

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV = -\frac{1}{2} \int_V \nabla \phi_e \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \int_V \phi_e \nabla \cdot \vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\phi_e \vec{D}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \phi_e \rho_u dV - \frac{1}{2} \oint_S \phi_e \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_V \phi_e dQ = \frac{1}{2} \sum_i \phi_{ei} Q_i = \frac{1}{2} \sum_i \phi_{ei} \oint_{S_i} \vec{D} \cdot d\vec{S} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \phi_{ei} \sum_j \iint_{S: i \rightarrow j} \vec{D} \cdot d\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \sum_i \phi_{ei} \sum_j Q_{ij}, \quad Q_{ij} \equiv C_{ij} (\phi_{ei} - \phi_{ej}), \quad Q_{ij} = -Q_{ji}, \quad C_{ij} = C_{ji}, \quad C_{ii} = 0 \\
 \hat{C}_{ij} &\equiv -C_{ij} + \delta_{ij} \sum_k C_{ik} = \hat{C}_{ji}, \quad \hat{C}_{ii} = \sum_k C_{ik} \\
 W_e &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \hat{C}_{ij} \phi_{ei} \phi_{ej}
 \end{aligned}$$

**ΑΠΟΘΗΚΕΥΜΕΝΗ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ  
ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΗΝΙΩΝ ΣΤΗ ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ**

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{A} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{H} dV + \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J}_u dV + \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J}_u dV = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \iint_{S_i} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i I_i \iint_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \sum_i I_i \psi_i \equiv \frac{1}{2} \sum_i I_i \sum_j \psi_{ij} \equiv, \quad \psi_i \equiv \oint_{C_i} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{l}(\vec{r}_i), \quad \vec{A}(\vec{r}_i) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_j I_j \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}(\vec{r}_j)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \\
 L_{ij} &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}(\vec{r}_j) \cdot d\vec{l}(\vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}, \quad L_{ij} = L_{ji}, \quad \psi_{ij} = L_{ij} I_j \\
 W_m &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} I_i I_j
 \end{aligned}$$