

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

6.1 Γενικές και εισαγωγικές πληροφορίες

6.1.1 Οι εξισώσεις Poisson και Laplace σε δυναμικά και πεδία

Η Λαπλασιανή (ο τελεστής του Laplace) ∇^2 παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ας επαναληφθεί ότι μπορεί να εφαρμοσθεί τόσο σε βαθμωτές συναρτήσεις, όπως είναι οι Φ , $\Phi_{\text{επ}}$ και Φ_m , αλλά και οι καρτεσιανές συνιστώσες του \mathbf{A} , όσο και σε διανυσματικές, όπως η \mathbf{A} , με διαφορετικό, όμως, ορισμό και περιεχόμενο. Συγκεκριμένα, σε βαθμωτή συνάρτηση F , η Λαπλασιανή ορίζεται ως η απόκλιση της κλίσης, ενώ σε διανυσματική συνάρτηση \mathbf{A} , ορίζεται ως η κλίση της απόκλισης μείον την περιστροφή της περιστροφής:

$$\nabla^2 F = \nabla \cdot (\nabla F), \quad (6.1-1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (6.1-2)$$

Η βαθμωτή Λαπλασιανή $\nabla^2 F$ εκφράζεται ως άθροισμα τριών μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στα τρία βασικά συστήματα συντεταγμένων είναι:

$$\begin{aligned} \nabla^2 F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (\text{Καρτεσιανό}), \\ &= \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \frac{\partial F}{\partial r_T} \right) + \frac{1}{r_T^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (\text{κυλινδρικό}), \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \quad (\text{σφαιρικό}). \end{aligned} \quad (6.1-3)$$

Η γενική έκφραση σε τυχόν τρισσορθογώνιο σύστημα παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.4 του Μέρους Α (Πίνακας Α.4-1). Αντίθετα, η διανυσματική Λαπλασιανή $\nabla^2 \mathbf{A}$ είναι διάνυσμα και έχει τρεις συνιστώσες. Για τις καρτεσιανές και μόνο συνιστώσες x , y και z ισχύει η ισότητα $\mathbf{i}_x \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla^2 (\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{A}) = \nabla^2 A_x$, όπου η συνιστώσα $A_x(\mathbf{r})$ μπορεί να εκφρασθεί ως $A_x(x, y, z)$, αλλά και ως $A_x(r_T, \varphi, z)$, ή $A_x(r, \theta, z)$. Τότε, η $\nabla^2 A_x$ δίδεται από την αντίστοιχη έκφραση της σχέσης (6.1-3). Αντίθετα, για τις μη καρτεσιανές συνιστώσες εν γένει είναι $\mathbf{i}_s \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) \neq \nabla^2 (\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{A})$, με $s = \{r_T, \varphi, r, \theta\}$ στα συνηθισμένα συστήματα συντεταγμένων. Οι σχετικές εκφράσεις παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α.4 του Μέρους Α (Πίνακας Α.4-2), κι ας μη χρειάζονται εδώ.

Μονάδες Λαπλασιανής: Η Λαπλασιανή περιγράφει διπλή παραγωγή ως προς το χώρο (που μετράται σε μέτρα), οπότε προφανώς οι μονάδες της είναι τα αντίστροφα μέτρα στο τετράγωνο, $[\nabla^2] = \text{m}^{-2}$, σε αντίθεση με τα Μαθηματικά, όπου η Λαπλασιανή, όπως άλλωστε και η απόσταση, είναι αδιάστατη.

Εξισώσεις Laplace και Poisson (ορισμοί): Βαθμωτή εξίσωση Laplace είναι η ομογενής εξίσωση:

$$\nabla^2 F = 0. \quad (6.1-4)$$

Διανυσματική εξίσωση Laplace είναι η ομογενής εξίσωση:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0, \quad (6.1-5)$$

η οποία, αν το διάνυσμα \mathbf{A} εκφρασθεί με τις καρτεσιανές συνιστώσες του $\mathbf{A} = \mathbf{i}_x A_x + \mathbf{i}_y A_y + \mathbf{i}_z A_z$ (και μόνο τότε), ισοδυναμεί με τις τρεις βαθμωτές εξισώσεις:

$$\nabla^2 A_x = 0, \quad \nabla^2 A_y = 0, \quad \nabla^2 A_z = 0. \quad (6.1-6)$$

Βαθμωτή εξίσωση Poisson είναι η αντίστοιχη μη ομογενής εξίσωση:

$$\nabla^2 F = f. \quad (6.1-7)$$

Παρόμοια, η διανυσματική εξίσωση Poisson έχει τη μορφή:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{f}, \quad (6.1-8)$$

η οποία, μπορεί να υποκατασταθεί από τις τρεις βαθμωτές εξισώσεις Poisson:

$$\nabla^2 A_x = f_x, \quad \nabla^2 A_y = f_y, \quad \nabla^2 A_z = f_z. \quad (6.1-9)$$

μόνο αν τα διανύσματα \mathbf{A} και \mathbf{f} αναλυθούν σε καρτεσιανές συνιστώσες, οι οποίες ωστόσο μπορούν να περιγραφούν σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

Εξισώσεις Laplace και Poisson σε δυναμικά και πεδία: Σε πολλές διατάξεις, όπως σε μεγάλο βαθμό έχει αναφερθεί στις οικείες ενότητες και συνοψίζεται εδώ, συναντώνται οι εξισώσεις Laplace ή Poisson, βαθμωτές ή διανυσματικές. Κοινά γνωρίσματα όλων αυτών των διατάξεων είναι τα ακόλουθα:

- Συνήθως αναφέρονται σε μόνιμη κατάσταση, $\partial/\partial t = 0$, όπως στην Ηλεκτροστατική (παράγρ. 5.2.3) και στη μόνιμη ροή ρεύματος (παράγρ. 5.2.4) για το βαθμωτό δυναμικό Φ , στη Μαγνητοστατική για το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} (παράγρ. 5.3.3) ή για το δυνα-

μικό Φ_m (παράγρ. 5.3.4), αλλά υπάρχουν και χρονομεταβλητές διατάξεις, $\partial/\partial t \neq 0$, όπως για το επαγωγικό δυναμικό $\Phi_{επ}$ (παράγρ. 5.2.5) και για το βαθμωτό δυναμικό Φ με συνθήκη *Coulomb* (παράγρ. 5.4.1), καθώς επίσης για την περιγραφή ρυθμών *TEM* σε γραμμή μεταφοράς. [Σε γραμμή μεταφοράς, βλ. σελ. 391 κ.επ. και σελ. 421 κ.επ. στο Μέρος Α, διαδίδονται κύματα με την ταχύτητα του φωτός, με πλάτη που μπορούν να περιγραφούν ως $\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp \Phi_\perp$ ή ως $\mathbf{H}_\perp = -\nabla_\perp \Phi_{\perp m}$, όπου ∇_\perp είναι η διδιάστατη κλίση (χωρίς τον όρο $\mathbf{i}_z \partial/\partial z$). Τότε τα δυναμικά περιγράφονται από τη διδιάστατη εξίσωση του *Laplace*, $\nabla_\perp^2 \Phi_\perp = 0$ ή $\nabla_\perp^2 \Phi_{\perp m} = 0$ (χωρίς τον όρο $\partial^2/\partial z^2$).]

- Σε κάθε περίπτωση, η περιοχή του χώρου, στην οποία αναφέρεται η εξίσωση *Laplace* ή *Poisson*, καταλαμβάνεται από ομογενές υλικό, τουλάχιστον ως προς την ιδιότητα (επιτρεπτικότητα ϵ , ειδική αγωγιμότητα g , μαγνητική διαπερατότητα μ) που χαρακτηρίζει και επηρεάζει το συγκεκριμένο φαινόμενο. Αν το υλικό δεν είναι ομογενές, τότε το φαινόμενο δεν περιγράφεται από τον τελεστή του *Laplace*, αλλά είναι $\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi)$, ή $\nabla \cdot (g \nabla \Phi)$, ή $\nabla \cdot (\mu \nabla \Phi_m)$ ή $\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})$, όταν αντίστοιχα είναι $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$, ή $g = g(\mathbf{r})$, ή $\mu = \mu(\mathbf{r})$.]
- Σε ορισμένες περιπτώσεις υπάρχει πρόσθετη απαίτηση να μηδενίζεται εκ ταυτότητας κάποια ποσότητα, ώστε να είναι δυνατή αυτή καθαυτή η διαδικασία που οδηγεί στον τελεστή του *Laplace*. Για παράδειγμα, το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m έχει νόημα μόνο αν στην περιοχή που μελετάται δεν υπάρχει χωρική πυκνότητα ρεύματος (πρέπει να είναι $\mathbf{J} = 0$) και όμοια για να έχει νόημα το επαγωγικό δυναμικό $\Phi_{επ}$ πρέπει να είναι $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$, ενώ τέλος στις γραμμές μεταφοράς οι ρυθμοί *TEM* προϋποθέτουν $E_z = 0$ και $H_z = 0$, και μόνο τότε τα πεδία μπορούν να περιγραφούν μέσω των Φ_\perp ή $\Phi_{\perp m}$.
- Όλες οι περιπτώσεις του προηγούμενου σημείου καταλήγουν σε ομογενή διαφορική εξίσωση, η οποία είναι η εξίσωση του *Laplace*, $\nabla^2 \Phi_{επ} = 0$, $\nabla^2 \Phi_m = 0$, $\nabla_\perp^2 \Phi_\perp = 0$ και $\nabla_\perp^2 \Phi_{\perp m} = 0$, όταν το μέσο είναι ομογενές. Αντίθετα, οι λοιπές περιπτώσεις κατ' αρχήν περιγράφονται σε ομογενές μέσο από την εξίσωση του *Poisson*, αλλά με διαβαθμίσεις, ως προς το πόσο πιθανόν είναι να είναι μη μηδενικός ο μη ομογενής όρος (η δεξιά πλευρά) σε πρακτικές εφαρμογές. Έτσι, στη μόνιμη ροή ρεύματος είναι κατ' αρχήν δυνατόν να είναι $-g \nabla^2 \Phi = \dot{\rho} \neq 0$, αλλά κατά κανόνα είναι $-g \nabla^2 \Phi = \rho = 0$. Επίσης, σε διηλεκτρικά μέσα, που κατά κανόνα είναι μονωτές, δύσκολα εισάγονται φορτία, ώστε συνήθως είναι $-\epsilon \nabla^2 \Phi = \rho = 0$, και αν είναι $\dot{\rho} \neq 0$ ή $\rho \neq 0$, τότε η διατύπωση του προβλήματος συμπληρώνεται με τη σχέση που τα συνδέει με το δυναμικό. Αντίθετα, ροή ρεύματος παραγόμενη από εξωτερική δράση είναι εφικτή, ώστε να είναι συνηθισμένο το

ενδεχόμενο $\mathbf{J} \neq 0$. Τότε απαιτείται να χρησιμοποιηθεί το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} , το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση του *Poisson*, $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$, και αποκλείεται η χρήση του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού Φ_m , που εφαρμόζεται μόνο όπου είναι $\mathbf{J} = 0$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η πυκνότητα \mathbf{J} θεωρείται γνωστή εκ των προτέρων από την επίλυση ενός χωριστού προβλήματος μόνιμης ροής ηλεκτρικού ρεύματος).

Εκτός από τις περιπτώσεις που έχουν ήδη αναφερθεί, η εξίσωση του *Poisson*, και ειδικότερα η διανυσματική, είναι δυνατόν να σχηματισθεί, με τον τελεστή ∇^2 να δρα απευθείας στα πεδία, και όχι στα δυναμικά, εφόσον πρόκειται για ομογενές μέσο. Για παράδειγμα, αν σχηματισθεί η διανυσματική Λαπλασιανή (6.1-2) χρησιμοποιώντας ως αφετηρία τις σχέσεις $\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ και $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, όταν $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, προκύπτουν οι σχέσεις $\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon^{-1} \nabla \rho$ και $\nabla^2 \mathbf{D} = \nabla \rho$ σε διατάξεις με διηλεκτρικά, και παρόμοια οι σχέσεις $\nabla^2 \mathbf{E} = g^{-1} \nabla \rho$ και $\nabla^2 \mathbf{J} = \nabla \rho$ σε διατάξεις μόνιμης ροής ρεύματος. Οι εξισώσεις αυτές δεν παρουσιάζουν κανένα πλεονέκτημα σε σχέση με την εξίσωση $\nabla^2 \Phi = -\epsilon^{-1} \rho$, ή την $\nabla^2 \Phi = -g^{-1} \rho$, αλλά αντίθετα έχουν το σοβαρό μειονέκτημα ότι είναι διανυσματικές και, συνεπώς, πιο δύσχρηστες. Με την ίδια διαδικασία προκύπτει και η σχέση $\nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$ (ή, $\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu \nabla \times \mathbf{J}$) σε διατάξεις στατικού μαγνητικού πεδίου. Η εξίσωση για το πεδίο \mathbf{H} είναι διανυσματική, όπως όμως και εκείνη για το δυναμικό \mathbf{A} , ακριβώς όπως διανυσματικά ολοκληρώματα εμπλέκονται τόσο στο ολοκλήρωμα επαλληλίας, $\mathbf{A} = (\mu/4\pi) \int dV' \mathbf{J}/R$, όσο και στο νόμο *Biot-Savart*, $\mathbf{H} = (1/4\pi) \int dV' \mathbf{J} \times \mathbf{R}/R^3$.

Οριακές συνθήκες: Τα δυναμικά και τα πεδία (οι παράγωγοι των δυναμικών) είναι εν γένει συνεχείς συναρτήσεις, εκτός από επιφάνειες, γραμμές, ή σημεία με ιδιαιτερότητες, όπως η ασυνέχεια στις ιδιότητες ϵ , g , ή μ του χώρου στη διεπιφάνεια μεταξύ διαφορετικών υλικών, η παρουσία συγκεντρωμένων κατανομών φορτίων ή ρευμάτων (όπως, επιφανειακών σ , \mathbf{K} κλπ.) ή ακόμα και η παρουσία διπολικών κατανομών. Εκεί οι εξισώσεις *Laplace* ή *Poisson* συμπληρώνονται από συνθήκες που περιγράφουν τις ασυνέχειες που εκδηλώνονται. Οι σχετικές σχέσεις έχουν γραφεί στις οικείες παραγράφους. Ας σημειωθεί μόνο ότι από τα διάφορα αίτια ασυνέχειας, όσα σχετίζονται με ασυνέχεια στις ιδιότητες ϵ , g , ή μ του χώρου είναι κατά κανόνα γνωστά εκ των προτέρων, τουλάχιστον σε προβλήματα ανάλυσης, εκείνα που αντιπροσωπεύουν ρεύματα (\mathbf{K} ή i) για τα δυναμικά \mathbf{A} και Φ_m , και χρονικές μεταβολές μαγνητικής ροής για το δυναμικό $\Phi_{επ}$ συνήθως θεωρούνται γνωστά, ενώ τα αίτια (π.χ. σ , $\dot{\sigma}$) σε διατάξεις ηλεκτροστατικής και μόνιμης ροής ρεύματος συνήθως προκύπτουν μετά την επίλυση ενός προβλήματος οριακών τιμών, όπως παρουσιάζεται στην παράγραφο που ακολουθεί.

6.1.2 Προβλήματα οριακών τιμών για τον τελεστή του Laplace

Όριο εφαρμογής ολοκληρωμάτων επαλληλίας: Όταν η εξίσωση *Poisson* αναφέρεται σε ομογενή χώρο με άπειρη έκταση, τότε η λύση της δίδεται από το ολοκλήρωμα επαλληλίας. Για παράδειγμα, η $\nabla^2 \Phi = -(1/\epsilon)(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}_0)$, με τις συνθήκες ασυνέχειας που περιγράφουν τη συνεισφορά συγκεντρωμένων κατανομών φορτίων και διπόλων, έχει ως λύση την έκφραση:

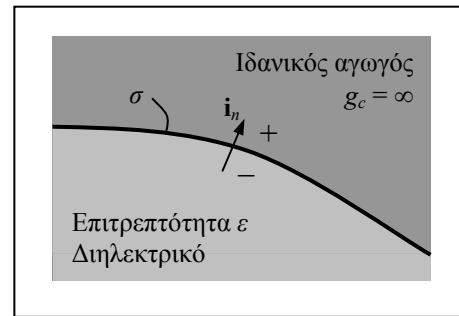
$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int dQ' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) + \int d\mathbf{p}' \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right) \right], \quad (6.1-10)$$

όπως έχει παρουσιασθεί στις παραγρ 5.2.1 και 5.2.2, και αντίστοιχα για τα άλλα δυναμικά.

Οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του ολοκληρώματος επαλληλίας συχνά δεν ικανοποιούνται. Τέτοιες περιπτώσεις είναι όταν:

- Οι ιδιότητες εξαρτώνται από το χώρο, π.χ. είναι $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$. Τότε είναι πάλι π.χ. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, αλλά $\mathbf{D} = -\epsilon\nabla\Phi$, με αποτέλεσμα $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\epsilon\nabla\Phi) = -\epsilon\nabla^2\Phi - (\nabla\epsilon) \cdot (\nabla\Phi) \neq \nabla^2\Phi$. Η πιο συχνή περίπτωση με $\nabla\epsilon \neq 0$ είναι η βηματική μεταβολή, από ϵ_- σε ϵ_+ .

- Τα αίτια, δηλαδή τα φορτία ή ρεύματα, δεν είναι όλα γνωστά εκ των προτέρων, αλλά εξαρτώνται από τα πεδία, συνεπώς τη ζητούμενη συνάρτηση Φ , σε συνδυασμό με τις εκ των προτέρων γνωστές ιδιότητες του χώρου. Για παράδειγμα, σε διηλεκτρικό, του οποίου το εξωτερικό όριο είναι σε επαφή με ιδανικό αγωγό (με $g_c = \infty$), όπως στο **Σχήμα 6.1-1**, πρέπει στον εξωτερικό αυτό χώρο να είναι $\mathbf{E}_c = (g_c^{-1})\mathbf{J}_c \rightarrow 0$ (με $\mathbf{J}_c \neq \infty$), οπότε θα είναι και $\mathbf{D}_c = \epsilon_c\mathbf{E}_c = 0$. Ως αποτέλεσμα, στο όριο του αγωγού αναπτύσσεται $\sigma = -\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{D}_- = \epsilon \mathbf{i}_n \cdot \nabla\Phi_-$, εξαρτώμενο από το δυναμικό Φ στη μη αγωγίμη όψη της διαχωριστικής επιφάνειας, θεωρώντας το αγωγίμο υλικό στην όψη «+».



Σχήμα 6.1-1

Καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών τιμών είναι εκείνο που έχει μία και μοναδική λύση. Για το δυναμικό F , περιγράφοντας με το σύμβολο αυτό οποιοδήποτε από τα $\{\Phi, \Phi_{\text{επ}}, A_x, A_y, A_z, \Phi_m, \Phi_{\perp}, \Phi_{\perp m}\}$, ένα μέρος από τη διατύπωση του προβλήματος στο χώρο V , με $f(\mathbf{r})$ γνωστή συνάρτηση, είναι η διαφορική εξίσωση του *Poisson*, ή του *Laplace*, αν είναι $f=0$:

$$\nabla^2 F = -f(\mathbf{r}), \quad \text{στο χώρο } V, \quad (6.1-11)$$

ή γενικότερα διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ελλειπτικού τύπου, όπως $\nabla \cdot (\epsilon\nabla\Phi) = 0$ κλπ.

Εκτός από τη διαφορική εξίσωση, η διατύπωση του προβλήματος περιλαμβάνει, ως δεύτερο μέρος, πληροφορίες για τις τιμές του F , ή της κάθετης παραγώγου $\partial F/\partial n$, ή κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού των F και $\partial F/\partial n$, σε ολόκληρη την κλειστή επιφάνεια S που αποτελεί το όριο του χώρου V . Ειδικότερα, σε καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών τιμών η διαφορική εξίσωση (6.1-11), και γενικότερα εξισώσεις ελλειπτικού τύπου, συμπληρώνεται από την οριακή συνθήκη:

$$\alpha(\mathbf{r}_S)F(\mathbf{r}_S) + \beta(\mathbf{r}_S)\frac{\partial F}{\partial n}\Big|_S = \gamma(\mathbf{r}_S), \text{ στην επιφάνεια } S, \quad (6.1-12)$$

όπου:

$F(\mathbf{r}_S) = F(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S)$ οι τιμές του F στην οριακή επιφάνεια S , από την πλευρά του χώρου V ,

$(\partial F/\partial n)|_S = \mathbf{i}_n \cdot (\nabla F)|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S}$ οι τιμές της κάθετης παραγώγου του F , στην επιφάνεια S ,

και $\alpha(\mathbf{r}_S)$, $\beta(\mathbf{r}_S)$ και $\gamma(\mathbf{r}_S)$ είναι γνωστές συναρτήσεις των θέσεων \mathbf{r}_S στην οριακή επιφάνεια S και οι δύο πρώτες από αυτές υπόκεινται στους περιορισμούς:

- (i) Οι $\alpha(\mathbf{r}_S)$ και $\beta(\mathbf{r}_S)$ να μην είναι ετερόσημες, δηλαδή, $\alpha(\mathbf{r}_S)\beta(\mathbf{r}_S) \geq 0$, σε κάθε θέση \mathbf{r}_S ,
- (ii) Οι $\alpha(\mathbf{r}_S)$ και $\beta(\mathbf{r}_S)$ να μη μηδενίζονται ταυτόχρονα σε καμία θέση \mathbf{r}_S , δηλαδή να είναι $(\ell\alpha)^2 + \beta^2 \neq 0$ για οποιοδήποτε μη μηδενικό ℓ (με διαστάσεις μήκους).

Στα προηγούμενα χρησιμοποιήθηκαν οι συμβολισμοί του **Σχήματος 6.1-2**:

V Ο χώρος “μέσα”, εκεί όπου το δυναμικό περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση, ε, g, μ Ιδιότητες του χώρου V [σταθερές, όταν πρόκειται για την εξίσωση (6.1-11)],

V_c Ο υπόλοιπος χώρος (ο “έξω”, με $\varepsilon_c, g_c, \mu_c$),

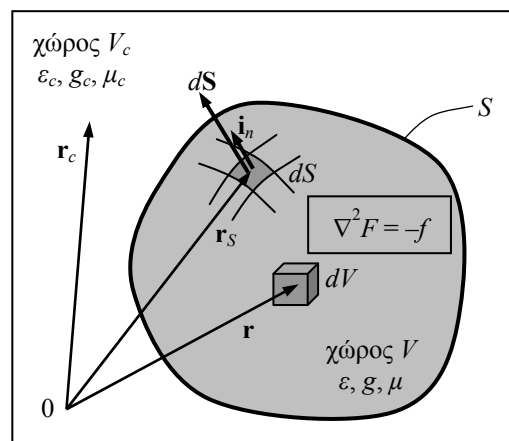
S Όριο μεταξύ των χώρων V και V_c (κλειστή επιφάνεια),

$dS = \mathbf{i}_n dS$, στοιχειώδης επιφάνεια στην S (με εμβαδό dS),

\mathbf{i}_n Μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην S , με φορά από το χώρο V προς τον V_c (προς τα “έξω”),

\mathbf{r}, \mathbf{r}_c Θέσεις στους χώρους V και V_c ,

\mathbf{r}_S Θέσεις στην επιφάνεια S .



Σχήμα 6.1-2

Η αρχή 0 μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε, είτε στο V , είτε στο V_c , είτε ακόμα στην S .

Μοναδικότητα και ύπαρξη λύσης: Με τους παραπάνω ορισμούς και διευκρινίσεις, το πρόβλημα οριακών συνθηκών που αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση (6.1-11) και την οριακή συνθήκη (6.1-12) είναι καλά διατυπωμένο, και συνεπώς έχει μία λύση («ύπαρξη λύσης») που είναι η μοναδική («μοναδικότητα λύσης»). Βέβαια, από φυσική σκοπιά νόημα έχει μία και μόνο τιμή για το πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, και τότε προκύπτει μία και μόνο τιμή για το δυναμικό, από το ολοκλήρωμα $\Phi(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$ με κατάλληλη αφετηρία \mathbf{r}_0 , στην οποία έχει δοθεί η τιμή $\Phi(\mathbf{r}_0)$ του δυναμικού. Το θέμα είναι απλώς, πόσες και ποιες πληροφορίες απαιτεί η μαθηματική περιγραφή, ώστε ούτε να πλεονάζουν και ενδεχομένως να είναι σε αντίφαση, εμποδίζοντας έτσι την ύπαρξη λύσης, ούτε να είναι ελλιπείς, αναιρώντας τη μοναδικότητα.

Το ομογενές πρόβλημα οριακών τιμών έχει $f(\mathbf{r}) = 0$ σε ολόκληρο το χώρο V και $\gamma(\mathbf{r}_S) = 0$ σε ολόκληρη την επιφάνεια S , αποτελείται, δηλαδή, από τις εξισώσεις:

$$\nabla^2 F_{\text{ομ}} = 0, \text{ στο χώρο } V, \quad (6.1-13)$$

$$\alpha(\mathbf{r}_S) F_{\text{ομ}}(\mathbf{r}_S) + \beta(\mathbf{r}_S) \left. \frac{\partial F_{\text{ομ}}}{\partial n} \right|_S = 0, \text{ στην επιφάνεια } S. \quad (6.1-14)$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη ταυτότητα του *Green* (βλ. Παράρτημα Α.5 στο Μέρος Α):

$$\oint_S h(\nabla g) \cdot d\mathbf{S} = \int_V [h\nabla^2 g + (\nabla h) \cdot (\nabla g)] dV, \quad (6.1-15)$$

και θέτοντας $h = g = F_{\text{ομ}}$ (οπότε και είναι $\nabla^2 g = 0$) προκύπτει:

$$\oint_S dS F_{\text{ομ}} \frac{\partial F_{\text{ομ}}}{\partial n} = \int_V |\nabla F_{\text{ομ}}|^2 dV. \quad (6.1-16)$$

Η δεξιά πλευρά είναι θετική, εκτός αν σε ολόκληρο το χώρο V είναι $\nabla F_{\text{ομ}} = 0$. Στην αριστερή πλευρά, τώρα, στο μεν τμήμα της S με $\beta \neq 0$, επιλύοντας την (6.1-14) ως προς $(\partial/\partial n)F_{\text{ομ}}|_S$ η ολοκληρωτέα παράσταση προκύπτει ίση με $(-a/\beta)F_{\text{ομ}}^2|_S \leq 0$ επειδή τα a και β δεν είναι ετερόσημα, ενώ στο υπόλοιπο τμήμα της S , στο οποίο είναι $\beta = 0$ και αναγκαστικά $a \neq 0$ (αν υπάρχει τέτοιο τμήμα), η οριακή συνθήκη απαιτεί $F_{\text{ομ}}|_S = 0$ και εκεί η ολοκληρωτέα παράσταση είναι ίση με μηδέν. Άρα, η αριστερή πλευρά είναι αρνητική ή μηδέν. Συνεπώς:

$$\oint_S [...] dS \leq 0, \text{ ενώ } \int_V [...] dV \geq 0. \quad (6.1-17)$$

Η μόνη δυνατότητα να ικανοποιούν οι δύο πλευρές την ισότητα (6.1-16) είναι όταν και οι δύο είναι ίσες με μηδέν. Όμως, στη δεξιά πλευρά αυτό απαιτεί να είναι παντού $\nabla F_{\text{ομ}} = 0$

και τότε η λύση είναι ίση με μία σταθερή ποσότητα, $F_{ομ} = F_0$. Συνέπεια είναι ότι και στο όριο S πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις $(\partial/\partial n)F_{ομ}|_S = 0$ και $F_{ομ}|_S = F_0 = σταθ.$, και τότε η απαίτηση (6.1-14) απλουστεύεται σε $\alpha F_0 = 0$. Δύο είναι τα ενδεχόμενα:

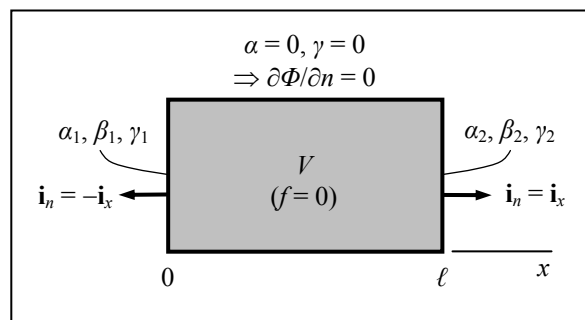
- Αν σε κάποιο τμήμα της S είναι $\alpha \neq 0$, τότε αναγκαστικά είναι $F_0 = 0$. Συνεπώς, τότε είναι $F_{ομ} = 0$ και το ομογενές πρόβλημα οριακών συνθηκών (6.1-13,14) έχει ως μοναδική τη μηδενική λύση, $F_{ομ} = 0$.
- Αν είναι παντού είναι $\alpha = 0$, τότε η τιμή της σταθεράς F_0 δεν μπορεί να προσδιορισθεί. Η μοναδικότητα στη λύση του προβλήματος (6.1-13,14) περιορίζεται στο ότι η κλίση του δυναμικού είναι ίση με μηδέν $\nabla F_{ομ} = 0$.

Η **μοναδικότητα** της λύσης στο πρόβλημα οριακών συνθηκών (6.1-11,12) συνάγεται αμέσως από το προηγούμενο. Αν υπήρχαν περισσότερες λύσεις από μία, όπως οι F_1 και F_2 , τότε η διαφορά τους $F_{ομ} = F_1 - F_2$ θα υπάκουε στο ομογενές πρόβλημα (6.1-13,14). Θα ήταν συνεπώς είτε $F_1 = F_2$ και οι δύο λύσεις θα ταυτίζονταν, αν το όριο περιείχε τμήμα με $\alpha \neq 0$, είτε $\nabla F_1 = \nabla F_2$, δηλαδή $F_1 = F_2 + σταθ.$, αν παντού στο όριο είναι $\alpha = 0$.

Όταν είναι $\alpha = 0$, τότε είναι αναγκαστικά $\beta \neq 0$ και η οριακή συνθήκη (6.1-12) παίρνει τη μορφή $(\partial/\partial n)F|_S = (\gamma/\beta)$ και προσδιορίζει την τιμή της κάθετης παραγώγου του δυναμικού σε ολόκληρο το όριο. Δεν υπάρχει σημείο με γνωστή την τιμή του δυναμικού, ώστε αυτό το σημείο να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για τον υπολογισμό του δυναμικού, με προσδιορισμένη ήδη την κλίση ∇F στο χώρο V .

Αναγκαιότητα για μη ετερόσημα $\alpha(\mathbf{r}_S)$ και $\beta(\mathbf{r}_S)$: Στην απόδειξη της μοναδικότητας, αν κάπου ήταν $\alpha/\beta < 0$, τότε η αριστερή πλευρά θα μπορούσε να ήταν θετική, με αποτέλεσμα την ύπαρξη ενδεχομένως δύο λύσεων. Αυτό, όμως, θα ερχόταν σε αντίφαση με το γεγονός ότι το $F = \{\Phi, \Phi_{επ}, A_x, A_y, A_z, \Phi_m, \Phi_{\perp}, \Phi_{\perp m}\}$ είναι ένα φυσικό μέγεθος, για το οποίο δεν υπάρχει καμία αιτιολογία για να παίρνει διαφορετικές τιμές σε πανομοιότυπες καταστάσεις.

Απλή επίδειξη της αναγκαιότητας για μη ετερόσημα $\alpha(\mathbf{r}_S)$ και $\beta(\mathbf{r}_S)$ φαίνεται από την επίλυση της εξίσωσης *Laplace* στην απλή διάταξη του **Σχήματος 6.1-3**, στην οποία ο χώρος V εκτείνεται στην περιοχή $0 < x < \ell$, με σταθερή διατομή. Στο χώρο V είναι $f = 0$, οπότε η εξίσωση (6.1-11) παίρνει τη μορφή $\nabla^2 F = 0$. Στα τμήματα του ορίου S στο $x = 0$ (όπου $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_x$, συνεπώς $\partial F/\partial n = -\partial F/\partial x$) και στο $x = \ell$



Σχήμα 6.1-3

(όπου $\mathbf{i}_n = +\mathbf{i}_x$, συνεπώς $\partial F/\partial n = +\partial F/\partial x$) οι συναρτήσεις $\{a(\mathbf{r}_S), \beta(\mathbf{r}_S), \gamma(\mathbf{r}_S)\}$ έχουν τις σταθερές τιμές $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ και $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, αντίστοιχα, ενώ στο υπόλοιπο τμήμα της S , την παράπλευρη επιφάνεια στο διάστημα $0 < x < \ell$, είναι $a(\mathbf{r}_S) = 0$ και $\gamma(\mathbf{r}_S) = 0$, οπότε εκεί είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$. Με αυτά τα δεδομένα, για το δυναμικό F δεν αναμένεται εξάρτηση από τις εγκάρσιες συντεταγμένες (επειδή τα $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ και $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ δεν εξαρτώνται από αυτές και στο πλευρικό όριο είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$), άρα αναμένεται μονοδιάστατη εξάρτηση, $F = F(x)$. Επομένως, το πρόβλημα οριακών συνθηκών περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\frac{d^2}{dx^2} F = 0, \quad (6.1-18)$$

$$\alpha_1 F(0) - \beta_1 \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=0} = \gamma_1, \quad \alpha_2 F(\ell) + \beta_2 \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=\ell} = \gamma_2, \quad (6.1-19)$$

που αποτελούν την προσαρμογή στη συγκεκριμένη διάταξη των σχέσεων αντίστοιχα (6.1-11) και (6.1-12). Με διαδοχικές ολοκληρώσεις, η διαφορική εξίσωση δίνει $dF/dx = B$ και $F(x) = A + Bx$, όπου οι σταθερές ολοκλήρωσης A και B προκύπτουν από αντικατάσταση στις δύο οριακές συνθήκες (με $x = 0$ και $x = \ell$). Έτσι, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα ως προς A και B , με ορίζουσα D , η οποία όταν $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ είναι ίση με:

$$D = \alpha_1\alpha_2 \left[\ell + \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \right].$$

Αν έστω και ένα από τα πηλίκα β/α είναι επαρκώς αρνητικό, τότε με κατάλληλη επιλογή του μήκους ℓ θα προέκυπτε $D = 0$, και το σύστημα είτε δεν θα είχε καμία λύση, είτε θα είχε, για ειδικές τιμές των γ_1 και γ_2 , άπειρες λύσεις, απαράδεκτο για τη φυσική ποσότητα $F = A + Bx$. Όμως, λύσεις για τα A και B , άρα και για το F , πρέπει να υπάρχουν σε κάθε περίπτωση και ανεξάρτητα από την θέση των ορίων ή τις ιδιότητές τους, που βέβαια καθορίζουν τη μορφή της λύσης και όχι την ύπαρξή της. Κατά συνέπεια, πρέπει να αποκλεισθεί το ενδεχόμενο αρνητικού πηλίκου β/α . Τα α και β πρέπει να μην είναι ετερόσημα.

Στη διάταξη αυτή είναι $D = 0$ και όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Τότε προκύπτει $A =$ *απροσδιόριστο*, όπως αναμένεται, αφού είναι $a(\mathbf{r}_S) = 0$ σε ολόκληρο το όριο S . Αυτό που προσδιορίζεται είναι μόνο η κλίση $\nabla F = \mathbf{i}_x B$. Όμως προκύπτει $B = -\gamma_1/\beta_1$, αλλά και $B = \gamma_2/\beta_2$. Πρέπει δηλαδή τα δεδομένα υποχρεωτικά να ικανοποιούν την ισότητα $\gamma_1/\beta_1 + \gamma_2/\beta_2 = 0$. Η ισότητα αυτή αντιπροσωπεύει την απαίτηση (6.1-22) που συνοδεύει την αμιγή συνθήκη *Neumann*, στην οποία εξειδικεύεται η οριακή συνθήκη της παρούσας διάταξης, όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Οριακές συνθήκες *Dirichlet* και *Neumann*: Στην πράξη σπάνια συναντάται η οριακή συνθήκη με τη γενικότητα της σχέσης (6.1-12). Συνήθως, οι πληροφορίες, οι οποίες μπορούν να προσδιορισθούν στην αρχική φάση της μαθηματικής διατύπωσης, αφορούν την τιμή του δυναμικού F σε ένα τμήμα S_D της επιφάνειας S (του ορίου του χώρου V) και την τιμή της κάθετης παραγώγου $\partial F/\partial n$ στο υπόλοιπο τμήμα S_N . Τα δύο αυτά ενδεχόμενα ονομάζονται «συνθήκες *Dirichlet*» και «*Neumann*», αντίστοιχα, και συγκεκριμένα είναι:

- Συνθήκη *Dirichlet* ονομάζεται η περίπτωση, κατά την οποία σε κάποιο τμήμα S_D της επιφάνειας S στη γενική οριακή συνθήκη (6.1-12) είναι $\beta(\mathbf{r}_{SD}) = 0$. Τότε αναγκαστικά στο ίδιο τμήμα θα είναι $\alpha(\mathbf{r}_{SD}) \neq 0$ και σημασία έχει μόνο το πηλίκο $F_S(\mathbf{r}_{SD}) = \gamma(\mathbf{r}_{SD})/\alpha(\mathbf{r}_{SD})$, οπότε η συνθήκη *Dirichlet* γράφεται:

$$F(\mathbf{r}_{SD}) = F_S(\mathbf{r}_{SD}), \text{ στην επιφάνεια } S_D \text{ (τμήμα της } S), \text{ με θέσεις } \mathbf{r}_{SD}. \quad (6.1-20)$$

Η ποσότητα $F_S(\mathbf{r}_{SD})$ αντιπροσωπεύει την γνωστή για συνθήκη *Dirichlet* τιμή του δυναμικού $F = \{\Phi, \Phi_{\text{επ}}, A_x, A_y, A_z, \Phi_m, \Phi_{\perp}, \Phi_{\perp m}\}$ στο τμήμα S_D της οριακής επιφάνειας.

- Στη συνθήκη *Neumann* τώρα, σε κάποιο τμήμα S_N της επιφάνειας S είναι $\alpha(\mathbf{r}_{SN}) = 0$ στη γενική οριακή συνθήκη (6.1-12). Τότε, στο τμήμα αυτό είναι $\beta(\mathbf{r}_{SN}) \neq 0$ και, γράφοντας $F_{nS}(\mathbf{r}_{SN}) = \gamma(\mathbf{r}_{SN})/\beta(\mathbf{r}_{SN})$, η συνθήκη *Neumann* παίρνει τη μορφή:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{S_N} = F_{nS}(\mathbf{r}_{SN}), \text{ στην επιφάνεια } S_N \text{ (τμήμα της } S), \text{ με θέσεις } \mathbf{r}_{SN}, \quad (6.1-21)$$

όπου η γνωστή συνάρτηση $F_{nS}(\mathbf{r}_{SN})$ δίνει την τιμή της κάθετης (προς τα “έξω”) παραγώγου του δυναμικού F στο τμήμα S_N της οριακής επιφάνειας του χώρου V . Η φυσική σημασία της είναι προφανής. Αν $F = \Phi$, είναι $F_{nS} \rightarrow \Phi_{nS} = \mathbf{i}_n \cdot \nabla \Phi = -\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}$ και αν $F = \Phi_m$, τότε $F_{nS} \rightarrow \Phi_{mS} = \mathbf{i}_n \cdot \nabla \Phi_m = -\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H}$, ενώ για το διανυσματικό δυναμικό δεν υπάρχει παρόμοια απλή φυσική ερμηνεία για την ποσότητα $F_{nS} \rightarrow \partial A_x/\partial n$ κλπ., επειδή η σύνδεση του \mathbf{A} με τα πεδία εμπλέκει την περιστροφή $\nabla \times \mathbf{A}$ και όχι την κλίση.

Όπως προαναφέρθηκε, στην πράξη συνήθως συναντάται η **μεικτή οριακή συνθήκη**, με τη συνθήκη *Dirichlet* σε ένα τμήμα S_D , είτε συνεκτικό, είτε αποτελούμενο από περισσότερα μέρη, του ορίου S , και με τη συνθήκη *Neumann* στο υπόλοιπο τμήμα S_N . Προκειμένου οι πληροφορίες που χρειάζονται στη σχέση (6.1-12), αλλού με $\beta = 0$ και αλλού με $\alpha = 0$, να είναι διαθέσιμες στην κλειστή επιφάνεια S , πρέπει τα τμήματα S_D και S_N να συναποτελούν αυτή την επιφάνεια, να είναι $S_D + S_N = S$. Αν είναι $S_N = 0$, δηλαδή αν σε ολόκληρη την

επιφάνεια $S (= S_D)$ δίδονται οι πληροφορίες (6.1-20) για την τιμή του δυναμικού F , τότε η συνθήκη είναι αμιγής *Dirichlet*, και όμοια αν σ' ολόκληρη την επιφάνεια S δίδεται η τιμή της κάθετης παραγώγου F_n , όπως στη σχέση (6.1-21), τότε είναι $S_D = 0$ (και $S = S_N$) και πρόκειται για αμιγή συνθήκη *Neumann*.

Σε αμιγή συνθήκη *Neumann*, όταν είναι $\partial F/\partial n = F_{nS}$ σε ολόκληρη την επιφάνεια S , η γνωστή συνάρτηση F_{nS} δεν είναι ελεύθερη, αλλά υπόκειται σε δέσμευση συνδεδεμένη με τη συνάρτηση $f(\mathbf{r})$, τη δεξιά πλευρά της διαφορικής εξίσωσης $\nabla^2 F = -f$. Συγκεκριμένα, η δέσμευση είναι να ικανοποιείται η σχέση:

$$\oint_S F_{nS}(\mathbf{r}_S) dS = -\int_V f(\mathbf{r}) dV, \quad (6.1-22)$$

όπως $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$. Αυτό προκύπτει στη γενική περίπτωση με τα βήματα:

$$\oint_S F_{nS}(\mathbf{r}_S) dS = \oint_S (\mathbf{i}_n dS) \cdot \nabla F = \int_V dV \nabla \cdot (\nabla F) = \int_V dV \nabla^2 F = -\int_V f(\mathbf{r}) dV,$$

όπου το επιφανειακό ολοκλήρωμα αντικαταστάθηκε από χωρικό με το θεώρημα του *Gauss*.

Εμφάνιση συνθηκών *Dirichlet* και *Neumann*: Συχνά, σε πρακτικές εφαρμογές οι ιδιότητες του παρακείμενου χώρου αποτελούν τη βάση για ικανοποιητική προσέγγιση της οριακής συνθήκης από συνθήκη *Dirichlet* ή *Neumann*. Τέτοια ενδεχόμενα περιγράφονται στη συνέχεια. Σε κάθε περίπτωση, V είναι ο χώρος που ενδιαφέρει και που χαρακτηρίζεται από επιτρεπτότητα ε , ειδική αγωγιμότητα g , ή μαγνητική διαπερατότητα μ (ανάλογα με το φαινόμενο που κάθε φορά μελετάται), που οι τιμές τους θεωρούνται εξ ορισμού (επειδή αφορούν το χώρο που ενδιαφέρει) «λογικές», όπως λογικές θεωρούνται και οι τιμές των πεδίων, που συνδέονται με την αντίστοιχη συντακτική σχέση $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$, ή $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Στην επιφάνεια S τερματίζεται ο χώρος V και ακολουθεί ο χώρος V_c , με ιδιότητες ε_c , g_c , ή μ_c . Όταν κάποια από τις ιδιότητες αυτές του V_c έχει πολύ μεγάλη, ή πολύ μικρή τιμή, σε σχέση με τα ε , g , ή μ , ώστε να προσεγγίζεται η τιμή αυτή με το άπειρο ή το μηδέν, συνέπεια της προσέγγισης είναι ότι κάποιο πεδίο μπορεί να θεωρηθεί με μηδενική τιμή σε ολόκληρο το χώρο V_c , άρα και στην όψη “+” της διεπιφάνειας, αυτή που βρίσκεται από την πλευρά του χώρου V_c (βλ. και **Σχήμα 6.1-2β** για τον ορισμό του κάθετου διανύσματος \mathbf{i}_n με φορά προς το χώρο V_c). Ο μηδενισμός αυτού του πεδίου αξιοποιείται κατάλληλα στη συνθήκη που περιγράφει τη συνέχεια αυτού του πεδίου μεταξύ των δύο όψεων της S , ή την ασυνέχεια λόγω παρουσίας γνωστού αιτίου, ώστε να προκύψουν πληροφορίες (συνθήκη *Neumann* ή *Dirichlet*) για το πεδίο ή για το δυναμικό στην όψη “-”, αυτή από την πλευρά του χώρου V .

- Επαφή διηλεκτρικού με ισχυρό διηλεκτρικό. Όταν η επιφάνεια S διαχωρίζει τους χώρους V και V_c , και τους δύο με μονωτικό διηλεκτρικό υλικό, και είναι $\epsilon_c \gg \epsilon$, αυτό μπορεί να προσεγγισθεί ως $\epsilon_c \approx \infty$, με τη συνέπεια $\mathbf{E}_c = \mathbf{D}_c/\epsilon_c \approx 0$. Ολοκληρώνοντας μέσα στο χώρο V_c , με οποιαδήποτε διαδρομή μέχρι οποιοδήποτε σημείο στην οριακή επιφάνεια, θα είναι $\Phi_+(\mathbf{r}_S) = \Phi_{c0} - \int \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{r}' = \Phi_{c0} = \text{σταθ.}$ Λόγω της συνέχειας του δυναμικού μεταξύ των δύο όψεων της S , $\Phi_+ - \Phi_- = 0$, θα είναι $\Phi(\mathbf{r}_S) = \Phi_- = \Phi_{c0}$, δηλαδή, συνθήκη *Dirichlet*. Στην εξεζητημένη περίπτωση να υπάρχει στην οριακή επιφάνεια γνωστό διπολικό στρώμα $p_{S\perp}$ με επιτρεπτότητα ϵ_S στο εσωτερικό του, η συνθήκη *Dirichlet* προσαρμόζεται σε $\Phi_S = \Phi_{c0} - p_{S\perp}/\epsilon_S$, για να ληφθεί υπ' όψιν η αντίστοιχη ασυνέχεια.
- Επαφή διηλεκτρικού με ασθενές διηλεκτρικό. Όταν πάλι εμπλέκονται δύο διηλεκτρικά αλλά στον παρακείμενο χώρο είναι $\epsilon_c \ll \epsilon$, αυτή η ιδιότητα μπορεί να γραφεί ως $\epsilon_c \approx 0$, με την έννοια της πολύ μικρής τιμής σε σχέση με την επιτρεπτότητα του χώρου V που ενδιαφέρει, και χωρίς αυτό να θεωρηθεί, ότι παραβιάζεται η ιδιότητα $\epsilon_c \geq \epsilon_0 \neq 0$ που χαρακτηρίζει όλα τα υλικά. Τώρα, για τον παρακείμενο χώρο θα ληφθεί $\mathbf{D}_c = \epsilon_c \mathbf{E}_c \approx 0$, ποσότητα που εμπλέκεται στη σχέση $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_{c+} - \mathbf{D}_{c-}) = \sigma$. Όμως, η παρουσία των μονωτικών υλικών καθιστά ανέφικτη την εγκατάσταση επιφανειακού φορτίου, οπότε είναι $\sigma = 0$, και επειδή $\mathbf{D}_c \approx 0$, προκύπτει $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{D}_- = \epsilon_- \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}_n \approx 0$, δηλαδή η συνθήκη *Neumann* $\partial\Phi/\partial n|_S = 0$. Αν στην επιφάνεια S υπήρχε επιφανειακό φορτίο, αυτό θα συνέβαινε επειδή εκεί θα υπήρχε ένα λεπτό στρώμα με αγωγίμο υλικό, μέσω του οποίου θα είχε προσαχθεί αυτό το φορτίο. Τότε, όμως, τα δύο διηλεκτρικά δεν θα ήταν σε άμεση επαφή και όριο του χώρου V δεν θα ήταν η διεπιφάνεια με το δεύτερο διηλεκτρικό υλικό, αλλά αυτή με αυτό το αγωγίμο υλικό, κατάσταση που καλύπτεται από τις δύο επόμενες περιπτώσεις.
- Επαφή διηλεκτρικού με ιδανικό αγωγό. Όταν ο χώρος V αποτελείται πάλι από διηλεκτρικό μονωτή με επιτρεπτότητα ϵ , αλλά στον παρακείμενο χώρο V_c υπάρχει αγωγίμο υλικό, με υψηλή τιμή της ειδικής αγωγιμότητας g_c , ώστε να επιτρέπεται η προσέγγιση $g_c = \infty$, τότε εκεί πάλι θα είναι $\mathbf{E}_c \approx 0$, τώρα, όμως, επειδή $\mathbf{E}_c = \mathbf{J}_c/g_c$, οπότε πάλι με ολοκλήρωση στο εσωτερικό του χώρου V_c προκύπτει $\Phi_+(\mathbf{r}_S) = \Phi_{c0} - \int \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{r}' = \Phi_{c0} = \text{σταθ.}$, οπότε και $\Phi(\mathbf{r}_S) = \Phi_- = \Phi_{c0}$, δηλαδή, συνθήκη *Dirichlet*. Η παρουσία επιφανειακής διπολικής πηγής $\dot{p}_{S\perp}(\mathbf{r}_S)$ τροποποιεί την έκφραση αυτή κατά $-\dot{p}_{S\perp}/g_S$. Μετά την επίλυση στο χώρο V , η κάθετη παράγωγος του γνωστού, πλέον, δυναμικού στην οριακή επιφάνεια προσδιορίζει το επιφανειακό φορτίο που έχει εγκατασταθεί εκεί, έχοντας διέλθει μέσω του αγωγού. Συγκεκριμένα, από τη σχέση $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_{c+} - \mathbf{D}_{c-}) = \sigma$ προκύπτει $\sigma(\mathbf{r}_S) = \epsilon_- \partial\Phi_-/\partial n$.

- Επαφή διηλεκτρικού με μέτριο αγωγό. Όταν το αγωγίμο υλικό στο χώρο V_c έχει ειδική αγωγιμότητα g_c , αλλά με τέτοια τιμή που να μη επιτρέπει την προσέγγιση $g_c = \infty$, τότε πρέπει να προηγηθεί η επίλυση στο χώρο με αυτό το υλικό. Όπως περιγράφεται στα επόμενα δύο σημεία, η διατύπωση των οριακών συνθηκών είναι πολύ απλή, αν το υλικό περικλείεται από άλλα αγωγίμα υλικά με πολύ διαφορετικές ιδιότητες, ή μονωτές. Μετά την επίλυση αυτή θα είναι πλέον γνωστή η συνάρτηση $\Phi_c(\mathbf{r})$ στην περιοχή με τον αγωγό, άρα και στο όριο S , με αποτέλεσμα η συνέχεια του δυναμικού μεταξύ των δύο όψεων της S να δίνει τη συνθήκη *Dirichlet* $\Phi(\mathbf{r}_S) = \Phi_{c0}$, με την προαναφερθείσα τροποποίηση, αν εκεί υπάρχει διπολική πηγή. Αντίστοιχα με το προηγούμενο σημείο, μετά την τελική επίλυση προσδιορίζεται το φορτίο της οριακής επιφάνειας. Τώρα, όμως, στην περιοχή V_c το δυναμικό δεν είναι εν γένει σταθερό, οπότε είναι $\sigma(\mathbf{r}_S) = \epsilon_- \partial \Phi_- / \partial n - \epsilon_+ \partial \Phi_+ / \partial n$.
- Επαφή αγωγού με ιδανικό αγωγό. Όταν και στις δύο όψεις της επιφάνειας S υπάρχουν αγωγίμα υλικά, αλλά με ριζικά διαφορετική αγωγιμότητα, ώστε να είναι $g_c \gg g$, πάλι στο χώρο V_c ταιριάζει η προσέγγιση ιδανικού αγωγού, $g_c \approx \infty$ και $\mathbf{E}_c = \mathbf{J}_c / g_c \approx 0$. Με πορεία όπως στο πρώτο σημείο (όταν είναι $\epsilon_c \gg \epsilon$), ολοκληρώνοντας μέσα στο αγωγίμο υλικό προκύπτει $\Phi_+(\mathbf{r}_S) = \Phi_{c0} - \int \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{r}' = \Phi_{c0} = \text{σταθ.}$, και λόγω της συνέχειας του δυναμικού μεταξύ των δύο όψεων της S , η οριακή συνθήκη θα είναι τύπου *Dirichlet*, $\Phi(\mathbf{r}_S) = \Phi_{c0}$, ή $\Phi(\mathbf{r}_S) = \Phi_{c0} - \dot{p}_{S\perp} / g_S$, αν εκεί βρίσκεται και επιφανειακή διπολική πηγή $\dot{p}_{S\perp}$. Στην περίπτωση αυτή, μετά την επίλυση η κάθετη παράγωγος του δυναμικού δίνει πάλι το επιφανειακό φορτίο $\sigma(\mathbf{r}_S) = \epsilon_- \partial \Phi_- / \partial n$. Παράλληλα, η ίδια οριακή επιφάνεια συμπεριφέρεται για το χώρο V ως επιφάνεια που απελευθερώνει (ανά m^2 και sec) φορτία, μ προέλευση, βεβαίως, από το χώρο V_c . Από το νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου προκύπτει εύκολα ότι τα φορτία διατίθενται στο χώρο V με ρυθμό $\dot{\sigma}(\mathbf{r}_S) = g_- \partial \Phi_- / \partial n (= -\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_-)$.
- Επαφή αγωγού με ιδανικό μονωτή. Αν τώρα οι ιδιότητες των δύο αγωγίμων χώρων συνδέονται με αντεστραμμένη την ισχυρή ανισότητα, με $g_c \ll g$, τότε για το χώρο V_c κατάλληλη είναι η προσέγγιση του ιδανικού μονωτή, $g_c \approx 0$ και $\mathbf{J}_c = g_c \mathbf{E}_c \approx 0$. Συνεπώς και στο όριο είναι $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_+ = 0$ (αφού η όψη «+» βρίσκεται στο χώρο V_c) και προκύπτει συνθήκη *Neumann*, $\partial \Phi / \partial n|_S = 0$, με βάση το νόμο διατήρησης φορτίου που δίνει $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_- = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_+$. [Η πλήρης σχέση, $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_- = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_+ - \dot{\sigma} + \nabla \cdot \mathbf{K}$, δεν είναι εδώ η κατάλληλη, επειδή τόσο η έκλυση φορτίου $\dot{\sigma}$ προϋποθέτει καλό αγωγό (όπως στο προηγούμενο σημείο), όσο και το επιφανειακό ρεύμα \mathbf{K} (επειδή αντιπροσωπεύει μικρό πάχος με μεγάλο \mathbf{J} , δηλαδή με μεγάλο g), σε αντίφαση με την παραδοχή ότι ο χώρος V είναι σε επαφή με ιδανικό μονωτή.]

Τα προηγούμενα έξι σημεία καλύπτουν διάφορους συνδυασμούς με διηλεκτρικά ή/και αγώγιμα υλικά, δηλαδή, με υλικά των οποίων η συμπεριφορά συνδέεται με την ανάπτυξη ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} στο εσωτερικό τους (ανεξάρτητα από το αν το δεύτερο πεδίο είναι διαφορετικό, το $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ή το $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$), οπότε σε όλες τις περιπτώσεις η οριακή συνθήκη (*Dirichlet* ή *Neumann*) διατυπώθηκε για το δυναμικό $F = \Phi$. Στα μαγνητικά υλικά η μοναδική αλλά βασική διαφορά είναι ότι τώρα τα αίτια (τα ρεύματα) είναι, κατά κανόνα, γνωστά από πριν. Κατά τα λοιπά, η πορεία είναι παρόμοια, με τα εξής συμπεράσματα:

- Για το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m , όταν ο παρακείμενος χώρος έχει μαγνητικό υλικό με $\mu_c \gg \mu$, η προσέγγιση $\mu_c \approx \infty$ σημαίνει $\mathbf{H}_c = \mathbf{B}_c/\mu_c \approx 0$, με κατάληξη τη συνθήκη *Dirichlet*, $\Phi_m(\mathbf{r}_S) = \Phi_{mc0} - \int_{r_{S0}}^{\mathbf{r}_S} (\mathbf{i}_n \times \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{r} - \sum_i i_i$, όπου συμπεριλαμβάνεται η ασυνέχεια που προκαλείται από τυχόν επιφανειακό ρεύμα στην επιφάνεια S , καθώς και από ρευματοφόρους βρόχους i , αν η επιφάνεια ασυνέχειας ενός βρόχου βρίσκεται στην S .
- Για το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m πάλι, στο αντίθετο όριο $\mu_c \ll \mu$ η προσέγγιση $\mu_c \approx 0$ (μολονότι μεταξύ όλων των υλικών είναι $\mu_{\min} \approx \mu_0 \neq 0$) δίνει ότι $\mathbf{B}_c = \mu_c \mathbf{H}_c \approx 0$. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγεί και η παρουσία ιδανικού αγωγού ($g_c = \infty$) στο χώρο V_c , επειδή τότε είναι $\mathbf{E}_c = \mathbf{J}_c/g_c \approx 0$, οπότε και $\mathbf{B}_c = -\int_{-\infty}^t (\nabla \times \mathbf{E}) dt' \approx 0$. Και στα δύο ενδεχόμενα ($\mu_c \ll \mu$ και $g_c = \infty$) ο νόμος του *Gauss* στην οριακή επιφάνεια δίνει $\mu \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H}_- = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{B}_{c+} = 0$, που αντιστοιχεί σε συνθήκη *Neumann*, $\partial\Phi_m/\partial n|_S = 0$.
- Τέλος, για το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} η παραδοχή $\mathbf{B}_c \approx 0$ του τελευταίου σημείου, είτε βασίζεται στο ενδεχόμενο $\mu_c \ll \mu$, είτε στο $g_c = \infty$, σημαίνει ότι $\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_{c0} = \text{σταθ.}$, επειδή στον παρακείμενο χώρο είναι $\nabla \times \mathbf{A}_c = 0$ και $\nabla \cdot \mathbf{A}_c = 0$. Συνεπώς, για τις καρτεσιανές συνιστώσες του \mathbf{A} , άρα και για το \mathbf{A} ως διάνυσμα, προκύπτει συνθήκη *Dirichlet*, $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_{c0}$, επεκτεινόμενη σε $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_{c0} + \mu_S \mathbf{i}_n \times \mathbf{m}_S$, αν η επιφάνεια S περιέχει και διπολικό στρώμα, με διπολική ροπή \mathbf{m}_S και με μαγνητική διαπερατότητα μ_S στο εσωτερικό του.

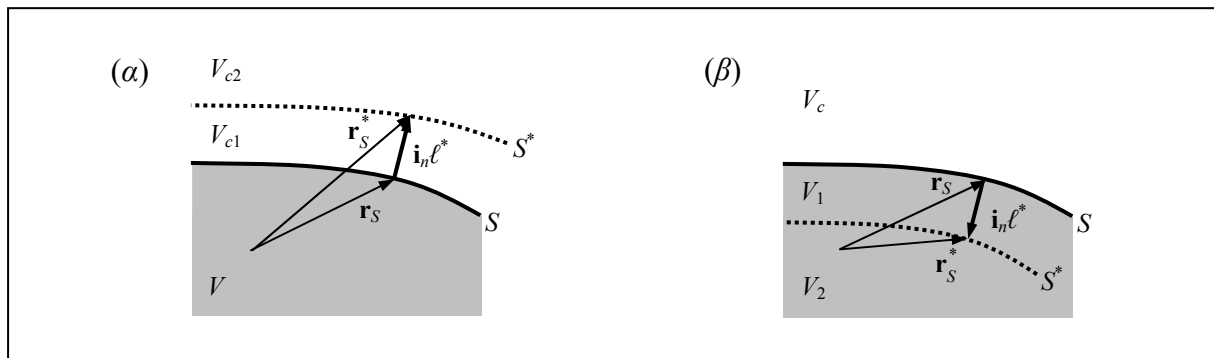
Τα προηγούμενα εκδηλώνονται στο όριο ενός αντιστάτη ή ενός πυκνωτή (βλ. παράγρ. 2.2.4 στο Μέρος Α), που στο μέρος που είναι σε επαφή με τους οπλισμούς επικρατεί συνθήκη *Dirichlet*, με μορφή $\Phi(\mathbf{r}_S) = \Phi_{\pm} = \text{σταθ.}$ (= το δυναμικό κάθε οπλισμού), ενώ στο υπόλοιπο μέρος επικρατεί ομογενής συνθήκη *Neumann*, $\partial\Phi/\partial n|_S = 0$. Αντίστοιχα συμβαίνουν και στις επεκτάσεις τους, τα συστήματα αγωγιμοτήτων και χωρητικότητων. Άλλα **παραδείγματα** για τη διατύπωση των οριακών συνθηκών από τις ιδιότητες του παρακείμενου χώρου V_c παρουσιάζονται στην παράγραφο 6.1.3, σε συνδυασμό με την επίλυση διατάξεων, στις οποίες το ζητούμενο δυναμικό συνάγεται ότι εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή.

Γενική οριακή συνθήκη: Αν σε κάποια περιοχή της επιφάνειας S δεν είναι ούτε $\alpha = 0$, ούτε $\beta = 0$, τότε εκεί η γενική συνθήκη (6.1-12), $\alpha(\mathbf{r}_S)F(\mathbf{r}_S) + \beta(\mathbf{r}_S)(\partial F/\partial n)|_S = \gamma(\mathbf{r}_S)$, δεν απλοποιείται ούτε σε συνθήκη *Neumann*, ούτε σε *Dirichlet*. Αφού είναι $\alpha(\mathbf{r}_S) \neq 0$, μπορεί να εισαχθεί το μήκος $\ell(\mathbf{r}_S) = \beta/\alpha > 0$, επειδή οι συναρτήσεις α και β είναι ομόσημες, και η συνάρτηση $F^*(\mathbf{r}_S) = \gamma/\alpha$, ώστε η οριακή συνθήκη να πάρει τη μορφή:

$$F(\mathbf{r}_S) + \ell(\mathbf{r}_S) \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_S = F^*(\mathbf{r}_S). \quad (6.1-23)$$

Η συνθήκη αυτή δεν εμφανίζεται συχνά. Πάντως, είναι δυνατό να της αποδοθεί φυσικό περιεχόμενο. Αναγνωρίζοντας την αριστερή πλευρά ως τους δύο πρώτους όρους σε ανάπτυγμα *Taylor*, $F(\mathbf{r}_S + \mathbf{i}_n \ell) = F(\mathbf{r}_S) + \ell \mathbf{i}_n \cdot \nabla F|_S + \frac{1}{2} \ell^2 (\mathbf{i}_n \cdot \nabla)^2 F|_S + \dots$, θα υπάρχει κατάλληλη τιμή $\ell^*(\mathbf{r}_S)$, ώστε η οριακή συνθήκη να γραφεί ως $F(\mathbf{r}_S + \mathbf{i}_n \ell^*) = F^*(\mathbf{r}_S^*)$, όπου είναι $\ell^* \approx \ell$, ιδιαίτερα αν το μήκος ℓ είναι μικρό, τόσο, ώστε να μπορούν να παραλειφθούν ο τετραγωνικός και οι επόμενοι όροι στο ανάπτυγμα *Taylor*. Με τη μορφή $F(\mathbf{r}_S + \mathbf{i}_n \ell^*) = F^*(\mathbf{r}_S^*)$ η οριακή συνθήκη δηλώνει ότι το δυναμικό έχει την τιμή $F^*(\mathbf{r}_S^*)$ σε μια επιφάνεια S^* στη θέση $\mathbf{r}_S^* = \mathbf{r}_S + \mathbf{i}_n \ell^*$, ενώ ο χώρος V περατώνεται στην επιφάνεια S , στη θέση \mathbf{r}_S , όπου το δυναμικό $F(\mathbf{r}_S)$ είναι άγνωστο.

Αν είναι $\ell^* > 0$, όπως στο **Σχήμα 6.1-4α**, τότε η επιφάνεια S^* βρίσκεται στο χώρο V_c . Αντίθετα, αν είναι $\ell^* < 0$, όπως στο **Σχήμα 6.1-4β**, τότε η επιφάνεια S^* βρίσκεται στο χώρο V και αυτό επιτρέπει να λυθεί ένα πρόβλημα οριακών τιμών στον υποχώρο V_2 , με όριο του την επιφάνεια S^* , στην οποία επικρατεί οριακή συνθήκη *Dirichlet*, $F = F^*(\mathbf{r}_S^*)$. Όμως, από τη λύση αυτού του προβλήματος προσδιορίζεται η κάθετη παράγωγος στο όριο S^* , συνεπώς στον υπόλοιπο υποχώρο V_1 το πρόβλημα οριακών τιμών έχει υπερπροσδιορισμό (στην S^* είναι γνωστή τόσο η τιμή, όσο και η κάθετη παράγωγος). Δεν είναι δυνατόν δηλαδή να είναι $\ell^* < 0$, αλλά μόνο $\ell^* > 0$, υποδηλώνοντας (χωρίς βέβαια αυτό να αποτελεί απόδειξη), ότι κατ' επέκταση φαίνεται λογικό να είναι και $\ell > 0$, δηλαδή τα $\alpha(\mathbf{r}_S)$ και $\beta(\mathbf{r}_S)$ να είναι ομόσημα.



Σχήμα 6.1-4

Θέση μεγίστου και ελαχίστου για το δυναμικό F : Στο Παράρτημα Ε.1.1 αποδεικνύεται, ότι για συναρτήσεις F που ικανοποιούν την εξίσωση του *Laplace*, $\nabla^2 F = 0$, ισχύει:

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial n} + F \frac{\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right] dS, \quad (6.1-24)$$

βλ. σχέση (Ε.1-7). Ως κλειστή επιφάνεια S συνήθως λαμβάνεται το όριο της περιοχής, στο εσωτερικό της οποίας είναι $\nabla^2 F = 0$, ώστε να αξιοποιηθεί η πληροφορία ότι εκεί είναι γνωστός ένας γραμμικός συνδυασμός των F και $\partial F/\partial n$, αλλά αποδεκτή είναι και οποιαδήποτε άλλη επιλογή για την επιφάνεια S , αρκεί στον εσωτερικό χώρο της να είναι $\nabla^2 F = 0$. Ας ληφθεί η επιφάνεια ως σφαιρική, με ακτίνα a , και συνεπώς με εμβαδόν ίσο με $4\pi a^2$ και με το κέντρο της στο σημείο \mathbf{r}_K . Τότε θα είναι $R = a$, όπως και $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{R} = a$, οπότε η σχέση (6.1-24) παίρνει τη μορφή για το δυναμικό του σημείου \mathbf{r}_K :

$$F(\mathbf{r}_K) = a \left\langle \frac{\partial F}{\partial n} \right\rangle_S + \langle F \rangle_S, \quad (6.1-25)$$

όπου με $\langle \dots \rangle_S$ συμβολίζεται η μέση τιμή της περικλειόμενης ποσότητας στη σφαιρική επιφάνεια. Ας υποτεθεί ότι το σημείο \mathbf{r}_K είναι θέση μεγίστου. Τότε, για τον πρώτο όρο της δεξιάς πλευράς προφανώς είναι $\langle \partial F/\partial n \rangle_S < 0$, τουλάχιστον για αρκετά μικρή τιμή της ακτίνας a , και για το δεύτερο όρο εξίσου προφανώς είναι $\langle F \rangle_S < F(\mathbf{r}_K)$, σε αντίφαση με την ισότητα της σχέσης (6.1-25). Με αντιστροφή στη φορά των ανισοτήτων, η ίδια αντίφαση διαπιστώνεται αν το σημείο \mathbf{r}_K θεωρηθεί θέση ελαχίστου. Συνάγεται, συνεπώς, ότι **η λύση της εξίσωσης του *Laplace* δεν μπορεί να έχει ακρότατο στο εσωτερικό του χώρου V** . Αυτή η διαπίστωση δεν αντιβαίνει το γεγονός, ότι κάθε μη σταθερή συνάρτηση $F(\mathbf{r})$ θα έχει τουλάχιστον ένα μέγιστο και ελάχιστο. Επειδή αποκλείεται το εσωτερικό του χώρου V , τα ακρότατα θα βρίσκονται στο όριο S του χώρου αυτού. Αν όμως η θέση \mathbf{r}_K ληφθεί στην οριακή επιφάνεια S του χώρου V , τότε η σφαίρα, όσο μικρή ακτίνα και να έχει, θα περιέχει μέρος από τα άγνωστα αίτια που βρίσκονται στην οριακή επιφάνεια S και στον παρακείμενο χώρο V_c , και στο εσωτερικό της σφαίρας θα είναι $\nabla^2 F \neq 0$, ενώ η σχέση (6.1-24) αφορά περιοχές με $\nabla^2 F = 0$ στο χώρο V .

Η ιδιότητα αυτή, ότι τα ακρότατα της F δεν βρίσκονται στο εσωτερικό του V , αναφέρεται και στο Παράρτημα Ε.1.2, ως απόρροια της ισότητας $\langle F \rangle_S = F(\mathbf{r}_K)$ που αποδεικνύεται εκεί. Είναι χρήσιμη για αποτροπή άστοχων επιλογών: Γινόμενα συναρτήσεων με εναλλασσόμενο πρόσημο έχουν ακρότατα, άρα δεν είναι δυνατόν να είναι λύσεις της εξίσωσης *Laplace*. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $F = (\text{σταθ.}) \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z)$ είναι $\nabla^2 F \neq 0$.

Δύο βασικές ιδιότητες της εξίσωσης του *Laplace* είναι αυτές που μόλις αναφέρθηκαν, συγκεκριμένα, η σχέση (6.1-24) και ότι $\langle F \rangle_S = F(\mathbf{r}_K)$ για οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο \mathbf{r}_K . Τρίτη βασική ιδιότητα είναι η λεγόμενη «αρχή της ελάχιστης ενέργειας». Η πλήρης παρουσίαση και τεκμηρίωση αυτών των ιδιοτήτων, με ορισμένες επεκτάσεις, γίνεται στις ενότητες του **Παραρτήματος Ε.1**. Οι ιδιότητες αυτές αποτελούν τη βάση για διάφορες αριθμητικές και προσεγγιστικές τεχνικές, όπως αυτές που παρουσιάζονται στην παράγραφο 6.3.

Επαλληλία: Το πρόβλημα οριακών συνθηκών $\nabla^2 F|_V = -f$ και $(\alpha F + \beta \partial F / \partial n)|_S = \gamma$ είναι γραμμικό ως προς την άγνωστη ποσότητα F και τις γνωστές $f(\mathbf{r})$ και $\gamma(\mathbf{r}_S)$, οπότε επιδέχεται επαλληλία. Έτσι, με $f = \sum_j f_j(\mathbf{r})$ και $\gamma = \sum_j \gamma_j(\mathbf{r}_S)$ σχηματίζονται τα επιμέρους προβλήματα:

$$\nabla^2 F_j = -f_j(\mathbf{r}), \quad \text{στο χώρο } V, \quad (6.1-26)$$

$$\alpha(\mathbf{r}_S) F_j(\mathbf{r}_S) + \beta(\mathbf{r}_S) \left. \frac{\partial F_j}{\partial n} \right|_S = \gamma_j(\mathbf{r}_S), \quad \text{στην επιφάνεια } S, \quad (6.1-27)$$

των οποίων οι λύσεις $F_j(\mathbf{r})$ αθροιζόμενες δίνουν $F(\mathbf{r}) = \sum_j F_j$, που ικανοποιεί το αρχικό πρόβλημα και συνεπώς είναι η μοναδική λύση του.

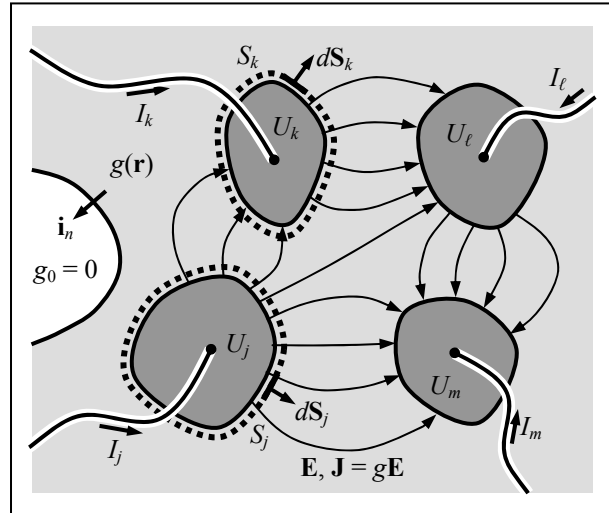
Επισημαίνεται ότι στην οριακή συνθήκη καθενός από τα επιμέρους προβλήματα οι συντελεστές $\alpha(\mathbf{r}_S)$ και $\beta(\mathbf{r}_S)$ είναι οι ίδιες συναρτήσεις με αυτές του αρχικού προβλήματος, και μόνο η αρχική συνάρτηση $\gamma(\mathbf{r}_S)$ διασπάται στις επιμέρους γ_j . Αυτή η επισήμανση δεν έχει συνέπειες σε οριακές συνθήκες *Dirichlet* ή *Neumann*, όπου ένα από τα α και β είναι ίσο με μηδέν, ενώ το άλλο ουσιαστικό αντικαθίσταται από τη μονάδα. Έτσι, είναι απλά:

$$\text{Dirichlet } (\beta = 0): \quad F_j(\mathbf{r}_S) = F_{Sj}(\mathbf{r}_S), \quad \text{με } \sum_j F_{Sj} = F_S(\mathbf{r}_S), \quad (6.1-28)$$

$$\text{Neumann } (\alpha = 0): \quad \left. \frac{\partial F_j}{\partial n} \right|_S = F_{nSj}(\mathbf{r}_S), \quad \text{με } \sum_j F_{nSj} = F_{nS}(\mathbf{r}_S). \quad (6.1-29)$$

Τα ίδια συμβαίνουν και αν η διαφορική εξίσωση δεν είναι η εξίσωση *Poisson*, αλλά οι εξισώσεις που περιγράφουν μη ομογενή υλικά με $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$, $g = g(\mathbf{r})$, ή $\mu = \mu(\mathbf{r})$, εξισώσεις που η αριστερή πλευρά τους έχει τη μορφή $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi)$, $\nabla \cdot (g \nabla \Phi)$, $\nabla \cdot (\mu \nabla \Phi_m)$ ή $\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A})$, και όχι $\nabla^2 F$. Και αυτές οι εξισώσεις είναι γραμμικές και επιδέχονται επαλληλία, για παράδειγμα $\nabla \cdot [\varepsilon \nabla (\sum_j \Phi_j)] = \sum_j [\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi_j)]$. Φυσικά, οι ιδιότητες του χώρου, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$, $g = g(\mathbf{r})$ και $\mu = \mu(\mathbf{r})$, δεν αποτελούν αντικείμενο επαλληλίας, αλλά σε κάθε επί μέρους διάταξη έχουν την ίδια κατανομή, όπως στην αρχική διάταξη.

Ένα Σύστημα Αγωγιμοτήτων αποτελεί γενίκευση του μεμονωμένου αντιστάτη, που παρουσιάστηκε στην παράγρ. 2.2.4 του Μέρους Α. Όπως και στην περίπτωση του αντιστάτη, ως σύστημα αγωγιμοτήτων χαρακτηρίζεται μία διάταξη που περιέχει αγωγικό υλικό, στο οποίο αναπτύσσονται τα πεδία \mathbf{E} και $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ (αδιαφορώντας για τα πεδία \mathbf{D} ή \mathbf{B} , τα οποία αν δεν έχουν αμελητέα δράση περιγράφονται μέσω ενός συνυπάρχοντος συστήματος χωρητικότητων ή αλληλεπαγωγών). Σε αντίθεση, όμως, με τον αντιστάτη,



Σχήμα 6.1-5

ένα σύστημα αγωγιμοτήτων επικοινωνεί με το περιβάλλον του (με το υπόλοιπο κύκλωμα) μέσω N , και όχι μόνο δύο οπλισμών, που επίσης θεωρούνται ότι αποτελούνται από ιδανικό αγωγό. Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 6.1-5**, που περιέχει τέσσερις οπλισμούς, καθένας από τους N οπλισμούς, όπως ο οπλισμός j , είναι σε δυναμικό U_j και στον οπλισμό αυτό προσάγεται από το υπόλοιπο κύκλωμα, το εξωτερικό, ρεύμα I_j με πλευρικά μονωμένο καλώδιο. Τέλος, ο χώρος που περιβάλλει τους οπλισμούς και επιτρέπει την επικοινωνία μεταξύ τους εν γένει αποτελείται από διάφορα υλικά, το καθένα με τη δική του τιμή για την ειδική αγωγιμότητα g . Ας γραφεί η ειδική αγωγιμότητα του ενδιάμεσου χώρου ως $g(\mathbf{r})$, υπονοώντας και τη βηματική ασυνέχεια στη διεπιφάνεια μεταξύ διαφορετικών υλικών.

Σε ένα σύστημα αγωγιμοτήτων εκείνο που ενδιαφέρει είναι να συσχετισθούν οι τιμές U_j του δυναμικού σε κάθε οπλισμό j με τα ρεύματα I_k που προσάγονται πάλι σε κάθε οπλισμό k . Αν είναι γνωστή η κατανομή του ηλεκτροστατικού δυναμικού Φ στον ενδιάμεσο χώρο, οπότε το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ και αντίστοιχα η πυκνότητα ρεύματος θα εκφράζεται ως $\mathbf{J} = -g(\mathbf{r})\nabla\Phi$, στην κάθε κλειστή επιφάνεια S_j που περιβάλλει τον οπλισμό j θα είναι:

$$U_j = \Phi|_{S_j}, \quad I_j = -\int_{S_j} d\mathbf{S}_j \cdot (g\nabla\Phi), \quad (6.1-30)$$

Η πρώτη από αυτές τις σχέσεις αποτελεί απλώς εφαρμογή της συνθήκης συνέχειας, $\Phi_+ = \Phi_-$, στο όριο κάθε οπλισμού, με δεδομένη την υψηλή τιμή της ειδικής αγωγιμότητας στο εσωτερικό του, οπότε $\mathbf{E} = 0$ και $\Phi = \text{σταθ} = U_j$. Η δεύτερη σχέση περιγράφει τη διατήρηση του φορτίου κάθε οπλισμού, με $\partial/\partial t = 0$, και με τη φορά των $d\mathbf{S}_j$ προς το “έξω” κάθε οπλισμού.

Για να προσδιορισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ πρέπει να διατυπωθεί το αντίστοιχο πρόβλημα οριακών τιμών. Η κατανομή του δυναμικού στον ενδιάμεσο αγωγίμο χώρο περιγράφεται από τη σχέση $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, δηλαδή, τη διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \nabla(g(\mathbf{r})\nabla\Phi) &= 0, \\ \text{με } g_+(\mathbf{i}_n \cdot \nabla\Phi_+^{(j)}) &= g_-(\mathbf{i}_n \cdot \nabla\Phi_-^{(j)}) \text{ στις ασυνέχειες.} \end{aligned} \quad (6.1-31)$$

Στις περιοχές με ομογενή υλικά, που αποτελούν και τον κανόνα, η πρώτη σχέση υποκαθίσταται από την εξίσωση του *Laplace*, $\nabla^2\Phi = 0$. Η δεύτερη σχέση αναφέρεται σε επιφάνειες μεταξύ διαφορετικών υλικών, στις οποίες υπάρχει βηματική ασυνέχεια, από g_+ σε g_- . Η σχέση αυτή προέρχεται από το νομο διατήρησης φορτίου σε επιφάνεια, $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = -\partial\sigma/\partial t - \nabla \cdot \mathbf{K}$, με $\partial/\partial t = 0$ σε μόνιμη κατάσταση και με $\mathbf{K} = 0$, επειδή πρόκειται για απλή διεπιφάνεια μεταξύ υλικών, χωρίς λεπτό στρώμα με υψηλή αγωγιμότητα. Αν η βηματική ασυνέχεια υποκατασταθεί από συνεχή συνάρτηση $g(\mathbf{r})$, που απλώς στις διεπιφάνειες μεταξύ υλικών έχει μεγάλη κλίση, τότε η σχέση (6.1-31β) είναι περιττή.

Το όριο του αγωγίμου χώρου αποτελείται από τμήματα με διαφορετική συμπεριφορά: Από εκείνα σε επαφή με τους οπλισμούς, και από εκείνα με μονωτικά υλικά, ανεξάρτητα από το αν αποτελούν θυλάκους στο εσωτερικό του αγωγίμου χώρου, ή αν περιβάλλουν συνολικά τη διάταξη. Θεωρώντας ότι είναι γνωστά τα δυναμικά των οπλισμών, στα όρια S_j με τους οπλισμούς η οριακή συνθήκη για το δυναμικό έχει ήδη γραφεί, είναι η συνθήκη *Dirichlet* της σχέσης (6.1-30α). Σε επαφή τώρα με τους μονωτές, το δυναμικό υπακούει σε ομογενή οριακή συνθήκη *Neumann*, ‘οπως προκύπτει από τη διατήρηση φορτίου, $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = -\partial\sigma/\partial t - \nabla \cdot \mathbf{K}$, με $\partial/\partial t = 0$ και $\mathbf{K} = 0$, για τους λόγους που προαναφέρθηκαν, και με $\mathbf{J}_+ = 0$, επειδή η όψη “+” ανήκει σε χώρο με μηδενική αγωγιμότητα. Επομένως, η οριακή συνθήκη που συνοδεύει τη διαφορική εξίσωση (6.1-31α), ή την εξίσωση *Laplace*, όπου ταιριάζει, είναι:

$$\begin{cases} \Phi = U_j & \text{στις επιφάνειες } S_j \text{ των οπλισμών,} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 & \text{στο υπόλοιπο όριο (με μονωτικά υλικά).} \end{cases} \quad (6.1-32)$$

Για να επιλυθεί το πρόβλημα οριακών τιμών (6.1-31) και (6.1-32) σε γενικούς όρους, η κατάλληλη πορεία είναι να εφαρμοσθεί επαλληλία, ειδικότερα στη συνθήκη (6.1-32α), τη μόνη σχέση που δεν είναι ομογενής. Συγκεκριμένα, γράφοντας:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_j \Phi^{(j)}(\mathbf{r}), \quad (6.1-33)$$

στο επιμέρους πρόβλημα (j) μηδενίζεται το δυναμικό όλων των οπλισμών, εκτός από αυτό του οπλισμού j , οπότε το πρόβλημα αυτό αποτελείται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \nabla(g(\mathbf{r})\nabla\Phi^{(j)})=0 \quad [\text{ή, } \nabla^2\Phi^{(j)}=0], \\ \text{με } g_+(\mathbf{i}_n \cdot \nabla\Phi_+^{(j)})=g_-(\mathbf{i}_n \cdot \nabla\Phi_-^{(j)}) \text{ στις ασυνέχειες,} \end{aligned} \quad (6.1-34)$$

$$\begin{cases} \Phi^{(j)}=U_j & \text{στην επιφάνεια } S_j \text{ του οπλισμού } j, \\ \Phi^{(j)}=0 & \text{στις επιφάνειες } S_k \text{ των οπλισμών } k \neq j, \\ \frac{\partial}{\partial n}\Phi^{(j)}=0 & \text{στο υπόλοιπο όριο (με μονωτικά υλικά).} \end{cases} \quad (6.1-35)$$

Ουσιαστικά, το επιμέρους πρόβλημα (j) αντιπροσωπεύει έναν απλό αντιστάτη, με τη μόνη διαφορά ότι ο γειωμένος οπλισμός του απλού αντιστάτη εδώ αποτελείται από περισσότερα του ενός ιδανικά αγωγίμα σώματα (όλους τους οπλισμούς με $k \neq j$). [Σε μαθηματική ορολογία, ο γειωμένος οπλισμός καταλαμβάνει χώρο μη συνεκτικό.]

Στο επιμέρους πρόβλημα (j), το ρεύμα που προσάγεται σε κάθε οπλισμό είναι:

$$\begin{aligned} I_k^{(j)} &= -\int_{S_k} d\mathbf{S}_k \cdot (g\nabla\Phi^{(j)}), \quad k \neq j \\ I_j^{(j)} &= -\int_{S_j} d\mathbf{S}_k \cdot (g\nabla\Phi^{(j)}) = -\sum_{k \neq j} I_k^{(j)}, \end{aligned} \quad (6.1-36)$$

υπενθυμίζοντας ότι η φορά των $d\mathbf{S}_j$ είναι από το εσωτερικό κάθε οπλισμού προς τον περιβάλλοντα χώρο. Η εναλλακτική έκφραση, αυτή με την άθροιση, στη σχέση (6.1-36β) περιγράφει τη διατήρηση του ολικού φορτίου της διάταξης (j), με $\partial/\partial t = 0$.

Τα ρεύματα στις σχέσεις (6.1-36) πρέπει να είναι ανάλογα προς το δυναμικό U_j , τη μόνη μη μηδενική ελεύθερη παράμετρο της διάταξης (j), όπως άλλωστε περιγράφει ο νόμος του *Ohm*, $I = GU$, σε απλό αντιστάτη. Θεωρώντας ότι είναι $U_j > 0$, τότε στον οπλισμό j το ρεύμα είναι πράγματι προσαγόμενο, ενώ σε όλους τους άλλους οπλισμούς είναι απαγόμενο (αρνητικό). Για να είναι θετικοί οι συντελεστές αναλογίας, όπως σε έναν απλό αντιστάτη η αγωγιμότητα G είναι θετική, οι σχέσεις μπορούν να γραφούν ως:

$$\begin{aligned} I_k^{(j)} &= -G_{k,j}^{(j)}U_j, \quad \text{με } G_{k,j}^{(j)} = \int_{S_k} d\mathbf{S}_k \cdot \left(g\nabla \frac{\Phi^{(j)}}{U_j} \right), \quad (k \neq j) \\ I_j^{(j)} &= G_{j,j}^{(j)}U_j, \quad \text{με } G_{j,j}^{(j)} = \sum_{k \neq j} G_{k,j}^{(j)}. \end{aligned} \quad (6.1-37)$$

Οι συντελεστές $G_{k,j}$ έχουν ως μονάδες τα *Siemens* (τα αντίστροφα *Ohm*) και ορίζονται από τα αναφερόμενα ολοκληρώματα, στα οποία η κλίση ∇ δρα στο αδιάστατο πηλίκο $\Phi^{(j)}/U_j$.

Αθροίζοντας τις σχέσεις (6.1-37) ως προς όλα τα επιμέρους προβλήματα, υπολογίζεται το ρεύμα κάθε οπλισμού:

$$I_k = \sum_j I_k^{(j)} = \sum_{j \neq k} -G_{k,j}^{(j)} U_j + G_{k,k}^{(k)} U_k. \quad (6.1-38)$$

Η σχέση αυτή αναφέρεται σε καθέναν από τους N οπλισμούς, δηλαδή πρόκειται για ένα σύστημα γραμμικών σχέσεων που δίνει τις τιμές των N ρευμάτων I_k με βάση τις τιμές των ίσου πλήθους δυναμικών U_k . Όμως, το σύστημα δεν είναι αντιστρέψιμο, ώστε να προσδιορισθούν τα δυναμικά από τα ρεύματα. Αυτό φαίνεται, παρατηρώντας ότι:

- ο Αν στο δυναμικό όλων των οπλισμών προστεθεί οποιαδήποτε σταθερά ΔU , αυτό δεν επηρεάζει το ηλεκτρικό πεδίο, άρα και τα ρεύματα θα διατηρήσουν τις τιμές I_k . Συνεπώς, το αντίστροφο σύστημα έχει το άπειρο πλήθος λύσεων $U_j + \Delta U$.
- ο Για το άθροισμα των ρευμάτων είναι $\sum_k I_k = 0$, με βάση το νόμο διατήρησης φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι στις N σχέσεις (6.1-38) υπάρχει γραμμική εξάρτηση και η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν, οπότε το σύστημα δεν αντιστρέφεται.

Αυτές οι παρατηρήσεις οδηγούν στην επιλογή, να αποδοθεί σε έναν από τους οπλισμούς, π.χ. στον τελευταίο ($j = N$), η ιδιότητα της «γης», και να θεωρηθεί ότι είναι $U_N = 0$, με αντίστοιχη προσαρμογή στις τιμές U_j των λοιπών οπλισμών, ώστε αυτός ο οπλισμός να εξαιρεθεί από τις σχέσεις (6.1-38), επειδή απλά είναι $I_N = -\sum_{k \neq N} I_k$. Με αυτή την επέμβαση, ένα σύστημα αγωγιμοτήτων περιγράφεται, τελικά, από τις σχέσεις:

$$I_{k \neq N} = \sum_{j=1}^{N-1} g_{k,j} U_j, \quad \text{ή, } \bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{U}} \quad I_N = -\sum_{k=1}^{N-1} I_k, \quad U_N = 0, \quad (6.1-39)$$

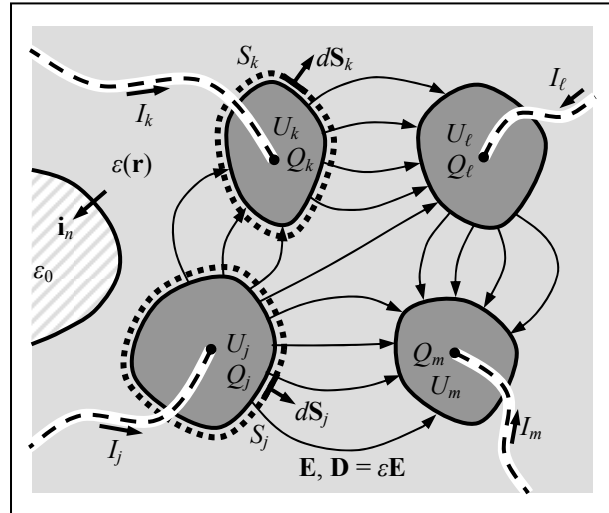
με:

$$g_{k,j \neq k} = -G_{k,j}^{(j)} = -\int_{S_k} d\mathbf{S}_k \cdot \left(\mathbf{g} \nabla \frac{\Phi^{(j)}}{U_j} \right), \quad (6.1-40)$$

$$g_{k,k} = G_{k,k}^{(k)} = \sum_{j \neq k} G_{j,k}^{(k)}.$$

Στο γραμμικό σύστημα (6.1-39) και σε γραφή πινάκων, το $\bar{\mathbf{I}}$ είναι πίνακας-στήλη με στοιχεία τα ρεύματα I_k , όμοια ο πίνακας-στήλη $\bar{\mathbf{U}}$ έχει ως στοιχεία τα δυναμικά U_j , ενώ τέλος ο πίνακας $\bar{\mathbf{g}}$, με διαστάσεις $(N-1) \times (N-1)$, αποτελείται από τους **συντελεστές αγωγιμότητας** $g_{k,j}$.

Ένα Σύστημα Χωρητικοτήτων αποτελεί γενίκευση του μεμονωμένου πυκνωτή (παράγρ. 2.2.4 του Μέρους Α), σε πλήρη αντιστοιχία με το σύστημα αγωγιμοτήτων σε σχέση με το μεμονωμένο αντιστάτη. Ένα σύστημα χωρητικοτήτων παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.1-6**, το οποίο αποτελεί προσαρμοσμένο αντίγραφο του **Σχήματος 6.1-5**, ώστε να επισημανθούν οι αντιστοιχίες και οι διαφορές. Πάλι υπάρχουν N ιδανικά αγώγιμοι οπλισμοί, με τον οπλισμό j σε δυναμικό U_j .



Σχήμα 6.1-6

Μολονότι σε κάθε οπλισμό πάλι προσάγεται

ρεύμα I_j , η δεύτερη ποσότητα που χαρακτηρίζει κάθε οπλισμό είναι το ηλεκτρικό φορτίο Q_j . Τέλος, ο ενδιάμεσος χώρος αποτελείται από διηλεκτρικό υλικό, στο οποίο αναπτύσσονται τα πεδία \mathbf{E} και $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, με την επιτρεπτότητα να είναι ενδεχομένως συνάρτηση του χώρου. Τα ενδεχόμενα πεδία \mathbf{J} ή \mathbf{B} εντάσσονται σε συστήματα αγωγιμοτήτων ή αλληλεπαγωγών.

Σε ένα σύστημα χωρητικοτήτων ενδιαφέρει να συσχετισθούν οι τιμές U_j του δυναμικού κάθε οπλισμού j με το αντίστοιχο φορτίο Q_k , που συγκεντρώνεται πάλι σε κάθε οπλισμό k . Αντίστοιχα με τη σχέση (6.1-30), αυτές οι ποσότητες συνδέονται με το δυναμικό Φ ως:

$$U_j = \Phi|_{S_j}, \quad Q_j = - \int_{S_j} d\mathbf{S}_j \cdot (\epsilon \nabla \Phi), \quad (6.1-41)$$

με τη δεύτερη σχέση να αποδίδει το νόμο του *Gauss* για το ηλεκτρικό πεδίο. Το δυναμικό Φ περιγράφεται από αντίστοιχο πρόβλημα οριακών τιμών, όπως οι σχέσεις (6.1-31), αλλά με την αντικατάσταση $g \rightarrow \epsilon$. Εφαρμόζεται η ίδια επαλληλία, στην επιμέρους διάταξη (j) να είναι $\Phi^{(j)} = U_j$ στο όριο του οπλισμού j και $\Phi^{(j)} = 0$ στο όριο των υπόλοιπων, οπότε το επιμέρους πρόβλημα (j) περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon(\mathbf{r}) \nabla \Phi^{(j)}) &= 0, \quad [\text{ή, } \nabla^2 \Phi^{(j)} = 0] \\ \text{με } \epsilon_+ (\mathbf{i}_n \cdot \nabla \Phi_+^{(j)}) &= \epsilon_- (\mathbf{i}_n \cdot \nabla \Phi_-^{(j)}) \text{ στις ασυνέχειες,} \end{aligned} \quad (6.1-42)$$

και:

$$\begin{cases} \Phi^{(j)} = U_j & \text{στην επιφάνεια } S_j \text{ του οπλισμού } j, \\ \Phi^{(j)} = 0 & \text{στις επιφάνειες } S_k \text{ των οπλισμών } k \neq j, \end{cases} \quad (6.1-43)$$

Η μόνη διαφοροποίηση σε σχέση με τη διάταξη αγωγιμοτήτων είναι η απουσία της συνθήκης *Neumann*, $(\partial/\partial n)\Phi^{(j)} = 0$, από τις σχέσεις (6.1-43), σε σχέση με τις σχέσεις (6.1-35). Αυτό οφείλεται στο ότι η ελάχιστη τιμή της επιτρεπτότητας, η τιμή ϵ_0 για το κενό, δεν είναι μηδενική. Αν, όμως, η διάταξη περιέχει μόνο υλικά με $\epsilon \gg \epsilon_0$ και υλικά με $\epsilon \approx \epsilon_0$, χωρίς να υπάρχουν υλικά με ενδιάμεσες τιμές, τότε η προσέγγιση $\epsilon_0 \approx 0$ είναι αποδεκτή. Στα όρια με τέτοια υλικά μπορεί να εφαρμοσθεί η ομογενής συνθήκη *Neumann*, και οι συνθήκες (6.1-35) επαναλαμβάνονται αυτούσιες.

Η συνέχεια είναι πανομοιότυπη με την περίπτωση του συστήματος αγωγιμοτήτων. Το φορτίο κάθε οπλισμού στο επιμέρους πρόβλημα (j) δίδεται από σχέσεις όπως οι (6.1-36), με $g \rightarrow \epsilon$ και $I \rightarrow Q$, και αναγνωρίζεται ότι το φορτίο και η τάση πρέπει να είναι ανάλογα ποσά, όπως περιγράφεται και από τη σχέση $Q = CU$ του μεμονωμένου πυκνωτή, που ουσιαστικά τέτοια είναι η διάταξη (j). Η αναλογία αυτή οδηγεί σε σχέσεις ακριβώς όπως οι (6.1-37), με τις αντικαταστάσεις $g \rightarrow \epsilon$, $I \rightarrow Q$ και $G \rightarrow C$ (με μονάδες τα *Farad*). Η επιλογή των προσημών, ταυτόσημη με της σχέσης (6.1-37), βασίζεται τώρα στο γεγονός ότι ο οπλισμός σε υψηλότερο δυναμικό έχει θετικό φορτίο.

Το φορτίο κάθε οπλισμού προσδιορίζεται με άθροιση ως προς j . Διαπιστώνεται πάλι ότι το σύστημα που σχηματίζεται δεν είναι αντιστρέψιμο, επειδή, πάλι, μεταβολή των τιμών του δυναμικού κατά ΔU δεν επηρεάζει τις τιμές των φορτίων, ενώ, τώρα, είναι $\sum_k Q_k = 0$. Αυτό αντιμετωπίζεται πάλι εξαιρώντας τον οπλισμό $j = N$, ο οποίος υποτίθεται ότι λειτουργεί ως «γη», με $U_N = 0$, και του οποίου το φορτίο του προσδιορίζεται με απλή άθροιση, $Q_N = \sum_{k \neq N} Q_k$. Τελικά, ένα σύστημα χωρητικοτήτων περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$Q_{k \neq N} = \sum_{j=1}^{N-1} c_{k,j} U_j, \quad \text{ή, } \vec{Q} = \vec{c} \cdot \vec{U} \quad Q_N = -\sum_{k=1}^{N-1} Q_k, \quad U_N = 0, \quad (6.1-44)$$

με:

$$c_{k,j \neq k} = -C_{k,j}^{(j)} = -\int_{S_k} d\mathbf{S}_k \cdot \left(\epsilon \nabla \frac{\Phi^{(j)}}{U_j} \right), \quad (6.1-45)$$

$$c_{k,k} = C_{k,k}^{(k)} = \sum_{j \neq k} C_{j,k}^{(k)}.$$

Σε γραφή πινάκων, στο γραμμικό σύστημα (6.1-44) οι πίνακες-στήλες \vec{Q} και \vec{U} έχουν ως στοιχεία τα φορτία Q_k και τα δυναμικά U_j , ενώ από τους **συντελεστές χωρητικότητας** $c_{k,j}$ σχηματίζεται ο τετραγωνικός πίνακας \vec{c} , με διαστάσεις $(N-1) \times (N-1)$.

Ειδική και συμπληρωματική λύση: Όταν το δυναμικό υπακούει στην εξίσωση του *Poisson* και όχι του *Laplace*, όταν δηλαδή είναι $f \neq 0$, με εφαρμογή επαλληλίας είναι δυνατόν να διασπασθεί το δυναμικό σε ειδική και συμπληρωματική λύση, $F = F_{\text{ειδ}} + F_{\text{συμ}}$. Η ειδική λύση επιλέγεται με μόνη απαίτηση να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος οριακών τιμών, αδιαφορώντας τελείως για την οριακή συνθήκη:

$$\nabla^2 F_{\text{ειδ}} = -f(\mathbf{r}), \text{ στο χώρο } V, \quad (6.1-46)$$

$$\alpha(\mathbf{r}_S) F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r}_S) + \beta(\mathbf{r}_S) \left. \frac{\partial F_{\text{ειδ}}}{\partial n} \right|_S = \text{οτιδήποτε, στην επιφάνεια } S, \quad (6.1-47)$$

Το «οτιδήποτε» σημαίνει πως δεν προκύπτει μία μοναδική λύση $F_{\text{ειδ}}$, αλλά ολόκληρη οικογένεια από λύσεις μόνο της διαφορικής εξίσωσης. Οποιαδήποτε λύση επιλεγεί, προσδιορίζεται η τιμή και η κάθετη παράγωγός της στο όριο S , άρα και το «οτιδήποτε». Για τη συμπληρωματική λύση $F_{\text{συμ}} = F - F_{\text{ειδ}}$ σχηματίζεται το καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών συνθηκών:

$$\nabla^2 F_{\text{συμ}} = 0, \quad (6.1-48)$$

στο χώρο V , ενώ στην επιφάνεια S είναι:

$$\alpha(\mathbf{r}_S) F_{\text{συμ}}(\mathbf{r}_S) + \beta(\mathbf{r}_S) \left. \frac{\partial F_{\text{συμ}}}{\partial n} \right|_S = \gamma(\mathbf{r}_S) - \left[\alpha(\mathbf{r}_S) F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r}_S) + \beta(\mathbf{r}_S) \left. \frac{\partial F_{\text{ειδ}}}{\partial n} \right|_S \right]. \quad (6.1-49)$$

Στις ειδικές, αλλά συχνά συναντώμενες συνθήκες *Dirichlet* ή *Neumann* (συνολικά στην S , ή απλά σε υποπεριοχές της) η σχέση (6.1-49) γράφεται:

$$\text{Dirichlet } (\beta = 0): \quad F_{\text{συμ}}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_S) = F_S(\mathbf{r}_S) - F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_S), \quad (6.1-50)$$

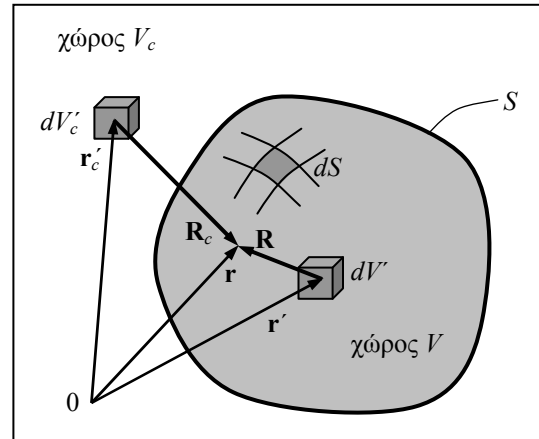
$$\text{Neumann } (\alpha = 0): \quad \left. \frac{\partial F_{\text{συμ}}}{\partial n} \right|_S = F_{nS}(\mathbf{r}_S) - \left. \frac{\partial F_{\text{ειδ}}}{\partial n} \right|_S. \quad (6.1-51)$$

Ας επισημανθεί η επίδραση της $F_{\text{ειδ}}$ στις οριακές συνθήκες για το $F_{\text{συμ}}$, ειδικότερα ότι η συνθήκη *Dirichlet* με $F_S = U = \text{σταθ.}$ και η ομογενής *Neumann* με $F_{nS} = 0$, που συναντώνται πολύ συχνά στις εφαρμογές, στη δεξιά πλευρά των σχέσεων (6.1-50) και (6.1-51) αντικαθίστανται από πιο πολύπλοκες εκφράσεις.

Η συνάρτηση $F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r})$ μπορεί να γραφεί με κλειστή μορφή, ως ολοκλήρωμα επαλληλίας,

$$F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_V \frac{1}{R} f(\mathbf{r}') dV' + \int_{V_c} \frac{1}{R_c} f_c(\mathbf{r}') dV'_c \right]. \quad (6.1-52)$$

Το **Σχήμα 6.1-7** παρουσιάζει τις ποσότητες που εμφανίζονται στη σχέση (6.1-52). Συγκεκριμένα, η συνάρτηση $F_{\text{ειδ}}$ προσδιορίζεται στη θέση \mathbf{r} του χώρου V και τα δύο ολοκληρώματα εκτείνονται στο χώρο V , όπου οι θέσεις, ως μεταβλητές ολοκλήρωσης, γράφονται \mathbf{r}' , και στο χώρο V_c με θέσεις \mathbf{r}'_c , αντίστοιχα, οπότε $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ και $R_c = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_c|$ είναι οι αποστάσεις του σημείου \mathbf{r} από τα \mathbf{r}' και \mathbf{r}'_c . Η συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ είναι μέρος των δεδομένων και ορίζεται σε κάθε θέση του χώρου V , εκεί όπου αναφέρεται το πρόβλημα οριακών τιμών, ενώ τέλος η $f_c(\mathbf{r}_c)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, που ορίζεται σε κάθε θέση του χώρου V_c . Οι τιμές των f και f_c , ως μαθηματικών συναρτήσεων, είναι τελείως αδιάφορες έξω από τις περιοχές ορισμού τους. Άλλωστε, οι ολοκληρώσεις δεν εκτείνονται πέρα από τις περιοχές ορισμού των f και f_c .



Σχήμα 6.1-7

Αν εξετασθεί η σχέση (6.1-52) αυτοτελώς, χωρίς να συσχετισθεί με το προκείμενο, από τη μορφή των ολοκληρωμάτων φαίνεται ότι η συνάρτηση $F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r})$ περιγράφει σε κάθε σημείο του χώρου (είτε του V , είτε του V_c) το δυναμικό από κάποια καταναμημένα αίτια, με πυκνότητα ίση με f στο τμήμα V και με f_c στο τμήμα V_c του χώρου. Διαπιστώνεται έτσι χωρίς καμία επίπονη αλγεβρική πράξη πως για τη συνάρτηση $F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r})$ είναι $\nabla^2 F_{\text{ειδ}} = -f$ στο χώρο V (όπως επίσης είναι $\nabla^2 F_{\text{ειδ}} = -f_c$ στο χώρο V_c , χωρίς όμως αυτό να ενδιαφέρει). Πράγματι, η έκφραση για την $F_{\text{ειδ}}$ στη σχέση (6.1-52) ικανοποιεί τις απαιτήσεις των σχέσεων (6.1-46) και (6.1-47), να είναι $\nabla^2 F_{\text{ειδ}} = -f$ στο V και οτιδήποτε στην S , εξαρτώμενο από την επιλογή της f_c .

Στο χώρο V μπορεί να υπάρχουν αίτια, που προκαλούν ασυνέχεια στην τιμή του δυναμικού. Ανάλογα με το δυναμικό που εννοείται κάθε φορά με το σύμβολο F , τέτοια αίτια μπορεί να είναι φορτισμένες επιφάνειες κλπ. για το δυναμικό Φ , ρευματοφόρες επιφάνειες κλπ. για τις καρτεσιανές συνιστώσες του δυναμικού \mathbf{A} , ή ακόμα επιφάνειες ασυνέχειας συνδεόμενες με ρευματοφόρους βρόχους για το δυναμικό Φ_m και αντίστοιχα σε βρόχους μαγνητικής ροής για το $\Phi_{\text{επ}}$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, πρέπει να γίνει κατάλληλη γενίκευση στη σχέση (6.1-52). Όμοια γενίκευση χρειάζεται, αν υπάρχουν καταναμημένες διπολικές ροπές. Αντίστοιχα, και η συνάρτηση f_c μπορεί να θεωρηθεί ότι περιέχει παρόμοια αίτια ασυνεχειών κλπ. Αυτές οι γενικεύσεις εκφράζονται από τις σχέσεις:

- Για το ηλεκτροστατικό δυναμικό σε διηλεκτρικό (εξειδικεύοντας $F = \Phi$):

$$\Phi_{\text{ειδ}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_V \left(\frac{dQ'}{R} + \frac{d\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right) + \int_{V_c} \left(\frac{dQ'_c}{R_c} + \frac{d\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}_c}{R_c^3} \right) \right]. \quad (6.1-53)$$

- Για το ηλεκτροστατικό δυναμικό σε αγώγιμο υλικό (όπου πάλι $F = \Phi$):

$$\Phi_{\text{ειδ}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi g} \left[\int_V \frac{d\dot{Q}'}{R} + \int_{V_c} \frac{d\dot{Q}'_c}{R_c} \right]. \quad (6.1-54)$$

- Για το επαγωγικό δυναμικό σε διηλεκτρικό (τώρα με $F = \Phi_{\text{επ}}$):

$$\Phi_{\text{επ,ειδ}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt} \left[\int_{S \in V} \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} + \int_{S_c \in V_c} \frac{d\mathbf{S}'_c \cdot \mathbf{R}_c}{R_c^3} + \int_{V_c} \frac{\{f_c(\mathbf{r}'_c) dV'_c\}_{\kappa\lambda\pi}}{R_c} \right]. \quad (6.1-55)$$

- Για το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό σε μαγνητικό υλικό (με $F = \Phi_m$):

$$\Phi_{m,\text{ειδ}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} i \left[\int_{S \in V} \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} + \int_{S_c \in V_c} \frac{d\mathbf{S}'_c \cdot \mathbf{R}_c}{R_c^3} + \int_{V_c} \frac{\{f_c(\mathbf{r}'_c) dV'_c\}_{\kappa\lambda\pi}}{R_c} \right]. \quad (6.1-56)$$

- Για κάθε καρτεσιανή συνιστώσα του δυναμικού \mathbf{A} σε μαγνητικό υλικό (με $F = A_x$ κλπ.):

$$A_{x,\text{ειδ}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\int_V \left(\frac{\{dV'_x J_x(\mathbf{r}')\}_{\kappa\lambda\pi}}{R} + \mathbf{i}_x \cdot \frac{d\mathbf{m}' \times \mathbf{R}}{R^3} \right) + \int_{V_c} \left(\frac{\{dV'_c J_{x,c}(\mathbf{r}'_c)\}_{\kappa\lambda\pi}}{R_c} + \mathbf{i}_x \cdot \frac{d\mathbf{m}'_c \times \mathbf{R}_c}{R_c^3} \right) \right]. \quad (6.1-57)$$

Η συνάρτηση f_c αρκεί να συνεισφέρει στην $F_{\text{ειδ}}$ έναν προσθετέο με μηδενική Λαπλασιανή στο χώρο V . Αυτό αντιπροσωπεύει μεγάλη ελευθερία στην επιλογή της f_c , τέτοια ώστε να επιτρέπεται να περιλαμβάνει και δράσεις, τις οποίες φυσιολογικά η συνάρτηση f δεν μπορεί να περιέχει. Έτσι, ενώ τα δυναμικά $\Phi_{\text{επ}}$ και Φ_m παράγονται μόνο μέσω των επιφανειών ασυνέχειας και συνεπώς για τα δυναμικά αυτά είναι υποχρεωτικά $f = 0$, στις σχέσεις (6.1-55) και (6.1-56) έχει περιληφθεί η δυνατότητα να υπάρχει στο χώρο V_c και κατανομημένο αίτιο, $f_c \neq 0$, στο οποίο εννοείται ότι συμπεριλαμβάνονται και οποιεσδήποτε άλλες συνεισφορές, με χαρακτήρα συγκεντρωμένης κατανομής φορτίων ή διπόλων. Παρόμοια γενίκευση μπορεί να

γίνει και στη σχέση (6.1-54), να περιληφθούν και αίτια με διπολική μορφή στο ολοκλήρωμα που αφορά το χώρο V_c .

Με τη διάσπαση $F = F_{\text{ειδ}} + F_{\text{συμ}}$ ο όρος $F_{\text{ειδ}}$ διατυπώνεται με την κλειστή μορφή ενός ολοκληρώματος (ανεξάρτητα από το κατά πόσο είναι εφικτή η ολοκλήρωση με αναλυτικές τεχνικές), ενώ ο όρος $F_{\text{συμ}}$ ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace*. Το αρχικό πρόβλημα οριακών τιμών για τη συνάρτηση F , το οποίο εμπλέκει την εξίσωση του *Poisson*, μία μη ομογενή εξίσωση, επιτυγχάνεται έτσι να υποκατασταθεί από ένα αντίστοιχο πρόβλημα για τη συνάρτηση $F_{\text{συμ}}$, το οποίο όμως εμπλέκει την εξίσωση *Laplace*, μία ομογενή εξίσωση, με οριακές συνθήκες ίδιας μορφής όπως στο αρχικό πρόβλημα, καθώς και μία επιπρόσθετη ολοκλήρωση για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης $F_{\text{ειδ}}$.

Η επιλογή για τη συνάρτηση $f_c(\mathbf{r}_c)$ επηρεάζει τόσο την προκύπτουσα $F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r})$, όσο και την $F_{\text{συμ}}(\mathbf{r})$, μέσω των οριακών συνθηκών, αλλά βέβαια, το άθροισμα $F_{\text{ειδ}} + F_{\text{συμ}}$ είναι τελείως ανεξάρτητο από την επιλογή για την f_c . Βασικό κριτήριο για μια συγκεκριμένη επιλογή της f_c είναι η διευκόλυνση στην επίλυση του προβλήματος οριακών συνθηκών για την $F_{\text{συμ}}$. Ιδανική περίπτωση διευκόλυνσης είναι να προκύψει ομογενής οριακή συνθήκη για το $F_{\text{συμ}}$, οπότε θα είναι απλά $F_{\text{συμ}} = 0$, συν μια αυθαίρετη αλλά και αδιάφορη σταθερή τιμή σε αμιγή συνθήκη *Neumann*, και $F = F_{\text{ειδ}}$ μόνο. Αυτό επιτυγχάνεται σε διατάξεις, στις οποίες τα όρια είναι επίπεδα με άπειρη έκταση, κυλινδρικά με άπειρο μήκος ή σφαιρικά, και με σταθερές ιδιότητες του παρακείμενου χώρου σε όλη την έκταση των ορίων. Πρόκειται για τη μέθοδο του «κατοπτρισμού» (βλ. παράγραφο 6.2). Συνήθως πάντως είναι πρακτικά ανέφικτο, εκτός από συνθήκες που επιτρέπουν κατοπτρισμό, να προσδιορισθεί συνάρτηση f_c που να οδηγεί σε ουσιαστική διευκόλυνση. Τότε μπορεί απλώς να επιλεγεί $f_c = 0$ παντού.

6.1.3 Μονοδιάστατες διατάξεις

Η Λαπλασιανή $\nabla^2 F$ είναι άθροισμα τριών όρων με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Κατά συνέπεια, η εξίσωση του *Laplace* ή του *Poisson*, $\nabla^2 F = 0$ ή $\nabla^2 F = -f$, δεν επιλύεται με απλή ολοκλήρωση, αλλά με το χειρισμό ολοκληρωμένου προβλήματος οριακών τιμών, όπως ορίστηκε στην παράγραφο 6.1.2. Σε ειδικές, όμως, περιπτώσεις είναι δυνατόν, τόσο η συνάρτηση $f(\mathbf{r})$, όσο και το σχήμα του ορίου και οι οριακές συνθήκες σε αυτό, να υποδεικνύουν ότι η λύση του προβλήματος οριακών τιμών έχει μονοδιάστατη εξάρτηση, $F = F(s)$, όπου s είναι μια από τις συντεταγμένες, δηλαδή $s = \{x, y, z, r_T, \varphi, r, \theta\}$, ενώ εν γένει είναι $F = F(\mathbf{r}) = F(s_1, s_2, s_3)$. Τότε, η διάταξη χαρακτηρίζεται μονοδιάστατη, μολονότι ως φυσικό αντικείμενο έχει, βέβαια, τρεις διαστάσεις.

Κατά πόσο μια διάταξη είναι μονοδιάστατη, αυτό μπορεί να εξετασθεί κατά περίπτωση, όπως παρουσιάζεται στα *παραδ. 6.1-1* έως *6.1-7*. Προτάσσονται, πάντως, κυρίως για λόγους πληρότητας, ορισμένες γενικές παρατηρήσεις, οι οποίες επιτρέπουν σε γενικούς όρους να διαπιστωθεί αν μία διάταξη είναι μονοδιάστατη. Οι απαιτήσεις είναι:

Απαιτήσεις για τη συνάρτηση $f(\mathbf{r})$: Παρατηρώντας τη μορφή της $\nabla^2 F$ στα τρία συστήματα συντεταγμένων, φαίνεται αμέσως ότι για να έχει η λύση τη μορφή $F = F(s)$:

- Αν $s = \{x, y, z, r_T, r\}$, δηλαδή αν η s αντιπροσωπεύει μήκος, τότε πρέπει να είναι $f = f(s)$.
- Αν $s = \varphi$, τότε πρέπει να είναι $f = (1/r_T^2)f_1(\varphi) = (1/r^2 \sin^2 \theta)f_1(\varphi)$.
- Αν $s = \theta$, τότε πρέπει να είναι $f = (1/r^2)f_1(\theta)$.

Γενικά, αν εισαχθεί ο συντελεστής μήκους h_s , τέτοιος ώστε $dl_s = h_s ds$, όπου dl_s είναι το στοιχειώδες μήκος που αντιστοιχεί στη μεταβολή ds (βλ. Παράρτημα Α.2 στο Μέρος Α), τότε σε όλες τις περιπτώσεις η απαίτηση γράφεται ως $f = (1/h_s^2)f_1(s)$.

Η εξάρτηση $f = (1/h_s^2)f_1(s)$ πρέπει να απαντάται σε ολόκληρο το χώρο V , στον οποίο αναφέρεται το πρόβλημα οριακών συνθηκών. Κατά συνέπεια, αν η f περιγράφει αίτιο συγκεκριμένο σε σημείο ή σε γραμμή, αυτό αυτόματα σημαίνει ότι $f \neq (1/h_s^2)f_1(s)$ και η διάταξη δεν είναι μονοδιάστατη. Αν πάλι η f περιγράφει αίτιο κατανεμημένο σε επιφάνεια, όπως επιφανειακό φορτίο σ , τότε η επιφάνεια πρέπει να έχει τη μορφή $s = s_0 = \text{σταθ.}$, και να περιέχει όλα τα σημεία του χώρου V , για τα οποία είναι $s = s_0$, ώστε να είναι δυνατόν το πρόβλημα οριακών συνθηκών να έχει λύση με τη μορφή $F(s)$.

Φυσικά, σε κάθε περίπτωση, η συνάρτηση $f(\mathbf{r}) = 0$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις και επιτρέπει το ενδεχόμενο $F = F(s)$.

Απαιτήσεις για το σχήμα της κλειστής επιφάνειας S (που οριοθετεί το χώρο V , στον οποίο είναι $\nabla^2 F = -f$): Εξαιρώντας εξεζητημένα σχήματα («κατά τύχη» μονοδιάστατα), η επιφάνεια S επιτρέπει μονοδιάστατες λύσεις $F(s)$, όταν αποτελείται από:

- (i) Δύο βάσεις, που αντιστοιχούν σε επιφάνειες $s = s_1$ και $s = s_2$, έτσι ώστε στο χώρο V να αντιστοιχεί η περιοχή $s_1 < s < s_2$. Στη βάση $s = s_1$ είναι $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_s$, ενώ στην $s = s_2$ είναι $\mathbf{i}_n = +\mathbf{i}_s$. Ειδικές τιμές για τα s_1 και s_2 είναι:
- Αν $s = \{x, y, z\}$, είναι δυνατόν να είναι $s_1 = -\infty$ ή/και $s_2 = \infty$.
 - Αν $s = r_T$, είναι δυνατόν να είναι $r_{T1} = 0$ ή/και $r_{T2} = \infty$. Ειδικά αν είναι $r_{T1} = 0$, τότε ο άξονας z περιέχεται στο χώρο V και δεν αποτελεί τμήμα της S , γι' αυτό δεν έχει σημασία το ότι στο $r_T = 0$ δεν ορίζεται το $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_T$.
 - Αν $s = r$, είναι δυνατόν να είναι $r_1 = 0$ ή/και $r_2 = \infty$. Αν είναι $r_1 = 0$, η αρχή των αξόνων ανήκει στον V και όχι στην S , με ίδιες συνέπειες όπως προηγουμένως.
 - Αν $s = \theta$, είναι δυνατόν να είναι $\theta_1 = 0$ ή/και $\theta_2 = \pi$, οπότε ο θετικός ή/και αρνητικός ημιάξονας z ανήκουν στον V και όχι στην S , με ίδιες συνέπειες όπως προηγουμένως.
 - Αν τέλος $s = \varphi$, είναι δυνατόν να είναι $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$, συνήθως $\varphi_1 = 0$ και $\varphi_2 = 2\pi$, και οι τιμές αυτές να μην αντιπροσωπεύουν πραγματικά όρια της περιοχής V .
- (ii) Μια παράπλευρη επιφάνεια, τέτοια ώστε σε κάθε σημείο της να είναι $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_s = 0$ (δηλαδή, με $\mathbf{i}_n \perp \mathbf{i}_s$). Για παράδειγμα, αν είναι $\mathbf{i}_s = \mathbf{i}_x$, τότε πρέπει να είναι $\mathbf{i}_n = (\dots)\mathbf{i}_y + (\dots)\mathbf{i}_z$ και η παράπλευρη επιφάνεια αποτελείται από ευθείες παράλληλες προς τον άξονα x . Αν, πάλι, είναι $\mathbf{i}_s = \mathbf{i}_r$, τότε πρέπει να είναι $\mathbf{i}_n = (\dots)\mathbf{i}_\varphi + (\dots)\mathbf{i}_\theta$ και η παράπλευρη επιφάνεια αποτελείται από ευθείες διερχόμενες από την αρχή των αξόνων, κλπ.

Απαιτήσεις για τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια S : Περιορίζοντας την εξέταση μόνο στο ενδεχόμενο μεικτής συνθήκης (αλλού *Dirichlet*, $F = \dots$, και αλλού *Neumann*, $\partial F/\partial n = \dots$, όπου $\partial F/\partial n = \mathbf{i}_n \cdot \nabla F$), τα εξής ενδεχόμενα αντιπροσωπεύουν μονοδιάστατες διατάξεις:

- (i) Στις δύο βάσεις $s = s_1$ και $s = s_2$, αν δεν είναι εκφυλισμένες σε γραμμή ή σημείο, οι οριακές συνθήκες που οδηγούν σε μονοδιάστατες εκφράσεις $F(s)$ είναι:
- Είτε *Dirichlet*, με $F(s=s_1) = \text{σταθ.}$ ή/και $F(s=s_2) = \text{σταθ.}$,
 - Είτε *Neumann*, με $(\partial F/\partial n)|_{s=s_1} = \text{σταθ.} \times (1/h_s)$ ή/και $(\partial F/\partial n)|_{s=s_2} = \text{σταθ.} \times (1/h_s)$,
- όπου αν $s = \{x, y, z, r_T, r\}$, τότε $h_s = 1$ (και η απαίτηση είναι $\partial F/\partial n = \text{σταθ.}$), αν $s = \varphi$, τότε $h_\varphi = r_T = r \sin \theta$ (και πρέπει $\partial F/\partial n = \text{σταθ.}/r_T$), και αν $s = \theta$, τότε $h_\theta = r$ (δηλαδή, $\partial F/\partial n = \text{σταθ.}/r$). Προφανώς, η ομογενής συνθήκη *Neumann*, $\partial F/\partial n = 0$, η οποία άλλωστε είναι και η πιο συνηθισμένη στην πράξη, είναι συμβατή με μονοδιάστατη λύση $F(s)$.

Αν μία βάση βρίσκεται στο άπειρο, τότε οι απαιτήσεις παραμένουν οι ίδιες, είτε $F|_{\infty} = \text{σταθ.}$, είτε $\partial F/\partial n|_{\infty} = \text{σταθ.}/h_s = \text{σταθ.}$, επειδή τιμές $s_2 = \infty$ συναντώνται μόνο σε συντεταγμένες s που έχουν $h_s = 1$.

Επίσης, αν μία ή και οι δύο βάσεις $s = s_1$ και $s = s_2$ είναι εκφυλισμένες σε γραμμή ή σημείο, τα ενδεχόμενα είναι:

- Αν είναι $r_{T1} = 0$, ή $\theta_1 = 0$, ή $\theta_2 = \pi$, τότε ο άξονας z , ή μέρος του, ανήκει στο χώρο V και η οριακή συνθήκη υποκαθίσταται από την πληροφορία, αν στον άξονα υπάρχει γραμμικό φορτίο ή όχι. Αν δεν υπάρχει γραμμικό φορτίο ($\lambda = 0$), καθώς και τα ενδεχόμενα $\lambda = \text{σταθ.}$ (στο $r_{T1} = 0$) και $\lambda = \text{σταθ.}/r$ (στο $\theta_1 = 0$ ή στο $\theta_2 = \pi$), όλα αυτά επιτρέπουν λύσεις $F(r_T)$ ή $F(\theta)$.
- Αν είναι $r_1 = 0$, τότε η αρχή των αξόνων ανήκει στο χώρο V και η οριακή συνθήκη υποκαθίσταται από την πληροφορία, αν υπάρχει ή όχι σημειακό φορτίο εκεί. Σε κάθε περίπτωση, δεν αποκλείεται μονοδιάστατη λύση $F(r)$.

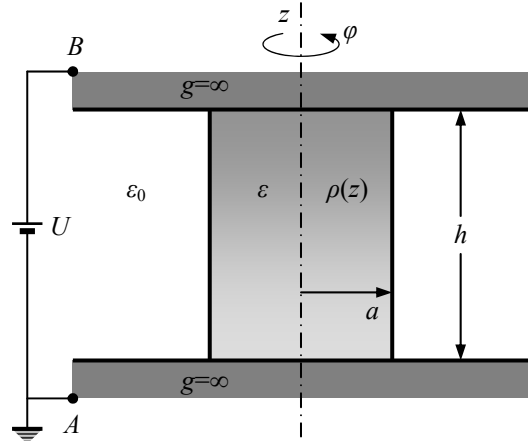
Αν, τέλος, δεν υπάρχουν πραγματικά όρια στη διεύθυνση φ και απλώς λαμβάνεται $\varphi_1 = 0$ και $\varphi_2 = 2\pi$, αντί οριακών συνθηκών εφαρμόζονται συνθήκες περιοδικότητας, $F(\varphi = \varphi_2) = F(\varphi = \varphi_1)$ και $(\partial F/\partial \varphi)_{\varphi=\varphi_2} = (\partial F/\partial \varphi)_{\varphi=\varphi_1}$, που είναι συμβατές με λύση $F(\varphi)$.

- (ii) Στην παράπλευρη επιφάνεια η μόνη αξιόλογη οριακή συνθήκη που επιτρέπει λύση με μορφή $F(s)$ είναι η ομογενής συνθήκη *Neumann*, $\partial F/\partial n = 0$ σε ολόκληρη την παράπλευρη επιφάνεια. Από τους άλλους τύπους οριακής συνθήκης, η μη ομογενής συνθήκη *Neumann*, $\partial F/\partial n \neq 0$, θα επέβαλλε εξάρτηση της F και από συντεταγμένη κάθετη στην s , αφού είναι $\mathbf{i}_n \perp \mathbf{i}_s$, ενώ η συνθήκη *Dirichlet* στην παράπλευρη επιφάνεια είναι συμβατή με εξάρτηση μόνο από το s μόνο στην τετριμμένη περίπτωση $F = F(s)$, με $F(s)$ απλώς τη λύση του προβλήματος.

Συγκεφαλαίωση: Με $s = \{x, y, z, r_T, \varphi, r, \theta\}$, το πρόβλημα οριακών τιμών για την εξίσωση του *Poisson* έχει λύσεις της μορφής $F = F(s)$, όταν συμβαίνουν όλα τα επόμενα:

1. Είναι $f = (1/h_s^2)f_1(s)$, όπου όταν $s = \text{μήκος}$, τότε $h_s = 1$, ενώ $h_\varphi = r_T = r \sin \theta$ και $h_\theta = r$.
2. Η κλειστή επιφάνεια S περιλαμβάνει δύο βάσεις $s = s_1$ και $s = s_2$, ενδεχομένως στο άπειρο, ή εκφυλισμένες σε γραμμή ($r_{T1} = 0$, $\theta_1 = 0$ ή $\theta_2 = \pi$) ή σε σημείο ($r_1 = 0$). Στις βάσεις που είναι μη εκφυλισμένες οι οριακές συνθήκες είναι $F = \text{σταθ.}$ ή $\partial F/\partial n = \text{σταθ.}/h_s$.
3. Το υπόλοιπο τμήμα της κλειστής S , δηλαδή η παράπλευρη επιφάνεια, έχει παντού $\mathbf{i}_n \perp \mathbf{i}_s$ και συνθήκη $\partial F/\partial n = 0$.

Παράδειγμα 6.1-1: Ο κύλινδρος, με ακτίνα a και ύψος h , αποτελείται από ομογενές διηλεκτρικό μονωτικό υλικό με επιτρεπτότητα $\epsilon \gg \epsilon_0$ και έχει στο εσωτερικό του ηλεκτρικό φορτίο κατανεμημένο με χωρική πυκνότητα $\rho(z) = \rho_0(1+z/h)$. Οι δύο βάσεις του κυλίνδρου είναι σε επαφή με δύο κυκλικές πλάκες, με υψηλή τιμή της ειδικής αγωγιμότητας και με μεγάλο εμβαδόν $S = \pi b^2 (\gg \pi a^2)$. Ένα άκρο A της πλάκας στο $z=0$ είναι γειωμένο,

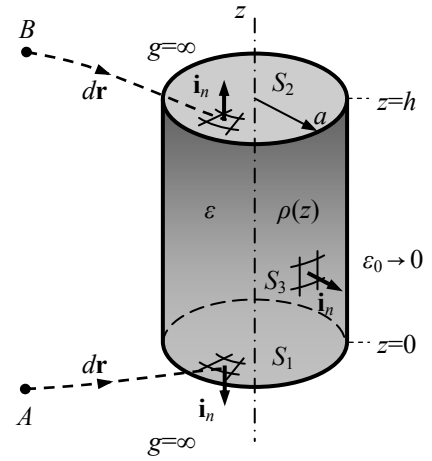


ενώ το αντίστοιχο άκρο B της πλάκας στο $z=h$ έχει συνδεθεί με πηγή σε τάση U . Ο υπόλοιπος χώρος καταλαμβάνεται από αέρα (με ϵ_0). Ζητείται:

- (α) Να διατυπωθεί με κατάλληλη τεκμηρίωση το πρόβλημα οριακών τιμών (διαφορική εξίσωση και οριακές συνθήκες) για το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ στο εσωτερικό του διηλεκτρικού κυλίνδρου (στην περιοχή V : $r_T < a$, $0 < z < h$).
- (β) Να προσδιορισθεί το δυναμικό Φ στο εσωτερικό του διηλεκτρικού κυλίνδρου.
- (γ) Θεωρώντας ότι στο εγκάρσιο άπειρο (σε αποστάσεις $r_T \approx b \gg a$) η διάταξη συμπεριφέρεται σαν πυκνωτής παράλληλων πλακών, να διατυπωθεί με κατάλληλη τεκμηρίωση το πρόβλημα οριακών τιμών (διαφορική εξίσωση και οριακές συνθήκες) για το δυναμικό Φ_1 στην περιοχή V_1 με τον αέρα ($r_T > a$, $0 < z < h$), και αφού επισημανθούν οι συντεταγμένες από τις οποίες δεν εξαρτάται το δυναμικό, να γραφούν οι εξισώσεις στις κυλινδρικές συντεταγμένες που απομένουν. Δεν ζητείται να προσδιορισθεί το δυναμικό Φ_1 .

Επίλυση: (α) Η περιοχή V ($r_T < a$, $0 < z < h$) περιέχει διηλεκτρικό υλικό με κατανεμημένα φορτία, τα οποία έχουν εισαχθεί με κάποιον εξωτερικό μηχανισμό, μη προσδιοριζόμενο, αλλά πάντως που δεν βασίζεται στην αγωγιμότητα του υλικού, επειδή πρόκειται για μονωτικό υλικό. Ο νόμος του Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, με $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\epsilon = \text{σταθ.}$ (για ομογενές υλικό) και $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ δίνει τη διαφορική εξίσωση $\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon$. Οι οριακές συνθήκες στην κλειστή επιφάνεια S , που αποτελεί το όριο της περιοχής V , θα διατυπωθούν χωριστά σε κάθε τμήμα της S που είναι σε επαφή με διαφορετικό υλικό. Στο τμήμα S_1 ($r_T < a$, $z = 0$) ο παρακείμενος χώρος $z < 0$ έχει $g_c = \infty$, οπότε εκεί είναι $\mathbf{E}_c(z < 0) = \mathbf{J}_c/g_c = 0$ και με ολοκλήρωση από το σημείο A (όπου είναι $\Phi_A = 0$) μέσω του αγωγίμου υλικού μέχρι οποιοδήποτε σημείο της S_1 προκύπτει ότι $\Phi(r_T < a, z = 0^-) = \Phi_A - \int \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{r} = 0$. Στην επιφάνεια S_1 δεν υπάρχει διπολικό στρώμα $p_{S\perp}$, αφού δεν υπάρχει μηχανισμός για να αναπτυχθεί, ούτε αναφέρεται ότι έχει εισαχθεί εξωτερικά, συνεπώς εκεί είναι $\Phi_+ - \Phi_- = 0$, και με $\Phi_+ = \Phi(r_T < a, z = 0^-) = 0$, επειδή στην επιφάνεια αυτή είναι $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_z$,

προκύπτει τελικά ότι και $\Phi(r_T < a, z = 0^+) = 0$. Όμοια, στην πάνω επιφάνεια του κυλίνδρου, την S_2 , είναι $\Phi(r_T < a, z = h^-) = \Phi(r_T < a, z = h^+) = \Phi_B - \int \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{r} = U$. Τέλος, για την παρά-πλευρη επιφάνεια S_3 , η ιδιότητα $\varepsilon_c (= \varepsilon_0) \ll \varepsilon$ του εκεί παρακείμενου χώρου προσεγγίζεται από $\varepsilon_0 \approx 0$, συνεπώς είναι $\mathbf{D}_c(r_T > a, 0 < z < h) \approx 0$, και επειδή στο όριο μεταξύ μονωτών (εδώ, του διηλεκτρικού και του αέρα) δεν υπάρχει μηχανισμός για την εναπόθεση φορτίου, ούτε έχει επιβληθεί τέτοιο φορτίο από εξωτερική παρέμβαση, θα είναι $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = 0$. Η προσέγγιση $\mathbf{D}_c(r_T > a, 0 < z < h) \approx 0$ σημαίνει ότι $\mathbf{D}_+ \approx 0$, οπότε θα είναι και $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{D}_- = \varepsilon \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}_- = 0$, δηλαδή $\partial\Phi/\partial n = 0$.



Συνοψίζοντας, το πρόβλημα οριακών τιμών για την περιοχή $V (r_T < a, 0 < z < h)$ είναι:

$$\begin{aligned} \text{στο χώρο } V: \quad \nabla^2 \Phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) + \frac{1}{r_T^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(1 + \frac{z}{h} \right), \\ z=0, r_T < a: \quad \Phi &= 0, \\ z=h, r_T < a: \quad \Phi &= U, \\ r_T = a, 0 < z < h: \quad \frac{\partial}{\partial n} \Phi &= 0. \end{aligned}$$

(β) Από όλα τα δεδομένα αναμένεται εξάρτηση $\Phi = \Phi(z)$, δηλαδή, $\partial\Phi/\partial r_T = 0$ και $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$. Πράγματι, στο εσωτερικό είναι $\nabla^2 \Phi = -f(z)$, στις βάσεις, που αντιστοιχούν σε $z = \text{σταθ.}$, είναι $\partial\Phi/\partial r_T = 0$ και $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$, ενώ η παράπλευρη επιφάνεια έχει $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_T$, δηλαδή $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial r_T$, και το $\partial\Phi/\partial n = 0$ είναι, επίσης, συμβατό με $\partial\Phi/\partial r_T = 0$ και ισχύει για κάθε φ , οπότε είναι συμβατό και με $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$.

Με $\partial/\partial r_T = 0$ και $\partial/\partial\varphi = 0$, έστω και ως υπόθεση, είναι $\nabla^2 \Phi = \partial^2 \Phi/\partial z^2 = -(\rho_0/\varepsilon)(1 + z/h)$, οπότε με διαδοχικές ολοκληρώσεις προκύπτει:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(z + \frac{z^2}{2h} \right) + C_1 \quad \text{και} \quad \Phi(z) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{z^3}{h} \right) + C_1 z + C_2.$$

Οι συνθήκες στα όρια $z = 0$ και $z = h$ δίνουν για τις τιμές των σταθερών ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned} z=0: \quad \Phi(0) &= 0 = 0 + 0 \cdot C_1 + C_2, \\ z=h: \quad \Phi(h) &= U = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{2}{3} h^2 + h C_1 + C_2, \end{aligned}$$

ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα 2×2 , με λύση $C_1 = U/h + (2/3)(\rho_0 h/\varepsilon)$ και $C_2 = 0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των C_1 και C_2 στην έκφραση για το Φ , προκύπτει η συνάρτηση:

$$\Phi(z) = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(\frac{2}{3} hz - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{6} \frac{z^3}{h} \right) + \frac{U}{h} z. \quad (\alpha)$$

Εύκολα φαίνεται ότι η συνάρτηση $\Phi(z)$ ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις: τη διαφορική εξίσωση, αφού από αυτή προέκυψε με ολοκλήρωση, τις οριακές συνθήκες στο $z = 0$ και στο $z = h$, επειδή από αυτές προσδιορίστηκαν οι συγκεκριμένες τιμές για τις σταθερές C_1 και C_2 , και, τέλος, τη συνθήκη $\partial\Phi/\partial n|_{r_T=a} = 0$, καθώς είναι $\partial/\partial n|_{r_T=a} = \partial/\partial r_T|_{r_T=a}$ και η συνάρτηση $\Phi(z)$ δεν εξαρτάται από το r_T . Τα δεδομένα στοιχειοθετούν ένα καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών τιμών για την εξίσωση (εδώ) του *Poisson*: Στο χώρο V , στο εσωτερικό του κυλίνδρου, δίδεται η διαφορική εξίσωση, ενώ σε ολόκληρο το περίβλημα S του κυλίνδρου, τόσο στις δύο βάσεις, όσο και στην παράπλευρη επιφάνεια, δίδονται αποδεκτές οριακές συνθήκες, αντίστοιχα *Dirichlet* και *Neumann*. Άρα, η συνάρτηση $\Phi(z)$ είναι η μοναδική λύση για το δυναμικό.

(γ) Για την περιοχή V_1 ($r_T > a$, $0 < z < h$) η διαφορική εξίσωση είναι $\nabla^2 \Phi_1 = 0$ (από $\nabla \cdot \mathbf{D}_1 = \rho$, με $\rho = 0$ και $\mathbf{D}_1 = -\varepsilon_0 \nabla \Phi_1$, όπου βέβαια $\varepsilon_0 = \text{σταθ.}$). Στα τμήματα $z = 0$ και $z = h$ του ορίου η περιοχή βρίσκεται σε επαφή με τους ίδιους καλούς αγωγούς, όπως ακριβώς και η περιοχή V , και με ταυτόσημη επιχειρηματολογία διαπιστώνεται ότι είναι $\Phi_1|_{z=0} = 0$ και $\Phi_1|_{z=h} = U$. Στο εγκάρσιο άπειρο (σε αποστάσεις συγκρίσιμες με το $b \gg a$) η παρουσία του διηλεκτρικού κυλίνδρου δεν είναι αισθητή, με συνέπεια συμπεριφορά όπως ενός πυκνωτή παράλληλων πλακών, με $\Phi_1 = (U/h)z$, όπως είναι κοινή γνώση και εν πάση περιπτώσει προκύπτει και από τη σχέση (α) με $\rho_0 = 0$. Τέλος, στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$, η μηχανιστική εφαρμογή αυτών που αναφέρονται στην παράγρ. 6.1.2 αναφορικά με την εμφάνιση συνθηκών *Dirichlet* και *Neumann* (βλ. σελ. 204) εκφράζεται από την αλληλουχία $\varepsilon_c (= \varepsilon) \gg \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_c \approx \infty \Rightarrow \mathbf{E}_c \approx 0 \Rightarrow \Phi_c = \Phi_0 = \text{σταθ.} \Rightarrow \Phi_1(r_T=a) = \Phi_0$. Η δυσκολία εμφανίζεται στο ερώτημα ποια είναι η τιμή της σταθεράς Φ_0 . Η απάντηση είναι «καμία συγκεκριμένη». Στην επιφάνεια $r_T = a$ είναι γνωστό το δυναμικό: Είναι όσο στην περιοχή V , δηλαδή η σχέση (α), επειδή εκεί δεν υπάρχει διπολικό στρώμα, και δεν χρειάζονται περισσότερες προσεγγίσεις, όπως ότι $\varepsilon_c \approx \infty$ κλπ.

Παρατηρώντας, τέλος, ότι συνολικά η περιοχή V_1 είναι αμετάβλητη σε περιστροφή κατά γωνία φ (στο σχήμα της, στις ιδιότητες του εσωτερικού της, και στις ιδιότητες του ορίου της), συνάγεται ότι πρέπει να είναι και $\partial\Phi_1/\partial\varphi = 0$. Έτσι, το πρόβλημα οριακών τιμών για το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ_1 στην περιοχή V_1 ($r_T > a$, $0 < z < h$) αποτελείται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \text{στο χώρο } V_1: & \quad \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_T} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 0, \\ z = 0, \quad a < r_T < b: & \quad \Phi_1 = 0, \end{aligned} \quad (\beta_1)$$

$$\begin{aligned}
z = h, \quad a < r_T < b: \quad \Phi_1 = U, \\
r_T = a, \quad 0 < z < h: \quad \Phi_1 = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(\frac{2}{3} h z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{6} \frac{z^3}{h} \right) + \frac{U}{h} z, \\
r_T = b, \quad 0 < z < h: \quad \Phi_1 = \frac{U}{h} z.
\end{aligned} \tag{\beta_2}$$

Οι σχέσεις αυτές περιλαμβάνουν τη διαφορική εξίσωση για το εσωτερικό του χώρου V_1 και αποδεκτού τύπου (εδώ, *Dirichlet*) πληροφορίες σε ολόκληρο το περίβλημα του V_1 , συνεπώς πράγματι στοιχειοθετούν καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών τιμών.

Σχόλια:

- Η λύση Φ_1 του προβλήματος οριακών τιμών θα εξαρτάται, πράγματι, από τις δύο μεταβλητές r_T και z που παραμένουν στη διαφορική εξίσωση. Συγκεκριμένα, θα είναι υποχρεωτικά $\partial/\partial z \neq 0$, επειδή σε δύο θέσεις $z = 0$ και $z = h$ το δυναμικό έχει διαφορετικές τιμές. Επίσης, πρέπει να είναι $\partial/\partial r_T \neq 0$, ώστε να ικανοποιούνται οι δύο διαφορετικές μεταξύ τους συνθήκες στις ακτινικές θέσεις $r_T = a$ και $r_T = b$.
- Επειδή είναι $\partial\Phi_1/\partial r_T \neq 0$ στην περιοχή $r_T > a$, αναμένεται ότι θα είναι $\partial\Phi_1/\partial r_T \neq 0$ και στο όριο $r_T = a$, ενώ από την πλευρά της περιοχής V το δυναμικό στη σχέση (α) χαρακτηρίζεται από $\partial\Phi/\partial r_T = 0$, αφού προσδιορίστηκε με βάση και αυτή την παραδοχή. Χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο παραγώγους στην επιφάνεια $r_T = a$, προκύπτει ότι $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = -\varepsilon_0 (\partial\Phi_1/\partial r_T)$. Αυτό το αποτέλεσμα δεν επιτρέπεται να ταυτισθεί με επιφανειακό φορτίο, που δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί στη διεπιφάνεια μεταξύ μονωτών. Απλά, επειδή η έκφραση (α) για το δυναμικό Φ έχει βασισθεί στην προσέγγιση $\varepsilon_0 \approx 0$, και ακολούθως οι εξισώσεις (β) για το δυναμικό Φ_1 έχουν βασισθεί και στην προσεγγιστική έκφραση του Φ (και συνεπώς περιέχουν την ίδια προσέγγιση $\varepsilon_0 \approx 0$), διατηρώντας την ίδια προσέγγιση προκύπτει, επίσης, ότι $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) \sim \varepsilon_0 \approx 0$, που στην πραγματικότητα είναι $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = 0$ ακριβώς, και όχι προσεγγιστικά.

Παράδειγμα 6.1-2: Η διάταξη του προηγούμενου *παραδ. 6.1-1* τροποποιείται κατά το ότι δεν υπάρχει η αγωγίμη πλάκα στην περιοχή $z < 0$. Τα λοιπά δεδομένα (διαστάσεις και σύσταση κυλίνδρου, φορτίο με πυκνότητα $\rho(z) = \rho_0(1+z/h)$ στο εσωτερικό του, παρουσία αγωγίμης πλάκας σε δυναμικό U στην περιοχή $z > h$) παραμένουν αμετάβλητα. Ζητούμενο είναι το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ στο εσωτερικό του κυλίνδρου, αφού προηγουμένως διατυπωθεί το πρόβλημα οριακών τιμών.

Επίλυση: Όπως στο παραδ. 6.1-1, στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι πάλι $\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon$. Επίσης, από το περίβλημα S του κυλίνδρου, οι ίδιες οριακές συνθήκες ισχύουν στα τμήματα $z = h$ (δηλαδή $\Phi = U$) και $r_T = a$ (δηλαδή $\partial\Phi/\partial n = 0$). Τώρα, όμως, στην κάτω βάση $z = 0$ ο κύλινδρος είναι σε επαφή με τον αέρα, δηλαδή, με χώρο με $\varepsilon_c = \varepsilon_0 \ll \varepsilon$, με συνέπεια ότι και εκεί η κατάλληλη οριακή συνθήκη είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$, όπως στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$. Συγκεντρωτικά, το πρόβλημα οριακών τιμών για το χώρο V ($r_T < a, 0 < z < h$) είναι:

$$\begin{aligned} \text{στο χώρο } V: \quad \nabla^2\Phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \frac{\partial\Phi}{\partial r_T} \right) + \frac{1}{r_T^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(1 + \frac{z}{h} \right), \\ z = 0, r_T < a: \quad \frac{\partial}{\partial n}\Phi &= 0, \\ z = h, r_T < a: \quad \Phi &= U, \\ r_T = a, 0 < z < h: \quad \frac{\partial}{\partial n}\Phi &= 0. \end{aligned}$$

Στο εσωτερικό του χώρου V , καθώς και στα τμήματα $r_T = a$ και $z = h$, έχει ήδη επισημανθεί κατά την επίλυση του προηγούμενου παραδείγματος ότι όλα τα δεδομένα είναι συμβατά με $\partial/\partial r_T = 0$ και $\partial/\partial\varphi = 0$. Όσον αφορά τη νέα οριακή συνθήκη στο $z = 0$, εκεί είναι $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_z$, άρα $\partial\Phi/\partial n = 0$ σημαίνει πως $(\partial\Phi/\partial z)|_{z=0} = 0$. Στην επιφάνεια αυτή είναι $(\partial/\partial r_T)(\partial\Phi/\partial z)|_{z=0} = 0$ και παρόμοια για την παράγωγο $\partial/\partial\varphi$, οπότε και η τωρινή οριακή συνθήκη είναι συμβατή με ανεξαρτησία από τις εγκάρσιες συντεταγμένες, με την παραδοχή $\Phi = \Phi(z)$.

Η υπόλοιπη πορεία είναι όπως προηγουμένως. Με διαδοχικές ολοκληρώσεις προκύπτει, πάλι:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(z + \frac{z^2}{2h} \right) + C_1 \quad \text{και} \quad \Phi(z) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{z^3}{h} \right) + C_1 z + C_2.$$

Τώρα, οι εξισώσεις για τις σταθερές ολοκλήρωσης C_1 και C_2 είναι:

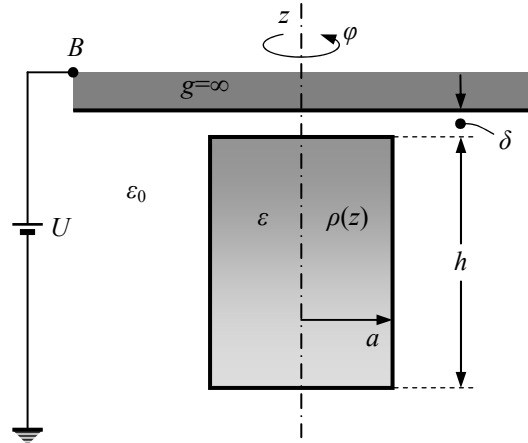
$$\begin{aligned} z = 0: \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0 = 0 + C_1, \\ z = h: \quad \Phi(h) &= U = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{2}{3} h^2 + hC_1 + C_2, \end{aligned}$$

με λύση $C_1 = 0, C_2 = (2/3)(\rho_0/\varepsilon)h^2 + U$. Συνεπώς, η λύση είναι:

$$\Phi(z) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{z^3}{h} \right) + \frac{2}{3} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} h^2 + U.$$

Με ουσιαστικά ταυτόσημη επιχειρηματολογία, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, συμπεραίνεται ότι αυτή είναι η μοναδική λύση για το δυναμικό Φ .

Παράδειγμα 6.1-3: Τροποποιώντας κι άλλο τη διάταξη του παραδ. 6.1-1, δεν υπάρχει, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η αγώγιμη πλάκα στην περιοχή $z < 0$, και επιπρόσθετα η πάνω αγώγιμη πλάκα είναι, τώρα, μετατοπισμένη κατά απόσταση δ ($\ll a$) σε σχέση με την πάνω βάση του διηλεκτρικού κυλίνδρου, που υπενθυμίζεται ότι έχει φορτίο $\rho = \rho_0(1 + z/h)$ και επιτρεπτότητα $\varepsilon \gg \varepsilon_0$, ενώ όλος ο υπόλοιπος χώρος έχει αέρα, με ε_0 .



Μεταξύ του φορτισμένου κυλίνδρου και της αγώγιμης πλάκας αναπτύσσεται ηλεκτρικό πεδίο, που μπορεί να προσεγγισθεί (όπως στους πυκνωτές) ότι περιορίζεται στο διάκενο και έχει τη μορφή $\mathbf{E} = \mathbf{i}_z E_0$, όπου E_0 είναι σταθερή ποσότητα με κατάλληλη μη διδόμενη τιμή. Πάλι ζητείται το δυναμικό Φ στο εσωτερικό του κυλίνδρου, και επιπρόσθετα η τιμή της σταθεράς E_0 .

Επίλυση: Το νέο στοιχείο σε σχέση με το παραδ. 6.1-2 είναι η συνθήκη στο όριο $z = h$. Εκεί, από τη σχέση $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma$ ($= 0$ μεταξύ μονωτών) τώρα είναι $\varepsilon(\partial\Phi/\partial n)|_{z=h^-} = -\varepsilon_0 E_0$. Στο υπόλοιπο τμήμα του περιβλήματος (κάτω βάση και κυλινδρική επιφάνεια) πάλι επικρατεί η ομογενής συνθήκη Neumann, $\partial\Phi/\partial n = 0$, και στον εσωτερικό χώρο ισχύει η εξίσωση του Poisson, $\nabla^2\Phi = \rho(z)/\varepsilon$. Για όλα τα στοιχεία που σχετίζονται με τον κύλινδρο είναι πάλι $\partial/\partial r_T = 0$ και $\partial/\partial\phi = 0$ (στο όριο $z = h$, επειδή η σταθερά E_0 είναι, βέβαια, ανεξάρτητη από τα r_T και ϕ), οπότε το δυναμικό αναμένεται να έχει τη μονοδιάστατη εξάρτηση $\Phi = \Phi(z)$.

Ολοκληρώνοντας δύο φορές τη διαφορική εξίσωση $\nabla^2\Phi = d^2\Phi/dz^2 = \rho/\varepsilon$, το δυναμικό Φ εκφράζεται με δύο σταθερές ολοκλήρωσης $C_{1,2}$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(z + \frac{z^2}{2h} \right) + C_1 \quad \text{και} \quad \Phi(z) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{z^3}{h} \right) + C_1 z + C_2.$$

με την οριακή συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$ στο $z = 0$ να δίνει πάλι $C_1 = 0$. Το νέο και διαφορετικό στοιχείο είναι η οριακή συνθήκη στο $z = h$. Εκεί είναι $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$, συνεπώς $-(\varepsilon_0/\varepsilon)E_0 = (\partial\Phi/\partial n)|_{z=h} = (\partial\Phi/\partial z)|_{z=h} = -(\rho_0/\varepsilon)(z + z^2/2h)|_{z=h} + C_1$ και προσδιορίζεται η σταθερά E_0 . Τέλος, εξετάζοντας το διάκενο, παρατηρείται ότι $\Phi(z=h) = \Phi(z=h+\delta) - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = U + E_0\delta$ (με $d\mathbf{r} = -\mathbf{i}_z dz$), που προσδιορίζει τη δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης C_2 . Τελικά, είναι:

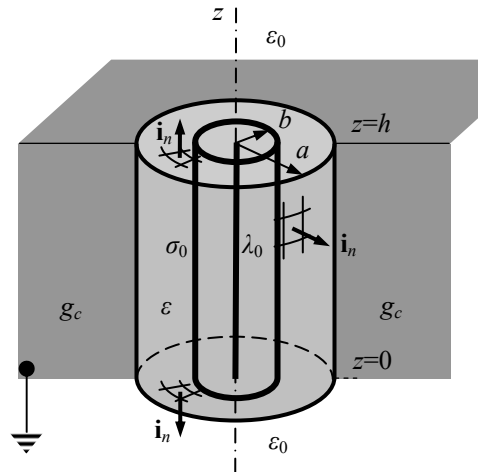
$$\Phi(z) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{z^3}{h} \right) + \frac{2}{3} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} h^2 + U + E_0\delta, \quad \text{με} \quad E_0 = \frac{3}{2} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} h.$$

Σχόλιο: Στην παρούσα διάταξη, στην οποία όλο το περίβλημα S χαρακτηρίζεται από συνθήκη *Neumann*, το καλά προσδιορισμένο πρόβλημα συνοδεύεται από τη δέσμευση (6.1-22), που εδώ αποδίδει το νόμο του *Gauss*, $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \rho dV$. Η δέσμευση αυτή εδώ εξειδικεύεται σε:

$$\oint_S \Phi_{nS}(\mathbf{r}_S) dS = -\int_V f(\mathbf{r}) dV \Rightarrow -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 \pi a^2 + 0 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \pi a^2 \int_0^h dz \left(1 + \frac{z}{h}\right),$$

που προσδιορίζει τη σταθερά E_0 από κάπως διαφορετική οπτική γωνία, αλλά πάντως με ακριβώς τις ίδιες πράξεις. Επίσης, χωρίς την πληροφορία για την τιμή U του δυναμικού στην αγωγίμη πλάκα, γνωρίζοντας μόνο ότι $(\partial\Phi/\partial n)|_{z=h^-} = -(\varepsilon_0/\varepsilon)E_0$, δεν προσδιορίζεται η σταθερά C_2 , κάτι που αναμένεται όταν επικρατεί συνθήκη *Neumann* σε ολόκληρη την S . Αλλά, τελικά ενδιαφέρει το πεδίο $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ και η απροσδιοριστία του C_2 δεν θα είχε ουσιαστικές συνέπειες.

Παράδειγμα 6.1-4: Ο κύλινδρος $r_T < a$, $0 < z < h$ αποτελείται από ομογενές διηλεκτρικό υλικό, με επιτρεπτότητα $\varepsilon \gg \varepsilon_0$. Η κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ είναι σε επαφή με γειωμένο ιδανικό αγωγό ($g_c = \infty$), ενώ οι δίσκοι στα $z = 0$ και $z = h$ σε επαφή με αέρα (με ε_0). Μέσα στον κύλινδρο υπάρχει επιφανειακό φορτίο $\sigma = \sigma_0$ στο κυλινδρικό κέλυφος $r_T = b (< a)$ και γραμμικό $\lambda = \lambda_0$ στον άξονα. Ζητείται το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ στο εσωτερικό του κυλίνδρου, καθώς και τα φορτία που επάγονται στα αγωγίμα τοιχώματά του.



Επίλυση: Το πρόβλημα οριακών τιμών αποτελείται από:

- Εξισώσεις για την κυλινδρική περιοχή V (την περιοχή $r_T < a$, $0 < z < h$): Με $\varepsilon = \text{σταθ.}$, η διαφορική εξίσωση είναι $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = \varepsilon \nabla^2 \Phi = -f$. Εδώ η συνάρτηση f είναι ίση με μηδέν, επειδή στην περιοχή V δεν υπάρχει χωρική πυκνότητα φορτίου με πεπερασμένη τιμή. Υπάρχουν, όμως, συγκεντρωμένα φορτία, το λ_0 στον άξονα $r_T = 0$ και το σ_0 στο κυλινδρικό κέλυφος $r_T = b$. Εκεί η f ουσιαστικά έχει άπειρη τιμή, η οποία λαμβάνεται υπ' όψιν μέσω των συνθηκών ασυνέχειας. Επίσης, προφανώς εξυπηρετεί να χρησιμοποιηθούν κυλινδρικές συντεταγμένες και επειδή η διάταξη είναι συνολικά αμετάβλητη σε περιστροφή, είναι $\partial/\partial\varphi = 0$. Συνεπώς, το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου περιγράφεται συνολικά από τις εξισώσεις της παραγράφου 5.2.3, οι οποίες εξειδικεύονται σε:

$$r_T < a: \quad \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

$$r_T \rightarrow 0: \quad 2\pi \left[\varepsilon r_T \frac{\partial}{\partial r_T} \Phi \right]_{r_T \rightarrow 0} = -\lambda_0, \quad (2\pi \varepsilon r_T \Phi) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = 0,$$

$$r_T = b: \quad \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \Big|_{r_T=b^+} - \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \Big|_{r_T=b^-} = -\sigma_0, \quad \Phi(r_T=b^+) - \Phi(r_T=b^-) = 0.$$

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν σε κάθε z της περιοχής $0 < z < h$. Στην επιφάνεια $r_T = b$ λήφθηκε $\mathbf{i}_n = +\mathbf{i}_T$, οπότε εκεί είναι $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial r_T$ και π.χ. $\Phi_+ = \Phi(r_T=b^+)$. Θα μπορούσε να είχε ληφθεί $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_T$, και τότε θα ήταν $\partial\Phi/\partial n = -\partial\Phi/\partial r_T$ και $\Phi_+ = \Phi(r_T=b^-)$ κλπ., χωρίς καμία συνέπεια στις εξισώσεις για την παράγωγο και την τιμή του Φ .

- Συνθήκες στο όριο S της περιοχής V : Θα προσδιορισθούν από τις ιδιότητες του παρακείμενου χώρου, εξετάζοντας χωριστά τις ιδιότητες κάθε διαφορετικού υλικού.

ο Όριο στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ (με $0 < z < h$): Στην παρακείμενη περιοχή με τον ιδανικό αγωγό είναι $\mathbf{E}_c = (1/g_c)\mathbf{J}_c = 0$ (επειδή $g_c = \infty$), συνεπώς σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας $r_T = a$ είναι $\Phi(\mathbf{r}_S) = \Phi(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_S} \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{r} = 0 - 0 = 0$, με διαδρομή ολοκλήρωσης από το σημείο \mathbf{r}_0 της «γης», όπου $\Phi = 0$, μέσω του αγωγίμου υλικού, όπου $\mathbf{E}_c = 0$, μέχρι το \mathbf{r}_S , οπουδήποτε στην κυλινδρική επιφάνεια. Δεν υπάρχει διπολικό στρώμα, που θα προκαλούσε ασυνέχεια, άρα επικρατεί η συνθήκη *Dirichlet*:

$$\Phi(r_T=a) = 0.$$

ο Όριο στις δύο βάσεις $z = 0$ και $z = h$ (με $r_T < a$): Στην περιοχή με τον αέρα, επειδή $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$, μπορεί να τεθεί $\varepsilon_0 \approx 0$, συνεπώς εκεί $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \approx 0$. Για την οριακή συνθήκη $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma$ στον δίσκο στο $z = 0$, όπου $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_z$, τα πεδία είναι $\mathbf{D}_+ = \mathbf{D}_0 = 0$ και $\mathbf{D}_- = \mathbf{D}(z=0^+) = \varepsilon \mathbf{E}(z=0^+) = -\varepsilon \nabla \Phi|_{z=0^+}$, ενώ δεν υπάρχει λόγος για εμφάνιση φορτίου, καθώς και οι δύο περιοχές με κοινό όριο τον δίσκο είναι μονωτές. Άρα είναι $\sigma = 0$ και προκύπτει ομογενής συνθήκη *Neumann*. Παρόμοια ισχύουν στον δίσκο $z = h$, όπου η διαφοροποίηση ότι εκεί είναι $\mathbf{i}_n = +\mathbf{i}_z$ δεν έχει περαιτέρω συνέπειες. Συνεπώς:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0.$$

Έχει, ήδη, σημειωθεί ότι είναι $\partial/\partial \varphi = 0$. Επιπλέον είναι και $\partial/\partial z = 0$ στο σύνολο των δεδομένων: Στην επιτρεπτότητα ε , στα φορτία λ_0 και σ_0 , στο σχήμα του κυλινδρικού ορίου, που δεν μεταβάλλεται με το z , στην εκεί οριακή συνθήκη, καθώς και στα δύο επίπεδα όρια, τα οποία βρίσκονται σε σταθερό z , όπου οι οριακές συνθήκες δηλώνουν $(\partial\Phi/\partial z)|_{z=0} = (\partial\Phi/\partial z)|_{z=h} = 0$.

Συνεπώς, μπορεί να ληφθεί συνολικά στον κυλινδρικό χώρο ότι $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$ και $\partial\Phi/\partial z = 0$, δηλαδή $\Phi = \Phi(r_T)$, οπότε η Λαπλασιανή απλουστεύεται σε $\nabla^2\Phi = (1/r_T)(\partial/\partial r_T)(r_T\partial\Phi/\partial r_T)$.

Λόγω του επιφανειακού φορτίου στην επιφάνεια $r_T = b$, η διαφορική εξίσωση $\nabla^2\Phi = 0$ θα ολοκληρωθεί χωριστά στις περιοχές I ($0 < r_T < b$) και II ($b < r_T < a$) και θα εμφανισθούν δύο ζεύγη σταθερών ολοκλήρωσης. Διαδοχικές ολοκληρώσεις δίνουν:

$$r_T \frac{\partial}{\partial r_T} \Phi^{I,II} = C_1^{I,II}, \text{ και } \Phi^{I,II}(r_T) = C_1^{I,II} \ln\left(\frac{r_T}{b}\right) + C_2^{I,II}.$$

Η εισαγωγή του b στο όρισμα του λογαρίθμου έγινε έτσι ώστε το όρισμα να είναι αδιάστατο, αλλά και για διευκόλυνση στο επόμενο βήμα, στη χρήση των οριακών συνθηκών στο $r_T = b$. Μαθηματικά, αυτό σημαίνει ότι η δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης γράφτηκε ως $C_2 - C_1 \ln b$.

Με την παραπάνω μορφή για τα $\Phi^{I,II}$, οι συνθήκες για την τιμή και την παράγωγο του Φ στις θέσεις $r_T \rightarrow 0$ και $r_T = b$ δίνουν τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} r_T \rightarrow 0: \quad 2\pi\epsilon C_1^I &= -\lambda_0, & 2\pi\epsilon \left[C_1^I b (\xi \ln \xi) \Big|_{\xi \rightarrow 0} + C_2^I \xi \Big|_{\xi \rightarrow 0} \right] &= 0, \\ r_T = b: \quad \epsilon \frac{C_1^{II}}{b} - \epsilon \frac{C_1^I}{b} &= -\sigma_0, & C_2^{II} - C_2^I &= 0. \end{aligned}$$

Από αυτές, η δεύτερη, όπου έχει τεθεί $\xi = r_T/b$, είναι απλώς ταυτότητα, επειδή είναι $(\xi \ln \xi) \Big|_{\xi \rightarrow 0} = 0$. Οι άλλες τρεις κατά σειρά δίνουν $C_1^I = -\lambda_0/2\pi\epsilon$, $C_1^{II} = -\lambda_0/2\pi\epsilon - \sigma_0 b/\epsilon$ και $C_2^{II} = C_2^I$. Απομένει η συνθήκη $\Phi(r_T = a) = 0$, η οποία δίνει την τέταρτη μη τετριμμένη σχέση:

$$r_T = a: \quad C_1^{II} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + C_2^{II},$$

οπότε $C_2^{II} (= C_2^I) = -C_1^{II} \ln(a/b)$, και, τελικά, το δυναμικό σε κάθε περιοχή είναι:

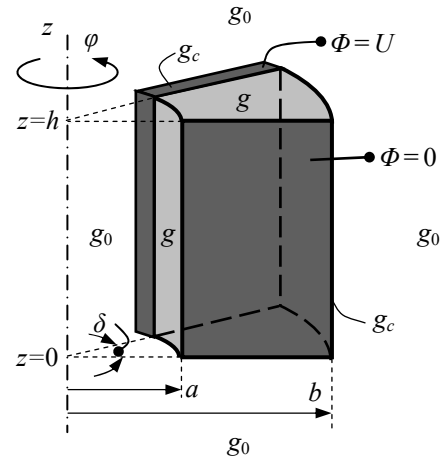
$$\Phi(r_T < b) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon} \ln\left(\frac{a}{b}\right), \quad \Phi(b < r_T < a) = -\left(\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon}\right) \ln\left(\frac{r_T}{a}\right).$$

Τέλος, στην επιφάνεια $r_T = a$ επάγεται επιφανειακό φορτίο, το οποίο προσδιορίζεται από τη σχέση $\sigma_a = \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-)$, με $(\partial\Phi/\partial n)_+ = 0$, επειδή $\Phi(r_T > a) = 0 = \text{σταθ.}$:

$$\sigma_a = - \left[\epsilon_c \frac{\partial\Phi}{\partial r_T} \Big|_{r_T=a^+} - \epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial r_T} \Big|_{r_T=a^-} \right] = - \left(\frac{\lambda_0}{2\pi a} + \frac{\sigma_0 b}{a} \right).$$

Η σχέση αυτή περιγράφει ότι το ολικό φορτίο $Q_{\text{ολ}} = (\lambda_0 + 2\pi b\sigma_0 + 2\pi a\sigma_a)h$ είναι ίσο με μηδέν. Για να επιβεβαιωθεί αυτή η παρατήρηση με το νόμο του Gauss, $Q_{\text{ολ}} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$, αναζητείται κλειστή επιφάνεια S , στην οποία να είναι παντού $\mathbf{D} = 0$. Πράγματι, αυτό συμβαίνει σε επιφάνεια που διέρχεται από τον ιδανικό αγωγό (όπου είναι $\mathbf{E} = 0$, άρα και $\mathbf{D} = 0$) και από τον αέρα μακριά από τον κύλινδρο (όπου έτσι κι αλλιώς είναι $\mathbf{D} = 0$, χωρίς την προσέγγιση $\epsilon_0 \approx 0$).

Παράδειγμα 6.1-5: Το κυλινδρικό τμήμα του σχήματος, που εκτείνεται από $r_T = a$ μέχρι $r_T = b$, από $\varphi = 0$ μέχρι $\varphi = \delta$ και από $z = 0$ μέχρι $z = h$, αποτελείται από αγώγιμο υλικό, με ειδική αγωγιμότητα g . Οι επιφάνειες στα $\varphi = 0$ και $\varphi = \delta$ είναι σε επαφή με πολύ καλό αγωγό (με $g_c \gg g$), ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις επιφάνειες είναι σε επαφή με αέρα (με $g_0 = 0$). Μεταξύ των δύο πολύ καλών αγωγών εφαρμόζεται σταθερή τάση U . Ζητείται η αγωγιμότητα της διάταξης.



Επίλυση: Επειδή στους ιδανικούς αγωγούς είναι $\mathbf{E}_c = \mathbf{J}_c/g_c = 0$, στις επιφάνειες $\varphi = 0$ και $\varphi = \delta$ είναι $\Phi = \text{σταθ.}$, συγκεκριμένα $\Phi(\varphi=0) = 0$ και $\Phi(\varphi=\delta) = U$. Στον αέρα είναι $\mathbf{J}_0 = g_0 \mathbf{E}_0 = 0$, οπότε στην οριακή συνθήκη $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = -\partial\sigma/\partial t - \nabla \cdot \mathbf{K}$ είναι $\mathbf{J}_+ = \mathbf{J}_0 = 0$. Οι δύο όροι στη δεξιά πλευρά αυτής της οριακής συνθήκης είναι μηδενικοί ($\partial\sigma/\partial t = 0$ σε μόνιμη κατάσταση, που συνάγεται επειδή $\partial U/\partial t = 0$, και $\mathbf{K} = 0$, επειδή δεν υπάρχει στρώμα με υλικό υψηλής αγωγιμότητας). Συνεπώς, στις τέσσερις έδρες που είναι σε επαφή με τον αέρα είναι $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_- = 0$, δηλαδή $-g(\partial\Phi/\partial n)|_s = 0$, και για τις έδρες στα $r_T = a$ και $r_T = b$ (με $\mathbf{i}_n = \mp \mathbf{i}_T$) αυτό σημαίνει ότι εκεί είναι $\partial\Phi/\partial r_T = 0$, ενώ για τις έδρες στα $z = 0$ και $z = h$ (με $\mathbf{i}_n = \mp \mathbf{i}_z$) σημαίνει $\partial\Phi/\partial z = 0$.

Η διαφορική εξίσωση για μόνιμη ροή ρεύματος, $\nabla \cdot (g \nabla \Phi) = 0$, αφορά υλικό με σταθερή ειδική αγωγιμότητα g , συνεπώς είναι $\nabla^2 \Phi = 0$. Οι οριακές συνθήκες και τα λοιπά δεδομένα της διάταξης υποδηλώνουν ότι παντού είναι $\partial/\partial r_T = \partial/\partial z = 0$, οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται $(1/r_T^2) \partial^2 \Phi / \partial \varphi^2 = 0$. Με διαδοχικές ολοκληρώσεις προκύπτει ότι $\Phi = C_1 \varphi + C_2$, οι συνθήκες στα $\varphi = 0$ και $\varphi = \delta$ δίνουν $C_1 = U/\delta$ και $C_2 = 0$, και, τελικά, το δυναμικό είναι $\Phi = (U/\delta)\varphi$.

Η πυκνότητα ρεύματος είναι $\mathbf{J} = g \mathbf{E} = -g \nabla \Phi = -(g/r_T)(\partial\Phi/\partial\varphi) \mathbf{i}_\varphi = -\mathbf{i}_\varphi (gU/\delta)(1/r_T)$ και η στοιχειώδης διατομή είναι $d\mathbf{S} = -\mathbf{i}_\varphi dr_T dz$, με φορά από τον θετικό οπλισμό στο $\varphi = \delta$ προς τον αρνητικό στο $\varphi = 0$, οπότε το ρεύμα του αντιστάτη είναι:

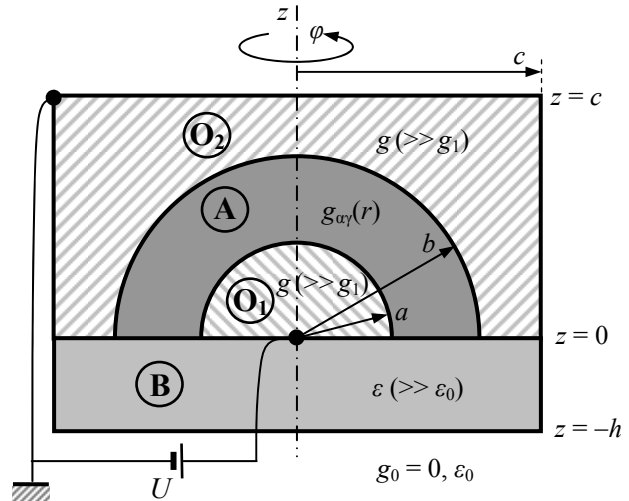
$$I_R = \int_{S_R} d\mathbf{S}_R \cdot \mathbf{J} = \int_a^b dr_T \int_0^h dz (-\mathbf{i}_\varphi) \cdot \left(-\mathbf{i}_\varphi \frac{gU}{\delta} \frac{1}{r_T} \right) = \frac{gU}{\delta} h \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Η τάση είναι βέβαια $U_R = U [= \Phi(\varphi=\delta) - \Phi(\varphi=0)]$ και, διαιρώντας το ρεύμα με την τάση, προκύπτει η αγωγιμότητα:

$$G = \frac{I_R}{U_R} = \frac{gh}{\delta} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Παράδειγμα 6.1-6: Μία διάταξη με συμμετρία περιστροφής περιλαμβάνει:

- Μη ομογενές αγώγιμο υλικό «**A**», με ειδική αγωγιμότητα $g_{αγ}(r) = g_1 a/r$, στο κοίλο ημισφαιρίο $a < r < b$, $0 < \theta < \pi/2$.
- Δύο οπλισμούς από εξαιρετικά αγώγιμο υλικό, με $g \gg g_1$. Ο εσωτερικός οπλισμός «**O**₁» έχει σχήμα ημισφαιρίου με ακτίνα a και το κέντρο του βρίσκεται σε σταθερό δυναμικό U . Ο εξωτερικός οπλισμός «**O**₂» έχει σχήμα κυλίνδρου με ακτίνα c και ύψος επίσης c (με $c > b$), με μια ημισφαιρική κοιλότητα με ακτίνα b . Ένα σημείο του στο $z = c$ συνδέεται με τη «γη».
- Μία βάση «**B**», από ομογενές μονωτικό διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα $\epsilon (>> \epsilon_0)$, με κυλινδρικό σχήμα (ακτίνα c , ύψος h), με την οποία σε επαφή βρίσκονται όλα τα λοιπά εξαρτήματα «**O**₁», «**A**» και «**O**₂».



Ο υπόλοιπος χώρος έχει ιδιότητες κενού ($g_0 = 0$ και ϵ_0).

- Για την περιοχή $a < r < b$, $0 < \theta < \pi/2$ με το μη ομογενές αγώγιμο υλικό «**A**», διατυπώστε με κατάλληλη σύντομη τεκμηρίωση το πρόβλημα οριακών τιμών (διαφορική εξίσωση και οριακές συνθήκες) για το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ_A .
- Προσδιορίστε το δυναμικό Φ_A στο εσωτερικό του αγώγιμου υλικού.
- Για την περιοχή $r_T < c$, $-h < z < 0$ της διηλεκτρικής βάσης «**B**» διατυπώστε με κατάλληλη σύντομη τεκμηρίωση το πρόβλημα οριακών τιμών (διαφορική εξίσωση και οριακές συνθήκες) για το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ_B . Δεν ζητείται ο προσδιορισμός του Φ_B .

Επίλυση:

(α) Τμήμα του περιβλήματος της περιοχής «**A**» ($a < r < b$, $0 < \theta < \pi/2$), οι ημισφαιρικές επιφάνειες $r = a$ και $r = b$, είναι σε επαφή με τους αγώγιμους οπλισμούς «**O**_{1,2}», όπου $g \gg g_1$, δηλαδή $g \gg g_{αγ}$, που επιτρέπει την προσέγγιση $g \approx \infty$. Μέσα στους οπλισμούς είναι $\mathbf{E} = \mathbf{J}/g \approx 0$, οπότε $\Delta\Phi = -\mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} = 0$, και επειδή δεν υπάρχει διπολικό στρώμα προκύπτει, τελικά, ότι $\Phi_A(r=a) = U$ και $\Phi_A(r=b) = 0$. Στο δακτύλιο $a < r_T < b$ του επιπέδου $z = 0$ (το υπόλοιπο τμήμα του περιβλήματός της), η περιοχή «**A**» είναι σε επαφή με το μονωτή «**B**», στο εσωτερικό του οποίου, άρα και στο όριο, είναι $\mathbf{J} = 0$. Επίσης, στον ίδιο δακτύλιο είναι $\partial\sigma/\partial t = 0$ για μόνιμη κατάσταση, λόγω του $U = \text{σταθ.}$, και $\mathbf{K} = 0$ (δεν δικαιολογείται, εκτός αν στο όριο υπάρ-

χει στρώμα με υψηλή αγωγιμότητα). Συνεπώς, εκεί η συνθήκη $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = -\partial\sigma/\partial t - \nabla \cdot \mathbf{K}$ δίνει $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_- = 0$ και με $\mathbf{J}_- = g_{\alpha\gamma} \mathbf{E}_-$ προκύπτει $\partial\Phi_A/\partial n = 0$, δηλαδή $(\partial\Phi_A/\partial\theta)_{\theta=\pi/2} = 0$. Τέλος, η διαφορική εξίσωση στο εσωτερικό του χώρου «Α» θα προέλθει από το νόμο διατήρησης φορτίου σε μόνιμη κατάσταση, $\nabla \cdot \mathbf{J}_A = 0$, που (με $\mathbf{J}_A = g_{\alpha\gamma} \mathbf{E}_A$ και $\mathbf{E}_A = -\nabla\Phi_A$) γράφεται $\nabla \cdot (g_{\alpha\gamma} \nabla\Phi_A) = 0$, και όχι $\nabla^2\Phi_A = 0$, επειδή το υλικό δεν είναι ομογενές, $g_{\alpha\gamma} \neq \text{σταθ}$.

Η διάταξη είναι αμετάβλητη σε περιστροφή, συνεπώς αναμένεται να είναι $\partial\Phi_A/\partial\varphi = 0$. Επίσης, όλες οι διαθέσιμες πληροφορίες συνηγορούν στο ότι είναι και $\partial\Phi_A/\partial\theta = 0$. Συγκεκριμένα, ανεξάρτητες από το θ είναι η θέση των ορίων $r = a, b$ και η τιμή του δυναμικού εκεί, καθώς και η χωρική εξάρτηση της ειδικής αγωγιμότητας $g_{\alpha\gamma}$, ενώ στον απότομο τερματισμό της περιοχής στη θέση $\theta = \pi/2$ (τη μόνη εξάρτηση από το θ) έχει διατυπωθεί η συνθήκη $\partial\Phi_A/\partial\theta = 0$. Αναμένεται, λοιπόν, μονοδιάστατη εξάρτηση, με μορφή $\Phi_A = \Phi_A(r)$. Εξειδικεύοντας σε τέτοια εξάρτηση, οι εξισώσεις που συνθέτουν το πρόβλημα οριακών τιμών είναι:

$$\begin{aligned} a < r < b: & \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_A}{\partial r} \right) = 0, \\ r = a: & \quad \Phi_A = U, \\ r = b: & \quad \Phi_A = 0, \end{aligned}$$

παραλείποντας τη συνθήκη $(\partial\Phi_A/\partial\theta)_{\theta=\pi/2} = 0$, η οποία ικανοποιείται αυτόματα με την εξάρτηση $\Phi_A = \Phi_A(r)$. Ο όρος $1/r$ στη διαφορική εξίσωση προέρχεται από τη χωρική εξάρτηση της ειδικής αγωγιμότητας, $g_{\alpha\gamma}(r) = (g_1 a)/r$.

(β) Η επίλυση του συστήματος δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία. Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει $r(\partial\Phi_A/\partial r) = C$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν και την απαίτηση για μηδενισμό στη θέση $r = b$, η δεύτερη ολοκλήρωση δίνει $\Phi_A = C \ln(r/b)$. Απομένει η εφαρμογή της συνθήκης $\Phi_A(r=a) = U$, η οποία προσδιορίζει την τιμή της σταθεράς $C = U/\ln(a/b)$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\Phi_A \left(a < r < b, \theta < \frac{\pi}{2} \right) = U \frac{\ln\left(\frac{r}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

(γ) Για τη διηλεκτρική βάση «Β», ο νόμος του Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{D}_B = 0$, δίνει αμέσως (με $\varepsilon = \text{σταθ}$.) τη διαφορική εξίσωση $\nabla^2\Phi_B = 0$. Στο κυλινδρικό όριο $r_T = c$, καθώς και στο κάτω επίπεδο όριο $z = -h$, η ιδιότητα $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$ του παρακείμενου αέρα επιτρέπει την προσέγγιση $\varepsilon_0 \approx 0$, συνεπώς $\mathbf{D}_0 \approx 0$, και η συνθήκη $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma (= 0 \text{ στο όριο μεταξύ μονωτών})$ δίνει τελικά $\partial\Phi_B/\partial n = 0$. Τέλος, στο επίπεδο όριο $z = 0$ (χωρίς διπολικό στρώμα), η σχέση $\Phi_+ - \Phi_- = 0$ δηλώνει ότι $\Phi_B(r, z=0^-) = \Phi(r, z=0^+) = \{U, \Phi_A(r), 0\}$, ανάλογα με την ακτινική θέση.

Λόγω της περιστροφικής συμμετρίας, θα είναι $\partial\Phi_B/\partial\varphi = 0$. Αντίθετα, πρέπει να είναι αφενός $\partial\Phi_B/\partial r_T \neq 0$, επειδή στην επιφάνεια $z = 0$ το δυναμικό εξαρτάται από την ακτινική θέση, αφετέρου $\partial\Phi_B/\partial z \neq 0$, με την αιτιολόγηση που ακολουθεί την παρουσίαση των εξισώσεων. Ενσωματώνοντας την ιδιότητα $\partial/\partial\varphi = 0$ στις εξισώσεις, καθώς και ότι το κάθετο διάνυσμα είναι ίσο με \mathbf{i}_T και $-\mathbf{i}_z$ στις επιφάνειες με ομογενή συνθήκη *Neumann*, το πρόβλημα οριακών τιμών για το δυναμικό $\Phi_B(r_T, z)$ της περιοχής «**B**» διαμορφώνεται ως εξής:

$$r_T < c, -h < z < 0: \quad \nabla^2 \Phi_B = \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \frac{\partial \Phi_B}{\partial r_T} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial z^2} = 0,$$

$$z = 0, r_T < c: \quad \Phi_B = \begin{cases} U & (r_T < a), \\ \Phi_A(r = r_T) & (a < r_T < b), \\ 0 & (b < r_T < c), \end{cases}$$

$$z = -h, r_T < c: \quad \frac{\partial}{\partial z} \Phi_B = 0,$$

$$r_T = c, -h < z < 0: \quad \frac{\partial}{\partial r_T} \Phi_B = 0.$$

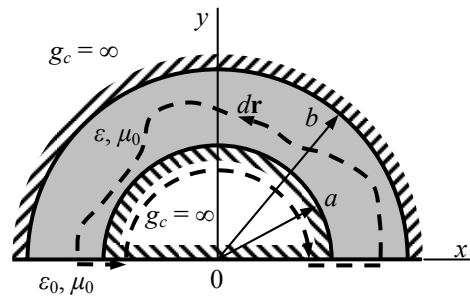
Αν υποθεθεί ότι το δυναμικό Φ_B δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη z , όπως θα μπορούσε να εκληφθεί από την οριακή συνθήκη στο $z = -h$, τότε σε κάθε z της περιοχής «**B**» το δυναμικό Φ_B θα είχε την ακτινική εξάρτηση που ορίζει η οριακή συνθήκη στο $z = 0$. Όμως, στις κυλινδρικές εσωτερικές επιφάνειες $r_T = a$ και $r_T = b$ μια τέτοια εξάρτηση εκδηλώνει ασυνέχεια στην παράγωγο $\partial\Phi_B/\partial r_T$, ασυνέχεια που προϋποθέτει την παρουσία επιφανειακού φορτίου, πράγμα άτοπο για το εσωτερικό ενός μονωτικού υλικού. [Επίσης, μια τέτοια εξάρτηση δεν ικανοποιεί στο διάστημα $a < r_T < b$ και την εξίσωση *Laplace*, που αν είναι $\partial\Phi_B/\partial z = 0$, θα απλοποιηθεί σε $\nabla^2 \Phi_B = (1/r_T)(\partial/\partial r_T)(r_T \partial\Phi_B/\partial r_T) = 0$, αυτό όμως είναι καθαρά συμπτωματικό, οφειλόμενο απλώς στο γεγονός ότι το παρακείμενο αγώγιμο υλικό «**A**» δεν είναι ομογενές.] Δεν μπορεί, λοιπόν, να είναι $\partial\Phi_B/\partial z = 0$, γι' αυτό ορθά η έκφραση για τη Λαπλασιανή γράφηκε χωρίς να παραλειφθεί ο όρος $\partial^2 \Phi_B/\partial z^2$, που δεν είναι ίσος με μηδέν.

Σχόλια:

- Στα όρια $r_T = a$ (με $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_T$) και $r_T = b$ (με $\mathbf{i}_n = +\mathbf{i}_T$) του αγώγιμου υλικού «**A**» αναπτύσσεται επιφανειακό φορτίο, προσδιοριζόμενο από τη σχέση $\sigma_{a,b} = \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_{A-})$, με $\mathbf{D}_+ = 0$ και $\mathbf{D}_{A-} = -\mathbf{i}_T(\varepsilon_{\alpha\gamma} \partial\Phi_A/\partial r_T)_-$, όπου $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ είναι η επιτρεπτότητα του υλικού «**A**». Επίσης, στο εσωτερικό του ίδιου υλικού αναπτύσσεται και χωρική πυκνότητα, ίση με $\rho_A = \nabla \cdot \mathbf{D}_A = -\nabla \cdot (\varepsilon_{\alpha\gamma} \nabla \Phi_A) = \dots$, επειδή το υλικό δεν είναι ομογενές. Θα είναι $\rho_A = 0$, αν είναι $(\varepsilon_{\alpha\gamma}/g_{\alpha\gamma}) = \text{σταθ.}$, που πρακτικά σημαίνει ότι είναι αυτοτελώς $\varepsilon_{\alpha\gamma} = \text{σταθ.}$ και $g_{\alpha\gamma} = \text{σταθ.}$

- Στην επιφάνεια $z = 0$ (με $\mathbf{i}_n = +\mathbf{i}_z$) υπάρχει επιφανειακό φορτίο $\sigma_0 = \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-)$, όπου $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{D}_+ = 0$ (μολονότι $\mathbf{D}_A \neq 0$) και $\mathbf{D}_- = -\varepsilon_0 \mathbf{i}_z (\partial \Phi_B / \partial z)_-$. Στην επιφάνεια $r_T = a$ του *παραδ. 6.1-1* (βλ. δεύτερο σχόλιο εκεί), η μη μηδενική τιμή στη διαφορά $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-)$ είναι αποκλειστικά προϊόν της εκεί προσέγγισης $\varepsilon_0 \approx 0$. Εδώ, όχι μόνο η παρουσία φορτίου σ_0 είναι αποδεκτή, με τον παρακείμενο αγωγίμο χώρο να αποτελεί την δίοδο για την προσαγωγή του, αλλά και η τιμή $\sigma_0 = \varepsilon_0 (\partial \Phi_B / \partial z)_-$ είναι πολύ ακριβής, επειδή το πολύ μεγάλο εύρος τιμών της ειδικής αγωγιμότητας στη φύση καθιστά τις τιμές $g_0 = 0$ και $g_c = \infty$, για μονωτή και καλό αγωγό, πολύ πιο ρεαλιστικές από την προσέγγιση $\varepsilon_0 \approx 0$.

Παράδειγμα 6.1-7: Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας γραμμής μεταφοράς. Οι ρυθμοί *TEM* διαδίδονται στο εσωτερικό του ημικυλινδρικού κελύφους, με ακτίνες εσωτερική ίση με a και εξωτερική ίση με b , και που περιέχει μονωτικό υλικό με σταθερές τιμές για την επιτρεπτότητα ε ($\gg \varepsilon_0$) και τη μαγνητική διαπερατότητα μ



($= \mu_0$). Τα αγωγίμα τοιχώματα (με $g_c = \infty$) εκτείνονται στις περιοχές $r_T < a$ και $r_T > b$ (στο διάστημα $0 < \varphi < \pi$), ενώ ο υπόλοιπος χώρος (στο $\pi < \varphi < 2\pi$) χαρακτηρίζεται από ιδιότητες κενού (ε_0 και μ_0). Υπενθυμίζεται ότι στους ρυθμούς *TEM* είναι $E_z = 0$ και $H_z = 0$, και οι εγκάρσιες συνιστώσες έχουν τη μορφή $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp) \exp[j(\omega t - k_\varepsilon z)]$ και $\mathbf{H}_\perp(\mathbf{r}_\perp) \exp[j(\omega t - k_\varepsilon z)]$ και συνδέονται με τη σχέση $Z_\varepsilon \mathbf{H}_\perp = \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_\perp$, εδώ με $k_\varepsilon = \omega(\varepsilon \mu_0)^{1/2}$ και $Z_\varepsilon = (\mu_0/\varepsilon)^{1/2}$.

Να προσδιορισθούν τα πεδιακά πλάτη $\{\mathbf{E}_\perp, \mathbf{H}_\perp\}$, (α) με χρήση του διδιάστατου ηλεκτρικού δυναμικού Φ_\perp , για το οποίο είναι $\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp \Phi_\perp$, και (β) εναλλακτικά με χρήση του διδιάστατου μαγνητικού δυναμικού $\Phi_{\perp m}$, για το οποίο είναι $\mathbf{H}_\perp = -\nabla_\perp \Phi_{\perp m}$, αφού προηγουμένως διατυπωθούν και επιλυθούν τα προβλήματα οριακών τιμών για τα δυναμικά αυτά.

Επίλυση:

(α) Με το ηλεκτρικό δυναμικό: Για το δυναμικό $\Phi_\perp(r_T, \varphi)$ η διαφορική εξίσωση είναι η εξίσωση του Laplace σε δύο διαστάσεις, $\nabla_\perp^2 \Phi_\perp = 0$, χωρίς τον όρο $\partial^2 / \partial z^2$, όπως προκύπτει από τη σχέση $0 = \nabla \cdot \mathbf{D}_\perp = -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi_\perp)$ με $\varepsilon = \text{σταθ}$. Για τις οριακές συνθήκες στα κυλινδρικά όρια με το αγωγίμο τοίχωμα, η ιδιότητα $g_c = \infty$ σημαίνει $\mathbf{E}_c = 0$ και συνεπώς $\Phi_c = \text{σταθ}$. Έτσι, είναι $\Phi_\perp(r_T = a) = \Phi_1$ και $\Phi_\perp(r_T = b) = \Phi_2$. Οι τιμές $\Phi_{1,2}$ δεν είναι γνωστές, αλλά πάντως δεν υπάρχει κανένας λόγος να ταυτίζονται, αφού πρόκειται για δύο διακριτά τοιχώματα, χωρίς αγωγιμη σύνδεση μεταξύ τους. Για να είναι $\Phi_1 \neq \Phi_2$, πρέπει να είναι $\partial \Phi_\perp / \partial r_T \neq 0$. Στα όρια $\varphi = 0$

και $\varphi = \pi$, τώρα, η ιδιότητα $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$ του παρακείμενου χώρου υποδεικνύει την προσέγγιση $\varepsilon_0 \approx 0$, οπότε $\mathbf{D}_0 \approx 0$, και επειδή στα όρια αυτά δεν είναι δυνατή η παρουσία επιφανειακού φορτίου, σχηματίζεται η οριακή συνθήκη $\partial\Phi_{\perp}/\partial n = 0$, δηλαδή $(\partial\Phi_{\perp}/\partial\varphi)_{\varphi=0} = (\partial\Phi_{\perp}/\partial\varphi)_{\varphi=\pi} = 0$. Δεδομένου ότι, επίσης, πουθενά αλλού, ούτε στο σχήμα των ορίων $r_T = a$ και $r_T = b$ και στις συνθήκες εκεί, ούτε στο εσωτερικό του χώρου, δεν υποδεικνύεται η ανάγκη για εξάρτηση από τη γωνία φ , συνάγεται ότι $\partial\Phi_{\perp}/\partial\varphi = 0$ συνολικά, δηλαδή, ότι είναι $\Phi_{\perp} = \Phi_{\perp}(r_T)$.

Για μονοδιάστατη, τελικά, εξάρτηση $\Phi_{\perp} = \Phi_{\perp}(r_T)$, η διαφορική εξίσωση $\nabla_{\perp}^2\Phi_{\perp} = 0$ γίνεται απλά $(1/r_T)(\partial/\partial r_T)(r_T\partial\Phi_{\perp}/\partial r_T) = 0$. Με δύο ολοκληρώσεις προσδιορίζεται η συνάρτηση $\Phi_{\perp} = \Phi_{\perp}(r_T)$. Κατά τη διαδικασία εμφανίζονται δύο σταθερές ολοκλήρωσης, των οποίων οι τιμές συνδέονται με τις σταθερές $\Phi_{1,2}$ από τις συνθήκες στα όρια $r_T = a$ και $r_T = b$. Όμως, η δεύτερη ολοκλήρωση είναι περιττή, αν τελικό ζητούμενο είναι μόνο το πεδιακό πλάτος $\mathbf{E}_{\perp} = -\nabla_{\perp}\Phi_{\perp} = -\mathbf{i}_T\partial\Phi_{\perp}/\partial r_T$. Αρκεί μία ολοκλήρωση, $r_T\partial\Phi_{\perp}/\partial r_T = \text{σταθ.} = -\Phi_0$, με μία μόνο σταθερά (που εξυπηρετεί να γραφεί με αρνητικό πρόσημο, ως $-\Phi_0$, χωρίς πάντως να υπονοείται $\Phi_0 > 0$), που προσδιορίζει το ηλεκτρικό πεδίο, ενώ το μαγνητικό πεδίο προκύπτει αμέσως από τη σχέση $Z_{\varepsilon}\mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{\perp}$. Οι τελικές εκφράσεις για τα πεδιακά πλάτη, όπως προκύπτουν με χρήση του δυναμικού Φ_{\perp} ως ενδιάμεσης ποσότητας, είναι:

$$\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{i}_T \frac{\Phi_0}{r_T}, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{i}_{\varphi} \frac{\Phi_0}{Z_{\varepsilon} r_T}.$$

(β) Με το μαγνητικό δυναμικό: Η διαφορική εξίσωση για το $\Phi_{\perp m}(r_T, \varphi)$ σχηματίζεται από τον αντίστοιχο νόμο του *Gauss*, $0 = \nabla \cdot \mathbf{B}_{\perp} = -\nabla \cdot (\mu \nabla \Phi_{\perp m})$ με $\mu = \text{σταθ.}$ και είναι πάλι η διδιάστατη εξίσωση του *Laplace* $\nabla_{\perp}^2\Phi_{\perp m} = 0$. Στα όρια $r_T = a$ και $r_T = b$, η ιδιότητα $g_{\varepsilon} = \infty$ του παρακείμενου αγωγίμου τοιχώματος πάλι σημαίνει $\mathbf{E}_c = 0$, με περαιτέρω συνέπεια ότι $-j\omega\mathbf{B}_c = \nabla \times \mathbf{E}_c = 0$. Τώρα θα εφαρμοσθεί η συνθήκη $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0$, η οποία έχει τη συνέπεια $\partial\Phi_{\perp m}/\partial n = 0$, δηλαδή $(\partial\Phi_{\perp m}/\partial r_T)_{r_T=a} = (\partial\Phi_{\perp m}/\partial r_T)_{r_T=b} = 0$, ομογενείς συνθήκες *Neumann*. Ας υποτεθεί στο σημείο αυτό ότι είναι παντού $\partial\Phi_{\perp m}/\partial r_T = 0$, δηλαδή, $H_T = -\partial\Phi_{\perp m}/\partial r_T = 0$. Άλλωστε, στον εσωτερικό χώρο δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση ακτινικά, και, επίσης, μολονότι δεν έχει ακόμα διατυπωθεί συγκεκριμένη οριακή συνθήκη στα όρια $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi$, εκεί ο παρακείμενος χώρος έχει τις ίδιες ιδιότητες σε κάθε ακτινική θέση r_T . Δεδομένου ότι το δυναμικό $\Phi_{\perp m}$ συνδέεται με το μαγνητικό πεδίο, και αυτό με τη σειρά του με το νόμο του *Ampere*, εφαρμόζοντας το νόμο αυτό σε βρόχο που περικλείει το όριο του εσωτερικού τοιχώματος και οριακά έξω από τη διάταξη περιέχει δύο ακτινικά ευθύγραμμα τμήματα, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα, προκύπτει για το ρεύμα στο τοίχωμα $r_T = a$, ότι $I_a = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \mathbf{H}_{\perp} \cdot d\mathbf{r}$, με μηδε-

νική τη συνεισφορά από το εσωτερικό του αγωγίμου τοιχώματος (όπου $\mathbf{H}_c = 0$) και από τα ευθύγραμμα τμήματα (όπου $d\mathbf{r} = \pm \mathbf{i}_T dr_T$, ενώ $H_T = 0$). Με βάση τον ορισμό του μαγνητικού δυναμικού, το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι η αρνητική διαφορά μαγνητικού δυναμικού μεταξύ των θέσεων $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi$, ανεξάρτητη από τις ακτινικές θέσεις αφετηρίας και τέρματος. Επομένως, οι απομένουσες οριακές συνθήκες είναι $\Phi_{\perp m}(\varphi=0) = \Phi_{m1}$ και $\Phi_{\perp m}(\varphi=\pi) = \Phi_{m2}$. Οι τιμές $\Phi_{m1,2}$ πάλι δεν είναι γνωστές (ούτε η διαφορά τους, το ρεύμα στο τοίχωμα), χωρίς όμως να προκαλούνται συνέπειες. Απλά, επιβεβαιώνεται η υπόθεση $\partial\Phi_{\perp m}/\partial r_T = 0$ (αλλά $\partial\Phi_{\perp m}/\partial\varphi \neq 0$), η οποία οδηγεί σε μονοδιάστατη εξάρτηση, τώρα $\Phi_{\perp m} = \Phi_{\perp m}(\varphi)$.

Η μονοδιάστατη εξάρτηση $\Phi_{\perp m} = \Phi_{\perp m}(\varphi)$ απλοποιεί τη διαφορική εξίσωση σε $\partial^2\Phi_{\perp m}/\partial\varphi^2 = 0$. Πάλι, επειδή ενδιαφέρει μόνο το μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{H}_{\perp} = -\nabla_{\perp}\Phi_{\perp m} = -\mathbf{i}_{\varphi}(1/r_T)(\partial\Phi_{\perp m}/\partial\varphi)$, αρκεί μία ολοκλήρωση, $\partial\Phi_{\perp m}/\partial\varphi = \text{σταθ.} = -I_0$. Το ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει τώρα από τη σχέση $Z_e\mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{\perp}$, ή, ισοδύναμα, τη σχέση $(1/Z_e)\mathbf{E}_{\perp} = -\mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_{\perp}$. Τελικά, με χρήση του δυναμικού $\Phi_{\perp m}$ ως ενδιάμεσης ποσότητας, τα πεδιακά πλάτη γράφονται ως:

$$\mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{i}_{\varphi} \frac{I_0}{r_T}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{i}_T \frac{Z_e I_0}{r_T}.$$

Σχόλια:

- Οι δύο εκφράσεις για τα πεδιακά πλάτη $\{\mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{H}_{\perp}\}$ ταυτίζονται, επειδή σε γραμμή μεταφοράς το ρεύμα και το φορτίο σε κάθε αγωγίμο όριο συνδέονται με τη σχέση $\mathbf{K} = \mathbf{i}_z \sigma c_e$. Στην παρούσα διάταξη, εύκολα φαίνεται ότι για τα επιφανειακά ρεύματα είναι $\mathbf{K}_a = +\mathbf{i}_z I_0/a$ και $\mathbf{K}_b = -\mathbf{i}_z I_0/b$, δηλαδή, $I_{a,b} = \pm I_0$, καθώς και ότι τα επιφανειακά φορτία είναι ίσα με $\sigma_a = +\varepsilon\Phi_0/a$ και $\sigma_b = -\varepsilon\Phi_0/b$. Εισάγοντας στη σχέση $\mathbf{K} = \mathbf{i}_z \sigma c_e$ προκύπτει $I_0 = \varepsilon\Phi_0 c_e$, ενώ εξισώνοντας τις δύο εναλλακτικές εκφράσεις για τα πεδία προκύπτει $I_0 = \Phi_0/Z_e$. Με $c_e = (\varepsilon\mu_0)^{-1/2}$ και $Z_e = (\mu_0/\varepsilon)^{1/2}$, είναι $\varepsilon Z_e c_e = 1$ και οι δύο σχέσεις για το I_0 ταυτίζονται.
- Γενικά, σε μία γραμμή μεταφοράς δεν είναι γνωστό ούτε το ρεύμα στα τοιχώματα, ούτε το επιφανειακό φορτίο (ανά μονάδα μήκους), ποσότητες που συνδέονται άμεσα με τις σταθερές Φ_0 και $I_0 (= \Phi_0/Z_e)$ που έχουν χρησιμοποιηθεί στις δύο εναλλακτικές εκφράσεις για τα πεδιακά πλάτη. Περισσότερο χρήσιμη πληροφορία είναι η χρονικά μέση μεταφερόμενη ισχύς, που περιγράφεται από το ολοκλήρωμα του διανύσματος *Poynting* στη διατομή της γραμμής μεταφοράς, $P_0 = \frac{1}{2}[(\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp}) \cdot d\mathbf{S}]$. Εδώ, η ολοκλήρωση είναι απλή, και το αποτέλεσμα $P_0 = (\pi/2)I_0\Phi_0 \ln(b/a)$ δίνει συγκεκριμένη τιμή στις σταθερές Φ_0 και $I_0 = \Phi_0/Z_e$, που στη διαδικασία επίλυσης εισήχθησαν απλά ως σταθερές ολοκλήρωσης.

6.2 Κατοπτρισμός

6.2.0 Εισαγωγικά

Όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 6.1.2, στο πρόβλημα οριακών τιμών για την εξίσωση του *Poisson*, $\nabla^2 F = -f$ στο χώρο V , η λύση μπορεί να διασπασθεί στο άθροισμα ειδικής και συμπληρωματικής λύσης, $F = F_{\text{ειδ}} + F_{\text{συμ}}$, επιλέγοντας τη συνάρτηση $F_{\text{ειδ}}$ με την απαίτηση στο χώρο V να είναι $\nabla^2 F_{\text{ειδ}} = -f$, αλλά αδιαφορώντας για τις οριακές συνθήκες στο όριο S του V , οι οποίες λαμβάνονται υπ' όψιν κατά τον προσδιορισμό του $F_{\text{συμ}}$. Επίσης, δείχθηκε ότι η σχέση (6.1-52), εδώ ελαφρώς γενικευμένη:

$$F_{\text{ειδ}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_V \frac{(f(\mathbf{r}')dV')_{\text{κλπ}}}{R} + \int_{V_c} \frac{(f_c(\mathbf{r}')dV'_c)_{\text{κλπ}}}{R_c} \right], \quad (6.2-1)$$

πράγματι ικανοποιεί την απαίτηση, να είναι $\nabla^2 F_{\text{ειδ}} = -f$ στο χώρο V , επειδή:

- Ο πρώτος όρος δίνει το δυναμικό παντού, άρα και στο χώρο V , από αίτιο f χωρικά κατανεμημένο, ή, γενικεύοντας, από κάθε αίτιο που βρίσκεται στο χώρο V (εκεί όπου γίνεται η ολοκλήρωση). Η γενίκευση επισημαίνεται με την ένδειξη «κλπ» και σημαίνει ότι αν, ας πούμε, $f = \varepsilon^{-1}\rho$, τότε στο $(fdV')_{\text{κλπ}}$ περιλαμβάνεται όχι μόνο το $\varepsilon^{-1}(\rho dV)$, αλλά και όροι όπως $\varepsilon^{-1}(\sigma dS)$ και $\varepsilon^{-1}(\lambda d\ell)$, ή ακόμα και μεμονωμένα φορτία q , όλα στο μέτρο που βρίσκονται στο χώρο V . Συνεπώς, στο χώρο V ο πρώτος όρος έχει Λαπλασιανή ίση με $-f$, και επίσης σε επιφάνειες κλπ. έχει τις ασυνέχειες που παράγονται από τα αίτια που έχουν συμπεριληφθεί στην ολοκλήρωση.
- Ο δεύτερος όρος δίνει πάλι το δυναμικό παντού, άρα και στο χώρο V , αλλά από αίτιο f_c χωρικά κατανεμημένο στον χώρο υπόλοιπο χώρο V_c , με την ίδια γενίκευση, ώστε να περιλαμβάνονται και αίτια κατανεμημένα σε επιφάνεια κλπ. του χώρου V_c . Όμως, η ολοκλήρωση περιορίζεται στο χώρο V_c και αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι η συνάρτηση f_c και τα λοιπά αίτια μηδενίζονται στο χώρο V . Συνεπώς, στο χώρο V ο δεύτερος όρος έχει μηδενική Λαπλασιανή και δεν έχει εκεί κανενός είδους ασυνέχειες.

Περαιτέρω γενίκευση της σχέσης (6.2-1) είναι να συμπεριληφθούν και διπολικά αίτια, στον πρώτο όρο αν τέτοια υπάρχουν στο χώρο V , και στο δεύτερο όρο σε κάθε περίπτωση, ακόμα και αν τέτοια αίτια δεν έχουν φυσική υπόσταση για το δυναμικό που εξετάζεται. Τέτοια γενίκευση έχει συμπεριληφθεί σε ορισμένες από τις σχέσεις (6.1-53) έως (6.1-57).

Στην έκφραση για τη συνάρτηση $F_{\text{ειδ}}$, το γεγονός ότι $f_c = 0$ στο V έχει ως αποτέλεσμα ότι είναι $\nabla^2 F_{\text{ειδ}} = -f$ παντού στο V και ότι η $F_{\text{ειδ}}$ ικανοποιεί τις ίδιες ασυνέχειες, όπως απαιτείται για το δυναμικό $F_{\text{ειδ}}$, για αίτια συγκεντρωμένα σε επιφάνεια, γραμμή ή σημείο. Συνεπώς, η F ικανοποιεί το πρώτο μέρος του προβλήματος οριακών συνθηκών, τη διαφορική εξίσωση και τις συνοδούς συνθήκες ασυνέχειας σε επιφάνειες κλπ. που βρίσκονται μέσα στο V . Αν με κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης f_c προκύψει ότι η συνάρτηση $F_{\text{ειδ}}$, που έτσι σχηματίζεται, ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια S (το όριο του χώρου V), τότε η συνάρτηση $F_{\text{ειδ}}$ αντιπροσωπεύει το ζητούμενο δυναμικό, $F = F_{\text{ειδ}}$ στο χώρο V . Και τότε δεν απαιτείται να προσδιορισθεί η συμπληρωματική λύση: Θα είναι απλά $F_{\text{συμ}} = 0$, επειδή όλες οι απαιτήσεις (στο V και στο S) ικανοποιούνται από την $F_{\text{ειδ}}$. Ή, με άλλα λόγια, θα είναι $F_{\text{συμ}} = 0$, επειδή οι εξισώσεις (6.1-48) και (6.1-49), που πρέπει να ικανοποιεί η $F_{\text{συμ}}$, είναι όλες ομογενείς.

Η συνάρτηση f_c δεν περιγράφει κατανομή υπαρκτών αιτίων (φορτίων κλπ.) στο χώρο V_c . Πώς ακριβώς είναι κατανεμημένα τα αίτια στο χώρο V_c , αυτό είναι εν γένει άγνωστο, αλλά και αδιάφορο, επειδή το πρόβλημα οριακών συνθηκών αφορά μόνο το χώρο V . Όμως, τόσο από τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα $\int f_c dV / R_c$, όσο και από το γεγονός ότι έχει ως αποτέλεσμα να ικανοποιούνται οι ίδιες οριακές συνθήκες, όπως εκείνες που προκαλούνται από τα πραγματικά φορτία κλπ., του χώρου V_c , η f_c περιγράφει κατανομή αιτίων, τα οποία ενδεχομένως δεν είναι καν υπαρκτά, αλλά ως προς το χώρο V έχουν δράση ισοδύναμη με την πραγματική, αλλά άγνωστη, κατανομή φορτίων κλπ. του χώρου V_c . Γι' αυτό, η f_c λέγεται ότι περιγράφει την κατανομή των «ειδώλων», τα οποία δεν υπάρχουν, αλλά εκδηλώνονται ισοδύναμα προς τα πραγματικά αίτια.

Ότι δύο διαφορετικές κατανομές, όπως η άγνωστη πραγματική κατανομή στο χώρο V_c και τα είδωλα, προκαλούν ίδια αποτελέσματα σε άλλη περιοχή του χώρου, στο V , δεν πρέπει να προκαλεί εντύπωση. Για παράδειγμα, σημειακό φορτίο q στην αρχή των αξόνων, επιφανειακό φορτίο $\sigma_a = q/4\pi a^2$ σε σφαιρική επιφάνεια $r = a$, χωρικό φορτίο $\rho_a = 3q/4\pi a^3$ στη σφαίρα $r < a$, καθώς και κάθε σταθμισμένος μέσος όρος τους που αντιστοιχεί σε συνολικό φορτίο ίσο με q , όλα παράγουν στην περιοχή $r > a$ πεδίο ίσο με $\mathbf{D} = \mathbf{i}_r q/4\pi r^2$. Και αντίστροφα, από τη γνώση ότι $\mathbf{D}(r > a) = \mathbf{i}_r C/r^2$ δεν είναι δυνατόν να εξαχθεί κανένα συμπέρασμα για το ποια φορτία είναι πράγματι υπεύθυνα. Όμως μπορεί να υποθεθεί η ύπαρξη ενός σημειακού φορτίου $q = 4\pi C$, το οποίο αποτελεί το είδωλο της άγνωστης αλλά πραγματικής κατανομής φορτίων στο $r < a$, που στην πραγματικότητα είναι υπεύθυνη για το πεδίο $\mathbf{D}(r > a)$.

Η μέθοδος του κατοπτρισμού αποσκοπεί στον προσδιορισμό της κατανομής f_c των ειδώλων. Αυτό μπορεί να γίνει με συστηματικό τρόπο σε ορισμένες ειδικές γεωμετρίες, όπως όταν το όριο είναι:

- Επίπεδη επιφάνεια με άπειρη έκταση, στην οποία είναι είτε $F = 0$ (και κατ' επέκταση $F = \text{σταθ.}$), είτε $\partial F/\partial n = 0$, οι πιο συνηθισμένες περιπτώσεις συνθήκης *Dirichlet* ή ομογενούς *Neumann*, που συναντώνται όταν το υλικό της παρακείμενης περιοχής έχει πολύ διαφορετική τιμή στην ιδιότητα ε , g ή μ που κάθε φορά ενδιαφέρει. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στην παράγρ. 6.2.1.
- Επίπεδη επιφάνεια με άπειρη έκταση, η οποία διαχωρίζει δύο ομογενή υλικά με διαφορετικές ιδιότητες, δηλαδή με $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$, ή με $g_2 \neq g_1$, ή με $\mu_2 \neq \mu_1$, χωρίς όμως αυτές οι διαφορές να είναι τόσο έντονες, που να ισοδυναμούν με την προηγούμενη περίπτωση. Η παράγρ. 6.2.2 ασχολείται με αυτή την περίπτωση. [Τυπικά, αυτή η περίπτωση δεν εντάσσεται αυστηρά στα προβλήματα οριακών τιμών για την εξίσωση του *Poisson*, η παρουσίασή της γίνεται όμως εδώ, επειδή χρησιμοποιεί τεχνικές που αποτελούν επεκτάσεις των τεχνικών της παραγράφου 6.2.1.]
- Σφαιρική επιφάνεια, στην οποία είναι $F = 0$, ή κυλινδρική επιφάνεια με άπειρο μήκος, με τον προς μελέτη χώρο V να είναι είτε ο εσωτερικός, είτε ο εξωτερικός της σφαίρας ή του κυλίνδρου. Αυτές οι περιπτώσεις παρουσιάζονται στις παραγρ. 6.2.3 και 6.2.4, αντίστοιχα. Ενώ στην περίπτωση της σφαίρας κατοπτρισμός είναι εφικτός μόνο για οριακή επιφάνεια με συνθήκη *Dirichlet*, αντίθετα, κατοπτρισμός σε κύλινδρο είναι εφικτός και στις δύο βασικές συνθήκες *Dirichlet* και ομογενή *Neumann*. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι είναι δυνατή η εφαρμογή κατοπτρισμού και σε διατάξεις, στις οποίες η κυλινδρική επιφάνεια αποτελεί το όριο μεταξύ υλικών με διαφορετικές, αλλά παρεμφερείς, ιδιότητες. Πρόκειται για το κυλινδρικό ανάλογο της παραγρ. 6.2.2, που επίσης παρουσιάζεται στη παράγρ. 6.2.4.

Τέλος, μια εν μέρει διαφορετική προσέγγιση είναι να έχει προσδιορισθεί το δυναμικό $F^{(+)}$, τέτοιο ώστε $\nabla^2 F^{(+)} = -f^{(+)}$, σε κάποιον χώρο $V^{(+)}$, ο οποίος περιέχει ως υποσύνολο το χώρο V που ενδιαφέρει. Τότε, το όριο S του V ανήκει στο χώρο $V^{(+)}$, άρα εκεί είναι γνωστά το $F^{(+)}|_S$, η παράγωγος $(\partial F^{(+)}/\partial n)|_S$ και κάθε γραμμικός συνδυασμός $\alpha^{(+)}F^{(+)}|_S + \beta^{(+)}(\partial F^{(+)}/\partial n)|_S$. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα με (α) διαφορική εξίσωση στο χώρο V την $\nabla^2 F = -f$ (με $f = f^{(+)}$) και (β) οριακή συνθήκη στην επιφάνεια S την $\alpha F|_S + \beta \partial F/\partial n|_S = \gamma$, με $\alpha = \alpha^{(+)}$, $\beta = \beta^{(+)}$, και $\gamma = \alpha^{(+)}F^{(+)}|_S + \beta^{(+)}(\partial F^{(+)}/\partial n)|_S$, το πρόβλημα αυτό έχει λύση ήδη γνωστή, $F = F^{(+)}$. Παραδείγματα της διαδικασίας παρουσιάζονται στην παράγραφο 6.2.5.

Δυνάμεις σε διατάξεις κατοπτρισμού: Η πιο στοιχειώδης διάταξη που επιλύεται με κατοπτρισμό αναφέρεται σε σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q , σε χώρο με ϵ_0 και σε απόσταση h από γειωμένο αγωγίμο επίπεδο με άπειρη έκταση. Η διάταξη αυτή είναι η αφηρητή στην επόμενη παράγραφο 6.2.1, αλλά πιθανότατα είναι από πριν οικεία στον αναγνώστη. Με το αγωγίμο τοίχωμα στο επίπεδο $z = 0$ και το φορτίο q στη θέση $z = h$ του άξονα $r_T = 0$, για την επίλυση θεωρείται ολόκληρος ο χώρος με ϵ_0 και το αγωγίμο όριο υποκαθίσταται από είδωλο ίσο με $-q$ στη συμμετρική θέση $z = -h$ του άξονα $r_T = 0$. Από την επαλληλία του φορτίου $+q$ και του ειδώλου $-q$ προσδιορίζονται το δυναμικό Φ και τα πεδία \mathbf{D} και \mathbf{E} της τροποποιημένης διάταξης. Οι ίδιες εκφράσεις περιγράφουν την κατανομή των ίδιων ποσοτήτων και στην αρχική διάταξη, αυτή με το φορτίο q και το άπειρο αγωγίμο επίπεδο, αλλά μόνο στην περιοχή $z > 0$, ενώ στην περιοχή $z < 0$ είναι βέβαια $\Phi = 0$, $\mathbf{D} = 0$ και $\mathbf{E} = 0$, όπως ταιριάζει σε γειωμένο αγωγίμο χώρο.

Η παρουσίαση αυτή έγινε, για να αναφερθεί ότι στο σημείο αυτό το ζητούμενο είναι η δύναμη που ασκείται μεταξύ του φορτίου q και του επιφανειακού φορτίου σ που επάγεται στην επιφάνεια του αγωγίμου υλικού, και όχι αυτά καθαυτά τα δυναμικά ή τα πεδία. Η αντιμετώπιση του ερωτήματος με στοιχειώδεις γνώσεις έχει ως πρώτο βήμα τον υπολογισμό του επιφανειακού φορτίου $\sigma = \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = D_z(z=0^+)$, με $\mathbf{D}(z < 0) = 0$. Το δεύτερο βήμα αφορά τον προσδιορισμό της δύναμης στο στοιχείο σdS , που είναι ίση με $d\mathbf{F}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-)(\sigma dS) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(z=0^+)(\sigma dS)$. Το τρίτο βήμα είναι η ολοκλήρωση σε όλο το επίπεδο, $\mathbf{F}_e = \int d\mathbf{F}_e$. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας δίνει τη δύναμη που ασκείται από το φορτίο q στο αγωγίμο τοίχωμα, ενώ η δύναμη που ασκείται από το τοίχωμα στο φορτίο q είναι ίση με $-\mathbf{F}_e$. Οι πράξεις είναι στοιχειώδεις. Το αποτέλεσμα είναι ότι $\mathbf{F}_e = \mathbf{i}_z(q^2/4\pi\epsilon_0)/(2h)^2$, και αμέσως αναγνωρίζεται ότι η σχέση αυτή δίνει και τη δύναμη *Coulomb* που ασκείται από το φορτίο q στο είδωλό του, σε απόσταση $2h$. Αυτό που παρατηρείται στη συγκεκριμένη διάταξη έχει πολύ γενικότερη ισχύ, όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, και διατυπώνεται ως εξής:

Η δύναμη που ασκείται από κάποια κατανομή f , αιτίων που βρίσκονται στο χώρο V , στην κατανομή που επάγεται, λόγω της f , στο όριο S του χώρου V , είναι ίση με τη δύναμη που ασκείται από την ίδια κατανομή f αιτίων του χώρου V , στα είδωλα f_c της κατανομής f , που τοποθετούνται στο χώρο V_c .

Εν γένει, η κατανομή f θεωρείται γνωστή, η κατανομή των επαγόμενων αιτίων είναι κατά τεκμήριο άγνωστη, ενώ η κατανομή f_c των ειδώλων προσδιορίζεται από τη διαδικασία του κατοπτρισμού, όποτε είναι εφικτή.

Για όποιον ενδιαφέρεται για τις λεπτομέρειες που καταλήγουν στο αποτέλεσμα $\mathbf{F}_e = \mathbf{i}_z(q^2/4\pi\epsilon_0)/(2h)^2$, ας αναφερθούν τα εξής: Σε κάποια θέση Σ με $z = 0^+$ και σε απόσταση r_T από τον άξονα, το φορτίο q και το είδωλο $-q$, που και τα δύο απέχουν από το Σ απόσταση ίση με $R = (r_T^2 + h^2)^{1/2}$, παράγουν αθροιστικά πεδίο ίσο με $\mathbf{D}(r_T, z=0^+) = -\mathbf{i}_z(2q/4\pi R^2)(h/R)$, όπου ο συντελεστής h/R αντιπροσωπεύει το συνημίτονο της προβολής στον άξονα z καθεμίας από τις συνεισφορές φορτίου και ειδώλου στο \mathbf{D} . Συνεπώς, το επιφανειακό φορτίο στο επίπεδο $z = 0$ είναι ίσο με $\sigma = \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = D_z(z=0^+) = -(2q/4\pi R^2)(h/R)$, και η αντίστοιχη στοιχειώδης δύναμη είναι ίση με $d\mathbf{F}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-)(\sigma dS) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(z=0^+)(\sigma dS) = \mathbf{i}_z(q^2/8\pi^2\epsilon_0)(h^2/R^6)dS$. Το στοιχειώδες εμβαδόν, αρχικά ίσο με $dS = r_T dr_T d\varphi$, μετά την ολοκλήρωση ως προς φ γίνεται $dS = 2\pi r_T dr_T$. Στην ολική δύναμη $\mathbf{F}_e = \int d\mathbf{F}_e$, το ολοκλήρωμα αποτελείται από έναν σταθερό συντελεστή, ίσο με $\mathbf{i}_z(q^2/4\pi\epsilon_0)h^2$, και το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty dr_T r_T / R^6$, το οποίο με την R ως μεταβλητή ολοκλήρωσης (οπότε είναι $r_T dr_T = R dR$) δίνει $\int_0^\infty dr_T r_T / R^6 = \int_h^\infty dR / R^5 = -1/(4R^4)|_h^\infty = 1/(4h^4)$.]

Η **απόδειξη** της παραπάνω ιδιότητας μπορεί να γίνει με γενικούς όρους, με βάση το νόμο διατήρησης της ηλεκτρομαγνητικής ορμής (βλ. παράγρ, 3.2.3 του Μέρους Α), ειδικότερα την ολοκληρωτική μορφή του νόμου, που παρουσιάζεται στη σχέση (3.2-40). Εδώ ενδιαφέρουν χρονικά αμετάβλητες καταστάσεις, στις οποίες η χρονική παράγωγος της ηλεκτρομαγνητικής ορμής είναι μηδενική, και τότε η σχέση (3.2-40) παίρνει τη μορφή:

$$\int_V d\mathbf{F}_{em} = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \vec{\mathbf{T}}_{em}.$$

Στην αριστερή πλευρά της σχέσης αυτής το ολοκλήρωμα δίνει τη συνολική ηλεκτρομαγνητική δύναμη που ασκείται σε οτιδήποτε (φορτίο, ρεύμα, δίπολο κλπ.) βρίσκεται στο χώρο V . Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά αναφέρεται στην επιφάνεια S που περικλείει το χώρο V , και $\vec{\mathbf{T}}_{em}$ είναι ο τανυστής των ηλεκτρομαγνητικών τάσεων. Η μόνη πληροφορία που χρειάζεται εδώ είναι ότι ο τανυστής αυτός εξαρτάται μόνο από τα πεδία. Αρκεί να είναι γνωστή η κατανομή των πεδίων στην επιφάνεια S , για να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς και να προσδιορισθεί έτσι η δύναμη που ασκείται συνολικά σε οτιδήποτε βρίσκεται στο χώρο V . Αν δύο διαφορετικές κατανομές αιτίων παράγουν τα ίδια πεδία στην επιφάνεια S , τότε η ίδια ακριβώς δύναμη θα ασκείται και στις δύο αυτές κατανομές. Στην περίπτωση που ενδιαφέρει εδώ, οι δύο διαφορετικές κατανομές αναφέρονται, η πρώτη στα πραγματικά, αλλά άγνωστα επαγόμενα αίτια, τα οποία βρίσκονται από το όριο και πέρα, και η δεύτερη στα είδωλα, τα οποία εισάγονται στις εξισώσεις, με κατάλληλη τιμή και σε κατάλληλες θέσεις, ώστε να παράγονται τα ίδια πεδία με αυτά από τα επαγόμενα αίτια.

Η **χρησιμότητα** της παραπάνω ιδιότητας περιορίζεται κυρίως σε απλές διατάξεις, όπως του σημειακού φορτίου που ήδη αναφέρθηκε, ή του νηματοειδούς φορτίου ή ρεύματος, παράλληλου σε επίπεδο ή κυλινδρικό όριο. Τέτοια είναι η διάταξη στο **παράδ. 6.2-1**. Στη γενική περίπτωση, συνήθως είναι απλούστερο να προσδιορισθούν οι δυνάμεις με εφαρμογή της δύναμης *Lorentz* (βλ. παράγρ. 3.2.1 του Μέρους Α), δεδομένου ότι τα αίτια (στο χώρο *V*) είναι (υποτίθεται) γνωστά και τα πεδία στην περιοχή των αιτίων προσδιορίζονται με τη διαδικασία του κατοπτρισμού.

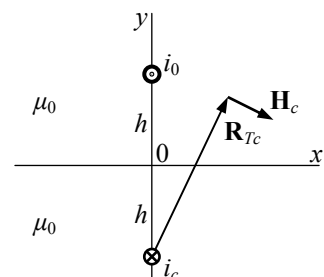
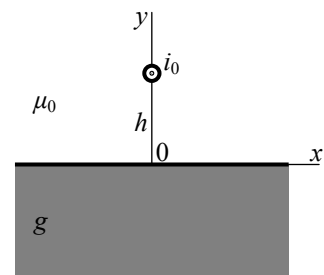
Παράδειγμα 6.2-1: Ευθύγραμμος νηματοειδής αγωγός με ρεύμα i_0 βρίσκεται σε αέρα (με μ_0), σε απόσταση h από το επίπεδο όριο αγωγίμου υλικού. Ζητείται η δύναμη που ασκείται σε μήκος ℓ του αγωγού.

Επίλυση: Προτρέχοντας σε σχέση με την παράγραφο 6.2.1, το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή με τον αγωγό προσδιορίζεται θεωρώντας ότι ολόκληρος ο χώρος έχει μαγνητική διαπερατότητα ίση με μ_0 , και ότι επιπρόσθετα υπάρχει είδωλο $i_c = -i_0$ στην κατοπτρική θέση του ρεύματος i_0 .

Η μαγνητική δύναμη σε ένα στοιχείο $i_0 d\mathbf{r}$ του αγωγού είναι ίση με $d\mathbf{F}_m = \mu_0(i_0 d\mathbf{r}) \times \mathbf{H}|_{i_0 d\mathbf{r}=0}$, με τη διευκρίνιση $i_0 d\mathbf{r} = 0$ να σημειώνει ότι στη θέση του στοιχείου $i_0 d\mathbf{r}$ από το ολικό μαγνητικό πεδίο πρέπει να εξαιρεθεί το πεδίο που οφείλεται σε αυτό το στοιχείο. Χωρίς το στοιχείο $i_0 d\mathbf{r}$, το μαγνητικό πεδίο του πραγματικού ρεύματος i_0 στη θέση του στοιχείου αυτού είναι ίσο με μηδέν, επειδή στο εξωτερικό γινόμενο του νόμου *Biot-Savart*, η απόσταση \mathbf{R} από κάθε άλλο στοιχείο είναι συγγραμμικό διάνυσμα με το μήκος $d\mathbf{r}$ κάθε άλλου στοιχείου. Το πεδίο του ειδώλου είναι ίσο με $H_c = i_c/2\pi R_{Tc}$, με φορά που περιγράφεται από τα δάκτυλα του δεξιού χεριού, με τον αντίχειρα να έχει τη φορά του ρεύματος. Για τον προσανατολισμό των αξόνων, όπως στο σχήμα (με $i_0 d\mathbf{r} = \mathbf{i}_z i_0 dz$), στη θέση του εξεταζόμενου στοιχείου είναι $\mathbf{R}_{Tc} = 2h\mathbf{i}_y$ και, συνεπώς, $\mathbf{H}_c = \mathbf{i}_x i_0/(4\pi h)$. Με αυτές τις πληροφορίες, η δύναμη που ασκείται από το είδωλο σε μήκος ℓ του αγωγού είναι ίση με:

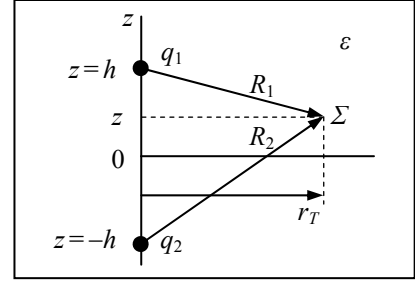
$$\mathbf{F}_m = \mathbf{i}_y \frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi} \frac{\ell}{2h},$$

η δύναμη *Laplace*. Τόση ακριβώς είναι και η δύναμη που στην πραγματική διάταξη ασκείται από το αγωγίμο τοίχωμα σε μήκος ℓ του ρευματοφόρου αγωγού.



6.2.1 Κατοπτρισμός σε επίπεδο με $\Phi = 0$ ή $\partial\Phi/\partial n = 0$

Δυναμικό από ζεύγος φορτίων: Ως εισαγωγική διάταξη, θα εξετασθεί ένα ζεύγος φορτίων, με $q_1 = q$ στο $r_T = 0$, $z = h$ και $q_2 = \pm q$ στη συμμετρική θέση $r_T = 0$, $z = -h$, όπως στο **Σχήμα 6.2-1**. Υποτίθεται ότι ο χώρος έχει άπειρη έκταση με σταθερή επιτρεπτότητα ϵ , οπότε στην τυχαία θέση $\Sigma(r_T, \varphi, z)$ και για τις δύο επιλογές για το φορτίο q_2 το δυναμικό Φ είναι ίσο με:



Σχήμα 6.2-1

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{r_T^2 + (z-h)^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{r_T^2 + (z+h)^2}} \right), \quad (6.2-2)$$

και με μία απλή παραγωγή:

$$-E_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{-q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{z-h}{[r_T^2 + (z-h)^2]^{3/2}} \pm \frac{z+h}{[r_T^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right). \quad (6.2-3)$$

Ειδικά στο επίπεδο $z = 0$ είναι:

$$\Phi(r_T)|_{z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1 \pm 1}{\sqrt{r_T^2 + h^2}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{(1 \mp 1)h}{[r_T^2 + h^2]^{3/2}}, \quad (6.2-4)$$

και, συνεπώς, με την κατάλληλη επιλογή του προσήμου του q_2 ($= \pm q$) προκύπτουν τα ενδιαφέροντα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned} q_2 = -q &\Rightarrow \Phi|_{z=0} = 0, \\ q_2 = +q &\Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial z}|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (6.2-5)$$

Αν τα φορτία q και $\pm q$ αποτελούν στοιχεία dQ και $\pm dQ$ μιας κατανομής (συμμετρικής ή αντισυμμετρικής ως προς το επίπεδο $z = 0$), τότε τα Φ και $\partial\Phi/\partial z$ εκφράζονται ως ολοκληρώματα ως προς το dQ και το αντίστοιχο $\pm dQ$, αλλά στο επίπεδο $z = 0$ πάλι θα είναι:

- ο Ετερόσημα dQ (αντισυμμετρική κατανομή) $\Rightarrow \Phi(z=0) = 0$,
- ο Ομόσημα dQ (συμμετρική κατανομή) $\Rightarrow (\partial\Phi/\partial n)|_{z=0} = 0$,

με $dQ = \{\rho dV, \sigma dS, \lambda dl\}$, κατά τα γνωστά.

Συμπέρασμα για κατοπτρισμό φορτίων: Τα προηγούμενα επιτρέπουν την επίλυση των ακόλουθων δύο προβλημάτων οριακών τιμών, που περιλαμβάνονται στην ευρύτερη παρουσίαση του Σχήματος 6.2-2:

Χώρος V : Η περιοχή $z > 0$, με ιδιότητες:

Σταθερή επιτρεπτότητα ϵ ,

Κατανομή φορτίων με στοιχεία dQ .

Επιφάνεια S : Το επίπεδο $z = 0$, που κλείνει μέσω του απείρου σε θετικές τιμές του z , ώστε να πρόκειται για κλειστή επιφάνεια. Στο επίπεδο αυτό η οριακή συνθήκη είναι, κατά περίπτωση:

- ο Συνθήκη *Dirichlet*, $\Phi|_S = 0$: Αν θεωρηθεί ότι ο χώρος V_c (η περιοχή $z < 0$) έχει:
 - Υλικό με την ίδια επιτρεπτότητα ϵ ,
 - Φορτία $dQ_c = -dQ$, ετερόσημα των dQ , σε θέση συμμετρική ως προς $z = 0$ των dQ ,

Τότε, η συνθήκη *Dirichlet* ικανοποιείται, και το δυναμικό εκφράζεται ως:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_V \frac{dQ}{R} + \int_{V_c} \frac{-dQ}{R_c} \right]. \quad (6.2-6)$$

- ο Συνθήκη *Neumann*, $(\partial\Phi/\partial n)|_S = 0$: Αν θεωρηθεί τώρα ο χώρος V_c με:
 - Υλικό με την ίδια (πάλι) επιτρεπτότητα ϵ ,
 - Φορτία $dQ_c = dQ$, ομόσημα τώρα των dQ , στη ίδια συμμετρική θέση των dQ ,

η συνθήκη *Neumann* ικανοποιείται, και τώρα το δυναμικό εκφράζεται ως:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_V \frac{dQ}{R} + \int_{V_c} \frac{+dQ}{R_c} \right]. \quad (6.2-7)$$

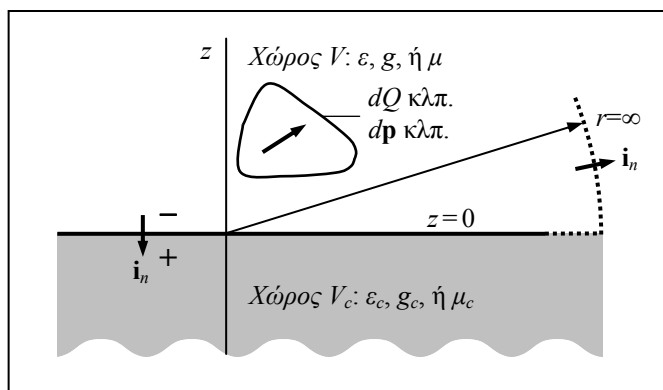
Και στις δύο περιπτώσεις, τα φορτία dQ_c αποτελούν τα «είδωλα» που υποκαθιστούν οποιαδήποτε άγνωστα, απροσδιόριστα αλλά και αδιάφορα φορτία υπάρχουν στο χώρο $z \leq 0$.

Τροποποιώντας την εισαγωγική διάταξη, ώστε ο χώρος $z > 0$ να έχει τώρα σταθερή ειδική αγωγιμότητα g (αντί σταθερού ϵ) και αντί για την κατανομή φορτίου να υπάρχει ηλεκτρικό ρεύμα που προσάγεται στο χώρο και εκλύεται από στοιχειώδεις πηγές $d\dot{Q}$, η νέα διάταξη περιγράφεται από μαθηματικά ταυτόσημες σχέσεις, με βάση τις αντικαταστάσεις $\epsilon \rightarrow g$ και $dQ \rightarrow d\dot{Q}$, οπότε και το δυναμικό περιγράφεται από τη σχέση (6.2-6) ή (6.2-7), με τις ίδιες αντικαταστάσεις. Παρόμοια διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί και σε διάταξη μαγνητικού

πεδίου, με χρήση του διανυσματικού δυναμικού \mathbf{A} ή του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού Φ_m . Επίσης, σε οποιαδήποτε διάταξη, αντί να εκφρασθεί η οριακή συνθήκη σε όρους δυναμικού, μπορεί να διατυπωθεί ως συνθήκη για το αντίστοιχο πεδίο. Για παράδειγμα, η συνθήκη *Neumann*, που είναι η γνώση της κάθετης παραγώγου του δυναμικού στο όριο, είναι ολοφάνερα ισοδύναμη με το να είναι γνωστή η κάθετη συνιστώσα του πεδίου, $E_n = -\partial\Phi/\partial n$. Επίσης, η συνθήκη *Dirichlet*, που είναι η γνώση της τιμής του δυναμικού στο όριο, είναι ισοδύναμη με γνώση των εφαπτομενικών συνιστωσών του πεδίου, αφού από αυτές προκύπτει το δυναμικό, $\Phi = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, με διαδρομή ολοκλήρωσης ακριβώς πάνω στην επιφάνεια S , και αντίστροφα, η παραγωγή του δυναμικού σε δύο διευθύνσεις κατά μήκος της επιφάνειας δίνει τις εφαπτομενικές συνιστώσες του πεδίου.

Διαδικασία επίλυσης διάταξης με επίπεδο όριο άπειρης έκτασης: Λόγω της έντονης ομοιότητας στο χειρισμό όλων των διατάξεων, η διαδικασία παρουσιάζεται ενιαία ως προς τα επιμέρους βήματα:

(α) Η διάταξη και το ζητούμενο: Όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.2-2**, ο χώρος V ($z > 0$) περιέχει υλικό με σταθερές τιμές για τις ιδιότητες ϵ , g ή μ , και γνωστή κατανομή του αιτίου, που μπορεί να είναι βαθμωτή ποσότητα, όπως dQ ή $d\dot{Q}$, ή διανυσματική, όπως $d\mathbf{p}$, $(\mathbf{J}dV)_{\text{κλπ}}$ ή $d\mathbf{S}$, ανάλογα με την περίπτωση. Ζητείται



Σχήμα 6.2-2

να προσδιορισθούν στο χώρο V , και μόνο εκεί, το δυναμικό ή/και τα πεδία. Κάτω από το επίπεδο $z = 0$ βρίσκεται ο χώρος V_c , που περιέχει υλικό με ιδιότητες ϵ_c , g_c ή μ_c . Από τις ιδιότητες αυτές, εκείνη που ενδιαφέρει για την περιγραφή του φαινομένου έχει πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή τιμή σε σχέση με αυτή του χώρου V . Το πάχος του υλικού με τις ιδιότητες ϵ_c , g_c ή μ_c είναι αδιάφορο. Αρκεί να εκτείνεται μέχρι το επίπεδο $z = 0$, ώστε η ισχυρή ανισότητα, στην οποία εμπλέκεται η ιδιότητα που ενδιαφέρει, να επιτρέπει τον προσδιορισμό της οριακής συνθήκης στην οριακή επιφάνεια $z = 0$. Αν δεν ισχύει η κατάλληλη ισχυρή ανισότητα, αν, για παράδειγμα, δεν είναι $\epsilon \gg \epsilon_c$, αλλά μόνο $\epsilon > \epsilon_c$, τότε ακολουθείται η διαδικασία της επόμενης παραγράφου 6.2.2.

(β) Αξιοποίηση ιδιοτήτων χώρου V_c για επισήμανση μηδενικών πεδίων, χρησιμοποιώντας και την κατάλληλη συντακτική σχέση $\mathbf{J}_c = g_c \mathbf{E}_c$, $\mathbf{D}_c = \varepsilon_c \mathbf{E}_c$ ή $\mathbf{B}_c = \mu_c \mathbf{H}_c$, ανάλογα με τη διάταξη. Προκύπτουν τα εξής οκτώ ενδεχόμενα:

Ο χώρος V περιέχει διηλεκτρικό υλικό (το οποίο κατά κανόνα είναι μονωτής, με $g = 0$):

$$(i) \quad g_c \gg g (= 0) \Rightarrow \mathbf{E}_c = (1/g_c) \mathbf{J}_c = 0,$$

$$(ii) \quad \varepsilon_c \gg \varepsilon \Rightarrow \mathbf{E}_c = (1/\varepsilon_c) \mathbf{D}_c = 0,$$

$$(iii) \quad \varepsilon_c \ll \varepsilon \Rightarrow \mathbf{D}_c = \varepsilon_c \mathbf{E}_c = 0.$$

Ο χώρος V περιέχει αγώγιμο υλικό:

$$(iv) \quad g_c \gg g \Rightarrow \mathbf{E}_c = (1/g_c) \mathbf{J}_c = 0,$$

$$(v) \quad g_c \ll g \Rightarrow \mathbf{J}_c = g_c \mathbf{E}_c = 0.$$

Ο χώρος V περιέχει μαγνητικό υλικό (το οποίο συχνά είναι μονωτής, με $g = 0$):

$$(vi) \quad g_c \gg g (= 0) \Rightarrow \mathbf{E}_c = (1/g_c) \mathbf{J}_c = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_c = \int_{-\infty}^t (\nabla \times \mathbf{E}) dt = 0,$$

$$(vii) \quad \mu_c \ll \mu \Rightarrow \mathbf{B}_c = \mu_c \mathbf{H}_c = 0,$$

$$(viii) \quad \mu_c \gg \mu \Rightarrow \mathbf{H}_c = (1/\mu_c) \mathbf{B}_c = 0.$$

Οι παραπάνω προϋποθέσεις πρέπει να ισχύουν σε ολόκληρη την έκταση του χώρου V_c . Επίσης, δεν πρέπει να εκδηλώνεται άλλο φαινόμενο που να αναιρεί τα συμπεράσματα. Για παράδειγμα, αν στο χώρο V_c (είτε είναι αγώγιμος, είτε μονωτής) εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού, τότε στο εσωτερικό του θα υπάρχει κατανομή του δυναμικού $\Phi_c(\mathbf{r}) \neq \text{σταθ.}$, με αποτέλεσμα να είναι $\mathbf{E}_c = -\nabla \Phi \neq 0$, δηλαδή να μην ισχύει το συμπέρασμα $\mathbf{E}_c = 0$ και να μην είναι δυνατόν, να συνεχισθεί η διαδικασία του κατοπτρισμού.

(γ) Χρήση της κατάλληλης ομογενούς οριακής συνθήκης στο επίπεδο $z = 0$, ώστε με αξιοποίηση των συμπερασμάτων από το βήμα (β) να προκύψει ο μηδενισμός κάποιας κατάλληλης πεδιακής συνιστώσας στο όριο, από την πλευρά τώρα του χώρου V . Σημειώνεται ότι η καθιερωμένη φορά του μοναδιαίου \mathbf{i}_n έχει ως συνέπεια η όψη «+» να βρίσκεται στο V_c και η όψη «-» να βρίσκεται στο V . Για καθένα από τα προηγούμενα ενδεχόμενα τα συμπεράσματα είναι:

$$(i) \text{ ή } (ii): \quad \mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0, \text{ όμως } \mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_{c+} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_- = 0 \text{ (τα } \mathbf{E}_- \text{ και } \mathbf{D}_- = \varepsilon \mathbf{E}_- \text{ είναι κάθετα στην επιφάνεια } S),$$

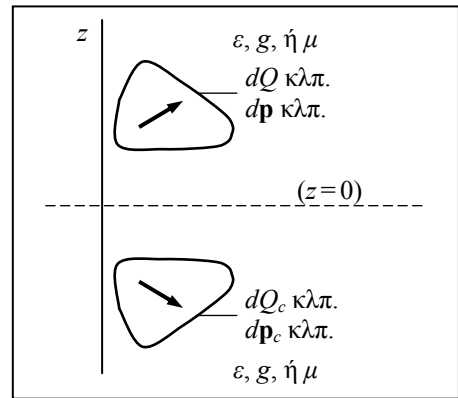
$$(iii): \quad \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = 0 \text{ (επειδή } \sigma = 0 \text{ μεταξύ διηλεκτρικών), όμως } \mathbf{D}_+ = \mathbf{D}_{c+} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{D}_- = 0 \text{ (τα } \mathbf{D}_- \text{ και } \mathbf{E}_- = (1/\varepsilon) \mathbf{D}_- \text{ είναι εφαπτομενικά στην } S),$$

- (iv): $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$, όμως $\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_{c+} = 0$
 $\Rightarrow \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_- = 0$ (τα \mathbf{E}_- και $\mathbf{J}_- = g\mathbf{E}_-$ είναι κάθετα στην S),
- (v): $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = 0$ (με $\mathbf{K} = 0$ και $\partial/\partial t = 0$), όμως $\mathbf{J}_+ = \mathbf{J}_{c+} = 0$
 $\Rightarrow \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{J}_- = 0$ (τα \mathbf{J}_- και $\mathbf{E}_- = (1/g)\mathbf{J}_-$ είναι εφαπτομενικά στην S),
- (vi) ή (vii): $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0$, όμως $\mathbf{B}_+ = \mathbf{B}_{c+} = 0$
 $\Rightarrow \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{B}_- = 0$ (τα \mathbf{B}_- και $\mathbf{H}_- = (1/\mu)\mathbf{B}_-$ είναι εφαπτομενικά στην S),
- (viii): $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = 0$, όμως $\mathbf{H}_+ = \mathbf{H}_{c+} = 0$
(αν υπάρχει \mathbf{K} , θα είναι γνωστό, ώστε να θεωρηθεί ότι ανήκει στο V)
 $\Rightarrow \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_- = 0$ (τα \mathbf{H}_- και $\mathbf{B}_- = \mu\mathbf{H}_-$ είναι κάθετα στην S).

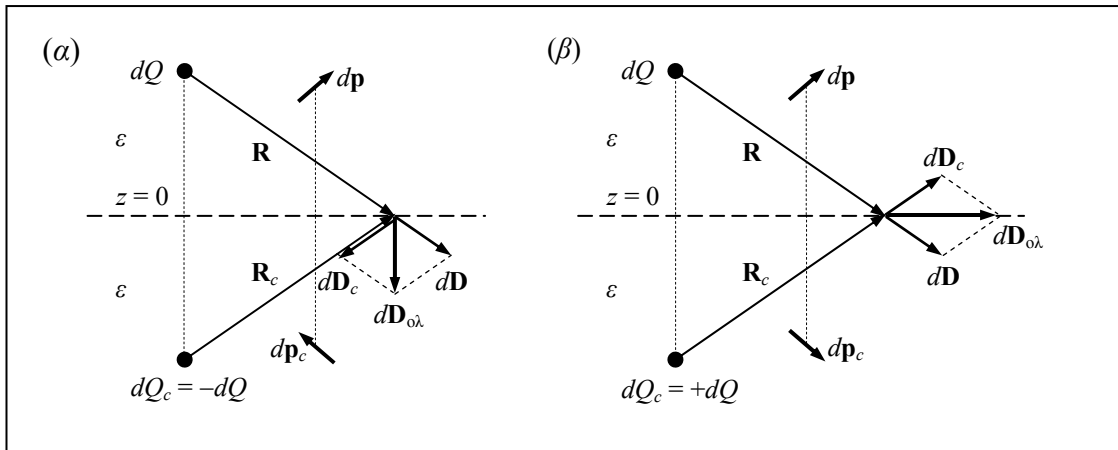
(δ) Διατύπωση του βοηθητικού προβλήματος (βλ. **Σχήμα 6.2-3**). Σ' αυτό:

- ο Ολόκληρος ο χώρος, μέχρι το άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις, θεωρείται πως έχει τις ιδιότητες ε , g ή μ , που στην αρχική διάταξη είχε μόνο ο χώρος V . Η επιφάνεια $z = 0$ γίνεται έτσι απλά μία νοητή επιφάνεια μέσα στο διευρυμένο αυτό χώρο $V_+ = V \cup V_c$.
- ο Ο χώρος V παραμένει άθικτος, όπως ήταν στην αρχική διάταξη και ειδικότερα τα αίτια που αρχικά υπήρχαν (τα dQ , $d\mathbf{p}$, $d\dot{Q}$, $i d\mathbf{r}$ κλπ.) διατηρούνται στις αρχικές θέσεις τους.
- ο Τοποθετούνται είδωλα (όπως dQ_c , $d\mathbf{p}_c$, $d\dot{Q}_c$, $i_c d\mathbf{r}_c$ κλπ.), συμμετρικά (σε σχέση με το επίπεδο $z = 0$) προς τα αρχικά αίτια και ίσα με $\pm dQ$, $\pm d\mathbf{p}$, $\pm d\dot{Q}$, $\pm i d\mathbf{r}$ κλπ., με επιλογή του προσήμου σύμφωνα με το επόμενο σημείο (ε).



Σχήμα 6.2-3

- (ε) Επιλογή προσήμου για το είδωλο: Γίνεται με κριτήριο, να έχει το συνολικό πεδίο (το άθροισμα εκείνου που οφείλεται στα αρχικά αίτια και εκείνου που οφείλεται στα είδωλα) στο επίπεδο $z = 0$ τη διεύθυνση που προέκυψε στο σημείο (γ) για το πεδίο \mathbf{D}_- ($= \varepsilon\mathbf{E}_-$), το \mathbf{J}_- ($= g\mathbf{E}_-$) ή το \mathbf{H}_- ($= \mu^{-1}\mathbf{B}_-$), δηλαδή το συνολικό πεδίο να είναι στην επιφάνεια $z = 0$ μόνο κάθετο, όπως στις περιπτώσεις (i), (ii), (iv) και (viii), ή μόνο εφαπτομενικό, όπως στις περιπτώσεις (iii), (v), (vi) και (vii). Αυτό είναι πάντα εφικτό, επειδή καθεμία από τις δύο συνεισφορές στο συνολικό πεδίο παράγεται από αίτια, το αρχικό και το είδωλο, με ίση τιμή και σε ίση απόσταση από το επίπεδο $z = 0$. Συγκεκριμένα:



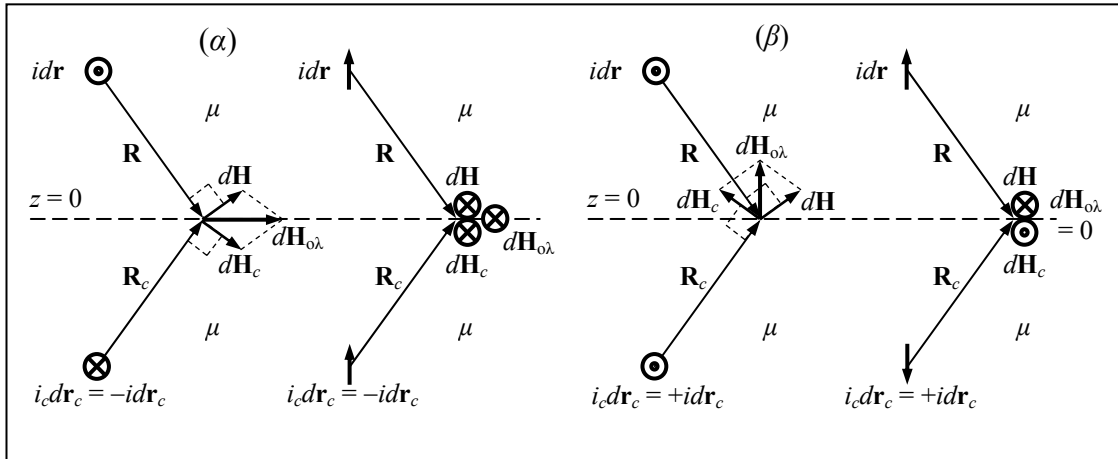
Σχήμα 6.2-4

- Διατάξεις με πεδία \mathbf{E} και \mathbf{D} σε διηλεκτρικά: Αν το πεδίο παράγεται από φορτία, τότε το φορτίο dQ παράγει πεδίο $d\mathbf{D} = \mathbf{i}_R dQ/4\pi R^2$ και αντίστοιχα για το φορτίο dQ_c . Όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.2-4α**, η επιλογή ετερόσημου ειδώλου παράγει πεδίο $d\mathbf{D}_{ολ} = d\mathbf{D} + d\mathbf{D}_c$ αποκλειστικά κάθετο στην επιφάνεια $z = 0$, αυτή είναι συνεπώς η κατάλληλη επιλογή για τα όρια των περιπτώσεων (i) και (ii), ενώ με ομόσημο είδωλο το πεδίο είναι εφαπτομενικό, βλ. **Σχήμα 6.2-4β**, όπως χρειάζεται για την περίπτωση (iii).

Αν το αίτιο είναι στοιχειώδες δίπολο $d\mathbf{p}$ κάποιας διπολικής κατανομής, τότε η διεύθυνση του ειδώλου θα είναι η κατοπτρική της διεύθυνσης του $d\mathbf{p}$, και στη διεύθυνση αυτή η φορά επιλέγεται με βάση το απαιτούμενο πρόσημο κάθε ζεύγους συμμετρικών πόλων. Αν η οριακή συνθήκη απαιτεί το dQ_c να είναι ετερόσημο με το dQ , τότε και για το δίπολο οι αντίστοιχοι πόλοι θα είναι ετερόσημοι, οπότε στο κατοπτρισμένο $d\mathbf{p}$ πρέπει να αντιστραφεί και η φορά, για να σχηματισθεί το είδωλο $d\mathbf{p}_c$ (όπως στο **Σχήμα 6.2-4α**), ενώ όταν τα dQ_c και dQ είναι ομόσημα, τότε απλά το $d\mathbf{p}_c$ είναι το κατοπτρικό του $d\mathbf{p}$, ως προς και τη διεύθυνση και τη φορά, βλ. **Σχήμα 6.2-4β**.

Αν, τέλος, το ηλεκτρικό πεδίο είναι επαγωγικό, το γεγονός ότι η επιφάνεια ασυνέχειας ενός βρόχου μαγνητικής ροής συμπεριφέρεται σαν διπολικό στρώμα σημαίνει πως η επιλογή του προσήμου του ειδώλου, δηλαδή της επιφάνειας ασυνέχειας με στοιχεία dS_c , θα γίνει όπως στη διπολική κατανομή.

- Διατάξεις με πεδία \mathbf{E} και \mathbf{J} σε αγώγιμα υλικά: Με τις αντιστοιχίες $g \rightarrow \epsilon$, $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{D}$ και $d\dot{Q} \rightarrow dQ$ αναπαράγεται η προηγούμενη διάταξη (το στοιχείο $d\dot{Q}$ παράγει $d\mathbf{J} = \mathbf{i}_R d\dot{Q}/4\pi R^2$ κλπ.), με αποτέλεσμα, η περίπτωση (iv) να καλύπτεται από ετερόσημο είδωλο και η (v) από ομόσημο.



Σχήμα 6.2-5

- ο Διατάξεις με πεδία \mathbf{H} και \mathbf{B} σε μαγνητικά υλικά: Ως στοιχειώδες αίτιο για την παραγωγή μαγνητικού πεδίου μπορεί να ληφθεί το γινόμενο idr του ρεύματος με το στοιχειώδες μήκος του ρευματοφόρου βρόχου. Με βάση το νόμο *Biot-Savart*, το idr συνεισφέρει κατά $d\mathbf{H} = (d\mathbf{r} \times \mathbf{i}_R)/4\pi R^2$ και αντίστοιχα για το είδωλο $i_c d\mathbf{r}_c$, που πάλι τοποθετείται στην κατοπτρική θέση και με κατοπτρική διεύθυνση για το στοιχειώδες μήκος $d\mathbf{r}_c$, ενώ για το ρεύμα λαμβάνεται $i_c = \pm i$, όπως θα προσδιορισθεί στη συνέχεια. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, το αίτιο και το είδωλό του ισαπέχουν από κάθε θέση του επιπέδου $z = 0$, δηλαδή $R_c = R$, ενώ το νέο στοιχείο, το γινόμενο $d\mathbf{r} \times \mathbf{i}_R$ και το κατοπτρικό του, έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατοπτρική διεύθυνση, συνεπώς αναμένεται να είναι $d\mathbf{H}_c = \pm d\mathbf{H}$.

Όμως, επειδή τώρα το αίτιο είναι διανυσματικό και συνεισφέρει μέσω του εξωτερικού γινομένου, θα εξετασθούν χωριστά οι συνιστώσες του $d\mathbf{r}$, η συνιστώσα $d\mathbf{r}_\perp$ (κάθετη προς την επιφάνεια $z = 0$), για την οποία είναι $d\mathbf{r}_{\perp c} = -d\mathbf{r}_\perp$, και η εφαπτομενική $d\mathbf{r}_\parallel$, για την οποία είναι $d\mathbf{r}_{\parallel c} = +d\mathbf{r}_\parallel$. Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 6.2-5α**, με ετερόσημα τα ρεύματα i_c και i σχηματίζεται συνολικό πεδίο $d\mathbf{H}_{\text{ολ}} = d\mathbf{H} + d\mathbf{H}_c$, το οποίο είναι εφαπτομενικό στην επιφάνεια $z = 0$, όπως απαιτείται στις περιπτώσεις (vi) και (vii), ενώ για την περίπτωση (viii), με το ολικό πεδίο είναι κάθετο προς την επιφάνεια, χρειάζεται τα i_c και i να είναι ομόσημα, όπως παρουσιάζει το **Σχήμα 6.2-5β**.

- (ζ) Επίλυση βοηθητικού προβλήματος: Το βοηθητικό πρόβλημα, όπως προσδιορίστηκε στο σημείο (δ), αναφέρεται σε χώρο με άπειρη έκταση (χώρος V_+) και έχει παντού υλικό με τις ίδιες ιδιότητες (ϵ , g ή μ), αυτές του χώρου V από το αρχικό πρόβλημα. Επίσης, στο βοηθητικό πρόβλημα όλα τα φορτία, δίπολα, ρεύματα και οποιαδήποτε άλλα αίτια υπάρ-

χουν είναι πλήρως γνωστά. Είναι εκείνα του αρχικού προβλήματος, τα οποία είναι γνωστά από την αρχή, και τα είδωλα, τα οποία είναι συμμετρικά των αρχικών και με το πρόσημο που προσδιορίστηκε στο σημείο (ε). Συνεπώς, η λύση του βοηθητικού προβλήματος μπορεί σε κάθε περίπτωση να γραφεί με τη μορφή ενός ολοκληρώματος επαλληλίας, όπως έχει περιγραφεί στο Κεφάλαιο 5, αλλά φυσικά αποδεκτός είναι και οποιοσδήποτε άλλος τρόπος επίλυσης, όπως η απευθείας εφαρμογή των εξισώσεων του *Maxwell*, ιδίως όταν η διάταξη έχει έντονες συμμετρίες.

- (η) Λύση αρχικού προβλήματος: Η λύση του βοηθητικού προβλήματος είναι, επίσης, η λύση και του αρχικού προβλήματος, αλλά βέβαια μόνο στο χώρο V (εδώ, στην περιοχή $z > 0$). Στο χώρο V_c (εδώ, $z < 0$) του αρχικού προβλήματος οι εκφράσεις αυτές δεν αντιπροσωπεύουν τίποτα απολύτως. Βέβαια, για το χώρο V_c έχουν εξαχθεί κάποιες πληροφορίες στο σημείο (β), συγκεκριμένα ότι κάποιο πεδίο είναι πρακτικά ίσο με μηδέν. Αυτές οι πληροφορίες, βεβαίως, εξακολουθούν να ισχύουν, αλλά κατά τη χρήση τους δεν πρέπει να παραβλέπονται οι προσεγγίσεις, από τις οποίες προέκυψαν. Για παράδειγμα, σε καλό αγωγό γίνεται η προσέγγιση $\mathbf{E}_c \approx 0$. Θα ήταν λάθος τώρα να βγει το συμπέρασμα ότι επίσης είναι $\mathbf{J}_c = g_c \mathbf{E}_c \approx 0$, αδιαφορώντας για την ιδιότητα $g_c \approx \infty$, χωρίς την οποία δεν μπορεί να γίνει η προσέγγιση $\mathbf{E}_c \approx 0$.

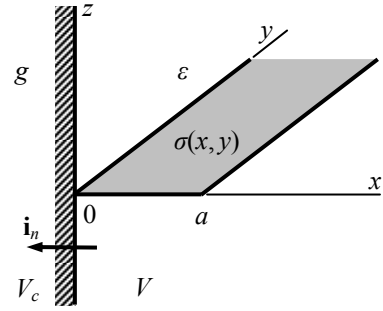
Η διαδικασία επίλυσης με κατοπτρισμό, σε διατάξεις που καλύπτονται από όσα παρουσιάστηκαν στην παρούσα παράγραφο, επιδεικνύεται στα *παραδ. 6.2-2* έως *6.2-6*.

Αναγωγή στις συντεταγμένες του χώρου V : Η συμμετρία μεταξύ αιτίου και ειδώλου σημαίνει, ότι σε αίτιο στη θέση $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\} = \{r'_T, \varphi', z'\}$ αντιστοιχεί είδωλο με $x'_c = x'$, $y'_c = y'$, $z'_c = -z'$, ή με $r'_{Tc} = r'_T$, $\varphi'_c = \varphi'$, $z'_c = -z'$, και στον στοιχειώδη όγκο $dV' = dx' dy' dz' = r'_T dr'_T d\varphi' dz'$ αντιστοιχεί όγκος με το ίδιο μέγεθος, $dV'_c = dV'$. Αυτό επιτρέπει σχέσεις όπως οι (6.2-6) και (6.2-7), με $dQ = \rho dV$ και $dQ_c = \mp dQ$, να γραφούν ως:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_0^{+\infty} dz' \rho(x', y', z') \left[\frac{1}{\sqrt{R_{\perp}^2 + (z - z')^2}} \mp \frac{1}{\sqrt{R_{\perp}^2 + (z + z')^2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\infty} dr'_T r'_T \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{+\infty} dz' \rho(r'_T, \varphi', z') \left[\frac{1}{\sqrt{R_{\perp}^2 + (z - z')^2}} \mp \frac{1}{\sqrt{R_{\perp}^2 + (z + z')^2}} \right], \end{aligned} \quad (6.2-8)$$

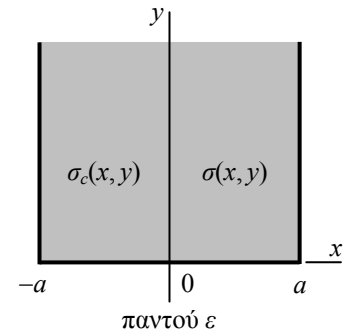
όπου $R_{\perp}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi')$ και με την αντίστοιχη επιλογή του προσήμου. Η ολοκλήρωση τώρα εκτείνεται μόνο στο χώρο V (με τα αρχικά φορτία).

Παράδειγμα 6.2-2: Ο χώρος $x > 0$ έχει μονωτικό διηλεκτρικό υλικό, με σταθερή επιτρεπτότητα ϵ . Στην περιοχή $0 < x < a$, $y > 0$ του επιπέδου $z = 0$ υπάρχει επιφανειακό φορτίο με πυκνότητα ίση με $\sigma = \sigma_0(x/a)\exp(-y/b)$, χρονικά αμετάβλητο. Ο χώρος $x < 0$ έχει αγωγίμο υλικό με υψηλή ειδική αγωγιμότητα g . Ζητείται το δυναμικό Φ στην περιοχή $x > 0$, όταν αποκατασταθεί μόνιμη κατάσταση.



Επίλυση: Ζητούμενο είναι το δυναμικό στην περιοχή $x > 0$, η οποία αντιστοιχεί με το χώρο V , οπότε χώρος V_c είναι η περιοχή $x < 0$ και για λόγους συνέπειας στους συμβολισμούς η ειδική αγωγιμότητα του χώρου V_c θα γραφεί ως g_c , αντί για g που αναφέρεται στην εκφώνηση. Επειδή ο αγωγός της περιοχής $x < 0$ έχει πολύ υψηλή ειδική αγωγιμότητα, μπορεί να ληφθεί $g_c = \infty$, ανεξάρτητα από την πραγματική αριθμητική τιμή της. Κατά συνέπεια, θα είναι $\mathbf{E}_c = (1/g_c)\mathbf{J}_c = 0$, οπότε στην οριακή συνθήκη $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$ στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$ θα ληφθεί (με $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_x$) ότι $\mathbf{E}_+ = 0$, οπότε $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_- = 0$, δηλαδή στην όψη $x = 0^+$ θα είναι $E_y = E_x = 0$. Πρόκειται, βέβαια, για την περίπτωση (i) στην ανάπτυξη των προηγούμενων σελίδων, που καλύπτεται από είδωλο ετερόσημο του φορτίου.

Για το βοηθητικό πρόβλημα, σε ολόκληρο το χώρο τίθεται ϵ (οι ιδιότητες του αρχικού χώρου V , στο $x > 0$), το αρχικό φορτίο σ παραμένει στο $0 < x < a$, $y > 0$ του επιπέδου $z = 0$, και το είδωλο σ_c τοποθετείται στη συμμετρική περιοχή $-a < x < 0$, $y > 0$, $z = 0$. Πρέπει να είναι $dQ_c = -dQ$, που εδώ σημαίνει $\sigma_c dx dy = -\sigma dx dy$, δηλαδή $\sigma_c = -\sigma_0(|x|/a)\exp(-y/b) = \sigma_0(x/a)\exp(-y/b)$, επειδή το σ είναι σε θέσεις με $x = |x| > 0$, ενώ το σ_c σε $x = -|x| < 0$.



Αφού τόσο το σ , όσο και το σ_c περιγράφονται από την ίδια έκφραση, αντί για δύο ολοκληρώσεις (στο $0 < x' < a$ για το σ και στο $-a < x' < 0$ για το σ_c) αρκεί μία (αλλά στο συνολικό διάστημα $-a < x' < a$), και το δυναμικό του βοηθητικού προβλήματος είναι:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon a} \int_0^\infty dy' \exp\left(-\frac{y'}{a}\right) \int_{-a}^a \frac{x' dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}},$$

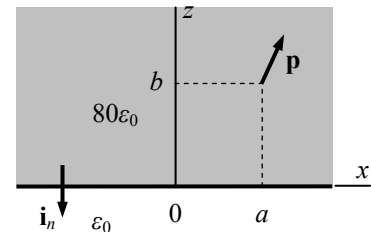
με το σημείο αναφοράς στο άπειρο, απ' όπου τα φορτία φαίνονται σαν σημειακό φορτίο.

Η παραπάνω έκφραση δίνει το δυναμικό του βοηθητικού προβλήματος παντού στο χώρο, αλλά και του αρχικού προβλήματος, στον χώρο $x > 0$ που ενδιαφέρει.

Σχόλια:

- Στο χώρο $x < 0$ (που έχει $\epsilon_c = \infty$ και συνεπώς $\mathbf{E}_c = 0$) και με αφετηρία στο άπειρο, όπου έχει υποτεθεί το σημείο αναφοράς, το δυναμικό θα είναι $\Phi_c = \Phi_c|_{\infty} - \int \mathbf{E}_c \cdot d\mathbf{r} = 0$. Άρα και στην επιφάνεια $x = 0$ θα είναι $\Phi = 0$. Μαθηματικά, αυτό επιβεβαιώνεται στο αποτέλεσμα, επειδή η ολοκλήρωση ως προς x' αφορά συνάρτηση περιττή σε σχέση με το $x = 0$.
- Στην επιφάνεια $x = 0$ υπάρχει υποχρεωτικά ηλεκτρικό φορτίο, προερχόμενο από το σώμα του αγωγού κατά τη διάρκεια μιας μεταβατικής περιόδου (βλ. και παράγραφο 2.2.3 του Μέρους Α). Συνεπώς, η σχέση $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εκεί, με $\sigma = 0$, όπως στην οριακή επιφάνεια μεταξύ δύο μονωτών. Αντίθετα, η σχέση αυτή προσδιορίζει πόσο είναι το επιφανειακό φορτίο. Με $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_x$ και $\mathbf{D}_+ = (\epsilon \mathbf{E})_+ = 0$, είναι $\sigma = -\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{D}_- = \epsilon \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{E}(x=0^+) = -\epsilon (\partial \Phi / \partial x)|_{x=0} = \dots$

Παράδειγμα 6.2-3: Στο χώρο $z > 0$, όπου η επιτρεπτότητα είναι ίση με $\epsilon = 80 \epsilon_0$, βρίσκεται ένα σημειακό δίπολο $\mathbf{p} = p_0(\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_z)$, στη θέση $x = a, y = 0, z = b$. Ο χώρος $z < 0$ έχει επιτρεπτότητα ίση με ϵ_0 . Ζητείται να προσδιορισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ στο χώρο $z > 0$.

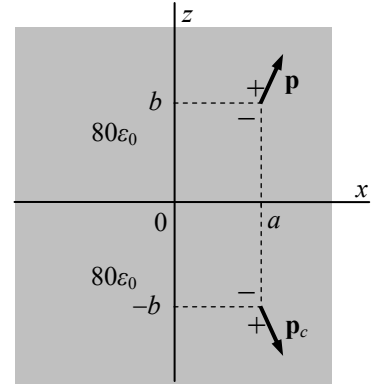


Επίλυση: Στον παρακαίμενο χώρο $z < 0$ είναι $\epsilon_c = \epsilon_0 \ll \epsilon = 80 \epsilon_0$, οπότε μπορεί να τεθεί $\epsilon_c = 0$. Το γεγονός ότι το ϵ_0 έχει συγκεκριμένη τιμή, μη μηδενική, δεν εμποδίζει να τεθεί $\epsilon_c = 0$, ως αποτέλεσμα της σύγκρισής του με το ϵ , και όχι βέβαια επειδή $\epsilon_0 \approx 0,9 \times 10^{-11}$ F/m είναι «μικρός αριθμός». Επίσης, η σχέση $\epsilon = 80 \epsilon_0$, δεν πρέπει να διαβασθεί ως $\epsilon = \infty$: Η ποσότητα ϵ περιγράφει ιδιότητα του χώρου $z > 0$ που ενδιαφέρει και, συνεπώς, αυτή είναι η τιμή, που πρέπει να θεωρηθεί φυσιολογική, δηλαδή ούτε μεγάλη, ούτε μικρή.

Με $\epsilon_c = 0$ προκύπτει $\mathbf{D}_c = \epsilon_c \mathbf{E}_c = 0$ και η σχέση $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = 0$, επειδή στο όριο μεταξύ διηλεκτρικών δεν αναπτύσσεται φορτίο σ , με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$ και $\mathbf{D}_+ = \mathbf{D}_c = 0$, δίνει $-\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{D}_- = 0$, οπότε $\mathbf{D}_z(z=0^+) = 0$. Αποκλειστικά εφαπτομενικό \mathbf{D} στο όριο εξασφαλίζεται από ομόσημο είδωλο, όπως στην περίπτωση (iii).

Βοηθητικό πρόβλημα: Όλος ο χώρος λαμβάνεται με ϵ (όπως αρχικά στο $z > 0$), το δίπολο \mathbf{p} παραμένει αμετάβλητο στην αρχική θέση $(a, 0, b)$ και το είδωλο \mathbf{p}_c τοποθετείται στη συμμετρική θέση $(a, 0, -b)$. Η απαίτηση για ομόσημο είδωλο αναφέρεται στα φορτία $\pm q$, που συνθέτουν το δίπολο (ως $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$). Παίρνοντας τα είδωλα κάθε πόλου στις συμμετρικές θέσεις και

ομόσημα με τον αντίστοιχο πόλο του αρχικού διπόλου, φαίνεται αμέσως, ότι $\mathbf{p}_c = p_0(\mathbf{i}_x - 2\mathbf{i}_z)$. Οι αποστάσεις του τυχαίου σημείου είναι $\mathbf{R} = \mathbf{i}_x(x-a) + \mathbf{i}_y(y-0) + \mathbf{i}_z(z-b)$ από το αρχικό δίπολο και $\mathbf{R}_c = \mathbf{i}_x(x-a) + \mathbf{i}_y(y-0) + \mathbf{i}_z(z+b)$ από το είδωλο, οπότε το δυναμικό του βοηθητικού προβλήματος, και συνακόλουθα το δυναμικό του αρχικού προβλήματος, αλλά μόνο στην περιοχή $z > 0$, είναι:



$$\Phi(\mathbf{r})|_{z>0} = \frac{p_0}{4\pi \cdot 80\epsilon_0} \left[\frac{(x-a) + 2(z-b)}{\left[(x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2 \right]^{3/2}} + \frac{(x-a) - 2(z+b)}{\left[(x-a)^2 + y^2 + (z+b)^2 \right]^{3/2}} \right].$$

Σχόλιο: Αν ζητούμενο ήταν και το δυναμικό στην περιοχή $z < 0$ (χώρος V_c), αυτό θα προέκυπτε από το πρόβλημα οριακών συνθηκών, το οποίο για το χώρο V_c θα περιλάμβανε τη διαφορική εξίσωση $\nabla^2 \Phi_c = 0$, με την απαίτηση ότι το Φ_c είναι συνεχές και με συνεχείς παραγώγους, επειδή εκεί δεν υπάρχει κανένα αίτιο ασυνέχειας, και για την επιφάνεια S (το επίπεδο $z = 0$) παρατηρώντας ότι για τον παρακείμενο χώρο είναι $\epsilon = 80\epsilon_0 \approx \infty$, θα είχε την οριακή συνθήκη *Dirichlet*, $\Phi_c(z=0) = \Phi(z=0^+) = \dots$, όσο προκύπτει θέτοντας $z = 0$ στην παραπάνω λύση $\Phi(\mathbf{r})|_{z=0}$. Συγκεκριμένα, είναι:

$$\Phi_c|_{z=0} = 2 \frac{p_0}{4\pi \cdot 80\epsilon_0} \frac{(x-a) - 2b}{\left[(x-a)^2 + y^2 + b^2 \right]^{3/2}} = \frac{2/80 p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x-a) + 2(z-b)}{\left[(x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2 \right]^{3/2}} \Big|_{z=0}.$$

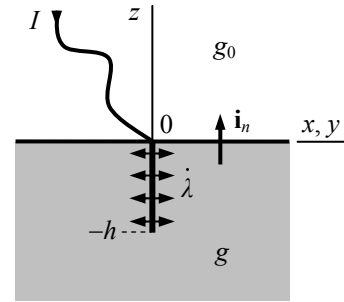
Η σχέση αυτή, αλλά χωρίς την εξειδίκευση $z = 0$, αναγνωρίζεται ότι δίνει το δυναμικό από δίπολο ίσο με $(2/80)\mathbf{p}$, τοποθετημένο στη θέση $(a, 0, b)$ του αρχικού διπόλου, όταν ο χώρος έχει παντού ϵ_0 . Συνεπώς, η σχέση:

$$\Phi_c|_{z<0} = \frac{2/80 p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x-a) + 2(z-b)}{\left[(x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2 \right]^{3/2}},$$

ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις για το Φ_c , άρα δίνει το δυναμικό στην περιοχή $z < 0$.

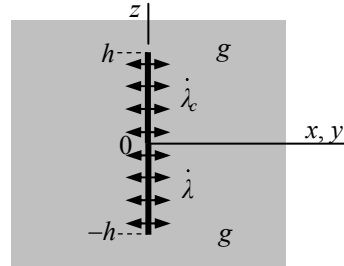
Η έκφραση για το Φ_c βασίστηκε στην έκφραση για το $\Phi(z=0^+)$, που με τη σειρά του βασίστηκε στην ισχυρή ανισότητα $\epsilon_0 \ll 80 \epsilon_0$, συνεπώς έχει ανακρίβειες τάξης $1/80 = 1,25\%$. Η ακριβής επίλυση μπορεί να γίνει με τη διαδικασία της επόμενης παραγράφου 6.2.2.]

Παράδειγμα 6.2-4: Ο χώρος $z < 0$ είναι το αγώγιμο έδαφος, με σταθερή ειδική αγωγιμότητα g , ενώ ο χώρος $z > 0$, ο αέρας, είναι μονωτής και έχει $g_0 = 0$. Ένα ηλεκτρόδιο, με μήκος h και μικρές εγκάρσιες διαστάσεις, είναι τοποθετημένο κατακόρυφα, με το άνω άκρο του στο επίπεδο $z = 0$. Στο ηλεκτρόδιο προσάγεται ρεύμα I (δηλαδή, το ηλεκτρόδιο λειτουργεί ως γειωτής), το οποίο υποτίθεται πως εκλύεται στο παρακείμενο αγώγιμο υλικό ομοιόμορφα από όλο το μήκος h . Ζητείται για την περιοχή $z < 0$ το ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$, καθώς και το σχήμα των ισοδυναμικών επιφανειών.



Επίλυση: Επειδή $g_0 = 0$ (ή, γενικότερα, αν ήταν $g_0 \ll g$), είναι $\mathbf{J}(z > 0) = g_0 \mathbf{E}(z > 0) = 0$. Στην επιφάνεια $z = 0$ δεν υπάρχει στρώμα από υλικό με ιδιαίτερα υψηλή ειδική αγωγιμότητα, με τιμή πολύ μεγαλύτερη από g , τέτοιο ώστε να δικαιολογείται $\mathbf{K} \neq 0$, συνεπώς εκεί είναι $\mathbf{K} = 0$. Τέλος, σε μόνιμη κατάσταση είναι $\partial\sigma/\partial t = 0$. Συνεπώς, η συνθήκη $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = -\nabla \cdot \mathbf{K} - \partial\sigma/\partial t$, με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$, δίνει $J_z(z = 0^-) = 0$, δηλαδή, το ρεύμα στην όψη $z = 0^-$ είναι αμιγώς εφαπτομενικό. Αυτό εξασφαλίζεται με εισαγωγή ομόσημου ειδώλου, όπως στην περίπτωση (v).

Για το βοηθητικό πρόβλημα, όλος ο χώρος θεωρείται πως έχει ειδική αγωγιμότητα g . Ο γειωτής υποκαθίσταται από πηγή φορτίου, που απελευθερώνει $\dot{\lambda} = I/h$ φορτία ανά δευτερόλεπτο και μέτρο μήκους. Το είδωλο, ως ομόσημο, έχει πάλι $\dot{\lambda}_c = \dot{\lambda} = I/h$. Κατά συνέπεια, το δυναμικό του βοηθητικού προβλήματος μπο-



ρεί να προσδιορισθεί με το ολοκλήρωμα επαλληλίας, με ολοκλήρωση απευθείας στο διάστημα $-h < z' < +h$, και όχι χωριστά για το $\dot{\lambda}$ και χωριστά για το $\dot{\lambda}_c = \dot{\lambda}$, και η έκφραση αυτή δίνει το δυναμικό και του αρχικού προβλήματος, αλλά μόνο στην περιοχή $z < 0$, συγκεκριμένα:

$$\Phi(r_T, \varphi, z < 0) = \frac{I}{2\pi g h} \int_{-h}^h \frac{dz'}{\sqrt{r_T^2 + (z - z')^2}}.$$

Η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει με την αντικατάσταση $z' = z + r_T \sinh \psi$, που δίνει $dz' = r_T \cosh \psi d\psi$ και $R = [r_T^2 + (z - z')^2]^{1/2} = r_T \cosh \psi$, με αποτέλεσμα:

$$\Phi(r_T, \varphi, z < 0) = \frac{I}{2\pi g h} [\psi_2(r_T, z) - \psi_1(r_T, z)],$$

όπου $\sinh \psi_{1,2} = (\mp h - z)/r_T$, και επειδή $e^\psi = \cosh \psi + \sinh \psi$, προκύπτει για τα όρια:

$$\psi_{1,2} = \ln \left[\frac{1}{r_T} \left(\sqrt{r_T^2 + (\mp h - z)^2} + (\mp h - z) \right) \right].$$

Η ισοδυναμική επιφάνεια με $\Phi = U = \text{σταθ.}$ γράφεται ως $G_0 U/I = \psi_2(r_T, z) - \psi_1(r_T, z)$, με πλεγμένη μορφή, όπου εισήχθη η σταθερά $G_0 = 2\pi gh$, με μονάδες αγωγιμότητας. Η σταθερά U μπορεί να εκφραστεί μέσω κάποιας ακτίνας a , τέτοιας ώστε η ισοδυναμική επιφάνεια, που διέρχεται από τον κύκλο $r_T = a$ στο επίπεδο $z = 0$, να έχει $\Phi = U$, δηλαδή να είναι $G_0 U/I = \psi_2(a, 0) - \psi_1(a, 0)$. Αμέσως φαίνεται ότι είναι $G_0 U/I = \ln[(\sqrt{a^2 + h^2} + h)/(\sqrt{a^2 + h^2} - h)]$, οπότε η ισοδυναμική επιφάνεια που διέρχεται από τον κύκλο αυτό περιγράφεται από τη σχέση:

$$\psi_2(r_T, z) - \psi_1(r_T, z) = \ln \frac{\sqrt{a^2 + h^2} + h}{\sqrt{a^2 + h^2} - h}.$$

Για να προσδιορισθεί το σχήμα των επιφανειών αυτών, χρειάζονται αλγεβρικές πράξεις, που είναι μεν απλές, αλλά αρκετά εκτενείς. Τελικά, προκύπτει για τις ισοδυναμικές επιφάνειες:

$$\frac{r_T^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 + h^2} = 1, \text{ δηλαδή } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 + h^2} = 1.$$

Η σχέση αυτή περιγράφει ελλειψοειδή εκ περιστροφής, με μήκη ημιαξόνων a , a και $(a^2 + h^2)^{1/2}$ και με άξονα συμμετρίας τον μεγάλο άξονα, που συμπίπτει με τον άξονα z .

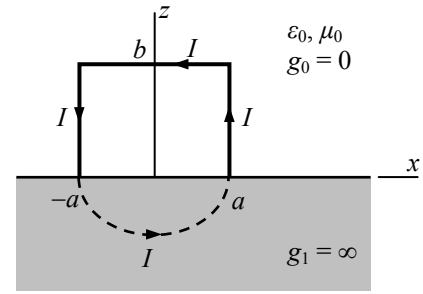
Σχόλια:

- Σε αποστάσεις $r \gg h$ από την αρχή των αξόνων είναι $\psi_1 = \psi_2 = 1$ και το δυναμικό μηδενίζεται, όπως αναμένεται, επειδή από το άπειρο το αίτιο φαίνεται σαν σημειακή πηγή με $\dot{Q} = I$, που παράγει δυναμικό $\Phi = I/(4\pi gr^2)$. Το δυναμικό απειρίζεται λογαριθμικά στη ράβδο, όπως επίσης αναμένεται σε γραμμικό αίτιο. Αυτός ο απειρισμός απλά σημαίνει, πως σε μικρές αποστάσεις από τον γειωτή πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν ακριβέστερα το σχήμα του και ιδίως το πάχος του, το οποίο δεν μπορεί πια να θεωρηθεί μηδενικό.
- Όπως παρουσιάστηκε στην παράγραφο 5.2.4, βηματική τάση είναι η μέγιστη τιμή της διαφοράς $\Delta\Phi = \Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2)$, για θέσεις $\mathbf{r}_{1,2}$ στη στάθμη του εδάφους ($z = 0$) που απέχουν απόσταση $\ell = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, όσο το βήμα ενός ανθρώπου που περπατά στο έδαφος, με τυπική τιμή $\ell \approx 0,75$ m. Στην παρούσα διάταξη, στην οποία $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$, η βηματική τάση συναντάται σε ακτινικές μετακινήσεις, και μάλιστα με κατεύθυνση προς μικρότερες ακτινικές θέσεις, οπότε είναι $\Delta\Phi = \Phi(r_T - \ell, z = 0) - \Phi(r_T, z = 0)$, δηλαδή:

$$\Delta\Phi(r_T, z = 0) = \frac{I}{2\pi gh} \left[\ln \frac{\sqrt{(r_T - \ell)^2 + h^2} + h}{\sqrt{(r_T - \ell)^2 + h^2} - h} - \ln \frac{\sqrt{r_T^2 + h^2} + h}{\sqrt{r_T^2 + h^2} - h} \right].$$

Η σχέση αυτή έχει νόημα όταν $r_T > \ell$. Ο απειρισμός όταν $r_T = \ell$ οφείλεται στην παραδοχή ράβδου με μηδενικό πάχος, όπως περιγράφεται στο προηγούμενο σχόλιο.

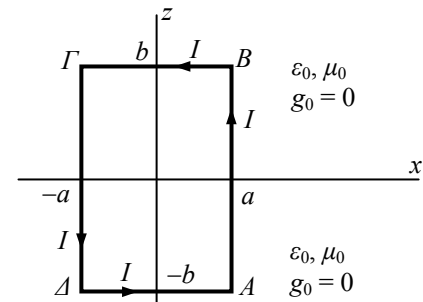
Παράδειγμα 6.2-5 Στο χώρο $z > 0$ (με ϵ_0, μ_0 και $g_0 = 0$) υπάρχει ένα μεταλλικό πλαίσιο σχήματος «Π», με διαστάσεις $2a \times b$, που στηρίζεται σε αγωγίμη βάση (την περιοχή $z < 0$) με ειδική αγωγιμότητα $g_1 = \infty$. Το πλαίσιο τροφοδοτείται με ρεύμα I και το κύκλωμα κλείνει μέσω της αγωγίμης βάσης. Ζητείται το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}(z > 0)$ και το πεδίο ροής ρεύματος $\mathbf{J}(z < 0)$.



Επίλυση: Πρόκειται για δύο προβλήματα κατοπτρισμού, εντελώς αυτοτελή, των οποίων ο χειρισμός θα γίνει χωριστά.

Πρόβλημα μαγνητικού πεδίου (περιοχή $z > 0$). Επειδή στην περιοχή $z < 0$ είναι $g_1 = \infty$, συνεπώς είναι $\mathbf{E}(z < 0) = 0$ και $\mathbf{B}(z < 0) = 0$. Από την ομογενή σχέση $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0$, με $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_z$, προκύπτει ότι $B_z(z=0^+) = 0$, άρα και $H_z(z=0^+) = 0$, οπότε το είδωλο πρέπει να επιλεγεί ώστε στο $z = 0$ το πεδίο \mathbf{H} να είναι μόνο εφαπτομενικό.

Το βοηθητικό πρόβλημα αναφέρεται σε άπειρο χώρο με παντού μ_0 . Το είδωλο θα είναι ένα αντεστραμμένο «Π», με αποτέλεσμα συνολικά να σχηματίζεται ένας ορθογωνικός βρόχος με διαστάσεις $2a \times 2b$, με είδωλο το κάτω μισό του βρόχου. Στο πάνω μισό του βρόχου το ρεύμα I θα κυκλοφορεί όπως στο αρχικό πλαίσιο, οπότε για διατήρηση του φορτίου το ρεύμα στο βρόχο θα έχει ενιαία φορά περιστροφής. Για σύνδεση με τη θεωρία, πρόκειται για την περίπτωση (vi), που απαιτεί $i_c = -i$. Στον οριζόντιο κλάδο το ρεύμα I στο $z = -b$ είναι πράγματι αντίρροπο προς εκείνο στο $z = +b$, ενώ οι δύο κλάδοι έχουν ομόρροπα $d\mathbf{r}_c = d\mathbf{r}$. Στους κατακόρυφους κλάδους είναι $d\mathbf{r}_c = -d\mathbf{r}$, που σε συνδυασμό με την απαίτηση $i_c = -i$ καταλήγει ότι στο κάτω μισό του κλάδου το ρεύμα είναι ομόρροπο με το πάνω μισό.



Από το νόμο *Biot-Savart*, με $\mathbf{R} = (x - x')\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + (z - z')\mathbf{i}_z$, όπου x' και z' είναι εναλλάξ σταθερή ή μεταβλητή ολοκλήρωσης, προκύπτει:

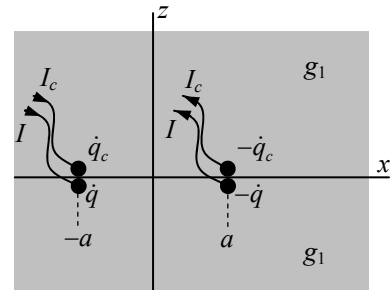
$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{I}{4\pi} \left[\int_{-b}^b dz' \left(\frac{(x-a)\mathbf{i}_y - y\mathbf{i}_x}{\left[(x-a)^2 + y^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} - \frac{(x+a)\mathbf{i}_y - y\mathbf{i}_x}{\left[(x+a)^2 + y^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} \right) + \int_{-a}^a dx' \left(\frac{y\mathbf{i}_z - (z+b)\mathbf{i}_y}{\left[(x-x')^2 + y^2 + (z+b)^2 \right]^{3/2}} - \frac{y\mathbf{i}_z - (z-b)\mathbf{i}_y}{\left[(x-x')^2 + y^2 + (z-b)^2 \right]^{3/2}} \right) \right],$$

όπου οι τέσσερες προσθετέοι περιγράφουν κατά σειρά τη συνεισφορά των κλάδων (AB) με $x' = a$, $d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_z dz'$, ($\Gamma\Delta$) με $x' = -a$, $d\mathbf{r}' = -\mathbf{i}_z dz'$, (ΔA) με $z' = -b$, $d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_x dx'$ και ($B\Gamma$) με $z' = b$, $d\mathbf{r}' = -\mathbf{i}_x dx'$. Επισημαίνεται ότι στον κλάδο ($B\Gamma$) η επιλογή του προσήμου $d\mathbf{r}' = -\mathbf{i}_x dx'$ με τη φορά $B \rightarrow \Gamma$ σημαίνει $dx' > 0$, άρα η ολοκλήρωση είναι από $x' = -a$ μέχρι $x' = -a$. Αντίστοιχα ισχύουν για τον κλάδο ($\Gamma\Delta$).

Η παραπάνω έκφραση δίνει το πεδίο $\mathbf{H}(x, y, z > 0)$ του αρχικού προβλήματος. Εύκολα φαίνεται, ως επιβεβαίωση, ότι πράγματι $H_z(x, y, z = 0) = 0$. Φυσικά, ως προς το αρχικό πρόβλημα, η παράσταση $\mathbf{H}(x, y, z < 0)$ δεν αντιπροσωπεύει τίποτα.

Πρόβλημα ροής ρεύματος (περιοχή $z < 0$): Επειδή στην περιοχή $z > 0$ είναι $g_0 = 0$ (θα αρκούσε $g_0 \ll g_1$), εκεί είναι $\mathbf{J}(z > 0) = 0$ και η οριακή συνθήκη δίνει $J_z(z = 0^-) = 0$ (όπως στο **παράδειγμα 6.2-3**), που αντιμετωπίζεται με ομόσημο είδωλο.

Στο βοηθητικό πρόβλημα ο άπειρος χώρος υποτίθεται με g_1 παντού, που τώρα η τιμή του δεν θεωρείται πια άπειρη, αφού είναι η ειδική αγωγιμότητα του χώρου που τώρα μελετάται. Στις θέσεις $x = \pm a$, $z = 0^-$ υπάρχουν τα άκρα του πλαισίου, από τα οποία προσάγεται και απάγεται ρεύμα στην περιοχή που μελετάται. Από το σημείο $x = +a$, $z = 0^-$ απάγεται ρεύμα, δηλαδή η περιοχή $z < 0$ αντιλαμβάνεται το σημείο αυτό ως καταβόθρα που απορροφά φορτία, δηλαδή, ως αρνητική πηγή, ίση με $-\dot{q} = -I$. Το αντίθετο συμβαίνει στο σημείο $x = -a$, $z = 0^-$, που λειτουργεί ως θετική πηγή, $+\dot{q} = +I$. Στις πηγές $\mp \dot{q} = \mp I$ που βρίσκονται στις θέσεις $x = \pm a$, $z = 0^-$ αντιστοιχούν είδωλα στις θέσεις $x = \pm a$, $z = 0^+$, που ως ομόσημα θα έχουν επίσης $\mp \dot{q}_c = \mp I$. Συνολικά, στα $x = \pm a$, $z = 0$ υπάρχουν πηγές με $\mp \dot{q}_{\text{ολ}} = \mp 2I$ και το δυναμικό του βοηθητικού προβλήματος, αλλά και του αρχικού προβλήματος ροής ρεύματος, μόνο όμως στην περιοχή $z < 0$, είναι:



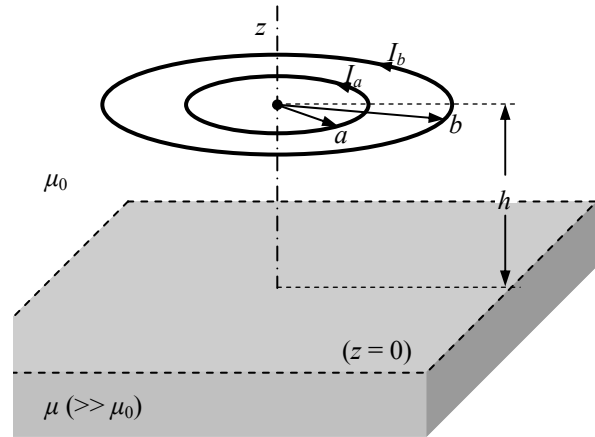
$$\Phi(x, y, z) = \frac{2I}{4\pi g_1} \left(-\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Τέλος, για την πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J} = -g_1 \nabla \Phi$ προκύπτει:

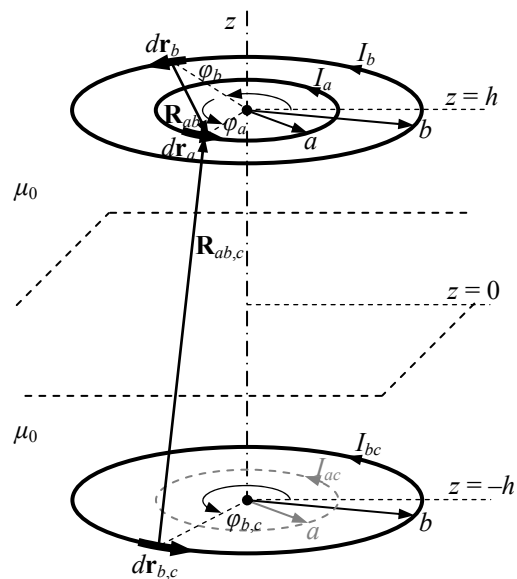
$$\mathbf{J}(x, y, z < 0) = -\frac{I}{2\pi} \left(\frac{(x-a)\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z}{\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} - \frac{(x+a)\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z}{\left[(x+a)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \right).$$

Σχόλιο: Η πυκνότητα ρεύματος είναι τελείως ανεξάρτητη από την ειδική αγωγιμότητα. Είτε εύκολη, είτε δύσκολη είναι η κίνηση των φορτίων, όσα προσάγονται, τόσα θα διέλθουν.

Παράδειγμα 6.2-6: Στην περιοχή $z > 0$, με μαγνητική διαπερατότητα ίση με μ_0 , βρίσκονται δύο ρευματοφόροι βρόχοι με ακτίνες ίσες με a και b , τοποθετημένοι ομόκεντρα στο επίπεδο $z = h$, με ομόρροπα τα ρεύματα I_a και I_b . Η περιοχή $z < 0$ αποτελείται από υλικό με $\mu \gg \mu_0$. Ζητείται ο συντελεστής αλληλεπαγωγής μεταξύ των δύο βρόχων.



Επίλυση: Παρόμοια διάταξη έχει αντιμετωπισθεί στο παράδ. 5.3-5 της παραγρ. 5.3-1, με τη βασική διαφορά ότι εκεί ο χώρος έχει παντού την ίδια τιμή για τη μαγνητική διαπερατότητα, προϋπόθεση η οποία είναι βασική για να εφαρμοσθεί ο τύπος (5.3-23) του *Neumann*. Στην παρούσα διάταξη, αυτή η προϋπόθεση δημιουργείται εφαρμόζοντας κατοπτρισμό. Ολόκληρος ο χώρος υποτίθεται με μαγνητική διαπερατότητα ίση με μ_0 και οι δύο βρόχοι κατοπτρίζονται στις συμμετρικές θέσεις ($z_c = -h$), με τα ρεύματα I_{ac} και I_{bc} των ειδώλων να είναι ομόρροπα με τα αρχικά, αφού η περιοχή V_c ($z < 0$) είχε αρχικά $\mu \gg \mu_0$.



Με βάση τον ορισμό του συντελεστή αλληλεπαγωγής L_{ab} , η μαγνητική ροή που διέρχεται από τον βρόχο «a», λόγω του ρεύματος στον βρόχο «b», είναι $\Psi_{m,ab} = L_{ab}I_b$. Όμως, η ροή $\Psi_{m,ab}$ οφείλεται τόσο στο ρεύμα I_b απ' ευθείας, όσο και στο ρεύμα I_{bc} του ειδώλου. Συμβολίζοντας με άνω δείκτη (N) την ποσότητα που δίνει ο τύπος του *Neumann*, η μαγνητική ροή, με τις δύο αυτές συνεισφορές, εκφράζεται ως $\Psi_{m,ab} = L_{ab}^{(N)}I_b + L_{ab,c}^{(N)}I_{bc}$, και επειδή είναι $I_{bc} = I_b$, ο ζητούμενος συντελεστής θα είναι το άθροισμα των συντελεστών αλληλεπαγωγής μεταξύ αφενός του βρόχου «a» και αφετέρου του βρόχου «b» και του ειδώλου του «b».

Εφαρμόζοντας τον τύπο του *Neumann* (5.3-23), οι ποσότητες που πρέπει να αθροισθούν είναι:

$$L_{ab}^{(N)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\ell_a} \oint_{\ell_b} \frac{d\mathbf{r}_a \cdot d\mathbf{r}_b}{R_{ab}}, \quad L_{ab,c}^{(N)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\ell_a} \oint_{\ell_{b,c}} \frac{d\mathbf{r}_a \cdot d\mathbf{r}_{b,c}}{R_{ab,c}}.$$

Τα στοιχειώδη μήκη κάθε βρόχου είναι $d\mathbf{r}_a = \mathbf{i}_{\varphi_a} a d\varphi_a$, $d\mathbf{r}_b = \mathbf{i}_{\varphi_b} b d\varphi_b$ και $d\mathbf{r}_{b,c} = \mathbf{i}_{\varphi_{b,c}} b d\varphi_{b,c}$, οπότε τα εσωτερικά γινόμενα που χρειάζονται είναι ίσα με $d\mathbf{r}_a \cdot d\mathbf{r}_b = ab d\varphi_a d\varphi_b \cos(\varphi_a - \varphi_b)$ και $d\mathbf{r}_a \cdot d\mathbf{r}_{b,c} = ab d\varphi_a d\varphi_{b,c} \cos(\varphi_a - \varphi_{b,c})$. Για τους ομοεπίπεδους αρχικούς βρόχους το τετράγωνο της σχετικής απόστασης μεταξύ των $d\mathbf{r}_a$ και $d\mathbf{r}_b$ είναι ίσο με $R_{ab}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi_a - \varphi_b)$, και αντίστοιχα $R_{ab,c}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi_a - \varphi_{b,c}) + 4h^2$ για το άλλο ζεύγος. Συνεπώς, ο συντελεστής αλληλεπαγωγής, $L_{ab} = L_{ab}^{(N)} + L_{ab,c}^{(N)}$, γράφεται:

$$L_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_a \int_0^{2\pi} d\varphi_b \frac{ab \cos(\varphi_a - \varphi_b)}{\sqrt{(a^2 + b^2) - 2ab \cos(\varphi_a - \varphi_b)}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_a \int_0^{2\pi} d\varphi_{b,c} \frac{ab \cos(\varphi_a - \varphi_{b,c})}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 4h^2) - 2ab \cos(\varphi_a - \varphi_{b,c})}}.$$

Στον πρώτο όρο, οι γωνίες φ_a και φ_b εμφανίζονται μόνο μέσω της διαφοράς τους $\zeta = \varphi_a - \varphi_b$, οπότε ως μεταβλητές ολοκλήρωσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι φ_a και ζ , η καθεμία στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Η ολοκλήρωση ως προς φ_a δίνει απλά 2π , επειδή η ολοκληρωτέα παράσταση εξαρτάται πια μόνο από την ζ , ενώ η εξάρτηση από το ζ είναι μόνο μέσω του συνημιτόνου, συνεπώς είναι συμμετρική ως προς την τιμή $\zeta = \pi$, οπότε η ολοκλήρωση ως προς ζ μπορεί να περιορισθεί στο διάστημα $0 < \zeta < \pi$, με διπλασιασμό του αποτελέσματος. Τα ίδια ακριβώς συμβαίνουν και στον δεύτερο όρο (όπου μπορεί πάλι να χρησιμοποιηθεί το σύμβολο ζ για τη διαφορά $\varphi_a - \varphi_{b,c}$). Με μικρή αναδιάταξη των όρων, το αποτέλεσμα για τον συντελεστή αλληλεπαγωγής είναι:

$$L_{ab} = \mu_0 \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^\pi d\zeta \frac{\cos \zeta}{\sqrt{1 - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cos \zeta}} + \mu_0 \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4h^2}} \int_0^\pi d\zeta \frac{\cos \zeta}{\sqrt{1 - \frac{2ab}{a^2 + b^2 + 4h^2} \cos \zeta}}.$$

Σχόλιο: Όπως είναι γνωστό, είναι $L_{ab} = L_{ba}$. Ας ελεγχθεί αυτή η ισότητα στο παραπάνω αποτέλεσμα. Στον πρώτο όρο, ουσιαστικά, εμπλέκεται η απόσταση R_{ab} , που βέβαια είναι ίση με την απόσταση R_{ba} . Στον δεύτερο όρο εμπλέκεται η απόσταση $R_{ab,c}$ μεταξύ σημείων του βρόχου « a » και του βρόχου-ειδώλου « b_c ». Για την αλληλεπαγωγή L_{ba} θα χρειαζόταν η απόσταση $R_{ba,c}$ από τα σημεία του βρόχου « b » και του βρόχου-ειδώλου « a_c ». Λόγω της συμμετρίας μεταξύ αρχικών βρόχων και ειδώλων, προφανώς θα είναι και $R_{ba,c} = R_{ab,c}$.

6.2.2 Κατοπτρισμός σε επίπεδο μεταξύ υλικών χωρίς μεγάλες διαφορές

Οι τεχνικές της προηγούμενης παραγράφου μπορούν να εφαρμοσθούν μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, στις οποίες τα δύο υλικά στις δύο όψεις του επιπέδου έχουν ριζικά διαφορετικές ιδιότητες, όπως αυτές περιγράφονται από τα ϵ , g και μ . Τέτοιες περιπτώσεις είναι συχνές, ιδιαίτερα ως προς την αγωγιμότητα g και, κατά δεύτερο λόγο, τη μαγνητική διαπερατότητα μ (όταν συμμετέχει σιδηρομαγνητικό υλικό, με $\mu \gg \mu_0$), αλλά σπανίζουν στα διηλεκτρικά υλικά, και εν πάση περιπτώσει, δεν καλύπτουν πολλές διατάξεις, ακόμα και αγώγιμων υλικών.

Όταν δύο υλικά έχουν ως κοινό όριο μία απέραντη επίπεδη επιφάνεια, όπως τη $z = 0$, κατοπτρισμός είναι δυνατός ακόμα και όταν δεν υπάρχουν ακραίες διαφορές στις ιδιότητές τους. Δεν υπάρχουν, βέβαια, πληροφορίες προς αξιοποίηση, όπως ότι $\mathbf{E}_c = 0$ στον παρακείμενο αγωγό, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι δύο οριακές συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια.

Οι δύο αυτές συνθήκες αρκούν. Πρόκειται για πρόβλημα οριακών τιμών, αλλά σε χώρο V που φθάνει μέχρι το άπειρο. Στο όριο S (στο άπειρο) συνήθως επικρατεί ομογενής συνθήκη *Dirichlet*, $\Phi_\infty = 0$. Στο εσωτερικό τώρα του χώρου V , η διαφορική εξίσωση, παραδείγματος χάριν για διατάξεις ηλεκτρικού πεδίου σε διηλεκτρικά, με $\epsilon(z > 0) = \epsilon_1$ και $\epsilon(z < 0) = \epsilon_2$, είναι:

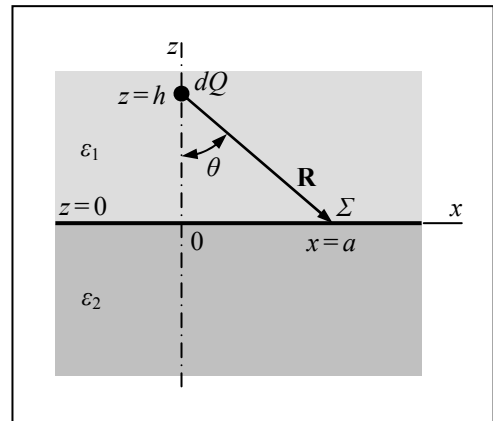
$$\begin{aligned} (\nabla^2 \Phi) \Big|_{z>0} &= -\frac{1}{\epsilon_1} \rho_1(\mathbf{r}), \\ (\nabla^2 \Phi) \Big|_{z<0} &= -\frac{1}{\epsilon_2} \rho_2(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{6.2-9}$$

που επεκτείνεται κατάλληλα, αν υπάρχει μόνιμη πόλωση. Η διαφορική εξίσωση συνοδεύεται από τις σχέσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά κοντά σε κατανομές για συγκεντρωμένα φορτία ή δίπολα και υποκαθιστούν έτσι τις πυκνότητες $\rho_{1,2}$. Το πρόσθετο στοιχείο είναι ότι στο επίπεδο $z = 0$, το οποίο είναι κι αυτό στο εσωτερικό του χώρου V , πρέπει να εφαρμοσθούν οι σχέσεις με τις απαιτήσεις συνέχειας για την παράγωγο και την τιμή του δυναμικού:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0^+} - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0^-} &= 0, \\ \Phi \Big|_{z=0^+} - \Phi \Big|_{z=0^-} &= 0. \end{aligned} \tag{6.2-10}$$

Οι τελευταίες σχέσεις υποθέτουν ότι στο επίπεδο $z = 0$ δεν υπάρχουν επιφανειακές κατανομές φορτίων ή διπόλων. Αυτό δεν περιορίζει τη γενικότητα. Απλά, αν υπάρχουν τέτοιες κατανομές, μπορούν να θεωρηθούν πως βρίσκονται πολύ κοντά πάνω ή κάτω από το επίπεδο $z = 0$, ώστε να ανήκουν στην περιοχή $z > 0$, ή στη $z < 0$.

Διατάξεις Ηλεκτροστατικής (όπως αυτή που περιγράφεται από το φορμαλισμό που μόλις παρουσιάστηκε): Ας θεωρηθεί ότι στην περιοχή $z > 0$ υπάρχει υλικό με επιτρεπτότητα $\epsilon(z > 0) = \epsilon_1$, ενώ στην περιοχή $z < 0$ η επιτρεπτότητα είναι $\epsilon_2 (\neq \epsilon_1)$. Τότε, οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $z = 0$ (με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$), η $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma$, με $\sigma = 0$ επειδή δεν υπάρχει τρόπος να εγκατασταθεί φορτίο στο όριο μεταξύ μονωτικών διηλεκτρικών υλικών, και η $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$, δίνουν αντίστοιχα τις απαιτήσεις $\epsilon_1 E_z(0^+) - \epsilon_2 E_z(0^-) = 0$ και $\mathbf{E}_t(0^+) - \mathbf{E}_t(0^-) = 0$, όπου \mathbf{E}_t είναι η συνιστώσα, η εφαπτομενική στο επίπεδο $z = 0$. Αυτές οι απαιτήσεις θα εφαρμοσθούν στη βασική διάταξη, η οποία έχει μόνο ένα σημειακό φορτίο dQ στη θέση $z = h$. Χωρίς να ζημιώνεται η γενικότητα, θα θεωρηθεί ότι το dQ βρίσκεται στον άξονα z και η εφαρμογή των απαιτήσεων θα γίνει σε κάποιο σημείο Σ του επιπέδου $z = 0$, τέτοιο ώστε εκεί να είναι $y = 0$ και $x = a$. Με R την απόσταση του Σ από το dQ , η απόσταση του Σ από τον άξονα θα είναι $r_T = a = (R^2 - h^2)^{1/2}$, ενώ σχηματίζεται και η γωνία θ με $\cos \theta = h/R$ και $\sin \theta = a/R$, όπως στο **Σχήμα 6.2-6α**. Με την επιλογή του σημείου Σ με $y = 0$, οι απαιτήσεις από τις οριακές συνθήκες γίνονται:



Σχήμα 6.2-6α

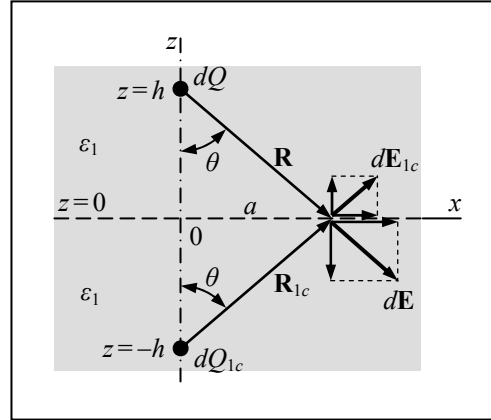
$$\begin{aligned} \epsilon_1 dE_z(a, 0, z = 0^+) &= \epsilon_2 dE_z(a, 0, z = 0^-), \\ dE_x(a, 0, z = 0^+) &= dE_x(a, 0, z = 0^-). \end{aligned} \quad (6.2-11)$$

που αντιστοιχούν στις σχέσεις (6.2-10), ενώ στο σημείο Σ είναι $E_{y+} = E_{y-} = 0$.

Για την επίλυση θα εφαρμοσθεί κατοπτρισμός δύο φορές, σε δύο βοηθητικά προβλήματα. Κάθε φορά, ο μισός χώρος θα μείνει ακριβώς όπως ήταν αρχικά, δηλαδή με το αρχικό ϵ_j και με τα αρχικά φορτία, αν υπάρχουν, ενώ στο άλλο μισό του χώρου θα τεθεί $\epsilon = \epsilon_j$, όσο του πρώτου μισού. Έτσι, ολόκληρος ο χώρος θα έχει $\epsilon = \epsilon_j$ και θα μπορεί να εφαρμοσθεί το ολοκλήρωμα επαλληλίας. Επίσης, θα τοποθετηθούν είδωλα, με τιμή και θέση τέτοιες ώστε τελικά να ικανοποιούνται οι σχέσεις (6.2-11). Μάλιστα, όπως θα φανεί στο τέλος, αρκούν είδωλα στις θέσεις $z = \pm h$, ανάλογα με το μισό χώρο που αφορά κάθε βοηθητικό πρόβλημα.

Πρώτο βοηθητικό πρόβλημα: Ολόκληρος ο χώρος λαμβάνεται με τις ιδιότητες της περιοχής $z > 0$, δηλαδή με ϵ_1 , και στη θέση $z = h$, $r_T = 0$ παραμένει το φορτίο dQ . Με άλλα λόγια, στην $z > 0$ δεν τροποποιείται τίποτα. Στην περιοχή $z < 0$, εκτός από την τροποποίηση

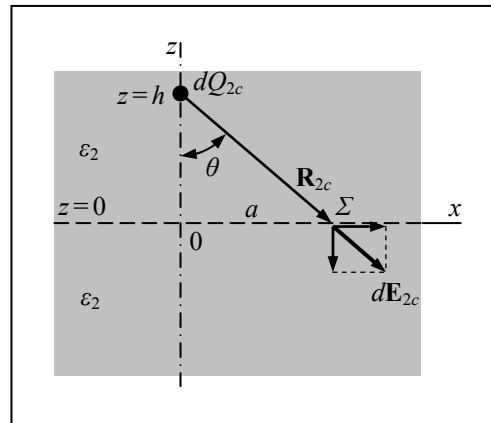
του αρχικού ε_2 σε ε_1 , τοποθετείται κατάλληλο είδωλο dQ_{1c} στη συμμετρική προς το dQ θέση $z = -h$, $r_T = 0$. Τότε, στο σημείο Σ τα δύο αίτια θα παράγουν πεδία $d\mathbf{E} = \mathbf{i}_R(dQ/4\pi\varepsilon_1R^2)$ και $d\mathbf{E}_{1c} = \mathbf{i}_{R_{1c}}(dQ_{1c}/4\pi\varepsilon_1R_{1c}^2)$. Επειδή τα dQ και dQ_{1c} είναι σε συμμετρικές θέσεις, το σημείο Σ θα ισαπέχει από αυτά, $R = R_{1c}$, ενώ τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα, όπως και τα διανύσματα \mathbf{R} και \mathbf{R}_{1c} , θα είναι σε κατοπτρική σχέση. Το αποτέλεσμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι το συνολικό πεδίο στο επίπεδο $z = 0$ έχει τις συνιστώσες:



Σχήμα 6.2-6β

$$dE_{1z} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{-dQ + dQ_{1c}}{\varepsilon_1} \cos\theta \quad \text{και} \quad dE_{1x} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dQ + dQ_{1c}}{\varepsilon_1} \sin\theta. \quad (6.2-12)$$

Δεύτερο βοηθητικό πρόβλημα: Τώρα, αμετάβλητη παραμένει η περιοχή $z < 0$ (με ε_2 και χωρίς φορτία, όπως στην αρχική διάταξη), ενώ η τιμή ε_2 εφαρμόζεται και στην περιοχή $z > 0$ (συνεπώς, σε ολόκληρο το χώρο). Το είδωλο dQ_{2c} τοποθετείται στη θέση $z = h$, $r_T = 0$, εκεί που αρχικά βρισκόταν το φορτίο dQ . Από αυτό το μοναδικό φορτίο παράγεται πεδίο ίσο με $d\mathbf{E}_{2c} = \mathbf{i}_{R_{2c}}(dQ_{2c}/4\pi\varepsilon_2R_{2c}^2)$, και επειδή $\mathbf{R}_{2c} = \mathbf{R}$ (και το ίδιο και για τα μοναδιαία διανύσματα), οι συνιστώσες του $d\mathbf{E}_{2c}$ στο επίπεδο $z = 0$ είναι:



Σχήμα 6.2-6γ

$$dE_{2z} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{-dQ_{2c}}{\varepsilon_2} \cos\theta \quad \text{και} \quad dE_{2x} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dQ_{2c}}{\varepsilon_2} \sin\theta. \quad (6.2-13)$$

Σύνθεση βοηθητικών προβλημάτων: Η προοπτική είναι το πεδίο στην περιοχή $z > 0$ να είναι όσο παράγουν το φορτίο dQ και το είδωλο dQ_{1c} σε χώρο με ε_1 παντού, δηλαδή, τα πεδία στη σχέση (6.2-12) αφορούν θέσεις $z = 0^+$, και το πεδίο στο $z < 0$ να είναι όσο παράγεται από το είδωλο dQ_{2c} σε χώρο με ε_2 , οπότε οι σχέσεις (6.2-13) αναφέρονται σε θέσεις $z = 0^-$. Για να συμβαίνει αυτό και να μην υπάρχει ασυνέχεια στο επίπεδο $z = 0$, πρέπει:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 dE_{1z} = \varepsilon_2 dE_{2z} &\Rightarrow dQ_{1c} - dQ = dQ_{2c}, \\ dE_{1x} = dE_{2x} &\Rightarrow \frac{dQ_{1c} + dQ}{\varepsilon_1} = \frac{dQ_{2c}}{\varepsilon_2}. \end{aligned} \quad (6.2-14)$$

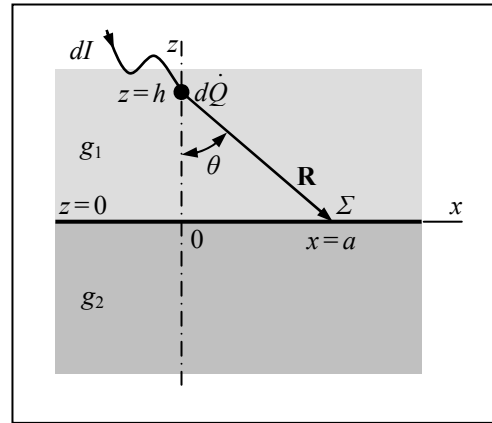
Το σύστημα ως προς dQ_{1c} , dQ_{2c} έχει τη λύση:

$$dQ_{1c} = dQ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad dQ_{2c} = dQ \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (6.2-15)$$

Αμέσως φαίνεται ότι αν είναι $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$, τότε $dQ_{1c} = -dQ$, ενώ αν $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$, τότε $dQ_{1c} = dQ$, με πρόσημο του ειδώλου, όπως στις περιπτώσεις (ii) και (iii) της παραγράφου 6.2.1. Επίσης, αν είναι $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, τότε $dQ_{1c} = 0$ και $dQ_{2c} = dQ$ και τα δύο βοηθητικά προβλήματα ταυτίζονται.

Η διαδικασία, για την επίλυση προβλημάτων Ηλεκτροστατικής σε δύο στρώματα με διαφορετικό υλικό, βασίζεται στα προηγούμενα. Η συστηματική παρουσίασή της θα γίνει αργότερα, από κοινού με παρόμοιας μορφής διατάξεις ροής ρεύματος και Μαγνητοστατικής.

Οι διατάξεις μόνιμης ροής ρεύματος περιγράφονται από εξισώσεις μαθηματικά ταυτόσημες με της ηλεκτροστατικής, με τις αντιστοιχίες $dQ \rightarrow d\dot{Q}$, $\varepsilon \rightarrow g$ και $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{J}$. Η βασική διάταξη (Σχήμα 6.2-7) αναφέρεται σε σημειακή πηγή φορτίου $d\dot{Q}$ σε χώρο με g_1 , όταν σε απόσταση h υπάρχει η διαχωριστική επιφάνεια $z = 0$, πέρα από την οποία ο χώρος έχει $g_2 (\neq g_1)$. Οι οριακές συνθήκες τώρα είναι $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = 0$, με $\partial\sigma/\partial t = 0$ σε μόνιμη κατάσταση και με $\mathbf{K} = 0$, γιατί δεν υπάρχει ιδιαίτερα αγωγίμο επιφανειακό στρώμα, και $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$ και εξειδικεύονται σε $g_1 E_z(0^+) = g_2 E_z(0^-)$ και $E_{x,y}(0^+) = E_{x,y}(0^-)$.



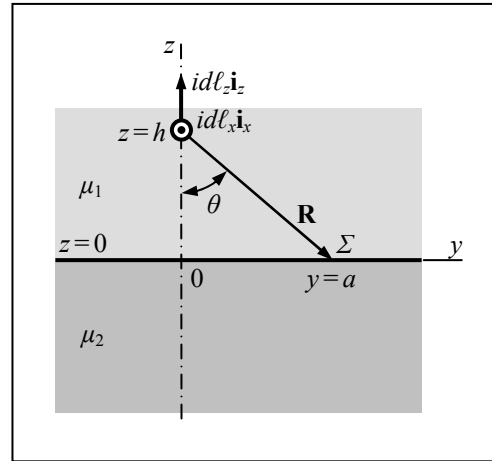
Σχήμα 6.2-7

Το αρχικό πρόβλημα πάλι οδηγεί σε δύο βοηθητικά προβλήματα. Στο πρώτο παντού είναι g_1 , η πηγή $d\dot{Q}$ υπάρχει στην αρχική θέση της, και στη συμμετρική θέση τοποθετείται το είδωλο $d\dot{Q}_{1c}$, με αποτέλεσμα στο $z = 0$ οι συνιστώσες του πεδίου $d\mathbf{E}_1$ να είναι όπως και πριν, αλλά με $dQ \rightarrow d\dot{Q}$ και $\varepsilon \rightarrow g$. Στο δεύτερο βοηθητικό πρόβλημα ολόκληρος ο χώρος έχει g_2 και τοποθετείται είδωλο $d\dot{Q}_{2c}$ στη θέση της αρχικής πηγής, οπότε στην επιφάνεια $z = 0$ προκύπτουν οι αντίστοιχες εκφράσεις για τις συνιστώσες dE_{2z} και dE_{2x} . Εξισώνοντας, όπως επιτάσσουν οι οριακές συνθήκες, προκύπτουν οι τιμές των ειδώλων:

$$d\dot{Q}_{1c} = d\dot{Q} \frac{g_1 - g_2}{g_1 + g_2}, \quad d\dot{Q}_{2c} = d\dot{Q} \frac{2g_2}{g_1 + g_2}. \quad (6.2-16)$$

Πάλι, στις οριακές τιμές $g_2 \gg g_1$ και $g_2 \ll g_1$ αναπαράγονται τα αποτελέσματα $d\dot{Q}_{1c} = -d\dot{Q}$ και $d\dot{Q}_{1c} = d\dot{Q}$ της παραγράφου 6.2.1, περιπτώσεις (iv) και (v), αντίστοιχα.

Οι διατάξεις Μαγνητοστατικής αντιμετωπίζονται με παρόμοια διαδικασία. Όμως τώρα το στοιχειώδες αίτιο $id\mathbf{r}$ (το οποίο βέβαια δεν είναι αυθυπόστατο, αλλά είναι στοιχείο ενός ευρύτερου κυκλώματος, που ενδεχομένως περιλαμβάνει και πυκνότητες \mathbf{J} ή/και \mathbf{K}) είναι διάνυσμα, που στο νόμο *Biot-Savart* εκδηλώνεται μέσω του εξωτερικού γινομένου $d\mathbf{r} \times \mathbf{i}_R$. Στη βασική διάταξη, η περιοχή $z > 0$ έχει μαγνητική διαπερατότητα μ_1 , ενώ είναι $\mu(z < 0) = \mu_2$, και στη θέση $z = h$ (και $r_T = 0$) υπάρχει το στοιχείο $id\mathbf{r}$. Το στοιχειώδες μήκος $d\mathbf{r}$ έχει εν γένει δύο συνιστώσες παράλληλες και μία κάθετη προς τη διαχωριστική επιφάνεια. Όμως, επιλέγοντας κατάλληλα τους άξονες, το στοιχειώδες μήκος μπορεί να ληφθεί $d\mathbf{r} = \mathbf{i}_x dl_x + \mathbf{i}_z dz$, όπως παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.2-8α**. Τέλος, στη διαχωριστική επιφάνεια $z = 0$, το μαγνητικό πεδίο θα υπολογισθεί σε κάποιο σημείο Σ , ώστε να εξισωθεί η δράση του $id\mathbf{r}$ και των ειδώλων του, όπως προσδιορίζουν οι οριακές συνθήκες. Το σημείο Σ ας ληφθεί με $y = a$ και με οποιαδήποτε τιμή για το x , χωρίς τελικά η επιλογή για το x να επηρεάζει το αποτέλεσμα.

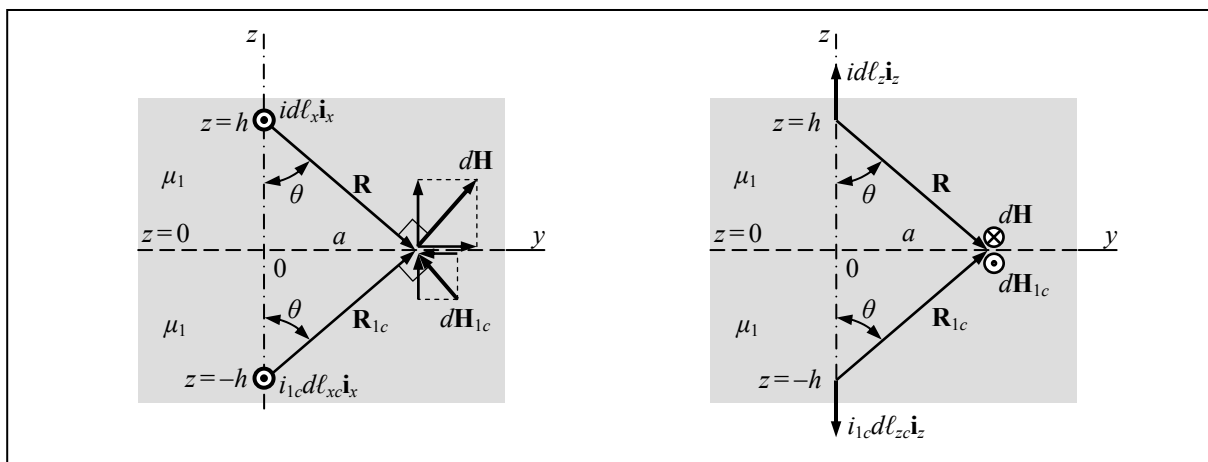


Σχήμα 6.2-8α

Στη διαχωριστική επιφάνεια μπορεί να υποθεθεί $\mathbf{K} = 0$. (Αν υπάρχει \mathbf{K} , μπορεί να ενταχθεί στο χώρο $z > 0$ και κάθε στοιχείο $\mathbf{K}dS$ συμπεριφέρεται όπως το $id\mathbf{r}$, απλά είναι σε θέση $z = h = 0^+$). Συνεπώς, οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $z = 0$ είναι η $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0$ και η $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = 0$, που δίνουν:

$$\begin{aligned} \mu_1 dH_z(x, a, z = 0^+) &= \mu_2 dH_z(x, a, z = 0^-), \\ dH_x(x, a, z = 0^+) &= dH_x(x, a, z = 0^-), \\ dH_y(x, a, z = 0^+) &= dH_y(x, a, z = 0^-). \end{aligned} \quad (6.2-17)$$

Για την επίλυση θα επιχειρηθεί πάλι κατοπτρισμός δύο φορές, με διαδικασία ακριβώς όπως και στην περίπτωση του ηλεκτρικού πεδίου, μόνο που τώρα είναι κάπως διαφορετικές οι εκφράσεις για το μαγνητικό πεδίο, επειδή το αίτιο $id\mathbf{r}$ είναι διανυσματικό. Κάθε φορά διατηρείται ο μισός χώρος αμετάβλητος (με τη μαγνητική διαπερατότητα μ και τα ρεύματα της αρχικής διάταξης) και στον άλλο μισό τροποποιείται η τιμή του μ , ώστε ο συνολικός χώρος να είναι ομογενής, και τοποθετούνται είδωλα στις θέσεις $z = \mp h$, ανάλογα με την περίπτωση.



Σχήμα 6.2-8β

Πρώτο βοηθητικό πρόβλημα: Σε ολόκληρο το χώρο τίθεται μ_1 (όπως αρχικά στο $z = 0$) και το στοιχείο $id\mathbf{r}$ παραμένει στην αρχική θέση $z = h$, με $d\mathbf{r} = d\ell_x \mathbf{i}_x + d\ell_z \mathbf{i}_z$. Στη συμμετρική θέση $z = -h$ τοποθετείται το είδωλο $i_{1c} d\mathbf{r}_c$, με $d\mathbf{r}_c = d\ell_{xc} \mathbf{i}_x + d\ell_{zc} \mathbf{i}_z$, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.2-8β**. Η κατοπτρική συμμετρία σημαίνει $d\ell_{xc} = d\ell_x$, αλλά $d\ell_{zc} = -d\ell_z$. Από το νόμο *Biot-Savart* η στοιχειώδης συνεισφορά προκύπτει ίση με $d\mathbf{H} = id\mathbf{r} \times \mathbf{i}_R / 4\pi R^2$, συνεπώς η συνολική συνεισφορά των $id\mathbf{r}$ και $i_{1c} d\mathbf{r}_c$ στο σημείο Σ του επιπέδου $z = 0$ έχει τις συνιστώσες:

$$dH_{1z} = \frac{\sin\theta}{4\pi R^2} (i + i_{1c}) d\ell_x, \quad (6.2-18)$$

$$dH_{1y} = \frac{\cos\theta}{4\pi R^2} (i - i_{1c}) d\ell_x \quad \text{και} \quad dH_{1x} = \frac{\sin\theta}{4\pi R^2} (-i + i_{1c}) d\ell_z.$$

Δεύτερο βοηθητικό πρόβλημα: Τώρα, ολόκληρος ο χώρος λαμβάνεται με μ_2 (όπως ήταν αρχικά στην περιοχή $z < 0$) και ως το μόνο στοιχείο ρεύματος τίθεται ένα είδωλο $i_{2c} d\mathbf{r}_{2c}$ στο $z = h$, τη θέση του αρχικού $id\mathbf{r}$, ενώ η περιοχή $z < 0$ παραμένει όπως ήταν αρχικά (με μ_2 και χωρίς ρεύματα). Το είδωλο $i_{2c} d\mathbf{r}_{2c}$, με $d\mathbf{r}_{2c} = d\mathbf{r}$, συνεισφέρει στο σχηματισμό του μαγνητικού πεδίου, με συνιστώσες στο επίπεδο $z = 0$:

$$dH_{2z} = \frac{\sin\theta}{4\pi R^2} i_{2c} d\ell_x, \quad (6.2-19)$$

$$dH_{2y} = \frac{\cos\theta}{4\pi R^2} i_{2c} d\ell_x \quad \text{και} \quad dH_{2x} = \frac{\sin\theta}{4\pi R^2} (-i_{2c}) d\ell_z.$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν απευθείας από τις προηγούμενες, με τις αντικαταστάσεις $i \rightarrow i_{2c}$ και $i_{1c} \rightarrow 0$.

Σύνθεση βοηθητικών προβλημάτων: Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ο στόχος είναι το πρώτο πρόβλημα να δίνει τη λύση του αρχικού προβλήματος στην περιοχή $z > 0$, όπου υπάρχει το στοιχείο idr και έχει μαγνητική διαπερατότητα μ_1 , και το δεύτερο πρόβλημα αντίστοιχα για την περιοχή $z < 0$ (χωρίς ρεύμα και με μ_2). Για τις τιμές των δύο ειδώλων οι οριακές συνθήκες στο $z = 0$ επιβάλλουν τρεις απαιτήσεις (μία για κάθε συνιστώσα του \mathbf{H}):

$$\begin{aligned} \mu_1 dH_{1z} = \mu_2 dH_{2z} &\Rightarrow \mu_1 (i + i_{1c}) = \mu_2 i_{2c}, \\ dH_{1x} = dH_{2x} &\Rightarrow i - i_{1c} = i_{2c}, \\ dH_{1y} = dH_{2y} &\Rightarrow -i + i_{1c} = -i_{2c}, \end{aligned} \quad (6.2-20)$$

αλλά βέβαια οι δύο τελευταίες εξισώσεις ταυτίζονται.

Από την επίλυση του συστήματος, οι τιμές των ειδώλων είναι:

$$i_{1c} = i \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{και} \quad i_{2c} = i \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (6.2-21a)$$

Από την σύγκριση με τις αντίστοιχες εκφράσεις για τα dQ_{1c} , dQ_{2c} , φαίνεται ότι η αντιστοιχία είναι $\varepsilon_1 \rightarrow \mu_2$ και $\varepsilon_2 \rightarrow \mu_1$. Αυτή είναι επιπόλαιη παρατήρηση. Η πραγματική αντιστοιχία διαπιστώνεται, αν οι σχέσεις αυτές διαιρεθούν με το γινόμενο $\mu_1\mu_2$, οπότε προκύπτει

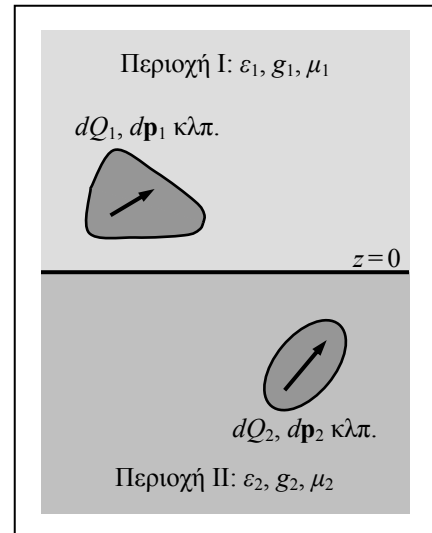
$$i_{1c} = i \frac{\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1}}{\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}} \quad \text{και} \quad i_{2c} = i \frac{2\mu_2^{-1}}{\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}}, \quad (6.2-21a)$$

που προβάλλει την αντιστοιχία $\varepsilon \rightarrow \mu^{-1}$, όπως στη σχέση $\nabla^2 \Phi = -\rho/\varepsilon$ αντιστοιχεί η $\nabla^2 A_x = -\mu J_x$, ή στα ολοκληρώματα επαλληλίας οι συντελεστές είναι $1/4\pi\varepsilon$ και $\mu/4\pi$.

Τέλος, αμέσως διαπιστώνεται ότι οι οριακές τιμές $\mu_2 \gg \mu_1$ ($\Rightarrow i_{1c} = i$) και $\mu_2 \ll \mu_1$ ($\Rightarrow i_{1c} = -i$) αναπαράγουν τα αποτελέσματα των περιπτώσεων (vii) και (viii) της παραγράφου 6.2.1. Επίσης, όταν είναι $\mu_2 = \mu_1$ τα δύο βοηθητικά προβλήματα ταυτίζονται: έχουν και τα δύο ίσα αίτια στις ίδιες θέσεις και σε χώρο με παντού μ ($= \mu_1 = \mu_2$).

Διαδικασία επίλυσης: Όλα τα προηγούμενα επεκτείνονται, αμέσως, σε διατάξεις με κατανομημένα αίτια, όπως με $dQ \rightarrow \{\rho dV, \sigma dS \text{ ή } \lambda d\ell\}$ (και αντίστοιχα για το $d\dot{Q}$), ή σε κατανομές ηλεκτρικών διπόλων (όπου οι πόλοι συμπεριφέρονται σαν φορτία), ή όταν το αίτιο (για τα $\Phi_{\text{επ}}$ και Φ_m) είναι μια νοητή επιφάνεια ασυνέχειας και εκδηλώνεται σαν διπολικό στρώμα, ή τέλος με $idr \rightarrow \{\mathbf{J}dV \text{ ή } \mathbf{K}dS\}$. Επίσης, εύκολα γενικεύονται όταν και οι δύο περιοχές περιέχουν μη μηδενικά φορτία, ρεύματα κλπ., με επαλληλία, μηδενίζοντας σε κάθε επιμέρους πρόβλημα τα αίτια μίας περιοχής. Η συνολική διαδικασία είναι η ακόλουθη:

(α) Πρόβλημα προς επίλυση: Όπως παρουσιάζεται σχηματικά στο **Σχήμα 6.2-9α**, στην περιοχή I, με ιδιότητες $\{\varepsilon_1, g_1, \mu_1\}$, υπάρχουν κάποια αίτια, βαθμωτά ($dQ_1, d\dot{Q}_1$ κλπ.), ή διανυσματικά ($i_1 d\mathbf{r}_1, d\mathbf{p}_1$ κλπ.). Όμοια, στην περιοχή II οι ιδιότητες είναι $\{\varepsilon_2, g_2, \mu_2\}$ και υπάρχουν και κάποια αίτια, βαθμωτά ($dQ_2, d\dot{Q}_2$ κλπ.), ή διανυσματικά ($i_2 d\mathbf{r}_2, d\mathbf{p}_2$ κλπ.).



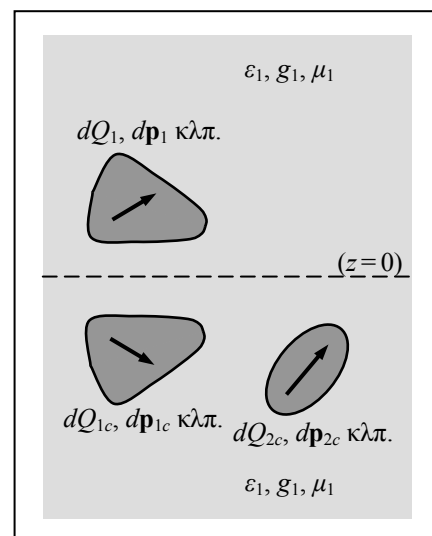
Σχήμα 6.2-9α

(β) Το βοηθητικό πρόβλημα, για να προσδιορισθούν τα πεδία, τα δυναμικά κλπ. στην περιοχή I, παρουσιάζεται σχηματικά στο **Σχήμα 6.2-9β**. Για τον σχηματισμό του γίνονται οι εξής ενέργειες:

- ο Όλος ο χώρος λαμβάνεται με τις ιδιότητες που είχε αρχικά η περιοχή I, δηλαδή με ε_1, g_1 ή μ_1 .
- ο Τα αίτια που υπήρχαν αρχικά στην περιοχή I διατηρούνται τελείως αμετάβλητα.
- ο Τα αίτια που υπήρχαν αρχικά στην περιοχή II αντικαθίστανται από είδωλα $dQ_{2c}, i_{2c} d\mathbf{r}_{2c}$ κλπ., στην ίδια θέση και, όσο αφορά τις διανυσματικές ποσότητες, με τον ίδιο προσανατολισμό, όπως αρχικά, αλλά με διαφορετική τιμή, ίση με:

$$dQ_{2c} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} dQ_2, \quad d\dot{Q}_{2c} = \frac{2g_1}{g_1 + g_2} d\dot{Q}_2, \quad i_{2c} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} i_2. \quad (6.2-22)$$

Η σχέση (6.2-15β) αναφέρεται σε φορτία που βρίσκονται στην περιοχή I και μέσω των ειδώλων τους παράγουν πεδία στην περιοχή II, ενώ εδώ είναι το dQ_2 , το οποίο μέσω του ειδώλου του, του dQ_{2c} παράγει πεδία στην περιοχή I. Σε αυτό οφείλεται η εναλλαγή $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$ μεταξύ της (6.2-15β) και της (6.2-22α), και οι αντίστοιχες εναλλαγές στις υπόλοιπες εκφράσεις.



Σχήμα 6.2-9β

- ο Σε θέση συμμετρική προς τα $dQ_1, d\dot{Q}_1$ κλπ. και με κατοπτρικό προσανατολισμό για τα διανυσματικά αίτια $i_1 d\mathbf{r}_1, d\mathbf{p}_1$ κλπ. τοποθετούνται είδωλα με τιμή:

$$dQ_{1c} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} dQ_1, \quad d\dot{Q}_{1c} = \frac{g_1 - g_2}{g_1 + g_2} d\dot{Q}_1, \quad i_{1c} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} i_1. \quad (6.2-23)$$

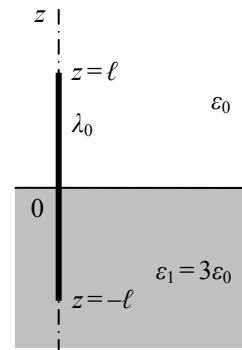
Ακριβώς αντίστοιχα, με απλή εναλλαγή των δεικτών $1 \leftrightarrow 2$, διατυπώνεται το βοηθητικό πρόβλημα για την περιοχή II.

- (γ) Η επίλυση του βοηθητικού προβλήματος, εκείνου με παντού ε_1, g_1 , ή μ_1 , μπορεί να γίνει με οποιονδήποτε πρόσφορο τρόπο. Αν συνολικά η διάταξη του βοηθητικού προβλήματος χαρακτηρίζεται από επαρκείς συμμετρίες, τότε μπορούν να εφαρμοσθούν οι εξισώσεις *Maxwell* και να προσδιορισθούν απευθείας τα πεδία που περιγράφουν τη συμπεριφορά της διάταξης. Σε κάθε περίπτωση πάντως, η επίλυση είναι εφικτή με το κατάλληλο ολοκλήρωμα επαλληλίας, όπως $\Phi_I = (1/4\pi\varepsilon_1) \int dQ'/R$, όπου στο dQ περιλαμβάνονται όλα τα αίτια, είτε πραγματικά (τα dQ_1), είτε είδωλα (τα dQ_{2c} και dQ_{1c}), που είναι όλα πλήρως καθορισμένα και σε χώρο με την ίδια τιμή ε_1 παντού, ή με το νόμο *Biot-Savart*, $\mathbf{H}_I = (1/4\pi) \int dV' (\mathbf{J}' \times \mathbf{R})/R^3$, όπου στο $\mathbf{J}' dV'$ περιλαμβάνονται τόσο τα αρχικά ρεύματα της περιοχής I, όσο και οι δύο κατηγορίες ειδώλων, κλπ. Οι εκφράσεις που προκύπτουν, $\Phi_I, \mathbf{E}_I = -\varepsilon_1 \nabla \Phi_I, \mathbf{J}_I = -g_1 \nabla \Phi_I, \mathbf{H}_I, \mathbf{B}_I = \mu_1 \mathbf{H}_I$ κλπ. περιγράφουν τα δυναμικά και πεδία σ' όλο το χώρο του βοηθητικού προβλήματος I.
- (δ) Τα δυναμικά και τα πεδία του αρχικού προβλήματος περιγράφονται από τις αντίστοιχες εκφράσεις για το βοηθητικό πρόβλημα, αλλά μόνο στην περιοχή I του αρχικού προβλήματος, όπου το βοηθητικό πρόβλημα ταυτίζεται με το αρχικό, και όχι στην περιοχή II. Στην περιοχή II του αρχικού προβλήματος, το δυναμικό κλπ. δίδεται από τη λύση του δεύτερου βοηθητικού προβλήματος, εκείνου όπου παντού είναι ε_2 κλπ.

Τα *παραδ. 6.2-7* έως *6.2-12* παρουσιάζουν διάφορες διατάξεις, για το χειρισμό των οποίων εφαρμόζεται η παραπάνω διαδικασία.

Αναγωγή στις συντεταγμένες του χώρου V είναι δυνατόν να γίνει, με διαδικασία παρόμοια με της προηγούμενης παραγράφου, βλ. σχέση (6.2-8). Τώρα, για την περιοχή I, η συμμετρία μεταξύ του αιτίου και του ειδώλου του σημαίνει πάλι, ότι σε αίτιο με συντεταγμένες $\{x', y', z'\}$ αντιστοιχεί είδωλο με $\{x'_c = x', y'_c = y', z'_c = -z'\}$, οπότε η συνεισφορά των dQ και dQ_{1c} μπορεί να εκφρασθεί με ολοκλήρωση μόνο ως προς τις συντεταγμένες $\{x', y', z'\}$, όπως στη σχέση (6.2-8), με τον δεύτερο όρο να πολλαπλασιάζεται όχι πια με (∓ 1) , αλλά με $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Επιπλέον, πρέπει να προστεθεί η συνεισφορά των dQ_{2c} . Ο διαθέσιμος χώρος δεν επιτρέπει να παρουσιασθεί η σχέση που προκύπτει, σε συνδυασμό με το μεγάλο μέγεθος και κυρίως την περιορισμένη σπουδαιότητά της.

Παράδειγμα 6.2-7: Στο ευθύγραμμο τμήμα $-\ell < z < +\ell$ του άξονα $r_T = 0$ υπάρχει νηματοειδές φορτίο με σταθερή γραμμική πυκνότητα $\lambda = \lambda_0$. Ο χώρος έχει επιτρεπτότητα ϵ_0 στην περιοχή $z > 0$ και $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$ στην περιοχή $z < 0$. Ζητείται το δυναμικό Φ παντού (και στις δύο περιοχές).



Επίλυση: Οι τιμές της επιτρεπτότητας, $\epsilon_1 = \epsilon_0$ και $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$ δεν επιτρέπουν παραδοχή του τύπου $\epsilon_1 \ll \epsilon_2$, οπότε η επίλυση θα γίνει μέσω δύο βοηθητικών προβλημάτων, από τα οποία το καθένα θα αναφέρεται σε κάθε περιοχή με διαφορετικό ϵ .

Βοηθητικό πρόβλημα I: Αναφέρεται στην περιοχή I ($z > 0$), οπότε τίθεται παντού $\epsilon = \epsilon_0$, όσο η αρχική τιμή για την περιοχή αυτή, με τα εξής φορτία:

- $\lambda = \lambda_0$, στο τμήμα $0 < z < \ell$ του άξονα (το αρχικό φορτίο της περιοχής I),
- $\lambda_{2c} = [2\epsilon_0/(\epsilon_0 + 3\epsilon_0)]\lambda_0 = \frac{1}{2}\lambda_0$, στο τμήμα $-\ell < z < 0$ του άξονα (το είδωλο λόγω των αρχικών φορτίων της περιοχής II),
- $\lambda_{1c} = [(\epsilon_0 - 3\epsilon_0)/(\epsilon_0 + 3\epsilon_0)]\lambda_0 = -\frac{1}{2}\lambda_0$, πάλι στο τμήμα $-\ell < z < 0$ του άξονα (το είδωλο λόγω των αρχικών φορτίων, τώρα της περιοχής I).

Επειδή $\lambda_{1c} + \lambda_{2c} = 0$, τελικά δρα μόνο το φορτίο λ_0 στο $0 < z < \ell$ και το δυναμικό είναι:

$$\Phi_I = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\ell \frac{dz'}{\sqrt{r_T^2 + (z+z')^2}} = \text{το δυναμικό σε ολόκληρο το χώρο, για το πρόβλημα I.}$$

Βοηθητικό πρόβλημα II: Αναφέρεται στην περιοχή II ($z < 0$), οπότε τώρα τίθεται παντού $\epsilon = 3\epsilon_0$, με τα εξής φορτία:

- $\lambda = \lambda_0$, στο τμήμα $-\ell < z < 0$ του άξονα (το αρχικό φορτίο της περιοχής II),
- $\lambda_{2c} = [2 \cdot 3\epsilon_0/(\epsilon_0 + 3\epsilon_0)]\lambda_0 = \frac{3}{2}\lambda_0$, στο τμήμα $0 < z < \ell$ του άξονα (το είδωλο λόγω των αρχικών φορτίων της περιοχής I),
- $\lambda_{1c} = [(3\epsilon_0 - \epsilon_0)/(\epsilon_0 + 3\epsilon_0)]\lambda_0 = \frac{1}{2}\lambda_0$, πάλι στο τμήμα $0 < z < \ell$ του άξονα (το είδωλο λόγω των αρχικών φορτίων της περιοχής II).

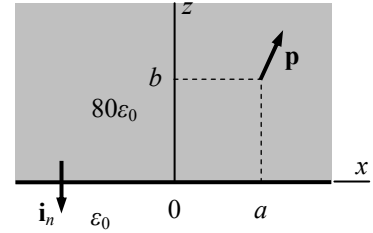
Τώρα, το φορτίο στο τμήμα $0 < z < \ell$ είναι ίσο με $\lambda_{1c} + \lambda_{2c} = 2\lambda_0$, οπότε το δυναμικό σε ολόκληρο το χώρο, αλλά για το βοηθητικό πρόβλημα II, είναι:

$$\Phi_{II} = \frac{\lambda_0}{4\pi \cdot 3\epsilon_0} \left[\int_{-\ell}^0 \frac{dz'}{\sqrt{r_T^2 + (z-z')^2}} + 2 \int_0^\ell \frac{dz'}{\sqrt{r_T^2 + (z-z')^2}} \right].$$

Οι παραπάνω εκφράσεις δίνουν το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ σε κάθε περιοχή της αρχικής διάταξης:

$$\Phi(r_T, \varphi, z > 0) = \Phi_I(r_T, \varphi, z > 0), \quad \Phi(r_T, \varphi, z < 0) = \Phi_{II}(r_T, \varphi, z < 0).$$

Παράδειγμα 6.2-8: Όπως στο *παράδ. 6.2-3*, στην περιοχή $z > 0$, όπου η επιτρεπτότητα είναι ίση με $\epsilon = 80\epsilon_0$, βρίσκεται ένα σημειακό δίπολο $\mathbf{p} = p_0(\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_z)$, στη θέση $x = a, y = 0, z = b$. Η περιοχή $z < 0$ έχει επιτρεπτότητα ίση με ϵ_0 . Ζητείται τώρα το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ στην περιοχή $z < 0$.



Επίλυση: Χρειάζεται μόνο το βοηθητικό πρόβλημα που συνδέεται με την περιοχή $z < 0$. Σε αυτό είναι παντού ϵ_0 , όπως στο $z < 0$ του αρχικού προβλήματος. Στην περιοχή $z < 0$ η αρχική διάταξη δεν περιέχει κανένα αίτιο (φορτίο, δίπολο κλπ.), οπότε και στο βοηθητικό πρόβλημα θα παραμείνει κενή και δεν θα παραγάγει κανένα είδωλο. Με άλλα λόγια, για το βοηθητικό πρόβλημα είναι $\mathbf{p} = 0$ και $\mathbf{p}_{1c} = 0$. Το αρχικό δίπολο, στη θέση $(a, 0, b)$, βρίσκεται στη συμπληρωματική περιοχή $z > 0$, οπότε στην ίδια θέση το αρχικό δίπολο αντικαθίσταται από ένα είδωλο $\mathbf{p}_{2c} = p_{2c}(\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_z)$, με ίδια διεύθυνση όπως το αρχικό, αλλά με τιμή $p_{2c} = [2\epsilon_0/(\epsilon_0 + 80\epsilon_0)]p_0 = \frac{2}{81}p_0$.

Η σχετική απόσταση είναι $\mathbf{R} = (x - a)\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + (z - b)\mathbf{i}_z$, οπότε για το βοηθητικό πρόβλημα το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ είναι παντού ίσο με:

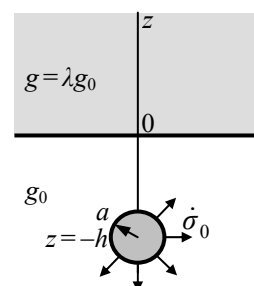
$$\Phi_{\text{βοηθ. πρ.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_0}{81} \frac{(x - a) + 2(z - b)}{\left[(x - a)^2 + y^2 + (z - b)^2 \right]^{3/2}}$$

Η έκφραση αυτή δίνει το δυναμικό και στην περιοχή $z < 0$ της αρχικής διάταξης, εκεί που το βοηθητικό πρόβλημα ταυτίζεται με την αρχική διάταξη. Είναι συνεπώς:

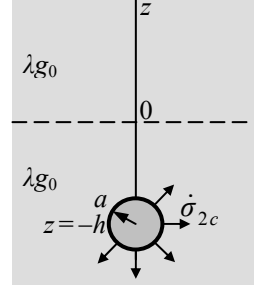
$$\Phi(x, y, z < 0) = \frac{p_0}{162\pi\epsilon_0} \frac{(x - a) + 2(z - b)}{\left[(x - a)^2 + y^2 + (z - b)^2 \right]^{3/2}}$$

Σχόλιο: Σε σχέση με την έκφραση αυτή για το δυναμικό, το αποτέλεσμα που παρουσιάζεται στο *σχόλιο* του *παράδ. 6.2-3* διαφέρει κατά ένα συντελεστή $80/81 = \epsilon/(\epsilon + \epsilon_0)$, για τους λόγους που παρουσιάστηκαν στο προαναφερθέν σχόλιο.

Παράδειγμα 6.2-9: Από τη σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα a και κέντρο σε θέση $z = -h$ (με $h > a$) εκλύεται ηλεκτρικό φορτίο, με ρυθμό $\dot{\sigma}_0$, υποτιθέμενο σταθερό και ομοιόμορφο σε όλη την έκταση της σφαιρικής επιφάνειας. Η περιοχή $z < 0$ έχει σταθερή ειδική αγωγιμότητα g_0 , ενώ η περιοχή $z > 0$ έχει ειδική αγωγιμότητα ίση με $g = \lambda g_0$, επίσης σταθερή. Ζητείται η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος \mathbf{J} σε κάθε περιοχή.



Επίλυση: Το βοηθητικό πρόβλημα για την περιοχή I ($z > 0$) έχει παντού ειδική αγωγιμότητα $g = \lambda g_0$, όπως στην ίδια περιοχή $z > 0$ της αρχικής διάταξης. Επειδή στην περιοχή αυτή η αρχική διάταξη δεν περιείχε κανένα αίτιο, το ίδιο θα συμβαίνει και στο παρόν βοηθητικό πρόβλημα, συνεπώς δεν θα υπάρχει και αντίστοιχο είδωλο, $\dot{\sigma}_{1c} = 0$). Το μοναδικό αίτιο είναι το $\dot{\sigma}_{2c} = [2\lambda(\lambda + 1)]\dot{\sigma}_0$, στη θέση του $\dot{\sigma}_0$.



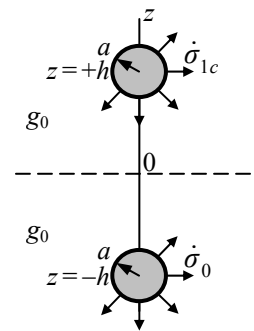
Για τη διατύπωση του ολοκληρώματος επαλληλίας, με $dQ'_{2c} = \dot{\sigma}_{2c} dS'$, εξυπηρετεί η χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων, $\mathbf{r} = r_T \mathbf{i}_T + z \mathbf{i}_z$, επειδή ο χώρος έχει κυλινδρική δομή ως προς τον άξονα z , αλλά σφαιρικών συντεταγμένων, με αρχή των αξόνων στο κέντρο της σφαίρας, για την πηγή, δηλαδή $dS' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$. Για το τυχόν σημείο στη σφαιρική επιφάνεια είναι $\mathbf{r}' = a \sin \theta' \mathbf{i}_T' + (-h + a \cos \theta') \mathbf{i}_z$ στο κυλινδρικό σύστημα (με αρχή στο 0), οπότε με $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ και με $\xi = \varphi' - \varphi$ είναι $R^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = r_T^2 + a^2 \sin^2 \theta' - 2a r_T \sin \theta' \cos(\varphi' - \varphi) + (z + h - a \cos \theta')^2 = r_T^2 + (z + h)^2 + a^2 - 2a(z + h) \cos \theta' - 2a r_T \sin \theta' \cos \xi$. Συνεπώς, για το βοηθητικό πρόβλημα:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\lambda g_0} \frac{2\lambda\dot{\sigma}_0}{1+\lambda} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\pi d\theta' \frac{a^2 \sin \theta'}{\sqrt{r_T^2 + (z+h)^2 + a^2 - 2a[(z+h)\cos\theta' + r_T \sin\theta' \cos\xi]}}$$

Η έκφραση αυτή δίνει το δυναμικό και στην αρχική διάταξη, αλλά μόνο στην περιοχή $z > 0$. Με $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ και $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$, η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος είναι:

$$\mathbf{J}(r_T, z > 0) = -\lambda g_0 \nabla \Phi_1 = -\frac{\lambda \dot{\sigma}_0 a^2}{2\pi(1+\lambda)} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \nabla \frac{1}{\sqrt{\dots}}$$

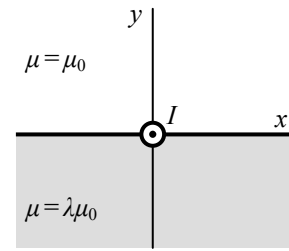
Βοηθητικό πρόβλημα για την περιοχή II ($z < 0$): Παντού τίθεται g_0 , όπως στο $z < 0$ της αρχικής διάταξης, και εκτός από το $\dot{\sigma}_0$, το οποίο παραμένει στη σφαιρική επιφάνεια όπου βρισκόταν αρχικά, εισάγεται και το είδωλο $\dot{\sigma}_{1c}$ στη συμμετρική θέση με κέντρο στο $z = +h$, με τιμή $\dot{\sigma}_{1c} = [(1-\lambda)/(1+\lambda)]\dot{\sigma}_0$. Το δυναμικό λόγω του $\dot{\sigma}_0$ περιγράφεται από το ίδιο ολοκλήρωμα, όπως το Φ_1 , ενώ για εκείνο λόγω του $\dot{\sigma}_{1c}$ αρκεί η αντικατάσταση $-h \rightarrow +h$. Γράφοντας $\dot{\sigma}_0 = [(1+\lambda)/(1+\lambda)]\dot{\sigma}_0$, προκύπτει το δυναμικό για το βοηθητικό πρόβλημα της περιοχής $z < 0$ και ακολούθως η πυκνότητα $\mathbf{J}(z < 0)$:



$$\Phi_{II} = \frac{\dot{\sigma}_0 a^2}{4\pi(1+\lambda)g_0} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \sum_{\pm} \frac{1 \pm \lambda}{\sqrt{r_T^2 + (z \pm h)^2 + a^2 - 2a[(z \pm h)\cos\theta' + r_T \sin\theta' \cos\xi]}}$$

$$\mathbf{J}(r_T, z < 0) = -g_0 \nabla \Phi_{II} = -\frac{\dot{\sigma}_0 a^2}{4\pi(1+\lambda)} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \sum_{\pm} (1 \pm \lambda) \nabla \frac{1}{\sqrt{\dots}}$$

Παράδειγμα 6.2-10: Στη διαχωριστική επιφάνεια $y = 0$ μεταξύ δύο περιοχών υπάρχει ευθύγραμμος αγωγός με ρεύμα I , ομόρροπο προς τον άξονα z . Ο αγωγός θεωρείται νηματοειδής και με άπειρο μήκος. Οι περιοχές $y > 0$ και $y < 0$ έχουν μαγνητική διαπερατότητα ίση με μ_0 και $\lambda\mu_0$ αντίστοιχα. Ζητείται η ένταση μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} και η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} παντού στο χώρο.



Επίλυση: Προφανώς, θα εφαρμοσθεί κατοπτρισμός. Προς στιγμήν είναι εύλογο να γεννηθεί η απορία, αν το ρεύμα I , το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο $y = 0$, πρέπει να προσμετρηθεί στην περιοχή $y > 0$, ότι δηλαδή βρίσκεται στο $y = 0^+$, ή αντίστοιχα στην περιοχή $y < 0$, ή ίσως και να επιμερισθεί μεταξύ των δύο περιοχών, δηλαδή, ότι ρεύμα κI βρίσκεται στο $y = 0^+$ και ρεύμα $(1 - \kappa)I$ βρίσκεται στο $y = 0^-$, με κάποιο κατάλληλο συντελεστή κ . Η απάντηση είναι ότι όλες οι επιλογές είναι ισοδύναμες. Αντιπροσωπεύουν την ίδια φυσική διάταξη, με ρεύμα I στο επίπεδο $y = 0$, το οποίο παράγει τα ίδια πεδία \mathbf{H} και \mathbf{B} . Όμως, για να εφαρμοσθεί ο κατοπτρισμός πρέπει να είναι σαφές σε ποιο χώρο ανήκει το αίτιο (το ρεύμα I). Η επίλυση που ακολουθεί υποθέτει το ρεύμα στο $y = 0^+$ (δηλαδή, ότι βρίσκεται στο χώρο $y > 0$) χωρίς βλάβη της γενικότητας, όπως μόλις σχολιάστηκε. (Βλέπε και **σχόλιο** στο επόμενο **παράδ. 6.2-11**.)

Βοηθητικό πρόβλημα για το χώρο I ($y > 0$): Παντού τίθεται $\mu = \mu_0$ (όπως αρχικά στο $y > 0$). Εκτός από το I , το οποίο παραμένει αμετάβλητο στην αρχική θέση $y = 0^+$, εισάγεται είδωλο στη θέση $y = 0^-$, ίσο με $I_{1c} = [(\lambda - 1)/(\lambda + 1)]I$. Τα I και I_{1c} , ουσιαστικά, βρίσκονται στην ίδια θέση, τον άξονα z , και εκδηλώνονται ως ένα ολικό ρεύμα, ίσο με $I_{ολ} = I + I_{1c} = [1 + (\lambda - 1)/(\lambda + 1)]I = [2\lambda/(\lambda + 1)]I$. Το $I_{ολ}$ βρίσκεται σε ομογενή χώρο (με μ_0 παντού), οπότε η απευθείας εφαρμογή του νόμου του *Ampere*, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S dI$, είναι απλή, με αποτέλεσμα:

$$\mathbf{H}_I = \mathbf{i}_\varphi \frac{2\lambda}{\lambda + 1} \frac{I}{2\pi r_T}, \quad \mathbf{B}_I = \mathbf{i}_\varphi \frac{2\lambda}{\lambda + 1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_T}.$$

Βοηθητικό πρόβλημα για το χώρο II ($y < 0$): Παντού τίθεται $\mu = \lambda\mu_0$ (όπως αρχικά στο χώρο II), και αντί του ρεύματος I , στη θέση του (στο $y = 0^+$) τοποθετείται είδωλο $I_{2c} = [2/(\lambda + 1)]I$ και από το νόμο *Ampere* προκύπτει αμέσως:

$$\mathbf{H}_{II} = \mathbf{i}_\varphi \frac{2}{\lambda + 1} \frac{I}{2\pi r_T}, \quad \mathbf{B}_{II} = \mathbf{i}_\varphi \frac{2}{\lambda + 1} \frac{\lambda\mu_0 I}{2\pi r_T}.$$

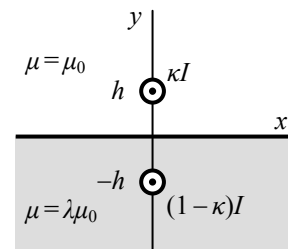
Στην αρχική διάταξη, τα πεδία κάθε περιοχής είναι όπως στο αντίστοιχο βοηθητικό πρόβλημα:

$$\left. \begin{array}{l} y > 0: \\ y < 0: \end{array} \right\} \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_I \\ \mathbf{H}_{II} \end{Bmatrix} = \mathbf{i}_\varphi \begin{Bmatrix} \lambda \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{\lambda + 1} \frac{I}{\pi r_T}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_{II} \end{Bmatrix} = \mathbf{i}_\varphi \frac{\lambda}{\lambda + 1} \frac{\mu_0 I}{\pi r_T}.$$

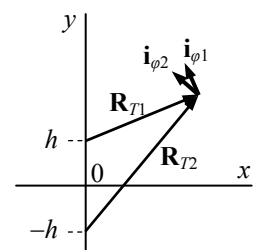
Σχόλια:

- Εύκολα επιβεβαιώνεται, ότι τα τελικά αποτελέσματα ικανοποιούν τις σχέσεις:
 - Νόμος του *Ampere*, ολοκληρωτικά σε κυκλικό βρόχο με ακτίνα r_T , που αποτελείται από δύο ημιπεριφέρειες με μήκος πr_T , με διαφορετικές τιμές του πεδίου στο καθένα: $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \pi r_T (H_{I\phi} + H_{II\phi}) = I$.
 - Νόμος του *Gauss*, που από τις σημειακές σχέσεις αρκεί ο μηδενισμός της απόκλισης, επειδή το πεδίο \mathbf{B} δεν έχει ασυνέχειες, $\nabla \cdot \mathbf{B} = (1/r_T) \partial B_\phi / \partial \phi = 0$.
- Από τις σημειακές σχέσεις που συνοδεύουν το νόμο του *Ampere*, για εκείνη σε γραμμή η μορφή $2\pi(r_T H_\phi)|_{r_T \rightarrow 0} = I$ δεν είναι κατάλληλη, επειδή προϋποθέτει ότι $\partial/\partial\phi = 0$ κοντά στη ρευματοφόρο γραμμή, κάτι που δεν συμβαίνει εδώ. Κατάλληλη είναι η μορφή με το ολοκλήρωμα της μέσης τιμής, $2\pi \langle (r_T H_\phi)|_{r_T \rightarrow 0} \rangle_\phi = \int_0^{2\pi} d\phi (r_T H_\phi)|_{r_T \rightarrow 0} = I$.

Παράδειγμα 6.2-11: Δύο νηματοειδείς αγωγοί με άπειρο μήκος έχουν ρεύμα κI και $(1-\kappa)I$, αντίστοιχα. Οι ρευματοφόροι αγωγοί είναι παράλληλοι μεταξύ τους σε απόσταση $2h$ και ισαπέχουν από το επίπεδο $y = 0$ (δηλ., βρίσκονται στα $y = \pm h$). Στις περιοχές $y > 0$ και $y < 0$ είναι αντίστοιχα $\mu = \mu_0$ και $\mu = \lambda\mu_0$. Ζητούνται τα πεδία \mathbf{H} και \mathbf{B} παντού, καθώς και να ελεγχθεί το όριο $h \rightarrow 0$, στο οποίο η διάταξη μεταπίπτει σε αυτή του προηγούμενου *παрад. 6.2-10* και αναμένονται τα εκεί αποτελέσματα.



Επίλυση: Για το βοηθητικό πρόβλημα της περιοχής I ($y > 0$), παντού θεωρείται ότι $\mu = \mu_0$. Εκτός από το κI στο $y = h$, τοποθετούνται και είδωλα στο $y = -h$ ίσα με $I_{1c} = [(\lambda - 1)/(\lambda + 1)]\kappa I$ λόγω του κI και $I_{2c} = [2\lambda/(\lambda + 1)](1 - \kappa)I$ λόγω του $(1 - \kappa)I$. Συνεπώς, στο $y = -h$ υποτίθεται συνολικό νηματοειδές ρεύμα $I_c = I_{1c} + I_{2c} = [\kappa(\lambda - 1) + 2\lambda(1 - \kappa)] [I/(\lambda + 1)]$. Σε κάθε y στο βοηθητικό πρόβλημα, σε $y > 0$ της αρχικής διάταξης, τα κI και I_c παράγουν πεδία, τα οποία είναι απλούστερο να γραφούν με τη βοήθεια δύο κυλινδρικών συστημάτων προσαρμοσμένων στις δύο ρευματοφόρες γραμμές. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι αποστάσεις είναι $\mathbf{R}_{T1,2} = r_T \mathbf{i}_T \mp h \mathbf{i}_y$, με μέτρο $R_{T1,2} = [r_T^2 + h^2 \mp 2r_T h \cos \phi]^{1/2}$ και τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}_{\phi 1,2}$ είναι κάθετα στα $\mathbf{R}_{T1,2}$. Έτσι, παντού για το βοηθητικό πρόβλημα, στα $y > 0$ της αρχικής διάταξης, τα πεδία εκφράζονται ως:



$$\mathbf{H}(\mathbf{r})|_{y>0} = \mathbf{H}_I(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_{\phi 1} \frac{\kappa I}{2\pi R_{T1}} + \mathbf{i}_{\phi 2} \frac{\kappa(\lambda - 1) + 2\lambda(1 - \kappa)}{\lambda + 1} \frac{I}{2\pi R_{T2}},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})|_{y>0} = \mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}_I(\mathbf{r}).$$

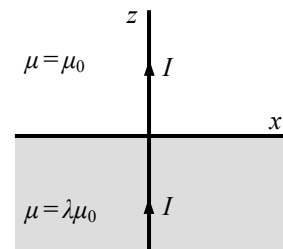
Όταν είναι $h \rightarrow 0$, τότε $\{R_{T1}, R_{T2}\} \rightarrow r_T$ και $\{\mathbf{i}_{\phi 1}, \mathbf{i}_{\phi 2}\} \rightarrow \mathbf{i}_{\phi}$, οπότε οι δύο όροι στην έκφραση για το $\mathbf{H}_I(\mathbf{r})$ αθροίζονται αλγεβρικά. Είναι $(\lambda+1)^{-1}[\kappa(\lambda+1) + \kappa(\lambda-1) + 2\lambda(1-\kappa)] = 2\lambda/(\lambda+1)$, δηλαδή αναπαράγονται οι εκφράσεις του *παραδ. 6.2-10* για τα \mathbf{H}_I και \mathbf{B}_I .

Για το βοηθητικό πρόβλημα της περιοχής II ($y < 0$), παντού τίθεται $\mu = \lambda\mu_0$ και το μαγνητικό πεδίο παράγεται από τα ρεύματα $(1-\kappa)I$ στο $y = -h$, και τα δύο είδωλα του $(1-\kappa)I$ και του κI στο $y = h$, με άθροισμα $I_c/I = [(1-\lambda)(1-\kappa) + 2\kappa]/(\lambda+1)$, με αποτέλεσμα:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})|_{y<0} = \mathbf{H}_{II}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_{\phi 1} \frac{(1-\lambda)(1-\kappa) + 2\kappa}{\lambda+1} \frac{I}{2\pi R_{T1}} + \mathbf{i}_{\phi 2} \frac{(1-\kappa)I}{2\pi R_{T2}}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r})|_{y<0} = \mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = \lambda\mu_0 \mathbf{H}_{II}.$$

Οι εκφράσεις αυτές δίνουν το πεδίο και στην αρχική διάταξη, αλλά μόνο στην περιοχή $y < 0$. Όπως προηγουμένως, όταν $h \rightarrow 0$, οι δύο όροι στο άθροισμα είναι συγγραμμικοί και, επειδή $(\lambda+1)^{-1}[(1-\lambda)(1-\kappa) + 2\kappa + (\lambda+1)(1-\kappa)] = 2/(\lambda+1)$, αναπαράγεται το \mathbf{H}_{II} του *παραδ. 6.2-10*.

Παράδειγμα 6.2-12: Οι περιοχές $z > 0$ και $z < 0$ έχουν υλικά με μαγνητική διαπερατότητα ίση με μ_0 και $\lambda\mu_0$, αντίστοιχα. Σε ευθύγραμμο νηματοειδή αγωγό κάθετο στην επιφάνεια $y = 0$ και με άπειρο μήκος, ρέει ηλεκτρικό ρεύμα ίσο με I . Ζητούνται παντού στο χώρο η ένταση μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} και η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} .



Επίλυση: Ας ταυτιστεί ο άξονας z με το νηματοειδή αγωγό. Η διάταξη είναι αμετάβλητη σε περιστροφή ($\partial/\partial\phi = 0$) και δεν έχει ρεύμα στη διεύθυνση ϕ , οπότε είναι $\mathbf{H} = \mathbf{i}_{\phi} H_{\phi}$, χωρίς να έχει σημασία ότι είναι $\partial/\partial z \neq 0$. Με στοιχειώδη εφαρμογή του νόμου του *Ampere* προκύπτει:

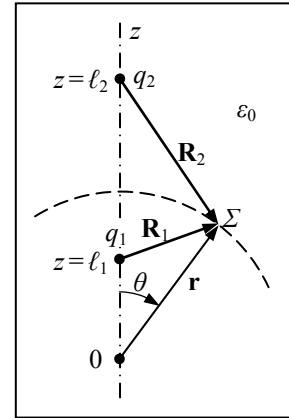
$$\mathbf{H} = \mathbf{i}_{\phi} \frac{I}{2\pi r_T} \text{ σε κάθε } z, \text{ και } \mathbf{B}(z > 0) = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{B}(z < 0) = \lambda\mu_0 \mathbf{H}.$$

Σχόλιο: Θα μπορούσε, βέβαια, να είχε εφαρμοσθεί κατοπτρισμός. Κατά τα καθιερωμένα, στο επιμέρους βοηθητικό πρόβλημα για $z > 0$ (ή για $z < 0$) ολόκληρος ο χώρος θα ληφθεί με $\mu = \mu_0$ (ή $\mu = \lambda\mu_0$) και θα περιέχει ως αίτια το αρχικό I στον αντίστοιχο θετικό (ή αρνητικό) ημιάξονα z και δύο είδωλα I_{1c} και I_{2c} στον άλλο ημιάξονα. Επομένως, στον άλλο ημιάξονα θα υπάρχει συνολικά ρεύμα $I_c = I_{1c} + I_{2c}$. Όμως, πρέπει $I_c = I$, γιατί αλλιώς θα παραβιαζόταν στο βοηθητικό πρόβλημα ο νόμος διατήρησης φορτίου. Εναλλακτικά, μπορεί να γίνει εφαρμογή των τύπων και, τότε, σε κάθε I_{1c} το πρόσημο πρέπει να συνδυασθεί και με το ότι $d\mathbf{r}_{1c} = -d\mathbf{r} = -\mathbf{i}_z dz$. Κάθε βοηθητικό πρόβλημα καταλήγει σε άπειρου μήκους I σε ομογενές μέσο, οπότε αμέσως προκύπτει ότι σε κάθε βοηθητικό πρόβλημα, άρα και στο αρχικό, είναι παντού $\mathbf{H} = \mathbf{i}_{\phi} I / 2\pi r_T$, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το μ κάθε περιοχής δίνει το πεδίο \mathbf{B} .

6.2.3 Κατοπτρισμός σε σφαίρα

Ισοδυναμική επιφάνεια $\Phi = 0$ από ζεύγος άνισων φορτίων:

Σε ομογενή χώρο με επιτρεπτότητα ϵ_0 , και άπειρη έκταση, δύο φορτία q_1 και q_2 , παράγουν στο τυχόν σημείο Σ δυναμικό ίσο με $\Phi = (1/4\pi\epsilon_0)(q_1/R_1 + q_2/R_2)$ με αναφορά στο άπειρο. Επειδή οι αποστάσεις $R_{1,2}$ είναι θετικές ποσότητες, για να είναι $\Phi = 0$, πρέπει κατ' αρχάς τα q_1 και q_2 να είναι ετερόσημα, αλλιώς παντού είναι $\Phi > 0$ ή $\Phi < 0$, εκτός από το άπειρο. Τότε η επιφάνεια $\Phi = 0$ δίδεται από τη σχέση $q_1/R_1 = -q_2/R_2$. Θεωρώντας ότι τα φορτία q_1 και q_2 βρίσκονται στις θέσεις αντίστοιχα $z = \ell_1$ και $z = \ell_2$ του άξονα z , όπως στο **Σχήμα**



Σχήμα 6.2-10

6.2-10, σε σφαιρικές συντεταγμένες τα τετράγωνα των αποστάσεων

R_1 και R_2 είναι $R_1^2 = r^2 + \ell_1^2 - 2r\ell_1 \cos\theta$ και $R_2^2 = r^2 + \ell_2^2 - 2r\ell_2 \cos\theta$. Υψώνοντας στο τετράγωνο τη σχέση $q_1/R_1 = -q_2/R_2$, προκύπτει ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες η ισοδυναμική επιφάνεια $\Phi = 0$ περιγράφεται από τη σχέση:

$$(q_1^2 - q_2^2)r^2 - 2r(q_1^2\ell_2 - q_2^2\ell_1)\cos\theta + (q_1^2\ell_2^2 - q_2^2\ell_1^2) = 0. \quad (6.2-24)$$

Με $r^2 = r_T^2 + z^2$, $r \cos\theta = z$, η εξίσωση έχει τη μορφή $r_T^2 + (z - z_0)^2 = a_0^2$, δηλαδή περιγράφει σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα a_0 και κέντρο στη θέση z_0 του άξονα z , όπου με λίγες αλγεβρικές πράξεις προκύπτει ότι οι ποσότητες a_0 και z_0 δίδονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $(q_1^2 - q_2^2)z_0 = q_1^2\ell_2 - q_2^2\ell_1$ και $|q_1^2 - q_2^2|a_0 = |q_1q_2(\ell_1 - \ell_2)|$. Εδώ ενδιαφέρει η ειδική περίπτωση σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Τέτοια επιφάνεια περιγράφεται όταν ο γραμμικός όρος είναι ίσος με μηδέν, δηλαδή όταν είναι $q_1^2\ell_2 - q_2^2\ell_1 = 0$, ή, ισοδύναμα, $q_2/q_1 = -\sqrt{\ell_2/\ell_1}$, και τότε για την ακτίνα a της σφαίρας είναι $a^2 = -(q_1^2\ell_2^2 - q_2^2\ell_1^2)/(q_1^2 - q_2^2) = \dots = \ell_1\ell_2$. Συγκεντρωτικά, σφαιρική ισοδυναμική επιφάνεια $\Phi = 0$, με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα a , σχηματίζεται όταν:

$$\begin{aligned} \ell_1\ell_2 &= a^2, \\ \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} &= -\frac{q_1}{q_2} = \left|\frac{q_1}{q_2}\right|. \end{aligned} \quad (6.2-25)$$

Η δεύτερη σχέση δηλώνει πως το μεγαλύτερο φορτίο βρίσκεται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το κέντρο της σφαίρας, ενώ η πρώτη σχέση δηλώνει πως αν το ένα φορτίο βρίσκεται μέσα στη σφαίρα (σε ακτινική θέση με $r = \ell_{1,2} < a$), το άλλο βρίσκεται έξω. Γενικά, στις σχέσεις αυτές υπάρχει συμμετρία ως προς τα δύο φορτία και τις δύο αποστάσεις.

Κατοπτρισμός σημειακού φορτίου σε σφαιρική επιφάνεια με $\Phi = 0$: Οι πληροφορίες αυτές δίνουν τη δυνατότητα να διατυπωθεί η εξής βασική διάταξη κατοπτρισμού σε σφαιρική επιφάνεια:

Αρχικό πρόβλημα: Η σφαιρική επιφάνεια, με ακτίνα a και οριακή συνθήκη $\Phi(r=a) = 0$, αποτελεί το όριο του χώρου V με σταθερό ε . Ο χώρος V μπορεί να είναι, εναλλακτικά:

- ο είτε: το εσωτερικό της σφαίρας, δηλαδή η περιοχή $r < a$ («εσωτερικό» πρόβλημα),
- ο είτε: το εξωτερικό της σφαίρας, δηλαδή η περιοχή $r > a$ («εξωτερικό» πρόβλημα). Σε αυτή τη διάταξη, ο χώρος V έχει όριο και στο άπειρο, με οριακή συνθήκη $\Phi(r=\infty) = 0$.

Στο χώρο V βρίσκεται σημειακό φορτίο Q , το οποίο αντιστοιχεί σε ένα από τα $q_{1,2}$ της προκαταρκτικής διάταξης, σε απόσταση ℓ (με $\ell = \ell_1 < a$, ή $\ell = \ell_2 > a$, αντίστοιχα). Ζητείται το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ στο χώρο V .

Βοηθητικό πρόβλημα: Σ' όλο το χώρο ($r < a$ και $r > a$) τίθεται ε , όσο στο χώρο V του αρχικού προβλήματος, και επιβάλλεται $\Phi(\infty) = 0$. Εκτός από το Q στην αρχική θέση $r = \ell$ τοποθετείται και είδωλο Q_c , στην ακτινική θέση $r = \ell_c = a^2/\ell$, στην ίδια ακτινική ημιευθεία με το αρχικό φορτίο Q (δηλαδή, στα ίδια θ και φ), με τιμή $Q_c = -Q(\ell_c/\ell)^{1/2} = -Q(a/\ell)$.

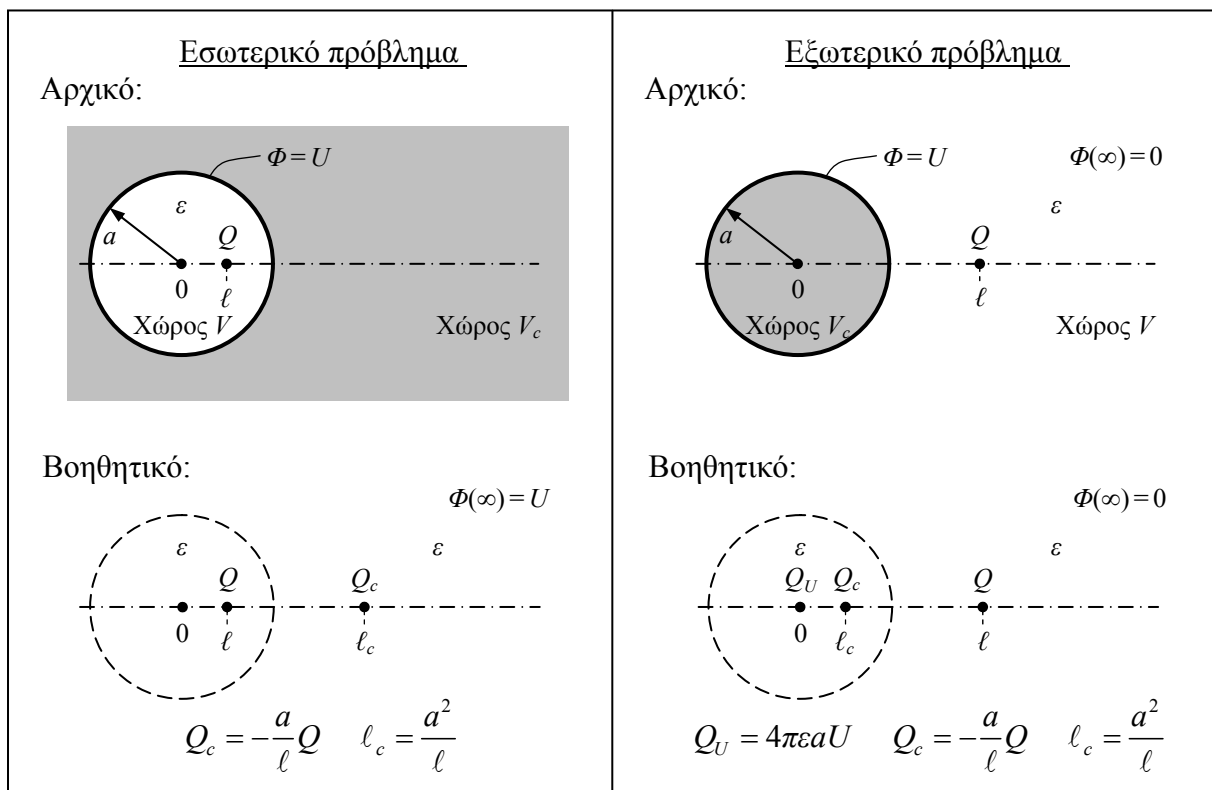
Η λύση του βοηθητικού προβλήματος είναι $\Phi = (1/4\pi\varepsilon)(Q/R + Q_c/R_c)$ σε ολόκληρο το χώρο. Η έκφραση αυτή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του αρχικού προβλήματος: Στο χώρο V είναι $\nabla^2\Phi = 0$, εκτός από τη θέση του φορτίου Q , και εκεί είναι $4\pi\varepsilon(R\Phi)|_{R\rightarrow 0} = Q$, λόγω της μορφής του Φ . Στο όριο S είναι $\Phi(r=a) = 0$, λόγω της συγκεκριμένης επιλογής της τιμής του Q_c και της θέσης του, δηλαδή της απόστασης ℓ_c . Επίσης είναι $\Phi(r=\infty) = 0$, που ενδιαφέρει μόνο στο «εξωτερικό» πρόβλημα, όπου ο χώρος V εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Συνεπώς, πράγματι αυτή είναι η μοναδική λύση του αρχικού προβλήματος.

Κατοπτρισμός σημειακού φορτίου σε σφαιρική επιφάνεια με $\Phi = U (\neq 0)$: Η επέκταση της βασικής διάταξης, όταν $\Phi(r=a) = U (\neq 0)$, αλλά διατηρώντας στο εξωτερικό πρόβλημα τη συνθήκη $\Phi(\infty) = 0$, προκύπτει αμέσως με την επαλληλία $\Phi = \Phi_Q + \Phi_U$, όπου:

- Φ_Q είναι το δυναμικό λόγω του Q , όταν $\Phi(r=a) = 0$ (δηλαδή το δυναμικό λόγω του Q και του ειδώλου Q_c στο βοηθητικό πρόβλημα). Φυσικά, είναι $\Phi_Q = (1/4\pi\varepsilon)(Q/R + Q_c/R_c)$.
- Φ_U είναι το δυναμικό λόγω της συνθήκης $\Phi(r=a) = U$, όταν δεν υπάρχει το Q . Τότε όμως υπάρχει σφαιρική συμμετρία, οπότε για τον όρο Φ_U η εξίσωση Laplace είναι μονοδιάστατη, $\nabla^2\Phi_U = (1/r^2)(\partial/\partial r)(r^2\Phi_U)$, και ολοκληρώνεται αμέσως, με γενική λύση $\Phi_U = A + B/r$, όπου οι σταθερές ολοκλήρωσης A και B προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες.

- Για το εσωτερικό πρόβλημα (V η περιοχή $r < a$): Πρέπει να είναι $\Phi \neq \infty$ σε ολόκληρο το V , επειδή δεν υπάρχουν φορτία, καθώς η δράση του Q έχει ήδη συμπεριληφθεί στο Φ_Q . Άρα είναι $B = 0$, και για να είναι $\Phi(r=a) = U$ προκύπτει $A = U$, δηλαδή, $\Phi_U = U$. Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει ότι στο βοηθητικό πρόβλημα η συνθήκη στο άπειρο είναι $\Phi(\infty) = U$, και όχι $\Phi(\infty) = 0$, χωρίς αυτό να επηρεάζει τη λύση για την περιοχή $r < a$.
- Για το εξωτερικό πρόβλημα (V ο χώρος $r > a$): Πρέπει να είναι $\Phi_U(\infty) = 0$, άρα $A = 0$, και $\Phi_U(r=a) = U$, άρα $B = aU$, οπότε $\Phi_U = Ua/r$. Αυτό μπορεί να περιγραφεί με την τοποθέτηση και ενός δεύτερου ειδώλου στο $r = 0$, με τιμή $Q_U = 4\pi\epsilon Ua$.

Η **συγκεφαλαίωση** της παραπάνω βασικής διάταξης κατοπτρισμού σε σφαιρική επιφάνεια, μαζί με το ενδεχόμενο $\Phi(r=a) = U \neq 0$, παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.2-11**. Και στις δύο διατάξεις, η λύση του βοηθητικού προβλήματος ισχύει και στο αρχικό πρόβλημα, αλλά μόνο στο χώρο V . Η επιτρεπτότητα του χώρου V_c και τα φορτία που τυχόν υπάρχουν εκεί δεν έχουν καμία επίδραση στην κατανομή του δυναμικού στο χώρο V , αλλά στοιχειοθετούν ένα δεύτερο, εξ ίσου αυθυπόστατο, πρόβλημα κατοπτρισμού για το χώρο V_c . Επίσης, οι μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τα ℓ_c και Q_c με τα a , ℓ και Q ταυτίζονται στις δύο διατάξεις, και αν είναι $\ell < a$ τότε $\ell_c > a$ και αντίστροφα, ενώ η συνθήκη $\Phi(r=a) = U \neq 0$ αντιμετωπίζεται με διαφορετικό τρόπο, με $\Phi(\infty) = U$ και με Q_U στο $r = 0$, αντίστοιχα.



Σχήμα 6.2-11

Δυναμικό από σημειακό φορτίο σε τυχούσα θέση: Επιστρέφοντας στο βασικό πρόβλημα του κατοπτρισμού σε γειωμένη σφαίρα (με $U = 0$), ας ληφθεί τώρα, ότι το φορτίο Q δεν είναι στη θέση $z = \ell$ του άξονα z , αλλά σε κάποια τυχούσα θέση $\Sigma'(r', \theta', \varphi')$ σε σφαιρικές συντεταγμένες, με την προοπτική, να γίνει η επέκταση $Q \rightarrow dQ$ και να περιγραφεί το δυναμικό από κατανομή φορτίου. Σε σφαιρικές συντεταγμένες, στην έκφραση $4\pi\epsilon\Phi = Q/R + Q_c/R_c$ η απόσταση R του σημείου Σ (στη θέση \mathbf{r}) από το σημείο Σ' (με το φορτίο Q) είναι:

$$\begin{aligned} R^2 &= r'^2 - 2r'r[\cos\theta' \cos\theta + \sin\theta' \sin\theta \cos(\varphi' - \varphi)] + r^2 \\ &= r'^2 - 2r'rC(\theta', \theta, \varphi' - \varphi) + r^2, \end{aligned} \quad (6.2-26)$$

όπου ορίζεται, για λόγους συντομίας, η ποσότητα $C = \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_{r'}$, το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των ακτίνων προς το Σ και προς το Σ' . Το είδωλο Q_c , στην κατοπτρική ακτινική θέση $r'_c = a^2/r'$, έχει $\theta'_c = \theta'$, $\varphi'_c = \varphi'$, και από το σημείο Σ υπολογισμού του δυναμικού απέχει απόσταση αντίστοιχα R_c , η οποία μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των συντεταγμένων του φορτίου Q , επειδή είναι $r'_c = a^2/r'$, $\theta'_c = \theta'$ και $\varphi'_c = \varphi'$. Με διαδοχικές πράξεις προκύπτει:

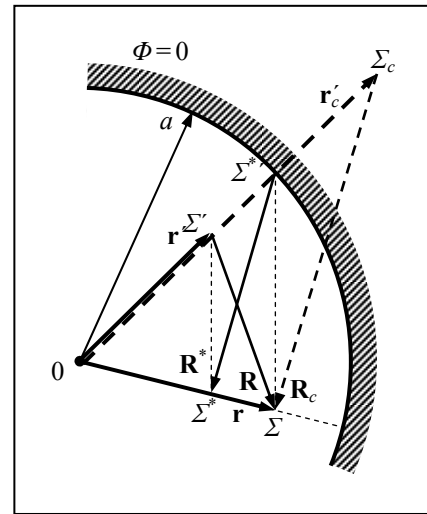
$$\begin{aligned} R_c^2 &= r_c'^2 - 2r'_c r [\cos\theta'_c \cos\theta + \sin\theta'_c \sin\theta \cos(\varphi'_c - \varphi)] + r^2 \\ &= \left(\frac{a^2}{r'}\right)^2 - 2\left(\frac{a^2}{r'}\right)rC(\theta', \theta, \varphi' - \varphi) + r^2 \\ &= \left(\frac{a}{r'}\right)^2 \left[a^2 - 2r'rC(\theta', \theta, \varphi' - \varphi) + \left(\frac{r}{a}\right)^2 r'^2 \right] \\ &= \left(\frac{a}{r'}\right)^2 \left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 r'^2 - 2r'rC(\theta', \theta, \varphi' - \varphi) + a^2 \right] \\ &= \left(\frac{a}{r'} R^*\right)^2, \end{aligned} \quad (6.2-27)$$

που ορίζει την ποσότητα $R^* = (r'/a)R_c$. Το είδωλο έχει την τιμή $Q_c = -Q(a/r')$, άρα είναι $Q_c/R_c = -Q/R^*$. Συνεπώς, με τη οριακή συνθήκη $\Phi(r=a) = 0$, φορτίο Q στη θέση $\Sigma'(r', \theta', \varphi')$ παράγει στη θέση $\Sigma(r, \theta, \varphi)$ δυναμικό, που, εκτός από $\Phi = (Q/R + Q_c/R_c)/4\pi\epsilon$, γράφεται και ως:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2r'rC + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 r'^2 - 2r'rC + a^2}} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right], \end{aligned} \quad (6.2-28)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι $C = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi' - \varphi)$, ενώ η απόσταση $R^* = (r'/a)R_c$, η οποία έχει ορισθεί στη σχέση (6.2-27), σχολιάζεται παρακάτω.

Στη σχέση (6.2-28) ο πρώτος παρονομαστής είναι η απόσταση $R = \Sigma\Sigma'$. Ο αντίστοιχος όρος αντιπροσωπεύει την άμεση συνεισφορά του φορτίου Q . Ο δεύτερος όρος δίνει τη συνεισφορά στο Φ από το είδωλο Q_c στη θέση Σ_c . Όμως, το είδωλο, ουσιαστικά, αντιπροσωπεύει το συνολικό φορτίο που επάγεται, λόγω της συνθήκης $\Phi = 0$, κατανεμημένα στην επιφάνεια $r = a$. Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 6.2-12**, με βάση την αναλογία $R^*/R_c = r'/a$ ο παρονομαστής του δεύτερου όρου είναι ίσος με την απόσταση $R^* = \Sigma^*\Sigma^*$ (όπου $\Sigma^*\Sigma^* // \Sigma\Sigma'$), δηλαδή, το συνολικό φορτίο του τοιχώματος δρα στο σημείο Σ όπως θα δρούσε στο Σ^* , με $r^* = (r'/a)r$, ένα φορτίο $-Q$, συγκεντρωμένο στο σημείο Σ^* του τοιχώματος (στη γραμμή $0\Sigma'$).



Σχήμα 6.2-12

Στην παραπάνω έκφραση φαίνεται αμέσως ότι αν $r = a$, τότε $R^* = R$, οπότε πράγματι $\Phi(r = a, \theta, \varphi) = 0$. Επίσης, φαίνεται ότι είναι $R = 0$, όταν $r = r'$, $\theta = \theta'$ και $\varphi = \varphi'$, δηλ. το Φ έχει τον αναμενόμενο απειρισμό στη θέση Σ' του φορτίου Q , ενώ είναι $R^* \neq 0$ (επειδή $R^* \geq |a - rr'/a|$) και ο δεύτερος όρος δεν έχει απειρισμό (είτε $rr' < a^2$, είτε $rr' > a^2$).

Τα παραπάνω ισχύουν εξίσου για το εσωτερικό πρόβλημα ($r' < a$ και $r < a$) και για το εξωτερικό πρόβλημα ($r' > a$ και $r > a$). Απλώς, το σχήμα αναφέρεται στο εσωτερικό πρόβλημα, ενώ στην ανάλυση πουθενά δεν υπάρχει κανένας τέτοιος περιορισμός.

Κατοπτρισμός κατανομής φορτίου: Υποκαθιστώντας το σημειακό φορτίο Q από το πρακτικά σημειακό $dQ' = \{\rho(\mathbf{r}')dV', \sigma(\mathbf{r}')dS', \lambda(\ell')d\ell'\}$, προκύπτει αμέσως η επέκταση για το δυναμικό από κατανομή φορτίου, όταν $\Phi(r = a) = 0$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int dQ' \left(\frac{1}{R(\mathbf{r}', \mathbf{r})} - \frac{1}{R^*(\mathbf{r}', \mathbf{r})} \right), \quad (6.2-29)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται, κατά τα καθιερωμένα, ως προς τις τονισμένες μεταβλητές, τις θέσεις των φορτίων, στην περιοχή που καταλαμβάνουν τα φορτία. Οι αποστάσεις είναι:

$$\begin{aligned} R^2 &= r'^2 - 2r'r [\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi' - \varphi)] + r^2, \\ R^{*2} &= \left(\frac{r}{a}\right)^2 r'^2 - 2r'r [\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi' - \varphi)] + a^2, \end{aligned} \quad (6.2-30)$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες. Φυσικά, οποιοδήποτε άλλο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αν ταιριάζει περισσότερο στη διάταξη, ιδίως για τις τονισμένες μεταβλητές. Η παραπάνω έκφραση αναφέρεται τόσο στο εσωτερικό πρόβλημα ($r' < a$ και $r < a$), όσο και στο εξωτερικό ($r' > a$ και $r > a$), αλλά με την οριακή συνθήκη $\Phi(r=a) = 0$. Αν όμως είναι $\Phi(r=a) = U$, τότε στο εσωτερικό πρόβλημα προστίθεται η ποσότητα $\Phi_U = U$ και στο εξωτερικό η ποσότητα $\Phi_U = Ua/r$.

Η χρήση της σχέσης (6.2-29) παρουσιάζεται στα *παραδ. 6.2-13* και *6.2-14*.

Κατοπτρισμός σημειακού διπόλου: Περιγράφοντας το δίπολο ως $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, όπου $\mp q$ είναι τα φορτία στους πόλους του διπόλου, αντίστοιχα στις θέσεις \mathbf{r}' και $\mathbf{r}' + \mathbf{d}$ (με $\mathbf{d} \rightarrow 0$) και εφαρμόζοντας επαλληλία, η σχέση $\Phi_Q = (Q/4\pi\epsilon)(1/R - 1/R^*)$ δίνει για το δυναμικό του διπόλου $\Phi_p(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \Phi_{-q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') + \Phi_q(\mathbf{r}; \mathbf{r}' + \mathbf{d})$. Επειδή είναι $\Phi_{-q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\Phi_{+q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ και $\mathbf{d} \rightarrow 0$, η διαφορά εκφράζεται από την παράγωγο (στις τονισμένες μεταβλητές) του Φ_q στην διεύθυνση \mathbf{d} , συνεπώς:

$$\begin{aligned}\Phi_p(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \mathbf{d} \cdot \nabla' \Phi_q(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\mathbf{d} \cdot \nabla' \frac{1}{R(\mathbf{r}; \mathbf{r}')} - \mathbf{d} \cdot \nabla' \frac{1}{R^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}')} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[-\frac{1}{2R^3} \mathbf{p} \cdot \nabla' (R^2) + \frac{1}{2R^{*3}} \mathbf{p} \cdot \nabla' (R^{*2}) \right].\end{aligned}\quad (6.2-31)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή της κλίσης σε σφαιρικές συντεταγμένες και με $q\mathbf{d} = \mathbf{p} = p_r \mathbf{i}_r + p_\theta \mathbf{i}_\theta + p_\phi \mathbf{i}_\phi$, με τις τονισμένες ποσότητες να αναφέρονται στο δίπολο, το οποίο βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}' , προκύπτει τελικά το δυναμικό στη θέση \mathbf{r} , με την οριακή συνθήκη $\Phi(r=a) = 0$:

$$\begin{aligned}\Phi_p(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[p_r' \left(\frac{rC - r'}{R^3} - \frac{rC - (r/a)^2 r'}{R^{*3}} \right) \right. \\ &\quad \left. + r \left(p_\theta' \frac{\partial C}{\partial \theta'} + p_\phi' \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial C}{\partial \phi'} \right) \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R^{*3}} \right) \right],\end{aligned}\quad (6.2-32)$$

όπου:

$$\begin{aligned}C(\theta', \theta, \phi' - \phi) &= \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\phi' - \phi) &= \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}'_r, \\ \frac{\partial}{\partial \theta'} C &= -\sin \theta' \cos \theta + \cos \theta' \sin \theta \cos(\phi' - \phi) &= \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}'_\theta, \\ \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \phi'} C &= -\sin \theta \sin(\phi' - \phi) &= \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}'_\phi.\end{aligned}\quad (6.2-33)$$

Κατοπτρισμός πηγής φορτίου: Διατηρώντας την οριακή συνθήκη $\Phi(r=a) = 0$, καθώς και $\Phi(\infty) = 0$, όταν πρόκειται για το εξωτερικό πρόβλημα, δηλαδή για την περιοχή $r > a$, ας θεωρήσουμε τώρα ότι η περιοχή V ($r < a$, ή $r > a$, ανάλογα με την περίπτωση) καταλαμβάνεται από αγωγίμο υλικό, με $g = \text{σταθ.}$, αντί για υλικό με $\epsilon = \text{σταθ.}$, και ότι στη θέση \mathbf{r}' (με $r' < a$ ή $r' > a$, ανάλογα) υπάρχει σημειακή πηγή φορτίου \dot{Q} , αντί για σημειακό φορτίο Q . Τότε, με τις αντιστοιχίες $\mathbf{J} \leftrightarrow \mathbf{D}$ και $g \leftrightarrow \epsilon$ προκύπτει αμέσως ότι στην περιοχή V το δυναμικό Φ μπορεί να προσδιορισθεί, τελείως ισοδύναμα:

- ο Είτε από το \dot{Q} στη θέση \mathbf{r}' και το είδωλο $\dot{Q}_c = -(a/r') \dot{Q}$ στη θέση \mathbf{r}'_c (σε ακτινική απόσταση $r'_c = a^2/r'$), σε άπειρο χώρο με το ίδιο $g = \text{σταθ.}$ παντού:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi g} \left(\frac{\dot{Q}}{R} + \frac{\dot{Q}_c}{R_c} \right), \quad (6.2-34)$$

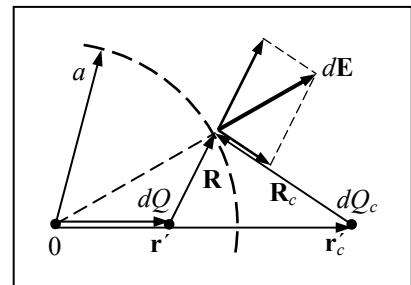
- ο Είτε από τη σχέση (6.2-28), κατάλληλα τροποποιημένη με βάση τις αντιστοιχίες:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\dot{Q}}{4\pi g} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^*} \right), \quad (6.2-35)$$

όπου η απόσταση R^* έχει ορισθεί προηγουμένως.

Η επέκταση της σχέσης (6.2-35) σε κατανεμημένη πηγή φορτίου $d\dot{Q}$, όπως $d\dot{Q} = \lambda dl$, οδηγεί αμέσως σε ολοκλήρωμα επαλληλίας, αντίστοιχο με αυτό της σχέσης (6.2-29).

Κατοπτρισμός σε διατάξεις μαγνητικού πεδίου: Σε διατάξεις Ηλεκτροστατικής και μόνιμης ροής ρεύματος, η οριακή συνθήκη $\Phi(r=a) = 0$, σημαίνει ότι η εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου \mathbf{E} μηδενίζεται στο όριο. Αυτό συμβαίνει, όταν ο παρακείμενος χώρος V_c έχει ιδιότητες $g_c \gg g$ ή $\epsilon_c \gg \epsilon$. [Ας επαναληφθεί ότι τότε είναι $\mathbf{E}_c = \mathbf{J}_c/g_c = 0$, ή $\mathbf{E}_c = \mathbf{D}_c/\epsilon_c = 0$ σε ολόκληρο το χώρο V_c , άρα και στο όριο $r = a$,



Σχήμα 6.2-13

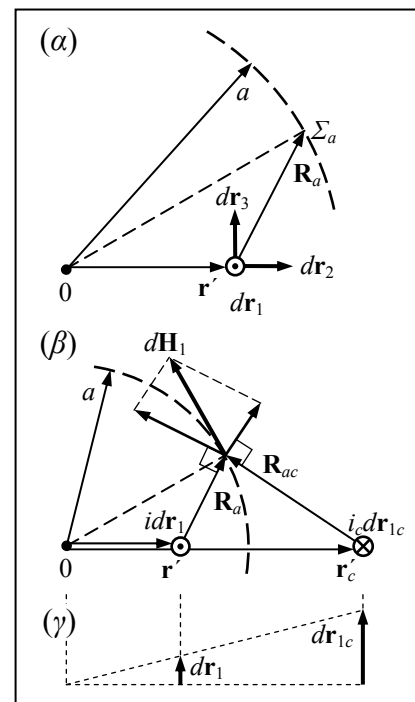
οπότε η μηδενική εφαπτομενική συνιστώσα του \mathbf{E}_c μεταφέρεται στην πλευρά του χώρου V , με βάση τη σχέση $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$.] Με άλλα λόγια, όταν $g_c \gg g$ ή $\epsilon_c \gg \epsilon$, η επιλογή για το είδωλο, $dQ_c = -dQ(a/r')$ στη θέση $r'_c = a^2/r'$ εξασφαλίζει ότι στο όριο $r = a$ μηδενίζεται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.2-13**.

Σε διατάξεις Μαγνητοστατικής, αν στον παρακείμενο χώρο V_c είναι $\mu_c \ll \mu$, ή $g_c \gg g$, τότε το πεδίο \mathbf{B}_c , ως ίσο αντίστοιχα με $\mu_c \mathbf{H}_c$, ή με το ολοκλήρωμα $-\int (\nabla \times \mathbf{E}_c) dt$, όπου $\mathbf{E}_c \approx 0$, είναι ίσο με μηδέν σε ολόκληρο το χώρο V_c , άρα και στο όριο, που εδώ μας ενδιαφέρει να

είναι η σφαιρική επιφάνεια $r = a$. Με $\mathbf{B}_c = 0$, η οριακή συνθήκη $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0$ δείχνει ότι από την πλευρά του χώρου V η κάθετη συνιστώσα του \mathbf{B} μηδενίζεται, άρα και του $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$. Επομένως, τώρα στο όριο $r = a$ πρέπει το $d\mathbf{H}$, η συνεισφορά κάποιου $Id\mathbf{r}$ και του ειδώλου του, να είναι εφαπτομενικό στο όριο, ενώ στις προηγούμενες διατάξεις έπρεπε το $d\mathbf{E}$ να είναι κάθετο στο όριο. Αυτή η διαφορά στη διεύθυνση ταιριάζει, όμως, πλήρως με τη διαφορά, ότι στο νόμο του *Coulomb* το στοιχείο $d\mathbf{E} = (dQ/4\pi\epsilon)\mathbf{R}/R^3$ είναι παράλληλο με το \mathbf{R} , ενώ στο νόμο *Biot-Savart*, το $d\mathbf{H} = (idr/4\pi) \times \mathbf{R}/R^3$ είναι κάθετο στο \mathbf{R} , λόγω του εξωτερικού γινομένου.

Προς το παρόν, μας ενδιαφέρει το γινόμενο $d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}_a$, το οποίο αφορά σημεία Σ_a στη σφαιρική επιφάνεια, επειδή σε τέτοια σημεία θα εφαρμοσθεί η απαίτηση να είναι το πεδίο $d\mathbf{H}$ εφαπτομενικό στη σφαίρα, ώστε να επιλεγεί το κατάλληλο είδωλο. Δεδομένου ότι τα διανύσματα \mathbf{r}' και \mathbf{R}_a ορίζουν ένα επίπεδο, στην ανάλυση σε συνιστώσες, $d\mathbf{r}' = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_3$, πρόσφορη επιλογή είναι, βλ. και **Σχήμα 6.2-14α**, το στοιχείο $d\mathbf{r}_1$ να είναι κάθετο προς το επίπεδο των \mathbf{r}' και \mathbf{R}_a , το $d\mathbf{r}_2$ να είναι κάθετο στο $d\mathbf{r}_1$ και το \mathbf{r}' , και τέλος το $d\mathbf{r}_3$ να είναι κάθετο στις άλλες δύο συνιστώσες. Με την επιλογή αυτή φαίνεται αμέσως ότι το γινόμενο $d\mathbf{r}_3 \times \mathbf{R}_a$ είναι έτσι κι αλλιώς εφαπτομενικό στη σφαίρα, οπότε το idr_3 (μαζί με το είδωλό του, που θα είναι παράλληλο προς αυτό) ικανοποιεί την απαίτηση για εφαπτομενικό $d\mathbf{H}$ στη σφαιρική επιφάνεια και δεν χρειάζεται να εξετασθεί. Απομένει να εξετασθούν οι άλλες δύο συνιστώσες του idr' .

Η συνιστώσα idr_1 παράγει μαγνητικό πεδίο που δεν είναι εφαπτομενικό στο όριο $r = a$. Αν, όμως, τοποθετηθεί είδωλο $i_c d\mathbf{r}_{1c} = -(a/r')idr_1$ στη θέση $\mathbf{r}_c' = (a/r')^2 \mathbf{r}'$, τότε το παραλληλόγραμμο με τις συνιστώσες του παραγόμενου πεδίου $d\mathbf{H}_1$ (βλ. **Σχήμα 6.2-14β**) θα είναι όμοιο με εκείνο για το $d\mathbf{E}$ λόγω των Q και Q_c (βλ. **Σχήμα 6.2-13**), αφενός επειδή τα $i_c d\mathbf{r}_{1c}$ και idr_1 βρίσκονται στις ίδιες θέσεις με τα Q_c και Q και με τον ίδιο λόγο τιμών, αφετέρου επειδή οι νόμοι *Coulomb* και *Biot-Savart* είναι και οι δύο νόμοι αντίστροφου τετράγωνου. Όμως, το παραλληλόγραμμο του $d\mathbf{H}_1$ είναι στραμμένο κατά ορθή γωνία, λόγω του εξωτερικού γινομένου, σε σχέση με εκείνο του $d\mathbf{E}$. Συνεπώς, αφού το $d\mathbf{E}$ είναι κάθετο στη σφαιρική επιφάνεια, το $d\mathbf{H}_1$ θα είναι εφαπτομενικό, σε συμφωνία με την απαίτηση $H_n = 0$.



Σχήμα 6.2-14

Η σχέση $i_c d\mathbf{r}_{1c} = -(a/r') i d\mathbf{r}_1$ συνδέει το γινόμενο $i d\mathbf{r}_1$ με το είδωλο $i_c d\mathbf{r}_{1c}$. Όμως, το $d\mathbf{r}_{1c}$ συνδέεται με το $d\mathbf{r}_1$ αυτόνομα, με καθαρά γεωμετρική σχέση. Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 6.2-14γ**, το οποίο είναι στραμμένο κατά 90° σε σχέση με το **Σχήμα 6.2-14β**, τα μήκη $d\mathbf{r}_1$ και $d\mathbf{r}_{1c}$ αποτελούν αντίστοιχες πλευρές όμοιων τριγώνων. Αυτό συμβαίνει επειδή στον κατοπτρισμό σε σφαίρα οι γωνιακές θέσεις δεν μεταβάλλονται, και συνεπώς είναι $\theta'_c = \theta'$ και $\varphi'_c = \varphi'$ και για τα δύο άκρα των $d\mathbf{r}_1$ και $d\mathbf{r}_{1c}$. Άρα είναι $d\mathbf{r}_{1c} = (r'_c/r') d\mathbf{r}_1 = (a/r')^2 d\mathbf{r}_1$, οπότε για το ρεύμα του ειδώλου είναι $i_c = -(r'/a)i$.

Το συμπέρασμα ότι είναι $i_c = -(r'/a)i$ επιβάλλει έναν περιορισμό στον προσανατολισμό των ρευματοφόρων βρόχων, ώστε το πρόβλημα της Μαγνητοστατικής, με τη συνθήκη $H_n = 0$ στο όριο $r = a$, να επιδέχεται επίλυση με κατοπτρισμό. Επειδή είναι $i = \text{σταθ.}$ σε ολόκληρο το μήκος του βρόχου, και αντίστοιχα $i_c = \text{σταθ.}$, πρέπει να είναι και $r' = \text{σταθ.}$, να βρίσκεται, δηλαδή, ο βρόχος σε σφαιρική επιφάνεια ομόκεντρη με το όριο. Ισοδύναμα, παντού στο βρόχο πρέπει να είναι $\mathbf{i}_n \cdot d\mathbf{r} = 0$. Κατά συνέπεια, στην ανάλυση του $d\mathbf{r}'$ σε συνιστώσες, πρέπει να είναι $d\mathbf{r}_2 = 0$.

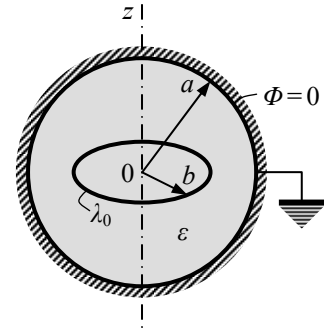
Όλα τα προηγούμενα ισχύουν τόσο για $r' < a$ (εσωτερικό πρόβλημα), όσο και για $r' > a$ (εξωτερικό πρόβλημα). Το **Σχήμα 6.2-14** αναφέρεται στο εσωτερικό πρόβλημα, αλλά μετατρέπεται αμέσως για το εξωτερικό πρόβλημα, εναλλάσσοντας το $i d\mathbf{r}'$ με το είδωλο $i_c d\mathbf{r}'_c$.

Συγκεφαλαίωση: Ένας ρευματοφόρος βρόχος με ρεύμα i , ο οποίος βρίσκεται εξ ολοκλήρου σε κάποια επιφάνεια $r' = \text{σταθ.}$ (είτε με $r' < a$, είτε με $r' > a$) στην περιοχή V (αντίστοιχα με $r < a$, ή $r > a$), στην οποία είναι $\mu = \text{σταθ.}$, με την οριακή συνθήκη ότι στη σφαιρική επιφάνεια $r = a$ είναι $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H} = H_n = 0$, ή, τελείως ισοδύναμα, ότι στο χώρο V_c ($r > a$ ή $r < a$, αντίστοιχα) είναι $\mu_c \ll \mu$, ή $g_c \gg g$, ή, πάλι ισοδύναμα, ότι στην επιφάνεια $r = a$ είναι $\partial\Phi_m/\partial n = 0$, παράγει στο χώρο V μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} , ή διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} , ή βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m , που προσδιορίζεται με:

- ο όλο το χώρο ($V + V_c$) να έχει μαγνητική διαπερατότητα μ , όση είχε αρχικά ο χώρος V ,
- τη συνεισφορά του αρχικού βρόχου i , χωρίς καμία τροποποίηση,
- τη συνεισφορά ενός ειδώλου, στα αντίστοιχα σημεία της επιφάνειας $r'_c = a^2/r'$, με ρεύμα $i_c = -(r'/a)i$, αντίρροπο προς το i .

Το **παράδ. 6.2-15** αναφέρεται σε εφαρμογή κατοπτρισμού για τον προσδιορισμό του μαγνητικού πεδίου από νηματοειδή βρόχο.

Παράδειγμα 6.2-13: Η περιοχή στο εσωτερικό γειωμένης σφαιρικής επιφάνειας με ακτίνα a έχει σταθερή επιτρεπτότητα ϵ . Σε ακτίνα $b = \frac{2}{3}a$, ομόκεντρα με τη σφαιρική επιφάνεια, υπάρχει φορτισμένος δακτύλιος με σταθερό γραμμικό φορτίο λ_0 . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ στο εσωτερικό της σφαίρας.



Επίλυση: Πρόκειται, προφανώς, για διάταξη που μπορεί να αντιμετωπισθεί με κατοπτρισμό σε σφαιρική επιφάνεια. Εξυπηρετεί να επιλεγεί το σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα z κάθετα προς το επίπεδο του δακτυλίου, όπως στο σχήμα, ώστε ο δακτύλιος να βρίσκεται στο ισημερινό επίπεδο (με $\theta' = \pi/2$). Για τη θέση του φορτίου είναι $r' = b = \frac{2}{3}a$, $\theta' = \pi/2$, οπότε $\cos \theta' = 0$ και $\sin \theta' = 1$, και φ' στο διάστημα $0 < \varphi' < 2\pi$, ή οποιοδήποτε άλλο με πλάτος 2π , ενώ το στοιχειώδες μήκος είναι $d\ell' = b d\varphi'$, οπότε $dQ' = \lambda_0 d\ell' = \lambda_0 b d\varphi'$. Με αυτά τα δεδομένα, για την απόσταση R ενός στοιχείου dQ' του δακτυλίου από την τυχούσα θέση $\{r (< a), \theta, \varphi\}$ υπολογισμού του δυναμικού είναι:

$$R^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{4a}{3}r \sin \theta \cos \xi + r^2,$$

με την αλλαγή μεταβλητής $\varphi' \rightarrow \xi = \varphi' - \varphi$, $d\xi = d\varphi'$, $0 < \xi < 2\pi$, που ταιριάζει σε διατάξεις χωρίς εξάρτηση από τη γωνία φ , όπως εδώ. Το διάστημα $0 < \xi < 2\pi$ αντιστοιχεί σε μετατόπιση του διαστήματος για τη γωνία φ' στο $\varphi < \varphi' < \varphi + 2\pi$.

Για τη συνέχεια υπάρχουν δύο ισοδύναμες εναλλακτικές πορείες:

Με άμεση εφαρμογή της σχέσης (6.2-29), στην οποία είναι ενσωματωμένη και η δράση των ειδώλων του κατανεμημένου φορτίου. Από τις αποστάσεις που εμφανίζονται στη σχέση (6.2-29) και ορίζονται στη σχέση (6.2-30), η R έχει ήδη προσδιορισθεί, ενώ για την R^* είναι:

$$R^{*2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 r^2 - \frac{4a}{3}r \sin \theta \cos \xi + a^2.$$

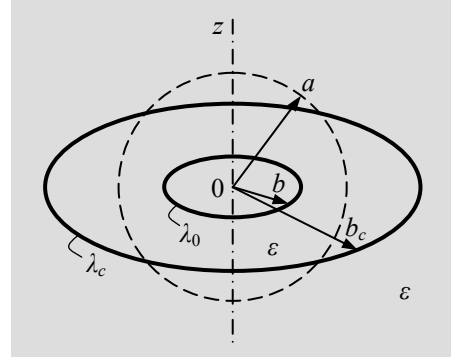
Συνεπώς, το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι:

$$\Phi(r < a, \theta) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{2a}{3} \int_0^{2\pi} d\xi \left(\frac{1}{R(r, \theta; \xi)} - \frac{1}{R^*(r, \theta; \xi)} \right).$$

Με αυτοτελή υπολογισμό της συνεισφοράς των φορτίων και των ειδώλων: Όλος ο χώρος, μέχρι το άπειρο, θεωρείται με επιτρεπτότητα ϵ . Για τα φορτία, οι ποσότητες που εμπλέκονται (οι dQ' και R) έχουν ήδη προσδιορισθεί στην αρχή της επίλυσης. Το είδωλο θα έχει $\theta'_c = \pi/2$ και φ'_c στο διάστημα $0 < \varphi'_c < 2\pi$, ή οποιοδήποτε άλλο με πλάτος 2π , επειδή οι γωνιακές θέσεις φορτίου και ειδώλου ταυτίζονται, και σε κάθε dQ' , σε ακτίνα b , θα αντιστοιχεί ένα

dQ'_c , σε ακτίνα $b_c = a^2/b = {}^3/2a$. Πρόκειται, λοιπόν, για δακτύλιο με ακτίνα b_c , ομόκεντρο με τη σφαίρα και στο ισημερινό επίπεδο, όπως άλλωστε είναι φανερό καθαρά εποπτικά και χωρίς αυτές τις λεπτομέρειες. Με αυτά τα δεδομένα προσδιορίζεται η απόσταση R_c , ίση με:

$$R_c^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - 3ar \sin \theta \cos \xi + r^2,$$



όπου για τη μεταβλητή ολοκλήρωσης, τώρα τη φ'_c , έγινε η ίδια αλλαγή μεταβλητής, $\varphi'_c \rightarrow \xi = \varphi'_c - \varphi$, $d\xi = d\varphi'_c$, $0 < \xi < 2\pi$. Δεν υπάρχει κανένας λόγος να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό σύμβολο, ώστε να διαφοροποιηθεί η μεταβλητή $\varphi'_c - \varphi$ από τη $\xi = \varphi' - \varphi$.

Στο δακτύλιο-είδωλο το φορτίο θα περιγράφεται, προφανώς, από γραμμική πυκνότητα λ_c με σταθερή τιμή. Για να προσδιορισθεί η τιμή του λ_c πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν ότι η σχέση $Q_c = -(a/\ell)Q$ αναφέρεται σε σημειακά φορτία (και όχι σε πυκνότητες), δηλαδή ότι εδώ έχει τη μορφή $\lambda_c d\ell_c = -(a/\ell)(\lambda_0 d\ell) = -{}^3/2\lambda_0 d\ell$. Είτε προσδιορίζοντας γεωμετρικά τη σχέση μεταξύ $d\ell_c$ και $d\ell$ [δηλαδή, $d\ell_c/d\ell = \ell_c/\ell = (a/\ell)^2 = ({}^3/2)^2$], είτε αθροίζοντας όλα τα $\lambda_c d\ell_c$ και $\lambda_0 d\ell$ [δηλαδή, $\lambda_c 2\pi \ell_c = -(\lambda_0/\ell)2\pi \ell^2$], προκύπτει ότι είναι $\lambda_c/\lambda_0 = -\ell/a = -{}^2/3$, οπότε είναι $dQ'_c = \lambda_c d\ell_c = (-{}^2/3)\lambda_0({}^3/2a)d\xi$.

Εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα επαλληλίας και στις δύο κατανομές (αρχικό φορτίο και είδωλο), το δυναμικό προκύπτει ίσο με:

$$\begin{aligned} \Phi(r < a, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_V \frac{dQ'}{R} + \int_{V_c} \frac{dQ'_c}{R_c} \right] \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{2a}{3} \frac{1}{R(r, \theta; \xi)} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{2}{3}\lambda_0 \right) \int_0^{2\pi} d\xi \frac{3a}{2} \frac{1}{R_c(r, \theta; \xi)} \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon} \frac{2a}{3} \int_0^{2\pi} d\xi \left(\frac{1}{R(r, \theta; \xi)} - \frac{{}^3/2}{R_c(r, \theta; \xi)} \right). \end{aligned}$$

Επειδή $R_c = {}^3/2R^*$, το αποτέλεσμα αυτό ταυτίζεται με εκείνο από την προηγούμενη επίλυση.

Σχόλιο: Το δυναμικό εξαρτάται από τις συντεταγμένες r και θ , μέσω των εκφράσεων για τις αποστάσεις R και R^* ή R_c . Είναι $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$, όπως αναμένεται σε διάταξη που είναι ανεξάρτητη από τη γωνία φ συνολικά: στη θέση του λ , στην τιμή του λ , στην επιτρεπτότητα ϵ , στη θέση του ορίου, καθώς και στην οριακή συνθήκη. Και βέβαια, η έκφραση για το δυναμικό ισχύει μόνο για $r < a$, ενώ για την περιοχή $r > a$ είναι γνωστό μόνο ότι $\Phi = 0$ στο υλικό του γειωμένου κελύφους.

Παράδειγμα 6.2-14: Ένα γειωμένο αγωγίμο σφαιρικό κέλυφος με ακτίνα a και με μικρό πάχος βρίσκεται σε χώρο με ϵ_0 . Στον άξονα z βρίσκεται γραμμικό φορτίο, ίσο με λ_0 στο τμήμα $a/3 < z < a/2$ και ίσο με $-6\lambda_0$ στο τμήμα $2a < z < 3a$. Ζητείται η κατανομή του επιφανειακού φορτίου $\sigma(\theta, \varphi)$, που επάγεται στο σφαιρικό κέλυφος $r = a$.

Επίλυση: Η διάταξη αποτελείται από δύο περιοχές $V_{1,2}$, με $r < a$ και με $r > a$, αντίστοιχα. Το ζητούμενο φορτίο βρίσκεται στη μεταξύ τους επιφάνεια και είναι $\sigma = \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-)$, δηλαδή $\sigma = \epsilon_0 \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-)$.

Με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_r$ στη σφαιρική επιφάνεια και $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, προκύπτει:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left(\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=a^+} - \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=a^-} \right).$$

Πρέπει συνεπώς να προσδιορισθεί το δυναμικό και στις δύο περιοχές V_1 και V_2 . Τα δύο προβλήματα, το εσωτερικό και το εξωτερικό, είναι μεταξύ τους τελείως ανεξάρτητα.

Εσωτερικό πρόβλημα, στο $V_1(r < a)$, με λ_0 στο $a/3 < z < a/2$: Είναι $a/3 < r'_1 < a/2$ και $\theta'_1 = 0$ (συνεπώς, $\cos\theta'_1 = 1$ και $\sin\theta'_1 = 0$). Η γωνία φ'_1 εμφανίζεται μόνο στον όρο $\cos(\varphi'_1 - \varphi)$, που πολλαπλασιάζεται με $\sin\theta'_1 = 0$, συνεπώς δεν ενδιαφέρει το ότι δεν ορίζεται στον άξονα z .

Με $dQ'_1 = \lambda_0 dz' = \lambda_0 dr'_1$, το δυναμικό στην περιοχή V_1 προκύπτει ίσο με:

$$\Phi_1(r < a, \theta) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{a/3}^{a/2} dr'_1 \left[\frac{1}{\sqrt{r_1'^2 - 2r'_1 r \cos\theta + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 r_1'^2 - 2r'_1 r \cos\theta + a^2}} \right].$$

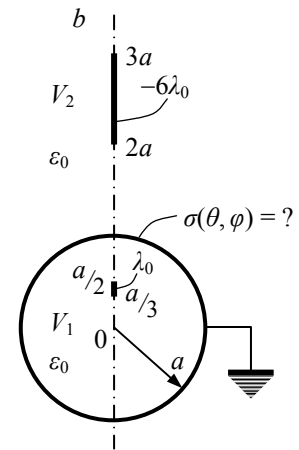
Εξωτερικό πρόβλημα, στο $V_2(r > a)$, με $-6\lambda_0$ στο $2a < z < 3a$: Είναι αντίστοιχα $2a < r'_2 < 3a$, $\theta'_2 = 0$, αδιάφορο το φ'_2 , και $dQ'_2 = -6\lambda_0 dr'_2$, οπότε το δυναμικό της περιοχής V_2 είναι:

$$\Phi_2(r > a, \theta) = \frac{-6\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{2a}^{3a} dr'_2 \left[\frac{1}{\sqrt{r_2'^2 - 2r'_2 r \cos\theta + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 r_2'^2 - 2r'_2 r \cos\theta + a^2}} \right].$$

Με τις εκφράσεις για το δυναμικό στις δύο περιοχές προσδιορίζεται το επιφανειακό φορτίο:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \epsilon_0 \left(\left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} \right) \right|_{r=a}.$$

Από τη στιγμή που είναι σαφές ποιες συναρτήσεις περιγράφουν το δυναμικό σε κάθε περιοχή του χώρου (η Φ_1 και η Φ_2), η διάκριση μεταξύ $r = a^-$ και $r = a^+$ πλεονάζει και δεν έχει σημειωθεί στο παραπάνω αποτέλεσμα.



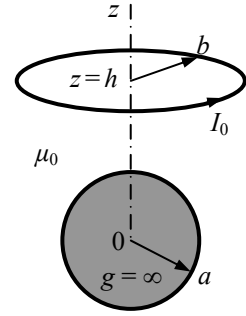
Σχόλια:

- Για την επίλυση προτιμήθηκε η αναγωγή των ειδώλων στις συντεταγμένες των φορτίων, όπως αποδίδεται από τη σχέση (6.2-29) που χρησιμοποιήθηκε. Όπως φάνηκε και στο προηγούμενο παράδ. 6.2-13, η άμεση εφαρμογή αυτής της σχέσης καταλήγει σε σαφώς ταχύτερη επίλυση, κυρίως επειδή αποφεύγεται ο προσδιορισμός των ειδώλων.
- Ανεξάρτητα από το προηγούμενο σχόλιο, θα μπορούσε βέβαια να προσδιορισθεί για κάθε περιοχή χωριστά το δυναμικό λόγω των φορτίων και χωριστά εκείνο λόγω των ειδώλων, όπως δηλαδή στη δεύτερη επίλυση στο προηγούμενο παράδ. 6.2-13. Σε τέτοια περίπτωση πρέπει να προσεχθεί ότι το είδωλο λ_{1c} όχι μόνο έχει διαφορετική τιμή από το φορτίο λ_0 , αλλά και διαφορετική κατανομή στο χώρο. Τα στοιχεία $d\ell$ είναι και αυτά αντικείμενα του μετασχηματισμού $r'_c = a^2/r'$, όταν κατά μήκος τους μεταβάλλεται η ακτινική θέση r' , όπως εδώ. Συγκεκριμένα, είναι $dr'_c = (dr'_c/dr')dr' = -(a/r')^2 dr' = -(r'_c/a)^2 dr'$, δηλαδή $d\ell_c = |dr'_c| = (r'_c/a)^2 |dr'| = (r'_c/a)^2 d\ell$. Στο $dQ' = \lambda_0 d\ell'$ αντιστοιχεί είδωλο $dQ'_c = \lambda_c d\ell_c = -(a/r')\lambda_0 d\ell$, οπότε επιλύοντας είναι $\lambda_c = -(a/r')\lambda_0(d\ell/d\ell_c) = -\lambda_0(a/r')(r'/a)^2 = -\lambda_0(r'/a) = -\lambda_0(a/r'_c)$, που δεν είναι σταθερό. Αντίθετα, στο παράδ. 6.2-13 το είδωλο του δακτυλίου είχε σταθερή γραμμική πυκνότητα, επειδή κατά μήκος της φορτισμένης γραμμής δεν μεταβάλλεται η ακτινική θέση).
- Όπως στη σχέση (6.2-29) έχει γίνει αναγωγή των ειδώλων στις θέσεις των φορτίων, θα μπορούσε να ακολουθηθεί η αντίστροφη διαδικασία, αναγωγή των φορτίων στις θέσεις των ειδώλων, με συνέπεια η ολοκλήρωση να γίνει στην περιοχή V_c , και όχι στην V . Αυτό επιτυγχάνεται, π.χ. για το Φ_2 , με την αλλαγή μεταβλητής $r'_2 = a^2/r'_1$, που σημαίνει $dr'_2 = -(a/r'_1)^2 dr'_1$. Αξιοσημείωτη συνέπεια είναι, ότι τα όρια μετασχηματίζονται από τις θέσεις $2a$ και $3a$ στις θέσεις $a/2$ και $a/3$, συνεπώς, το ολοκλήρωμα για το Φ_2 έχει τα ίδια όρια με εκείνο για το Φ_1 . Όποιος ενδιαφέρεται μπορεί να συμπληρώσει τις πράξεις και να διαπιστώσει, ότι τελικά είναι:

$$\begin{aligned} & \Phi_1(r, \theta) - \Phi_2(r, \theta) \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{a/3}^{a/2} dr'_1 \left(1 + \frac{6a}{r'_1}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{r_1'^2 - 2r'_1 r \cos\theta + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 r_1'^2 - 2r'_1 r \cos\theta + a^2}} \right]. \end{aligned}$$

Στην παρένθεση $(1 + 6a/r'_1)$, ο πρώτος όρος δίνει το Φ_1 του φορτίου λ_0 , ενώ ο δεύτερος το Φ_2 , που παράγεται από φορτίο ίσο με $-6\lambda_0$, του οποίου το είδωλο είναι $+(a/r'_1)(6\lambda_0)$.

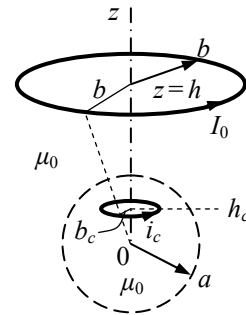
Παράδειγμα 6.2-15: Στο επίπεδο $z = h$ υπάρχει ένας κυκλικός ρευματοφόρος βρόχος με ακτίνα $r_T = b$, με ρεύμα I_0 . Όλος ο χώρος έχει μαγνητική διαπερατότητα κενού, $\mu = \mu_0$, εκτός από τη σφαιρική περιοχή $r < a$, η οποία καταλαμβάνεται από υλικό με υψηλή τιμή για την ειδική αγωγιμότητα. Είναι $a^2 < h^2 + b^2 = \ell^2$. Ζητείται το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} στο χώρο $r > a$.



Επίλυση: Η ιδιότητα $g \rightarrow \infty$ για την περιοχή V_c ($r < a$) έχει ως συνέπεια ότι στο όριο $r = a$ μεταξύ των δύο περιοχών πρέπει η κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου να μηδενίζεται, $H_n = 0$. Επίσης, όλα τα σημεία του ρευματοφόρου βρόχου έχουν σταθερή απόσταση, ίση με $\ell = (h^2 + b^2)^{1/2}$, από το κέντρο της σφαίρας, δηλαδή ο βρόχος βρίσκεται πλήρως σε σφαιρική επιφάνεια ομόκεντρη με τη διαχωριστική επιφάνεια. Ικανοποιούνται, συνεπώς οι δύο συνθήκες που επιτρέπουν την επίλυση με τη διαδικασία του κατοπτρισμού. Και βέβαια, η σχέση $a^2 < h^2 + b^2 = \ell^2$ σημαίνει ότι ο δακτύλιος βρίσκεται έξω από τη σφαιρική περιοχή, σε θέσεις με $r > a$, εκεί όπου ζητείται το μαγνητικό πεδίο.

Για να εφαρμοσθεί ο νόμος *Biot-Savart* χρειάζονται οι ακόλουθες ποσότητες:

Για το βρόχο, με ρεύμα I_0 , είναι $d\mathbf{r}' = b d\varphi' \mathbf{i}'_\varphi$ και $\mathbf{r}' = b \mathbf{i}'_T + h \mathbf{i}_z$, συνεπώς $\mathbf{R} = r_T \mathbf{i}_T - b \mathbf{i}'_T + (z-h) \mathbf{i}_z$ και $R^2 = r_T^2 + b^2 - 2r_T b \cos \zeta + (z-h)^2$, όπου η γωνία $\zeta = \varphi' - \varphi$ πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή ολοκλήρωσης, με $0 < \zeta < 2\pi$. Στο $d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}$ εμπλέκονται τα εξωτερικά γινόμενα $\mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}_T = -\mathbf{i}_z \cos \zeta$, $\mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}'_T = -\mathbf{i}_z$ και $\mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}_z = \mathbf{i}'_T = \mathbf{i}_T \cos \zeta + \mathbf{i}_\varphi \sin \zeta$, συνεπώς είναι $\mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{R} = (-r_T \cos \zeta + b) \mathbf{i}_z + (z-h)(\mathbf{i}_T \cos \zeta + \mathbf{i}_\varphi \sin \zeta)$.



Για το είδωλο το ρεύμα είναι $i_c = -(r'/a)I_0 = -(\ell/a)I_0$ και τα σημεία του απέχουν από το 0 απόσταση $r'_c = a^2/r'$, δηλαδή $r'_c/r' = (a/\ell)^2$. Από τα όμοια τρίγωνα είναι $b_c/b = h_c/h = r'_c/r' = (a/\ell)^2$ για την ακτίνα b_c και το υψόμετρο h_c του ειδώλου. Οι λοιπές ποσότητες δίδονται από τις ίδιες εκφράσεις, όπως για τον αρχικό βρόχο, με τις αντικαταστάσεις $b \rightarrow b_c$ και $h \rightarrow h_c$.

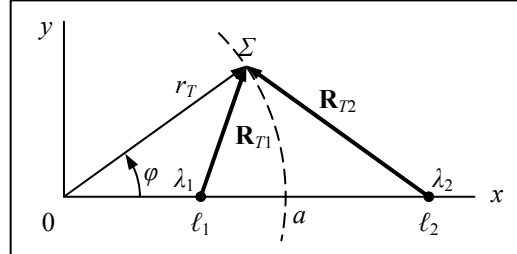
Εισάγοντας τα παραπάνω στο νόμο *Biot-Savart* και σημειώνοντας ότι $\int_0^{2\pi} d\zeta \sin \zeta / R^3 (\cos \zeta) = 0$, ως ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης, προκύπτει το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{H} = \frac{I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta \left[b \frac{\mathbf{i}_z (b - r_T \cos \zeta) + \mathbf{i}_T (z-h) \cos \zeta}{[r_T^2 + b^2 - 2r_T b \cos \zeta + (z-h)^2]^{3/2}} - b_c \frac{\ell}{a} \frac{\mathbf{i}_z (b_c - r_T \cos \zeta) + \mathbf{i}_T (z-h_c) \cos \zeta}{[r_T^2 + b_c^2 - 2r_T b_c \cos \zeta + (z-h_c)^2]^{3/2}} \right].$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}_T αναφέρεται στο άτονο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή η σχέση αυτή δίνει, χωρίς περαιτέρω επεξεργασία, τις συνιστώσες H_T και H_z του πεδίου \mathbf{H} .

6.2.4 Κατοπτρισμός σε κύλινδρο

Δυναμικό από δύο νηματοειδή φορτία: Με παρόμοια διαδικασία, όπως στον κατοπτρισμό σε σφαίρα, θεωρείται πως υπάρχουν δύο νηματοειδή φορτία με άπειρο μήκος, παράλληλα προς τον άξονα z , το φορτίο λ_1 που διέρχεται από το $x = \ell_1, y = 0$ και το λ_2 που διέρχεται από το $x = \ell_2, y = 0$ (βλ. **Σχήμα 6.2-15**), και αναζητώνται οι προϋποθέσεις, κάτω από τις οποίες υπάρχει κάποια επιφάνεια $r_T = a$, η οποία είναι ισοδυναμική με $\Phi = 0$. Με άλλα λόγια, αναζητούνται οι προϋποθέσεις, ώστε όταν $r_T = a$ και, φυσικά, σε κάθε φ να μηδενίζεται η ποσότητα:



Σχήμα 6.2-15

$$\Phi(r_T, \varphi) = \frac{-1}{2\pi\epsilon} \left[\lambda_1 \ln \frac{R_{T1}}{R_{T10}} + \lambda_2 \ln \frac{R_{T2}}{R_{T20}} \right] = -\frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon} \left[\ln \frac{R_{T1}^2}{R_{T10}^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \frac{R_{T2}^2}{R_{T20}^2} \right], \quad (6.2-36)$$

όπου $R_{T1}^2 = r_T^2 + \ell_1^2 - 2r_T\ell_1 \cos \varphi$ και $R_{T2}^2 = r_T^2 + \ell_2^2 - 2r_T\ell_2 \cos \varphi$, ενώ R_{T10}, R_{T20} είναι οι αντίστοιχες αποστάσεις του σημείου αναφοράς από τα φορτία.

Θέτοντας την απαίτηση $\Phi = 0$ και ενώνοντας τις δύο λογαριθμικές συναρτήσεις προκύπτει $(R_{T1}^2 / R_{T10}^2) (R_{T2}^2 / R_{T20}^2)^{\lambda_2/\lambda_1} = 1$. Η εξίσωση αυτή είναι εν γένει υπερβατική, εκτός από την περίπτωση που ο εκθέτης λ_2/λ_1 είναι ίσος με πηλίκιο ακέραιων αριθμών, οπότε μετατρέπεται σε πολυωνυμική. Στην ειδική περίπτωση $\lambda_2 = -\lambda_1$, κατά την οποία τα φορτία είναι αντίθετα και με $\kappa^2 = R_{T10}^2 / R_{T20}^2$, σχηματίζεται δευτεροβάθμια εξίσωση, $R_{T1}^2 = \kappa^2 R_{T2}^2$, δηλαδή:

$$r_T^2 (1 - \kappa^2) - 2r_T (\ell_1 - \kappa^2 \ell_2) \cos \varphi + (\ell_1^2 - \kappa^2 \ell_2^2) = 0, \quad (6.2-37)$$

που περιγράφει κύκλους (δηλαδή, κυλίνδρους) με κέντρο στον άξονα x . Προκειμένου να είναι κάποιος συγκεκριμένος κύκλος $r_T = a$, με κέντρο στην αρχή των αξόνων, ο μεσαίος όρος πρέπει να μηδενίζεται ως ταυτότητα, ώστε να εξαλειφθεί η εξάρτηση από το $\cos \varphi$, επομένως να είναι $\kappa^2 = \ell_1/\ell_2$ και συνεπώς $r_T^2 = (\kappa^2 \ell_2^2 - \ell_1^2)/(1 - \kappa^2) = a^2$, από όπου προκύπτει $a^2 = \ell_1/\ell_2$. Αν είναι $\ell_1 < a$, τότε $\ell_2 > a$, και αντιστρόφως, δηλαδή τα δύο γραμμικά φορτία βρίσκονται σε διαφορετικές περιοχές του χώρου, σε σχέση με την κυλινδρική επιφάνεια.

Συνοψίζοντας, δύο νηματοειδή φορτία, λ_1 και λ_2 , ομοεπίπεδα με τον άξονα z και σε αποστάσεις από αυτόν αντίστοιχα ίσες με ℓ_1 και ℓ_2 , παράγουν δυναμικό με ισοδυναμική επιφάνεια με $\Phi = 0$ μία κυλινδρική επιφάνεια, με άξονα στο $r_T = 0$ και ακτίνα a , όταν:

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \quad \text{και} \quad \ell_1 \ell_2 = a^2. \quad (6.2-38)$$

Κατοπτρισμός ευθύγραμμου νηματοειδούς φορτίου σε κυλινδρική επιφάνεια με $\Phi = 0$: Οι προηγούμενες πληροφορίες προσδιορίζουν τη διαδικασία:

Αρχικό πρόβλημα: Περιοχή V είναι είτε αυτή με $r_T < a$ («εσωτερικό» πρόβλημα), είτε αυτή με $r_T > a$ («εξωτερικό πρόβλημα»). Στην περιοχή V η επιτρεπτότητα ε έχει σταθερή τιμή και υπάρχει σταθερό φορτίο λ με άπειρο μήκος, σε απόσταση ℓ από τον άξονα του κυλίνδρου. Στο όριο $r_T = a$ η οριακή συνθήκη είναι $\Phi = 0$. Ισοδύναμες συνθήκες είναι, στον παρακείμενο χώρο να είναι $g_c \rightarrow \infty$, ή $\varepsilon_c \rightarrow \infty$, ή στο όριο να είναι $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = 0$, δηλαδή $\mathbf{E}(r_T = a) = \mathbf{i}_T E_T$.

Βοηθητικό πρόβλημα: Όλος ο χώρος θεωρείται ότι έχει επιτρεπτότητα ε , όση και της περιοχής V στο αρχικό πρόβλημα. Εκτός από το αρχικό λ (στη θέση $r'_T = \ell$, $\varphi' = \varphi'_\lambda$) τοποθετείται είδωλο $\lambda_c = -\lambda$ στη θέση $r'_{Tc} = \ell_c = a^2/\ell$, $\varphi'_c = \varphi'_\lambda$ και προσδιορίζεται το δυναμικό που παράγεται αθροιστικά από το λ και το λ_c , με την αναφορά στην ακτίνα $r_{T0} = a$.

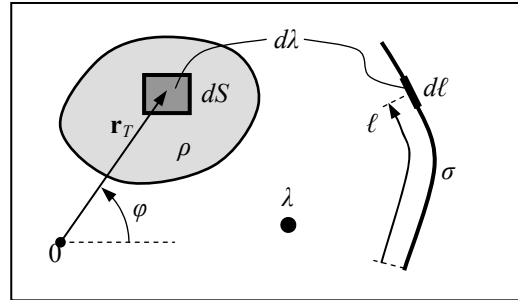
Το δυναμικό στην περιοχή V του αρχικού προβλήματος είναι όσο και του βοηθητικού προβλήματος στο χώρο V . Συγκεκριμένα, στη σχέση (6.2-36) θα γίνουν οι αντικαταστάσεις $\lambda_1 \rightarrow \lambda$ και $\lambda_2 \rightarrow \lambda_c = -\lambda$, καθώς και $\ell_1 \rightarrow \ell = r'_T$ και $\ell_2 \rightarrow \ell_c = r'_{Tc} = a^2/r'_T$, όπως και $\varphi \rightarrow \varphi - \varphi'$. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι έχει ορισθεί $\kappa^2 = R_{T10}^2/R_{T20}^2$ και ότι προκειμένου η επιφάνεια με $\Phi = 0$ να είναι η επιφάνεια $r_T = a$, πρέπει να είναι $\kappa^2 = \ell_1/\ell_2$. Αυτό σημαίνει ότι $(R_{Tc0}/R_{T0})^2 = 1/\kappa^2 = \ell_c/\ell = (a/r'_T)^2$, οπότε η σχέση (6.2-36) γράφεται:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T) &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \left(\frac{a^2 R_T^2}{r_T'^2 R_{Tc}^2} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{r_T'^2 - 2r_T' r_T \cos(\varphi' - \varphi) + r_T^2}{\left(\frac{r_T}{a}\right)^2 r_T'^2 - 2r_T' r_T \cos(\varphi' - \varphi) + a^2} \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \left(\frac{R_T^2}{R_T^{*2}} \right). \end{aligned} \quad (6.2-39)$$

όπου με το \mathbf{r}_T συμβολίζεται η θέση (r_T, φ) υπολογισμού του δυναμικού και $\mathbf{r}'_T = (r'_T, \varphi')$ είναι η θέση του φορτίου. Στο πηλίκο εμφανίζεται το τετράγωνο των αποστάσεων $R_T = |\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T|$ και $R_T^* = (r'_T/a)R_{Tc} = (r'_T/a)|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_{Tc}|$. Αυτές οι ποσότητες αντιστοιχούν στις αποστάσεις R και R^* του αντίστοιχου προβλήματος της σφαίρας, βλ. τη σχέση (6.2-28), και είναι ίσες με:

$$\begin{aligned} R_T^2(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T) &= r_T'^2 - 2r_T' r_T \cos(\varphi' - \varphi) + r_T^2, \\ R_T^{*2}(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T) &= \left(\frac{r_T}{a}\right)^2 r_T'^2 - 2r_T' r_T \cos(\varphi' - \varphi) + a^2. \end{aligned} \quad (6.2-40)$$

Κατοπτρισμός διδιάστατης κατανομής φορτίων: Ένα βασικό χαρακτηριστικό στη σχέση (6.2-39β) είναι ότι εμπλέκει μόνο τις συντεταγμένες (r_T', φ') του φορτίου λ , και όχι του ειδώλου, οπότε μπορεί να επεκταθεί άμεσα σε διδιάστατες κατανομές φορτίου, με $d\lambda = \rho(\mathbf{r}_T)dS$ ή $d\lambda = \sigma(\ell)d\ell$ για χωρική ή επιφανειακή πυκνότητα με $\partial\rho/\partial z = 0$ και $\partial\sigma/\partial z = 0$, όπως αυτές που παρουσιάζει το **Σχήμα 6.2-16**, σε επίπεδο κάθετο προς τον άξονα z . Περιγράφοντας τη θέση των φορτίων με τονισμένες μεταβλητές, προκύπτει η γραφή:



Σχήμα 6.2-16

$$\Phi(r_T, \varphi) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int d\lambda' \ln \left(\frac{R_T^2(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}_T')}{R_T^{*2}(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}_T')} \right), \quad (6.2-41)$$

όπου οι αποστάσεις R_T και R_T^* έχουν ορισθεί στη σχέση (6.2-40). Φυσικά, η ολοκλήρωση εννοείται ως προς τις τονισμένες μεταβλητές και εκτείνεται στη διατομή των φορτίων που περιγράφονται από τα $d\lambda'$. Η σχέση (6.2-41) εφαρμόζεται στο **παράδ. 6.2-16**, όπου και σχολιάζεται η απαιτούμενη προσπάθεια για την εφαρμογή αυτής της σχέσης, σε σύγκριση με την «ευθεία» επίλυση, πρώτα να προσδιορισθούν η τιμή και η θέση του ειδώλου από τη σχέση (6.2-38) και έπειτα να εφαρμοσθεί η σχέση (6.2-36) με $r_{T0} = a$.

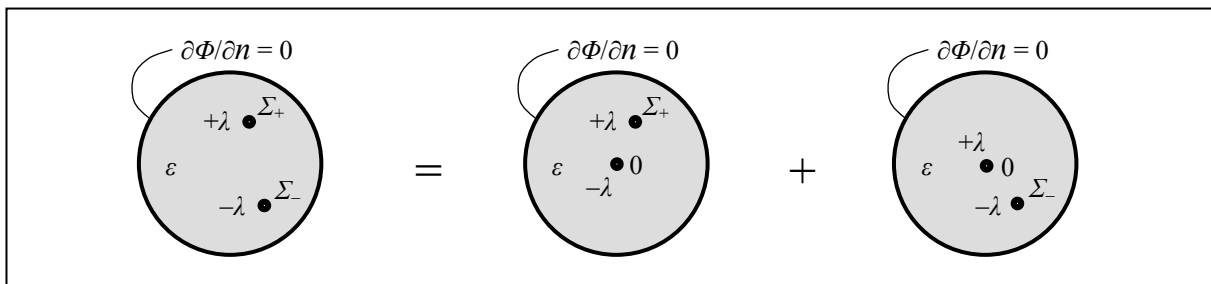
Συμπεριφορά στο άπειρο: Το εξωτερικό πρόβλημα αφορά την περιοχή $r_T > a$, της οποίας όριο είναι όχι μόνο η κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$, όπου έχει επιβληθεί ομογενής συνθήκη *Dirichlet*, $\Phi = 0$, αλλά και ο κύλινδρος στο άπειρο, ώστε να σχηματίζεται κλειστή επιφάνεια S . Στη σχέση (6.2-41) παρατηρείται ότι καθώς $r_T \rightarrow \infty$ (δηλαδή, πολύ μεγαλύτερο από κάθε r_T' με $d\lambda' \neq 0$) τα R_T και R_T^* είναι ανάλογα προς το r_T , με συνέπεια το δυναμικό να τείνει σε σταθερή τιμή $U_\infty = (1/2\pi\epsilon) \int d\lambda' \ln(r_T'/a)$, εξαρτώμενη από την κατανομή των φορτίων. Με άλλα λόγια, στο εξωτερικό πρόβλημα με την οριακή συνθήκη $\Phi(r_T = a) = 0$ η λύση (6.2-41) έχει την ιδιότητα $\Phi(r_T \rightarrow \infty) = U_\infty$.

Η απαίτηση $\Phi(r_T \rightarrow \infty) = 0$ δεν είναι αποδεκτή, όπως δεν είναι δυνατόν σε κατανομή με γραμμικό φορτίο άπειρου μήκους να επιλεγεί το σημείο αναφοράς στο άπειρο. Αν όμως θεωρηθεί ότι ως ακτινικό άπειρο εννοείται συγκεκριμένη ακτίνα $r_T = A \gg a$, τότε είναι εφικτό να ικανοποιηθεί συνθήκη με μορφή $\Phi(r_T = A \gg a) = 0$. Γράφοντας το δυναμικό ως $\Phi + \Delta\Phi$, όπου Φ είναι η παράσταση στη σχέση (6.2-41), παρατηρείται ότι η διόρθωση $\Delta\Phi$ υπακούει σε μονοδιάστατο πρόβλημα οριακών συνθηκών, του οποίου η επίλυση είναι εύκολη και δίνει το αποτέλεσμα $\Delta\Phi = -U_\infty [\ln(r_T/a)/\ln(A/a)]$.

Κατοπτρισμός σε κύλινδρο με ομογενή συνθήκη Neumann: Στο αρχικό πρόβλημα, με τα λ_1, λ_2 στις θέσεις ℓ_1, ℓ_2 ακόμη απροσδιόριστα, αντικαθιστούμε την οριακή συνθήκη $\Phi(r_T=a) = 0$ με την ομογενή συνθήκη Neumann, $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=a} = 0$, η οποία στην προκείμενη περίπτωση, με $\mathbf{i}_n = \pm \mathbf{i}_T$ για το εσωτερικό/εξωτερικό πρόβλημα, γράφεται $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$. Η προοπτική είναι, ένα από τα $\lambda_{1,2}$ να είναι το φορτίο στο χώρο V και το άλλο το είδωλο στο χώρο V_c , συνεπώς η κυλινδρική επιφάνεια που χωρίζει τους δύο χώρους πρέπει να έχει ακτίνα με ενδιάμεση τιμή, και ας ληφθεί ότι είναι $\ell_1 < a < \ell_2$.

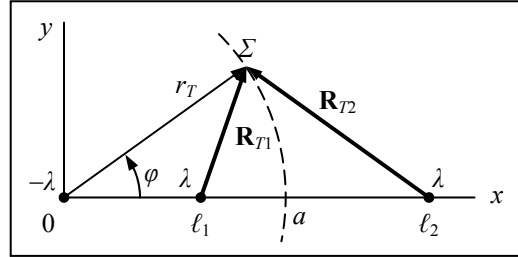
Όπως όμως έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 6.1.1, η συνθήκη Neumann έχει τη δέσμευση της σχέσης (6.1-22), ουσιαστικά του νόμου του Gauss, που στην παρούσα περίπτωση με $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$ εξειδικεύεται στο ότι το φορτίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου πρέπει να είναι συνολικά ίσο με μηδέν. Πρέπει συνεπώς στην περιοχή $r_T < a$ να υπάρχει, εκτός από το λ_1 , και ένα $\lambda_0 = -\lambda_1$. Ιδίως αν η περιοχή $r_T < a$ αντιπροσωπεύει το χώρο V , η θέση του λ_0 , ή, γενικότερα, της κατανομής φορτίων που αθροίζονται σε λ_0 , καθορίζεται από τα δεδομένα της διάταξης. Είναι όμως δυνατόν να εφαρμοσθεί η επαλληλία που σημειώνεται στο **Σχήμα 6.2-17**. Η διάταξη με τα φορτία $\pm\lambda$ σε δύο τυχαίες θέσεις Σ_{\pm} μπορεί να αναλυθεί σε δύο διατάξεις, η πρώτη με το $+\lambda$ στη θέση Σ_+ και ένα αντίθετο φορτίο, ίσο με $-\lambda$, στον άξονα, και η δεύτερη με το $-\lambda$ στη θέση Σ_- και πάλι ένα αντίθετο φορτίο, τώρα ίσο με $+\lambda$, στον άξονα, διατηρώντας την υπ' όψιν οριακή συνθήκη $(\partial\Phi/\partial n = 0)$ στα επιμέρους προβλήματα της επαλληλίας. (Υπενθυμίζεται, ότι σε προβλήματα οριακών τιμών κατά την επαλληλία πρέπει τα επί μέρους προβλήματα να έχουν οριακές συνθήκες ίδιου τύπου με του αρχικού, και να αθροίζονται όχι μόνο τα αίτια στο εσωτερικό, αλλά και οι τιμές στο όριο, εδώ $0 + 0 = 0$.)

Η απαίτηση, να είναι μηδενικό το συνολικό φορτίο της περιοχής $r_T < a$, καλύπτεται λοιπόν με επαλληλία διατάξεων, οι οποίες έχουν όλες την ίδια δομή: περιέχουν δύο αντίθετα φορτία, από τα οποία το ένα βρίσκεται στον άξονα. Η επίλυση μιας τέτοιας διάταξης αποτελεί τη βάση για να αναπτυχθεί η επίλυση με κατοπτρισμό διατάξεων που υπακούουν σε ομογενή συνθήκη Neumann, $\partial\Phi/\partial n = 0$, στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$.



Σχήμα 6.2-17

Με βάση αυτούς τους συλλογισμούς, το φορτίο $-\lambda_1$, το οποίο απαιτείται για συμβατότητα με την ομογενή συνθήκη *Neumann*, μπορεί να τεθεί στον άξονα z . Για το πρόσημο του λ_2 , η λογική επιλογή είναι να είναι ομόσημο με το λ_1 , ώστε η αντίρροπη δράση των λ_1 και λ_2 στην ενδιάμεσή τους κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ να μπορεί να οδηγήσει σε $\partial\Phi/\partial r_T|_{r_T=a} = 0$, δηλαδή σε $E_T = 0$, όπως στο αντίστοιχο πρόβλημα κατοπτρισμού σε επίπεδο (που αντιστοιχεί, άλλωστε, στο όριο $a \rightarrow \infty$). Τέλος, με βάση και το αποτέλεσμα $\lambda_2 = -\lambda_1$ σε συνθήκη *Dirichlet*, εδώ λαμβάνεται ως υπόθεση εργασίας $\lambda_2 = +\lambda_1$, πάλι αντλώντας από την εμπειρία από τον κατοπτρισμό σε επίπεδο. Θα μελετηθεί συνεπώς η διάταξη των τριών γραμμικών φορτίων $-\lambda$ (στο 0), λ (στο $\ell_1 < a$) και λ (στο $\ell_2 > a$), όπως αυτή του **Σχήματος 6.2-18**.



Σχήμα 6.2-18

Για τη διάταξη αυτή, το δυναμικό είναι:

$$\Phi = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon} \left(-\ln \frac{r_T^2}{r_{T0}^2} + \ln \frac{R_{T1}^2}{R_{T10}^2} + \ln \frac{R_{T2}^2}{R_{T20}^2} \right), \quad (6.2-42)$$

όπου $R_{T1}^2 = r_T^2 - 2r_T\ell_1 \cos\varphi + \ell_1^2$ και $R_{T2}^2 = r_T^2 - 2r_T\ell_2 \cos\varphi + \ell_2^2$ είναι οι σχετικές αποστάσεις από τις θέσεις $\ell_{1,2}$ και οι ποσότητες με δείκτη «0» αντιπροσωπεύουν τις αντίστοιχες αποστάσεις του σημείου αναφοράς.

Εδώ, όμως, ενδιαφέρει η παράγωγος $\partial\Phi/\partial r_T$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_T} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r_T} + \frac{r_T - \ell_1 \cos\varphi}{R_{T1}^2} + \frac{r_T - \ell_2 \cos\varphi}{R_{T2}^2} \right). \quad (6.2-43)$$

Θέτοντας $\partial\Phi/\partial r_T = 0$, προκειμένου να προσδιορισθεί αν υπάρχει κύλινδρος $r_T = a$, στον οποίο να ικανοποιείται η συνθήκη *Neumann*, και ποια είναι η τιμή του a , προκύπτει η πολυωνυμική εξίσωση $-R_{T1}^2 R_{T2}^2 + r_T R_{T2}^2 (r_T - \ell_1 \cos\varphi) + r_T R_{T1}^2 (r_T - \ell_2 \cos\varphi) = 0$. Εισάγοντας τις εκφράσεις για τα τριώνυμα R_{T1}^2 και R_{T2}^2 και αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει η ισοδύναμη έκφραση $r_T^4 - r_T^3(\ell_1 + \ell_2)\cos\varphi + r_T\ell_1\ell_2(\ell_1 + \ell_2)\cos\varphi - \ell_1^2\ell_2^2 = 0$. Ενδιαφέρει αυτή η σχέση να ικανοποιείται με κατάλληλο $r_T = a$, ανεξάρτητο από την τιμή της γωνίας φ , άρα να ικανοποιείται και όταν είναι $\cos\varphi = 0$, πράγμα που συμβαίνει όταν $r_T = (\ell_1\ell_2)^{1/2}$. Αμέσως φαίνεται πως τότε ικανοποιείται η πολυωνυμική εξίσωση για κάθε τιμή της γωνίας φ . Κατά συνέπεια, η ζητούμενη ιδιότητα $\partial\Phi/\partial r_T = 0$ εκδηλώνεται στον κύλινδρο $r_T = a$, με ακτίνα $a = (\ell_1\ell_2)^{1/2}$, όταν δηλαδή είναι $\ell_2 = a^2/\ell_1$, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της συνθήκης *Dirichlet*.

Η διαδικασία κατοπτρισμού σε κύλινδρο με ομογενή συνθήκη *Neumann* διατυπώνεται με βάση την ανάλυση που μόλις παρουσιάστηκε. Λόγω, όμως, του φορτίου $-\lambda$ στον άξονα $r_T = 0$, επιβάλλεται μια μικρή διαφοροποίηση μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού προβλήματος.

- Εσωτερικό πρόβλημα: Η περιοχή $V (r_T < a)$ με σταθερή επιτρεπτότητα ε έχει δύο γραμμικά φορτία (σταθερά, με άπειρο μήκος), το ένα ίσο με λ και στη θέση $r'_T = \ell (< a)$, $\varphi' = \varphi'_\lambda$ και το άλλο ίσο με $-\lambda$ στον άξονα z . Η οριακή συνθήκη $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$ σχηματίζεται προσδιορίζοντας το δυναμικό Φ από την επαλληλία των δύο δεδομένων φορτίων και ενός ειδώλου, ίσου με $\lambda_c = \lambda$ στη θέση $r'_{Tc} = a^2/\ell (> a)$, $\varphi' = \varphi'_\lambda$, με ολόκληρο το χώρο $0 < r_T < \infty$ να έχει σταθερή επιτρεπτότητα ε , όση η αρχική διάταξη.
- Εξωτερικό πρόβλημα: Στην περιοχή $V (r_T > a)$ με σταθερό ε υπάρχει ένα γραμμικό φορτίο (σταθερό, με άπειρο μήκος) ίσο με λ στη θέση $r'_T = \ell (> a)$, $\varphi' = \varphi'_\lambda$. Για την οριακή συνθήκη $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$ το δυναμικό Φ προσδιορίζεται από την επαλληλία του δεδομένου φορτίου και δύο ειδώλων, το ένα ίσο με λ στη θέση $r'_{Tc} = a^2/\ell (< a)$, $\varphi' = \varphi'_\lambda$, και το άλλο ίσο με $-\lambda$ στον άξονα z , με την παραδοχή πάλι ότι ολόκληρος ο χώρος ($0 < r_T < \infty$) έχει σταθερό ε , ίσο με της αρχικής διάταξης.

Και στα δύο προβλήματα (εσωτερικό και εξωτερικό), στο αντίστοιχο βοηθητικό πρόβλημα τα φορτία (είτε πραγματικά, είτε είδωλα) έχουν ουσιαστικά τις ίδιες θέσεις: ένα φορτίο $-\lambda$ στο 0, δύο φορτία $+\lambda$ στα r'_T και r'_{Tc} . Συνεπώς, το δυναμικό Φ περιγράφεται και στα δύο προβλήματα από την ίδια σχέση, τη σχέση (6.2-42). Με απλές πράξεις, η σχέση αυτή παίρνει τη μορφή (με $\zeta = \varphi' - \varphi$):

$$\Phi(r_T, \varphi) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \left(\frac{R_T^2(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T) R_T^{*2}(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T)}{r_T^2 L^2} \right), \quad (6.2-44)$$

όπου L^2 είναι μία αυθαίρετη σταθερά (με διαστάσεις m^2) που υποκαθιστά τον τυχόντα σταθερό προσθετέο στο δυναμικό, που σε αμιγή συνθήκη *Neumann* δεν μπορεί να προσδιορισθεί. Η επιλογή $L^2 = a^2$ καθιστά τη σχέση αυτή πολύ συμμετρική. Επίσης, οι ποσότητες R_T και R_T^* είναι αυτές που έχουν εμφανισθεί στη σχέση (6.2-39) και έχουν ορισθεί στη σχέση (6.2-40):

$$\begin{aligned} R_T^2(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T) &= r_T'^2 - 2r_T' r_T \cos(\varphi' - \varphi) + r_T^2, \\ R_T^{*2}(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T) &= \left(\frac{r_T}{a} \right)^2 r_T'^2 - 2r_T' r_T \cos(\varphi' - \varphi) + a^2. \end{aligned} \quad (6.2-45)$$

Κατοπτρισμός σε κύλινδρο με ομογενή συνθήκη *Neumann* παρουσιάζεται στο **παράδ.6.2-17**.

Κατοπτρισμός κατανομής φορτίου σε κύλινδρο με ομογενή συνθήκη Neumann: Αν τα γραμμικά φορτία είναι απειροστά, $d\lambda = \{\rho dS, \sigma d\ell\}$, όπου $\partial\rho/\partial z = 0$ και $\partial\sigma/\partial z = 0$, τότε η άθροιση των επιμέρους συνεισφορών εκφράζεται από το ολοκλήρωμα επαλληλίας:

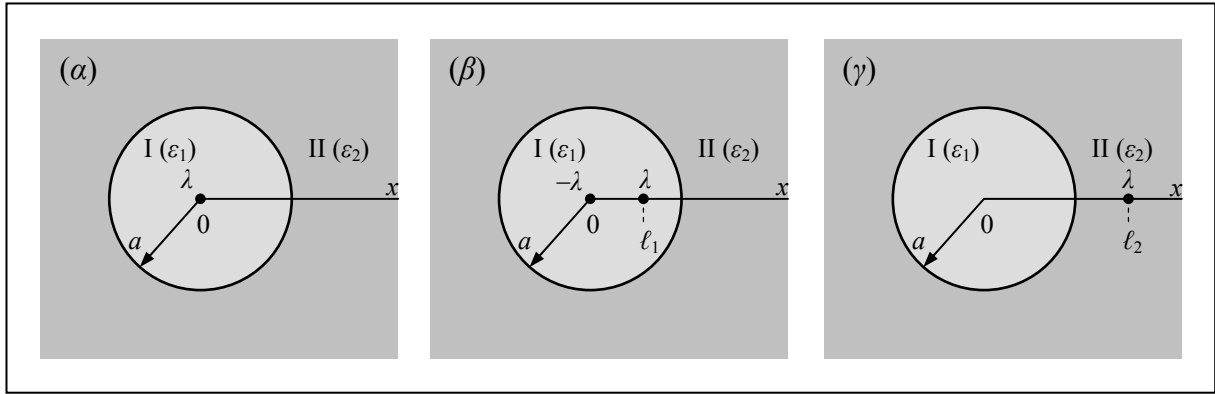
$$\Phi(r_T, \varphi) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int d\lambda' \ln \left(\frac{R_T^2(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}') R_T^{*2}(\mathbf{r}_T; r')}{r_T^2 L^2} \right), \quad (6.2-46)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται, κατά τα καθιερωμένα, ως προς τις τονισμένες ποσότητες, που προσδιορίζουν τις συντεταγμένες των φορτίων, τις $\{r', \varphi'\}$, με τη γωνία φ' να περιέχεται στο $\xi = \varphi' - \varphi$. Η σχέση αυτή ισχύει τόσο στο εσωτερικό, όσο και στο εξωτερικό πρόβλημα. Ειδικά, όμως, στο εσωτερικό πρόβλημα, πρέπει να είναι $\int d\lambda' = 0$, ώστε η διάταξη να είναι συμβατή με τη συνθήκη Neumann, $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$.

Όλες οι προηγούμενες εκφράσεις επεκτείνονται εύκολα, όταν η συνθήκη Neumann δεν είναι ομογενής, όταν δηλαδή είναι $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = -E_0 \neq 0$. Στο εσωτερικό πρόβλημα, αυτό έχει ως συνέπεια την απαίτηση $\int d\lambda' = 2\pi a \epsilon_0 E_0$. Δεν παρουσιάζουμε όμως τα αποτελέσματα, επειδή τέτοιες καταστάσεις δεν είναι συνήθεις στις εφαρμογές.

Οριακή συνθήκη στο άπειρο: Στο εξωτερικό πρόβλημα, σε αποστάσεις από τον άξονα μεγάλες σε σχέση με τις θέσεις των φορτίων οι αποστάσεις R_T και R_T^* είναι ανάλογες προς την ακτίνα r_T , με συνέπεια το δυναμικό να αποκλίνει λογαριθμικά, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (6.2-44) και (6.2-46) στο όριο $r_T \rightarrow \infty$. Αυτό είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι το συνολικό φορτίο είναι μη μηδενικό. Δεν μπορεί μια συνθήκη Dirichlet να συμπληρώσει στο άπειρο, στο υπόλοιπο τμήμα της κλειστής επιφάνειας S του εξωτερικού προβλήματος, τη συνθήκη $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$. Το κατάλληλο συμπλήρωμα είναι συνθήκη Neumann και στο άπειρο, με μορφή $\partial\Phi/\partial r_T|_{r_T \rightarrow \infty} = -(\int d\lambda')/2\pi\epsilon r_T$, βλ. και σχέση (6.2-43).

Κατοπτρισμός σε κυλινδρική επιφάνεια μεταξύ υλικών με μικρές διαφορές: Οι δύο περιπτώσεις οριακών συνθηκών, Dirichlet ($\Phi|_{r_T=a} = 0$) και Neumann ($\partial\Phi/\partial r_T|_{r_T=a} = 0$), στις οποίες προσδιορίστηκαν οι λύσεις με κατοπτρισμό σε κύλινδρο, αντιστοιχούν σε ιδιότητες του παρακείμενου χώρου $\epsilon_c \gg \epsilon$ (συνεπώς, $\mathbf{E}_c = 0$ και $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}|_{r_T=a} = 0$, όμοια και αν $g_c \rightarrow \infty$) και $\epsilon_c \ll \epsilon$ (συνεπώς, $\mathbf{D}_c = 0$ και $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{D}|_{r_T=a} = 0$, αντίστοιχα). Τέτοιες ακραίες τιμές του παρακείμενου χώρου υποκαθίστανται από αντίστοιχα ακραίες τιμές για τα είδωλα, που αποδίδονται από τις ιδιότητες $\lambda_c = -\lambda$ και $\lambda_c = +\lambda$. Η ενδιάμεση κατάσταση, να μην συνδέονται με ισχυρές ανισότητες οι τιμές των $\epsilon_1 = \epsilon(r_T < a)$ και $\epsilon_2 = \epsilon(r_T > a)$, μπορεί επίσης να αντιμετωπισθεί με τη μέθοδο του κατοπτρισμού, με κατάλληλες ενδιάμεσες τιμές για τα είδωλα. Αυτή η δυνατότη-



Σχήμα 6.2-19

τα επίλυσης βασίζεται στο ότι είναι επιλύσιμα και τα δύο προβλήματα, με οριακή συνθήκη *Dirichlet* και *Neumann*, σε κυλινδρικό όριο, όπως άλλωστε στην περίπτωση της παραγράφου 6.2.2, όπου η οριακή επιφάνεια είναι επίπεδη. Αντίθετα, διατάξεις με σφαιρικό όριο, όπως παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο 6.2.3, είναι επιλύσιμες μόνο όταν στο όριο αυτό η συνθήκη είναι τύπου *Dirichlet*, οπότε τέτοια επέκταση δεν είναι δυνατή.

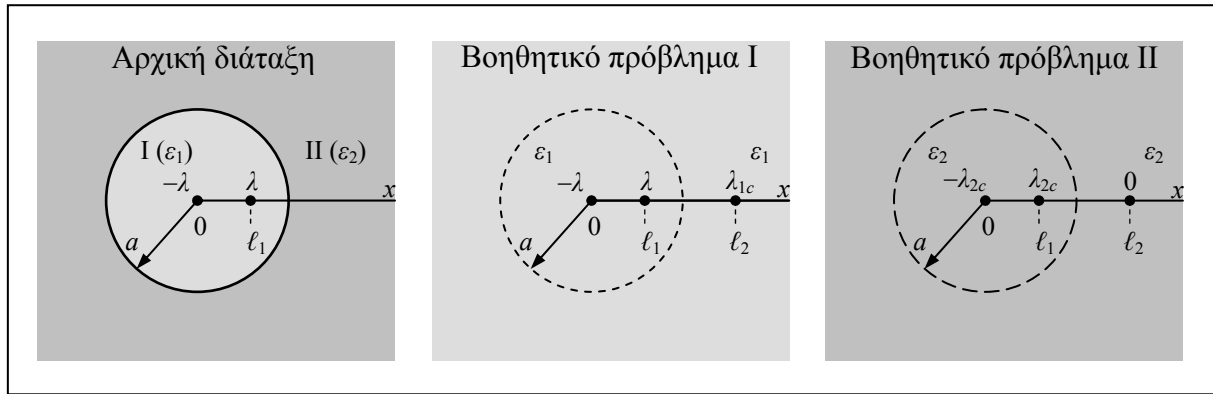
Θεωρώντας ότι ο χώρος περιλαμβάνει τις περιοχές I (με $r_T < a$) και II (με $r_T > a$), με επιτρεπτότητα αντίστοιχα ίση με ϵ_1 και ϵ_2 , κάθε διάταξη με φορτία οπουδήποτε μπορεί να σχηματισθεί ως επαλληλία τριών ειδών διατάξεων, αυτών που φαίνονται στο **Σχήμα 6.2-19** και είναι οι εξής:

- (α) Φορτίο λ στον άξονα z ,
- (β) Ζεύγος αντίθετων φορτίων, του φορτίου $-\lambda$ στον άξονα z και του φορτίου λ στην περιοχή I, σε ακτινική απόσταση $r_T' = \ell_1 (< a)$,
- (γ) Φορτίο λ στην περιοχή II, σε απόσταση $r_T' = \ell_2 (> a)$ από τον άξονα z .

Αν και η πρώτη διάταξη είναι στοιχειώδης, τα πεδία της θα γραφούν για λόγους πληρότητας. Για καθεμία από τις άλλες δύο διατάξεις θα διατυπωθούν από δύο βοηθητικά προβλήματα, ένα για κάθε περιοχή, και θα τοποθετηθούν είδωλα σε θέσεις $a^2/\ell_{1,2}$ με τιμή τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες συνέχειας στην επιφάνεια $r_T = a$.

Διάταξη (α), με φορτίο λ στον άξονα: Η διάταξη έχει επαρκείς συμμετρίες ($\partial/\partial z = 0$ και $\partial/\partial \phi = 0$), ώστε να γραφούν αμέσως τα πεδία κάθε περιοχής:

$$\begin{aligned}
 r_T < a: \quad \mathbf{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 r_T} \mathbf{i}_T, & \mathbf{D} &= \frac{\lambda}{2\pi r_T} \mathbf{i}_T, \\
 r_T > a: \quad \mathbf{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r_T} \mathbf{i}_T, & \mathbf{D} &= \frac{\lambda}{2\pi r_T} \mathbf{i}_T.
 \end{aligned}
 \tag{6.2-47}$$



Σχήμα 6.2-20

Διάταξη (β), με ζεύγος αντίθετων φορτίων στην περιοχή I, συγκεκριμένα του φορτίου $-\lambda$ στον άξονα z και του φορτίου λ σε απόσταση $r_T' = \ell_1 (< a)$: Σχηματίζονται δύο βοηθητικά προβλήματα, όπως στο **Σχήμα 6.2-20**. Σε κάθε βοηθητικό πρόβλημα, το αντίστοιχο τμήμα του χώρου παραμένει όπως ήταν αρχικά, με το αρχικό ε και με τα αρχικά φορτία, αν υπάρχουν. Στον υπόλοιπο χώρο τροποποιείται η επιτρεπτότητα, ώστε ολόκληρος ο χώρος να είναι ομογενής, και εισάγονται είδωλα σε θέσεις $\ell_{2,1} = a^2/\ell_{1,2}$, καθώς και στον άξονα, αν περιλαμβάνεται στο χώρο V_c . Οι δύο οριακές συνθήκες $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma = 0$ και $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$ στην επιφάνεια $r_T = a$ (όπου $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_T$) εμπλέκουν τις συνιστώσες D_T και E_φ . Χρησιμοποιώντας και ότι $\mathbf{R}_T = \mathbf{r}_T - \ell \mathbf{i}_x = \mathbf{i}_T(r_T - \ell \cos \varphi) + \mathbf{i}_\varphi \ell \sin \varphi$, οι συνιστώσες αυτές προσδιορίζονται και ακολούθως εξισώνονται οι τιμές τους στις δύο όψεις της επιφάνειας αυτής. Η σχετική ανάλυση παρουσιάζεται χωριστά για κάθε βοηθητικό πρόβλημα.

Στο **βοηθητικό πρόβλημα I**, με παντού ε_1 , με τα φορτία $-\lambda$ (στον άξονα), $+\lambda$ (στο ℓ_1) και με είδωλο λ_{1c} (στο $\ell_2 = a^2/\ell_1$), οι πεδιακές συνιστώσες που ενδιαφέρουν είναι:

$$D_T = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\lambda}{r_T} + \frac{\lambda(r_T - \ell_1 \cos \varphi)}{R_{T1}^2} + \frac{\lambda_{1c}(r_T - \ell_2 \cos \varphi)}{R_{T2}^2} \right], \quad (6.2-48)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \left[\frac{\lambda\ell_1 \sin \varphi}{R_{T1}^2} + \frac{\lambda_{1c}\ell_2 \sin \varphi}{R_{T2}^2} \right].$$

Οι παραπάνω εκφράσεις δίνουν και τις πεδιακές συνιστώσες $D_T(r_T < a, \varphi)$ και $E_\varphi(r_T < a, \varphi)$ της αρχικής διάταξης, με την τιμή του ειδώλου λ_{1c} , όση θα προσδιορισθεί στη συνέχεια.

Στο **βοηθητικό πρόβλημα II**, με παντού ε_2 , χωρίς φορτία στο ℓ_2 και με είδωλα ίσα με λ_{2c} (στο ℓ_1) και με $-\lambda_{2c}$ (στον άξονα), οι ίδιες πεδιακές συνιστώσες είναι:

$$D_T = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-\lambda_{2c}}{r_T} + \frac{\lambda_{2c}(r_T - \ell_1 \cos \varphi)}{R_{T1}^2} \right),$$

$$E_\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_2} \left(\frac{\lambda_{2c}\ell_1 \sin \varphi}{R_{T1}^2} \right),$$
(6.2-49)

που δίνουν και τις πεδιακές συνιστώσες $D_T(r_T > a, \varphi)$ και $E_\varphi(r_T > a, \varphi)$ της αρχικής διάταξης, με την τιμή του ειδώλου λ_{2c} προς προσδιορισμό.

Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $r_T = a$ απαιτούν:

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{-(\lambda_{2c} - \lambda)}{a} + \frac{(\lambda_{2c} - \lambda)(a - \ell_1 \cos \varphi)}{R_{T1}^2(a)} + \frac{-\lambda_{1c}(a - \ell_2 \cos \varphi)}{R_{T2}^2(a)} \right] = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_1} \left[\frac{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \lambda_{2c} - \lambda\right) \ell_1 \sin \varphi}{R_{T1}^2(a)} + \frac{-\lambda_{1c} \ell_2 \sin \varphi}{R_{T2}^2(a)} \right] = 0.$$
(6.2-50)

Η πρώτη από τις σχέσεις αυτές μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει πως γραμμικά φορτία, ίσα με $-(\lambda_{2c} - \lambda)$ στον άξονα, $+(\lambda_{2c} - \lambda)$ σε απόσταση ℓ_1 και $-\lambda_{1c}$ σε απόσταση $\ell_2 = a^2/\ell_1$, παράγουν πεδίο \mathbf{D} , του οποίου η ακτινική συνιστώσα στη θέση $r_T = a$ είναι ίση με μηδέν. Όμως, η ιδιότητα $D_T(r_T = a) = 0$ σε κυλινδρική επιφάνεια είναι ισοδύναμη με ομογενή συνθήκη *Neumann*, και από τη σχετική ανάλυση έχει προκύψει ότι τότε το φορτίο και το είδωλο είναι ίσα, που εδώ αυτό σημαίνει $\lambda_{2c} - \lambda = -\lambda_{1c}$. Στη δεύτερη σχέση όμοια αναγνωρίζεται ότι περιγράφει το μηδενισμό της εφαπτομενικής συνιστώσας του πεδίου \mathbf{E} , που οφείλεται σε γραμμικά φορτία $(\epsilon_1/\epsilon_2)\lambda_{2c} - \lambda$ και $-\lambda_{1c}$, σε αποστάσεις ℓ_1 και $\ell_2 = a^2/\ell_1$ αντίστοιχα. Αυτός ο μηδενισμός είναι ισοδύναμος με τη συνθήκη $\Phi(r_T = a) = 0$, που ικανοποιείται από είδωλο αντίθετο του φορτίου, δηλαδή $(\epsilon_1/\epsilon_2)\lambda_{2c} - \lambda = -(-\lambda_{1c}) = \lambda_{1c}$.

Επιλύοντας τις δύο σχέσεις, $\lambda_{2c} - \lambda = -\lambda_{1c}$ και $(\epsilon_1/\epsilon_2)\lambda_{2c} - \lambda = \lambda_{1c}$, προκύπτει:

$$\lambda_{1c} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \lambda, \quad \text{και} \quad \lambda_{2c} = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \lambda,$$
(6.2-51)

οι τιμές των ειδώλων για κάθε βοηθητικό πρόβλημα. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί, βέβαια, να εξαχθεί και καθαρά αλγεβρικά, επιλύοντας το σύστημα (6.2-50). Όμως, η επιχειρηματολογία που χρησιμοποιήθηκε προβάλλει το γεγονός ότι διατάξεις με $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ είναι επιλύσιμες με βάση την επιλυσιμότητα διατάξεων με συνθήκη *Dirichlet* και με συνθήκη *Neumann*.

Τα συμπεράσματα συνοψίζονται αργότερα, από κοινού με εκείνα για τη διάταξη (γ) που ακολουθεί.

Διάταξη (γ), με φορτίο λ στην περιοχή II, ειδικότερα σε απόσταση $\ell_2 > a$ από τον άξονα: Πάλι η επίλυση γίνεται με τον σχηματισμό δύο βοηθητικών προβλημάτων, βλ. **Σχήμα 6.2-21**, και τον προσδιορισμό των πεδιακών συνιστωσών D_T και E_φ στο καθένα.

Βοηθητικό πρόβλημα I, με παντού ε_1 και μόνο ένα είδωλο λ_{1c} στο ℓ_2 , αφού η αρχική διάταξη δεν έχει φορτία στην περιοχή I. Οι πεδιακές συνιστώσες που ενδιαφέρουν είναι οι:

$$D_T = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_{1c}(r_T - \ell_2 \cos \varphi)}{R_{T2}^2},$$

$$E_\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \frac{\lambda_{1c}\ell_2 \sin \varphi}{R_{T2}^2},$$
(6.2-52)

που δίνουν και τις πεδιακές συνιστώσες $D_T(r_T < a, \varphi)$ και $E_\varphi(r_T < a, \varphi)$ της αρχικής διάταξης.

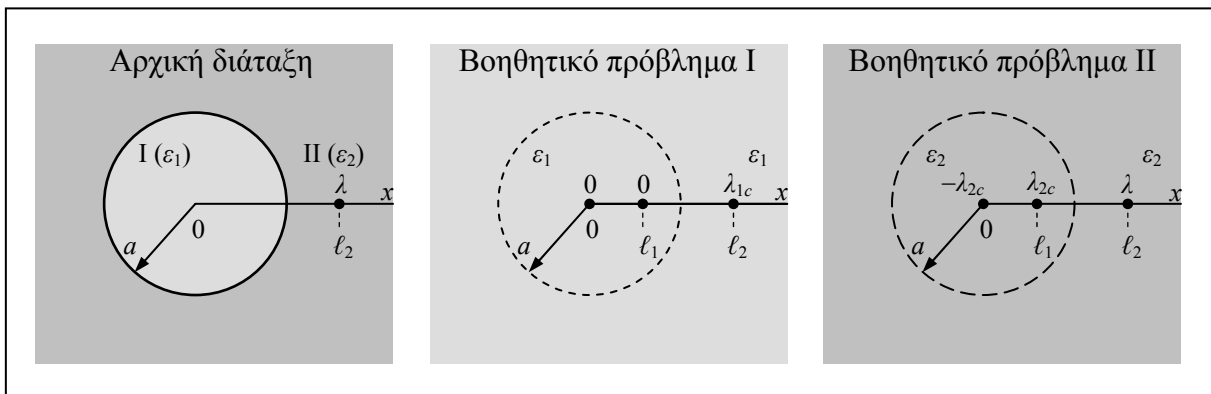
Βοηθητικό πρόβλημα II, με παντού ε_2 , το αρχικό λ στο ℓ_2 και επιπλέον δύο είδωλα, λ_{2c} στο $\ell_1 = a^2/\ell_2$ και $-\lambda_{2c}$ στον άξονα. Οι συνιστώσες D_T και E_φ είναι:

$$D_T = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\lambda_{2c}}{r_T} + \frac{\lambda_{2c}(r_T - \ell_1 \cos \varphi)}{R_{T1}^2} + \frac{\lambda(r_T - \ell_2 \cos \varphi)}{R_{T2}^2} \right],$$

$$E_\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_2} \left[\frac{\lambda_{2c}\ell_1 \sin \varphi}{R_{T1}^2} + \frac{\lambda\ell_2 \sin \varphi}{R_{T2}^2} \right].$$
(6.2-53)

Με συλλογισμούς ταυτόσημους με της διάταξης (β), στις σχέσεις για τη συνέχεια των συνιστωσών D_T και E_φ στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ αναγνωρίζονται αίτια (φορτία και είδωλα) που ικανοποιούν συνθήκες *Neumann* και *Dirichlet*, και από τις σχέσεις μεταξύ τέτοιων αιτίων και ειδώλων συνάγεται ότι πρέπει να είναι $\lambda - \lambda_{1c} = \lambda_{2c}$ και $\lambda - (\varepsilon_2/\varepsilon_1)\lambda_{1c} = -\lambda_{2c}$. Από την επίλυση αυτών των δύο σχέσεων προσδιορίζονται οι τιμές των ειδώλων:

$$\lambda_{1c} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \lambda, \quad \text{και} \quad \lambda_{2c} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \lambda.$$
(6.2-54)



Σχήμα 6.2-21

Σύνοψη διαδικασίας κατοπτρισμού σε κυλινδρική επιφάνεια μεταξύ διηλεκτρικών υλικών με μικρές διαφορές στις ιδιότητές τους: Σε διατάξεις με $\partial/\partial z = 0$, στις οποίες η επιτρεπτότητα είναι $\epsilon_1 = \epsilon(r_T < a)$ και $\epsilon_2 = \epsilon(r_T > a)$, κάθε κατανομή φορτίων μπορεί να αναλυθεί ως επαλληλία διατάξεων που ανήκουν στα ακόλουθα τρία είδη:

- (α) Φορτίο λ στον άξονα z : Η διάταξη είναι στοιχειώδης και τα πεδία της δίδονται από τις σχέσεις (6.2-47).
- (β) Ζεύγος αντίθετων φορτίων, του φορτίου $-\lambda$ στον άξονα z και του φορτίου $+\lambda$ σε ακτινική απόσταση $r_T' = \ell_1 < a$:
- ο Στην περιοχή $r_T < a$ τα πεδία περιγράφονται από τη δράση, σε χώρο με παντού ϵ_1 , των δεδομένων φορτίων $-\lambda$ και $+\lambda$, καθώς και ειδώλου $\lambda_{1c} = [(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)]\lambda$ σε απόσταση $\ell_2 = a^2/\ell_1 (> a)$ από τον άξονα. Οι συνιστώσες των πεδίων παρουσιάζονται στις σχέσεις (6.2-48).
 - ο Στην περιοχή $r_T > a$ τα πεδία περιγράφονται από τη δράση, σε χώρο με παντού ϵ_2 , δύο ειδώλων $-\lambda_{2c}$ στον άξονα και λ_{2c} σε απόσταση ℓ_1 , όπου $\lambda_{2c} = [2\epsilon_2/(\epsilon_1 + \epsilon_2)]\lambda$. Οι σχέσεις (6.2-49) δίνουν τις συνιστώσες των πεδίων.
- (γ) Φορτίο λ σε απόσταση $r_T' = \ell_2 > a$ από τον άξονα z .
- ο Στην περιοχή $r_T < a$ τα πεδία περιγράφονται από τη δράση, σε χώρο με παντού ϵ_1 , ειδώλου $\lambda_{1c} = [2\epsilon_1/(\epsilon_1 + \epsilon_2)]\lambda$ σε απόσταση ℓ_2 από τον άξονα. Τα πεδία περιγράφονται από τις σχέσεις (6.2-52).
 - ο Στην περιοχή $r_T > a$ τα πεδία περιγράφονται από τη δράση, σε χώρο με παντού ϵ_2 , τόσο του αρχικού φορτίου λ , όσο και δύο αντίθετων ειδώλων $-\lambda_{2c}$ και $+\lambda_{2c}$, με $\lambda_{2c} = [(\epsilon_2 - \epsilon_1)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)]\lambda$, στον άξονα το $-\lambda_{2c}$ και σε απόσταση $\ell_1 = a^2/\ell_2$ το $+\lambda_{2c}$.

Παρατηρήσεις: Σημειώνεται (βλ. και *παράδ. 6.2-18*) ότι και στις δύο διατάξεις (β) και (γ), όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση κατοπτρισμού σε επίπεδο (παράγραφος 6.2.2), ότι:

- ο Στη μία περιοχή η επιτρεπτότητα διατηρείται ατροποποίητη στην αρχική τιμή $\epsilon_{ατρ}$, ενώ στην άλλη περιοχή η αρχική τιμή $\epsilon_{τροπ}$ της επιτρεπτότητας τροποποιείται σε $\epsilon_{ατρ}$.
- ο Τα φορτία της περιοχής με ατροποποίητη επιτρεπτότητα παραμένουν όπως ήταν αρχικά.
- ο Είδωλα τοποθετούνται μόνο στην περιοχή, όπου τροποποιείται η επιτρεπτότητά της. Το είδωλο στη θέση του αρχικού φορτίου είναι ανάλογο του $2\epsilon_{ατρ}$, ενώ το είδωλο σε θέση κατοπτρική (με την έννοια $\ell_{2,1} = a^2/\ell_{1,2}$) του αρχικού φορτίου είναι ανάλογο της διαφοράς $\epsilon_{ατρ} - \epsilon_{τροπ}$.
- ο Όλα τα είδωλα είναι αντιστρόφως ανάλογα του αθροίσματος $\epsilon_{ατρ} + \epsilon_{τροπ}$.

- Αν η περιοχή με την τροποποιούμενη επιτρεπτότητα περιέχει τον άξονα z , τοποθετείται εκεί και δεύτερο είδωλο, αντίθετο εκείνου που προκύπτει από τον κατοπτρισμό, ενδεχόμενο του οποίου δεν συναντάται παρόμοιο στον κατοπτρισμό σε επίπεδο.
- Τα πεδία της αρχικής διάταξης ταυτίζονται με τα πεδία της βοηθητικής διάταξης μόνο στην περιοχή που η επιτρεπτότητα και τα φορτία δεν έχουν τροποποιηθεί.
- Στα όρια $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ αναπαράγονται τα προηγούμενα αποτελέσματα.
- Επαλληλία της διάταξης (β) με τη διάταξη (α) περιγράφει διάταξη με ένα γραμμικό φορτίο σε τυχούσα θέση στο εσωτερικό του κυλίνδρου $r_T < a$.

Γενικεύσεις: Τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να γενικευθούν για τη μελέτη οποιασδήποτε διάταξης με φορτία αδιακρίτως στις περιοχές με $\varepsilon_1 = \varepsilon(r_T < a)$ και $\varepsilon_2 = \varepsilon(r_T > a)$:

- Αν υπάρχουν πολλά γραμμικά φορτία λ_j , και όχι μόνο ένα, σε διάφορες ακτινικές θέσεις $r'_T = \ell_j$ και σε γωνιακές θέσεις $\varphi' = \varphi'_j$, χωρίς να είναι $\varphi'_j = 0$, εφαρμόζεται επαλληλία, για όσα έχουν $\ell_j > a$ από διατάξεις του είδους (γ), και για όσα έχουν $\ell_j < a$ από διατάξεις του είδους (β), σε συνδυασμό με διατάξεις του είδους (α), εκτός αν είναι $\ell_j = 0$. Σε κάθε περίπτωση, τα είδωλα των διατάξεων (β) και (γ) είναι σε αποστάσεις $\ell_{cj} = a^2/\ell_j$ και σε διατάξεις του είδους (γ) τοποθετείται είδωλο και στον άξονα z , ενώ οι γωνιακές θέσεις των ειδώλων είναι $\varphi'_{cj} = \varphi'_j$. Τα πεδία δίδονται από τις ίδιες εκφράσεις, όπως στις τρεις βασικές διατάξεις, με την απλή τροποποίηση ότι $\varphi \rightarrow \varphi'_j$.
- Αν τα φορτία δεν ανήκουν σε γραμμική κατανομή λ , αλλά σε χωρική ή επιφανειακή (με $\partial/\partial z = 0$), βλ. και **Σχήμα 6.2-16**, τότε τα προηγούμενα προσαρμόζονται αντικαθιστώντας $\lambda \rightarrow d\lambda' = \{\rho(\mathbf{r}'_T)dS', \sigma(\ell')d\ell'\}$, και αντίστοιχα $\lambda_c \rightarrow d\lambda'_c$, και ολοκληρώνοντας ως προς τις τονισμένες μεταβλητές (τις θέσεις φορτίων και ειδώλων). Στην περίπτωση αυτή, οι σχέσεις που συνδέουν είδωλα με φορτία, όπως η ισότητα $\lambda_{1c} = [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\lambda$ για την περιοχή $r_T < a$ της διάταξης (β), μετατρέπονται σε σχέσεις μεταξύ των στοιχειωδών $d\lambda'_c$ και $d\lambda'$, όπως ότι $\rho_{1c}dS_{1c} = [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\rho dS$, και όχι των πυκνοτήτων, επειδή ο μετασχηματισμός $\ell_c = a^2/\ell$ επηρεάζει και τα μήκη και τα εμβαδά. Παραγωγίζοντας τη σχέση $\ell_c = a^2/\ell$ διαπιστώνεται αμέσως, ότι είναι $|d\ell_c/d\ell| = (a/\ell)^2$ και $|dS_c/dS| = (a/\ell)^4$.
- Η διαδικασία που περιγράφηκε στο προηγούμενο σημείο μπορεί να υποκατασταθεί από αναγωγή στις συντεταγμένες των φορτίων, με διαδικασία παρόμοια με εκείνη που κατέληξε στις σχέσεις (6.2-41) και (6.2-46). Οι εκφράσεις για το δυναμικό έχουν μορφή παρόμοια με αυτών των σχέσεων, αλλά ο εκθέτης των R_T^{*2} και (R_T^*/r_T^2) τροποποιείται και αντί να έχει τις τιμές ∓ 1 , έχει την τιμή του ηλίκου του ειδώλου προς το φορτίο.

Αντιστοιχία μόνιμης ροής ρεύματος με Ηλεκτροστατική: Η ομοιότητα, μεταξύ της Ηλεκτροστατικής σε διηλεκτρικά υλικά και της μόνιμης ροής ρεύματος σε αγωγίμα υλικά, είναι πλήρης. Και στις δύο περιπτώσεις είναι $\nabla \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$ και $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, ενώ η αντιστοιχία είναι εμφανής και στο νόμο της απόκλισης, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ και $\nabla \cdot \mathbf{J} = \dot{\rho}$ ($= 0$, συνήθως), στην αντίστοιχη οριακή συνθήκη $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma$ και $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = \dot{\sigma}$ (με $\mathbf{K} = 0$), καθώς και στις συντακτικές σχέσεις $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ και $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$. Συγκεντρωτικά, οι αντίστοιχες ποσότητες, που υπακούουν σε ταυτόσημες εξισώσεις, παρουσιάζονται στον **Πίνακα 6.2-1**.

Πίνακας 6.2-1
Αντιστοιχίες Ηλεκτροστατικής και Μόνιμης ροής ρεύματος

| | | | | | | | | | | |
|---------------------|--------------|--------|--------------|------------|-----------|-----------------|----------------|--------------|------------|------------------|
| Ηλεκτροστατική | \mathbf{E} | Φ | \mathbf{D} | ϵ | q | λ | σ | ρ | dQ | $d\lambda$ |
| Μόνιμη ροή ρεύματος | \mathbf{E} | Φ | \mathbf{J} | g | \dot{q} | $\dot{\lambda}$ | $\dot{\sigma}$ | $\dot{\rho}$ | $d\dot{Q}$ | $d\dot{\lambda}$ |

Κατοπτρισμός σε κυλινδρική επιφάνεια μεταξύ αγωγίμων υλικών: Με βάση αυτές τις αντιστοιχίες, όλα τα συμπεράσματα για διατάξεις διηλεκτρικών υλικών με διαχωριστική επιφάνεια την κυλινδρική $r_T = a$ μεταγράφονται αμέσως σε αντίστοιχες διατάξεις αγωγίμων υλικών. Τα κυριότερα μεταγραμμένα συμπεράσματα είναι:

$\dot{\lambda}$ στο ℓ στην περιοχή $r_T < a$ ή στην περιοχή $r_T > a$, με $g = \text{σταθ}$, όταν $g_c \gg g$:

\Rightarrow Είδωλο $\dot{\lambda}_c = -\dot{\lambda}$ στο $r_T = a^2/\ell$, με παντού g .

$d\dot{\lambda}(r'_T, \varphi')$ στην περιοχή $r_T < a$ ή στην περιοχή $r_T > a$, με $g = \text{σταθ}$, όταν $g_c \gg g$:

$\Rightarrow \Phi(r_T, \varphi) = -(1/4\pi g) \int d\dot{\lambda}' \ln(R_T^2/R_T^{*2})$, με τα $\{R_T, R_T^*\}$ οριζόμενα στη σχέση (6.2-40).

$-\dot{\lambda}$ στο 0 και $\dot{\lambda}$ στο $\ell < a$ στην περιοχή $r_T < a$, με $g = \text{σταθ}$, όταν $g_c \ll g$:

\Rightarrow Είδωλο $\dot{\lambda}_c = \dot{\lambda}$ στο $r_T = a^2/\ell$, με παντού g .

$\dot{\lambda}$ στο $\ell > a$ στην περιοχή $r_T > a$, με $g = \text{σταθ}$, όταν $g_c \ll g$:

\Rightarrow Είδωλο $-\dot{\lambda}$ στο 0 και $\dot{\lambda}$ στο $r_T = a^2/\ell$, με παντού g .

$d\dot{\lambda}(r'_T, \varphi')$ στην περιοχή $r_T < a$ ή στην περιοχή $r_T > a$, με $g = \text{σταθ}$, όταν $g_c \ll g$:

$\Rightarrow \Phi(r_T, \varphi) = -(1/4\pi g) \int d\dot{\lambda}' \ln(R_T^2 R_T^{*2}/r_T^2 L^2)$, με $L = \text{σταθ}$, με τη δέσμευση $\int d\dot{\lambda} = 0$.

Επίσης, για τη μεταγραφή σε όρους ροής ρεύματος των διατάξεων (α), (β) και (γ) (σελ. 297 και επ.), γίνονται οι απλές αντικαταστάσεις $\epsilon_{1,2c} \rightarrow g_{1,2c}$, $\lambda \rightarrow \dot{\lambda}$ και $\lambda_{1,2c} \rightarrow \dot{\lambda}_{1,2c}$.

Αντιστοιχία Μαγνητοστατικής και Ηλεκτροστατικής: Η Μαγνητοστατική έχει το βασικό χαρακτηριστικό ότι το αποτέλεσμα, η συνεισφορά $d\mathbf{H}$ στο συνολικό μαγνητικό πεδίο, είναι κάθετο προς τη σχετική απόσταση \mathbf{R} , σε αντίθεση με την Ηλεκτροστατική, όπου $d\mathbf{E} \parallel \mathbf{R}$. Επίσης, το στοιχείο $id\mathbf{r}$, $\mathbf{K}dS$ ή $\mathbf{J}dV$ του αιτίου είναι διανυσματική ποσότητα και εκδηλώνεται στο αποτέλεσμα μέσω πάλι μίας συνθήκης καθετότητας, ειδικότερα $d\mathbf{H} \perp id\mathbf{r}$. Όμως, και στις δύο οικογένειες διατάξεων, τα $d\mathbf{H}$ και $d\mathbf{E}$ υπακούουν σε νόμους με ίδια εξάρτηση από την απόσταση, εξάρτηση αντίστροφου τετραγώνου, όπως περιγράφεται αντίστοιχα από τους νόμους *Coulomb* και *Biot-Savart*. Αυτές οι ομοιότητες επιτρέπουν την αντιστοίχιση μεταξύ διατάξεων Ηλεκτροστατικής και Μαγνητοστατικής, στρέφοντας ενδιάμεσα είτε το $d\mathbf{E}$, είτε το $d\mathbf{H}$, κατά γωνία $\pi/2$, όπως άλλωστε έγινε, ήδη, στην περίπτωση κατοπτρισμού σε σφαίρα, στην παράγραφο 6.2.3.

Επιθυμητό είναι να μελετηθεί με τρόπο γενικό αυτή η στροφή κατά γωνία $\pi/2$, που αποσκοπεί στο να συμπέσει το $d\mathbf{H}$ με το $d\mathbf{E}$, όταν και τα δύο παράγονται από αίτια ίδιου τύπου και στις ίδιες θέσεις. Αυτή η γενικότητα είναι εφικτή, όταν όλα τα στοιχεία έχουν τον ίδιο άξονα στροφής, που ας ληφθεί ως ο άξονας z . Αυτό σημαίνει ότι όλες οι κατανομές ηλεκτρικού ρεύματος έχουν διεύθυνση παράλληλη με τον άξονα z , όπως τα στοιχεία $id\mathbf{r} = \mathbf{i}_z idz$ ή $\mathbf{J}dV = \mathbf{i}_z J_z dV$. Τέτοιες κατανομές είναι αυθυπόστατες και ανεξάρτητες από την παρουσία ή την απουσία ροής ηλεκτρικού ρεύματος με διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα, αφού οι κυλινδρικές διατάξεις με άπειρο μήκος χαρακτηρίζονται από με $\partial/\partial z = 0$. Για παράδειγμα, ένα νηματοειδές ρεύμα με $i = \text{σταθ.}$ αυτόματα ικανοποιεί το νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου, όπως ο ίδιος νόμος ικανοποιείται αυτόματα, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, όταν $\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_z$ με $\partial J_z / \partial z = 0$.

Συγκεκριμένα, για τις ουσιαστικά πεδιακές ποσότητες $(\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)$ και $(\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)$ οι σημειακές σχέσεις των εξισώσεων *Maxwell* (χωρίς εκείνη σε σημείο, αφού ένα μεμονωμένο σημείο δεν είναι συμβατό με $\partial/\partial z = 0$) παίρνουν τη μορφή:

- Σε κάθε σημείο του χώρου (με δεδομένο ότι $\mathbf{i}_z = \text{σταθ.}$ και $\mathbf{i}_z \cdot \nabla = \partial/\partial z = 0$):

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z) = \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{i}_z) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{i}_z - \mathbf{i}_z(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{i}_z \cdot \nabla)\mathbf{B} = -\mathbf{i}_z(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0,$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z) = 0, \text{ αντίστοιχη με τη σχέση } \nabla \times \mathbf{E} = 0 \text{ της ηλεκτροστατικής.}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z) = \mathbf{i}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{i}_z) = \mathbf{i}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = J_z,$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z) = J_z, \text{ που αντιστοιχεί με τη σχέση } \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho.$$

- Σε κάθε σημείο επιφάνειας, η οποία αναγκαστικά είναι παράλληλη προς τον άξονα z , ώστε να είναι $\partial/\partial z = 0$, και έχει κάθετο διάνυσμα \mathbf{i}_n , για το οποίο υποχρεωτικά $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_z = 0$:

$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z) = (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_n) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{i}_n) \mathbf{i}_z = -\mathbf{i}_z (\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{B})$, οπότε η σχέση $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0$ μετατρέπεται σε $\mathbf{i}_n \times [(\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)_+ - (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)_-] = -\mathbf{i}_z [\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-)] = 0$,

$$\Rightarrow \mathbf{i}_n \times [(\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)_+ - (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)_-] = 0, \text{ αντίστοιχη με } \mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0.$$

$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z) = \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{i}_n \times \mathbf{H})$, οπότε η συνθήκη $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{K}$ γίνεται $\mathbf{i}_n \cdot [(\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)_+ - (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)_-] = \mathbf{i}_z \cdot [\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-)] = K_z$,

$$\Rightarrow \mathbf{i}_n \cdot [(\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)_+ - (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)_-] = K_z, \text{ που αντιστοιχεί με τη σχέση } \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma.$$

ο Σε κάθε σημείο ρευματοφόρου γραμμής (με $d\mathbf{r} = d\ell \mathbf{i}_z$, ώστε $\partial/\partial z = 0$):

$$[2\pi R_T \mathbf{i}'_\phi \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)]|_{R_T \rightarrow 0} = [2\pi R_T \mathbf{B} \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}'_\phi)]|_{R_T \rightarrow 0} = -(2\pi R_T \mathbf{i}'_T \cdot \mathbf{B})|_{R_T \rightarrow 0} = -(2\pi R_T B'_T)|_{R_T \rightarrow 0} = 0,$$

$$\Rightarrow [2\pi R_T \mathbf{i}'_\phi \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)]|_{R_T \rightarrow 0} = 0, \text{ όπως στη συνθήκη } (2\pi R_T \mathbf{i}'_\phi \cdot \mathbf{E})|_{R_T \rightarrow 0} = 0.$$

$$[2\pi R_T \mathbf{i}'_T \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)]|_{R_T \rightarrow 0} = [2\pi R_T \mathbf{H} \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}'_T)]|_{R_T \rightarrow 0} = (2\pi R_T \mathbf{i}'_\phi \cdot \mathbf{H})|_{R_T \rightarrow 0} = (2\pi R_T H'_\phi)|_{R_T \rightarrow 0} = i,$$

$$\Rightarrow [2\pi R_T \mathbf{i}'_T \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z)]|_{R_T \rightarrow 0} = i, \text{ όπως ο απειρισμός } (2\pi R_T \mathbf{i}'_T \cdot \mathbf{D})|_{R_T \rightarrow 0} = \lambda.$$

Οι αντιστοιχίες επεκτείνονται και στο διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} . Στην προκειμένη περίπτωση, στην οποία τα ρεύματα είναι μόνο παράλληλα με τον άξονα z , είναι $\mathbf{A} = A_z \mathbf{i}_z$, οπότε $\mathbf{B} = \nabla \times (A_z \mathbf{i}_z) = (\nabla A_z) \times \mathbf{i}_z + A_z (\nabla \times \mathbf{i}_z) = (\nabla A_z) \times \mathbf{i}_z$ και, συνεπώς, $\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z = [(\nabla A_z) \times \mathbf{i}_z] \times \mathbf{i}_z = -\nabla A_z$, που αντιστοιχεί στη σχέση $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ της Ηλεκτροστατικής. Οι ποσότητες $\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z$ και \mathbf{E} περιγράφουν αστρόβιλα πεδία και γι' αυτό εκφράζονται ως οι κλίσεις των βαθμωτών δυναμικών συναρτήσεων $-A_z$ και $-\Phi$, αντίστοιχα, με βάση τις σχέσεις $\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z) = 0$ και $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Τέλος, επισημαίνοντας ότι αντίστοιχες είναι οι ποσότητες \mathbf{D} και $\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z$, στη συντακτική σχέση $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ αντιστοιχεί η σχέση $(\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z) = \mu^{-1} (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)$. Η αντιστοιχία των ϵ και μ^{-1} έχει ήδη εκδηλωθεί και στις εξισώσεις του *Poisson*, $\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon$ και $\nabla^2 A_z = -\mu J_z$.

Συγκεντρώνοντας αυτές τις παρατηρήσεις, σχηματίζεται ο **Πίνακας 6.2-2** με τις αντιστοιχίες μεταξύ Ηλεκτροστατικής και Μαγνητοστατικής. Οι αντιστοιχίες αυτές αξιοποιούνται κατά την επίλυση του *παραδ. 6.2-19*.

Πίνακας 6.2-2
Αντιστοιχίες Ηλεκτροστατικής και Μαγνητοστατικής

| | | | | | | | | |
|--|----------------------------------|--------|----------------------------------|------------|-----------|----------|--------|---------|
| Ηλεκτροστατική | \mathbf{E} | Φ | \mathbf{D} | ϵ | λ | σ | ρ | $d\ell$ |
| Μαγνητοστατική, με $\partial/\partial z = 0$ | $\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z$ | A_z | $\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z$ | μ^{-1} | i | K_z | J_z | dI |

Οι αντιστοιχίες αυτές επιτρέπουν την άμεση μεταφορά των προηγούμενων πορισμάτων από τις διατάξεις διηλεκτρικών υλικών (με διαχωριστική επιφάνεια σε κύλινδρο $r_T = a$) σε διατάξεις μαγνητικών υλικών. Στη μεταφορά αυτή επισημαίνονται ιδιαίτερα τα εξής:

- Αντίστοιχες ποσότητες είναι οι ε και $1/\mu$. Κατά συνέπεια, αν στον παρακείμενο χώρο είναι $\mu_c \gg \mu$, αντίστοιχο πρόβλημα Ηλεκτροστατικής είναι εκείνο με $\varepsilon_c \ll \varepsilon$, που επιλύεται με ομόσημα είδωλα. Επίσης, όταν το όριο $r_T = a$ διαχωρίζει μεταξύ υλικών με ιδιότητες μ_1 και μ_2 , η μετατροπή των συντελεστών που καθορίζουν την τιμή των ειδώλων, ας πούμε για τη διάταξη (β), σχέση (6.2-51), είναι:

$$\begin{aligned} \lambda_{1c} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \lambda &\Rightarrow i_{1c} = \frac{\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1}}{\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}} i = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} i, \\ \lambda_{2c} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \lambda &\Rightarrow i_{2c} = \frac{2\mu_2^{-1}}{\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}} i = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} i. \end{aligned} \quad (6.2-55)$$

Οι συντελεστές αυτοί, εκφραζόμενοι με τα μ (αντί των $\varepsilon \rightarrow \mu^{-1}$), εμφανίζουν την εναλλαγή $1 \leftrightarrow 2$ στους δείκτες των $\mu_{1,2}$. Το ίδιο είχε παρατηρηθεί και στον κατοπτρισμό σε επίπεδο, στην παράγραφο 6.2.2.

- Ενώ στην Ηλεκτροστατική η ποσότητα που συνήθως ενδιαφέρει είναι το δυναμικό Φ ή η ένταση ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} , στη Μαγνητοστατική συνήθως ενδιαφέρει το πεδίο \mathbf{H} , που σε διατάξεις με $\mathbf{J} \parallel \mathbf{i}_z$ και $\partial/\partial z = 0$ είναι ίσο με $\mathbf{H} = \mathbf{i}_z \times (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_z) = \mu^{-1} \mathbf{i}_z \times (\mathbf{B} \times \mathbf{i}_z)$.
- Όταν είναι $\mu_c \ll \mu$ ή $\mu_c \gg \mu$, από την επαλληλία των ρευμάτων και των κατάλληλων ειδώλων υπολογίζεται το πεδίο \mathbf{H} , αλλά στην τελική έκφραση δεν εμφανίζεται η μαγνητική διαπερατότητα μ του χώρου. Το τελικό αποτέλεσμα βασίζεται, πάντως, στο ότι $\mu = \text{σταθ.}$ και ότι για τον παρακείμενο χώρο είναι $\mu_c \ll \mu$ ή $\mu_c \gg \mu$, και ισχύει μόνο τότε. Το ίδιο έχει επισημανθεί και για το νόμο *Biot-Savart*, $\mathbf{H} = (i/4\pi) \oint d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}/R^3$, ο οποίος εμπεριέχει την υπόθεση $\mu = \text{σταθ.}$, κι ας μην εμφανίζεται το μ στην τελική έκφραση.

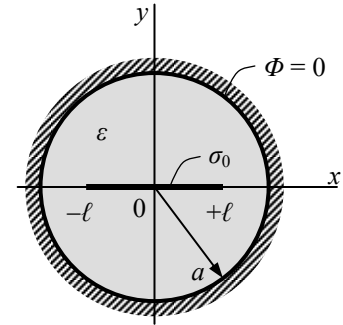
Κατοπτρισμός σε κυλινδρική επιφάνεια μεταξύ μαγνητικών υλικών, σε διατάξεις με $\partial/\partial z = 0$ και μόνο διαμήκη ρεύματα μπορεί να εφαρμοσθεί στα εξής ενδεχόμενα:

- Όταν η επιφάνεια $r_T = a$ είναι μεταξύ υλικών με $\mu_c \ll \mu$, ή με $\mu_c \gg \mu$:
 - Ρεύμα i στη θέση $\{r'_T = \ell, \varphi'\}$, στο χώρο είτε $r_T < a$, είτε $r_T > a$, με $\mu = \text{σταθ.}$ και $\mu_c \ll \mu$:
 \Rightarrow Είδωλο $i_c = -i$, στη θέση $\{r'_{Tc} = a^2/\ell, \varphi'_c = \varphi'\}$, με παντού μ .
 - Στοιχείο $dI(r'_T, \varphi')$ στο χώρο είτε $r_T < a$, είτε $r_T > a$, με $\mu = \text{σταθ.}$ και $\mu_c \ll \mu$:
 $\Rightarrow A_z(r_T, \varphi) = -(\mu/4\pi) \int dI \ln(R_T^2/R_T^{*2})$, με τα R_T και R_T^* όπως στη σχέση (6.2-40).

- Ρεύμα i στη θέση $\{r_T' = \ell, \varphi'\}$ και $-i$ στο $r_T' = 0$, στο χώρο $r_T < a$, με $\mu = \text{σταθ.}$ και $\mu_c \gg \mu$:
 \Rightarrow Είδωλο $i_c = +i$, στη θέση $\{r_{Tc}' = a^2/\ell, \varphi_c' = \varphi'\}$, με παντού μ .
 - Ρεύμα i στη θέση $\{r_T' = \ell, \varphi'\}$, στο χώρο $r_T > a$, με $\mu = \text{σταθ.}$ και $\mu_c \gg \mu$:
 \Rightarrow Είδωλα $i_c = +i$, στη θέση $\{r_{Tc}' = a^2/\ell, \varphi_c' = \varphi'\}$ και $-i$ στο $r_T' = 0$, με παντού μ .
 - Στοιχείο $dI(r_T', \varphi')$ στο χώρο είτε $r_T < a$, είτε $r_T > a$, με $\mu = \text{σταθ.}$ και $\mu_c \gg \mu$:
 $\Rightarrow A_z(r_T, \varphi) = -(\mu/4\pi) \int dI \ln(R_T^2 R_T'^2 / r_T^2 L^2)$, με $L^2 = \text{σταθ.}$
- Όταν η κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ διαχωρίζει μεταξύ των υλικών με $\mu(r_T < a) = \mu_1 = \text{σταθ.}$ και $\mu(r_T > a) = \mu_2 = \text{σταθ.}$, τα επί μέρους προβλήματα είναι:
- (α) Ρεύμα i στο $r_T' = 0$: Απλώς, $\mathbf{H} = \mathbf{i}_\varphi (i/2\pi r_T)$ παντού, ενώ $\mathbf{B} = \mu_{1,2} \mathbf{H}$.
- (β) Ζεύγος αντίρροπων ρευμάτων $-i$ στο $r_T' = 0$ και $+i$ στο $\mathbf{r}_T' = \{\ell, \varphi'\}$, με $\ell < a$:
- Πεδίο στην περιοχή $r_T < a$ από τη δράση των $-i$ και $+i$, καθώς και του ειδώλου $i_{1c} = [(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_1 + \mu_2)]i$ στη θέση $\{r_{Tc}' = a^2/\ell, \varphi_c' = \varphi'\}$, με παντού μ_1 .
 - Πεδίο στην περιοχή $r_T > a$ από τη δράση δύο ειδώλων, του $+i_{2c}$ στη θέση $\{a^2/\ell, \varphi'\}$ και του $-i_{2c}$ στο $r_T' = 0$, όπου $i_{2c} = [2\mu_1/(\mu_1 + \mu_2)]i$, με παντού μ_2 .
- (γ) Ρεύμα i στο $\mathbf{r}_T' = \{\ell, \varphi'\}$, με $\ell > a$:
- Πεδίο στην περιοχή $r_T < a$ από τη δράση ενός μόνο ειδώλου $i_{1c} = [2\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)]i$, στη θέση $\{\ell, \varphi'\}$, με παντού μ_1 .
 - Πεδίο στην περιοχή $r_T > a$ από τη δράση του i , καθώς και δύο ειδώλων, του $+i_{2c}$ στη θέση $\{a^2/\ell, \varphi'\}$ και του $-i_{2c}$ στο $r_T' = 0$, όπου $i_{2c} = [(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)]i$, με παντού μ_2 .

Μαγνητικό πεδίο σε διατάξεις με $\partial/\partial z = 0$ και εγκάρσια ρεύματα: Τέτοιες διατάξεις μπορεί να περιέχουν πυκνότητες ρεύματος \mathbf{J}_\perp ή \mathbf{K}_\perp κάθετες προς τον άξονα z , αλλά όχι νηματοειδή ρεύματα i , με $d\mathbf{r} \perp \mathbf{i}_z$, γιατί τότε θα ήταν $\partial/\partial z \neq 0$. Το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε τέτοια εγκάρσια ρεύματα έχει μορφή $\mathbf{H} = \mathbf{i}_z H_z(\mathbf{r}_T)$, επειδή συντρέχουν οι ιδιότητες $\partial/\partial z = 0$ και $J_{z, \kappa\lambda\pi} = 0$. Τέτοια εγκάρσια ρεύματα είναι πάντοτε δυνατόν να περιγραφούν ως επαλληλία απειροστών ή πεπερασμένων ρευματοφόρων πηνίων. Έξω από όλα τα πηνία είναι $H_z = 0$, άρα τέτοιες διατάξεις επιλύονται αμέσως με το νόμο *Ampere*, είτε ολοκληρωτικά, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int dI_\perp$, με ορθογωνικό βρόχο που η μία πλευρά είναι έξω από όλα τα συστατικά πηνία, είτε σημειακά, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_\perp$ και $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{K}_\perp$, με αφετηρία για την ολοκλήρωση έξω από όλα τα συστατικά πηνία. Αυτή η επίλυση καλύπτει κάθε χωρική εξάρτηση $\mu(r_T)$, άρα και την ειδική περίπτωση $\mu(r_T < a) = \mu_1$ και $\mu(r_T > a) = \mu_2$. Επομένως, σε διδιάστατες διατάξεις με εγκάρσια ρεύματα, \mathbf{J}_\perp ή \mathbf{K}_\perp , η επίλυση δεν ακολουθεί διαδικασία κατοπτρισμού.

Παράδειγμα 6.2-16: Στον εσωτερικό χώρο γειωμένης κυλινδρικής επιφάνειας $r_T = a$, στον οποίο η επιτρεπτότητα είναι $\varepsilon = \text{σταθ}$, βρίσκεται φορτισμένη ταινία, με πλάτος 2ℓ και σταθερό φορτίο σ_0 , τοποθετημένη συμμετρικά. Ζητείται το δυναμικό $\Phi(r_T, \varphi)$.



Επίλυση: Ας θεωρηθεί ότι το φορτίο σ_0 βρίσκεται στη θέση $y' = 0$, $-\ell < x' < +\ell$, οπότε το στοιχειώδες φορτίο είναι $d\lambda' = \sigma_0 dx'$.

Εξυπηρετεί, όμως, να διατυπωθεί το δυναμικό σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η μετατροπή σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $r_T' = |x'|$, ενώ όταν $x' > 0$, τότε είναι $\varphi' = 0$, αλλά $\varphi' = \pi$, όταν $x' < 0$. Δηλαδή, και για τα δύο μισά της ταινίας είναι $r_T'^2 = x'^2$, και όταν είναι $\varphi' = 0$, τότε $r_T' \cos(\varphi' - \varphi) = x' \cos \varphi$, ενώ όταν $\varphi' = \pi$, τότε είναι $r_T' \cos(\varphi' - \varphi) = |x'| \cos(\pi - \varphi) = -|x'| \cos \varphi = x' \cos \varphi$, οπότε είναι $r_T' \cos(\varphi' - \varphi) = x' \cos \varphi$ σε κάθε περίπτωση.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $r_T'^2 = x'^2$ και $r_T' \cos(\varphi' - \varphi) = x' \cos \varphi$ στις εκφράσεις για τα R_T και R_T^* στις σχέσεις (6.2-40), η σχέση (6.2-41) δίνει αμέσως το αποτέλεσμα:

$$\Phi(r_T < a, \varphi) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon} \int_{-\ell}^{+\ell} dx' \ln \left(\frac{x'^2 - 2x'r_T' \cos \varphi + r_T'^2}{\left(\frac{r_T'}{a}\right)^2 x'^2 - 2x'r_T' \cos \varphi + a^2} \right).$$

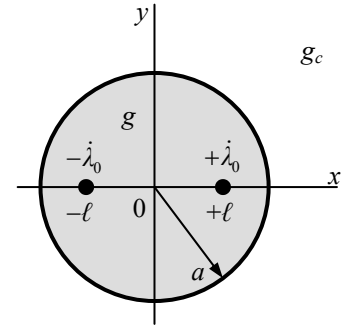
Σχόλια:

- Το ολοκλήρωμα ανάγεται σε ολοκληρώματα της μορφής $\int d\xi \ln(\xi^2 + \kappa^2)$, τα οποία μπορούν να εκφραστούν με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Αυτή η επεξεργασία δεν μας ενδιαφέρει όμως εδώ.
- Εναλλακτικά, η επίλυση μπορεί να γίνει με προσδιορισμό της τιμής και της θέσης των ειδώλων, που στο παραπάνω αποτέλεσμα συνεισφέρουν μέσω του παρονομαστή R_T^{*2} στη λογαριθμική συνάρτηση. Για παράδειγμα, στο δεξιό μισό της ταινίας αντιστοιχεί ένα είδωλο σ_c , πάλι στο $y = 0$, από $x_{c1} = a^2/\ell$ (κατοπτρική θέση του $x_2 = \ell$) μέχρι $x_{c1} = \infty$ (κατοπτρική θέση του $x_1 = 0^+$). Μολονότι, όμως, είναι $\sigma_0 = \text{σταθ.}$, δεν θα είναι $\sigma_c = -\sigma_0$, αλλά πρέπει να ληφθεί $\sigma_c = \sigma_c(x_c)$, επειδή στο μήκος dx αντιστοιχεί είδωλο dx_c με μήκος εξαρτώμενο από τη θέση του x_c . Συγκεκριμένα, επειδή $x_c(x) = a^2/x$, στο dx αντιστοιχεί:

$$dx_c = \frac{dx_c}{dx} dx = -\left(\frac{a}{x}\right)^2 dx = -\left(\frac{x_c}{a}\right)^2 dx.$$

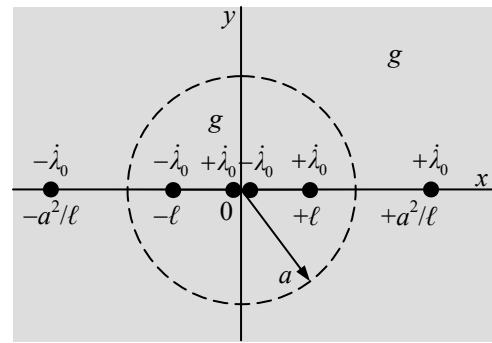
Εξισώνοντας $d\lambda_c = -d\lambda$, δηλαδή $\sigma_c(x_c)|dx_c| = -\sigma_0|dx|$, προκύπτει $\sigma_c(x_c) = -\sigma_0(a/x_c)^2$ κλπ.

Παράδειγμα 6.2-17: Δύο αντίθετες γραμμικές πηγές φορτίου, ίσες με $\pm\dot{\lambda}_0$, βρίσκονται στις θέσεις $x = \pm\ell$, $y = 0$, σε αγώγιμο υλικό με κυλινδρική διατομή ακτίνας a . Το αγώγιμο υλικό έχει ειδική αγωγιμότητα $g = \text{σταθ.}$, ενώ ο υπόλοιπος χώρος είναι πρακτικά μονωτής, με $g_c \ll g$. Ζητείται το δυναμικό $\Phi(r_T, \varphi)$ στην περιοχή $r_T < a$.



Επίλυση: Η συνθήκη $g_c \ll g$, δηλαδή $g_c \approx 0$, έχει τη συνέπεια $\mathbf{J}_c = g_c \mathbf{E}_c \approx 0$. Με $\nabla \cdot \mathbf{K} = 0$, επειδή δεν υπάρχει λόγος που να δικαιολογεί την ύπαρξη \mathbf{K} στο όριο, όπως θα συνέβαινε αν ο κύλινδρος καλυπτόταν από στρώμα εξαιρετικά αγώγιμου υλικού, με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_T$ και $\mathbf{J}_+ = \mathbf{J}(r_T = a^+) = \mathbf{J}_c = 0$, η οριακή συνθήκη δίνει ότι $J_T(r_T = a^-) = 0$, άρα και $E_T(r_T = a^-) = g^{-1} J_T(r_T = a^-) = 0$, δηλαδή οριακή συνθήκη *Neumann* ομογενής, $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$. Όταν η ολοκλήρωση αφορά την περιοχή $r_T < a$, όπως εδώ, η συνθήκη αυτή απαιτεί να είναι $\int d\lambda' = 0$, που πράγματι αληθεύει, επειδή $-\dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_0 = 0$.

Για να επιλυθεί με κατοπτρισμό μία διάταξη με ομογενή συνθήκη *Neumann*, τα αίτια στην περιοχή $r_T < a$, πρέπει να σχηματίζουν ζεύγη αντίθετων πηγών, με μία πηγή κάθε ζεύγους να βρίσκεται στον άξονα. Αυτή η απαίτηση καλύπτεται από το ότι η απουσία αιτίων στον άξονα $r_T = 0$ είναι ισοδύναμη με την παρουσία εκεί δύο αντίθετων πηγών, $-\dot{\lambda}_0$ και $+\dot{\lambda}_0$, που καθεμία συνεργάζεται με τις υπάρχουσες $\pm\dot{\lambda}_0$ για να σχηματίσει ένα τέτοιο ζεύγος. Για την οριακή συνθήκη $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$, τα είδωλα, ένα για κάθε ζεύγος, είναι ίσα με $\pm\dot{\lambda}_0$ (ίσα με τα εκτός άξονα φορτία) στις θέσεις $x = \pm a^2/\ell$. Έτσι, διαμορφώνεται η βοηθητική διάταξη που φαίνεται στο σχήμα, με ειδική αγωγιμότητα παντού ίση με g .



Για την απόσταση $R_{T\pm}$ του τυχαίου σημείου (r_T, φ) από τις πηγές στα $x = \pm\ell$ ισχύει ότι $R_{T\pm}^2 = r_T^2 \mp 2r_T\ell \cos\varphi + \ell^2$, και αντίστοιχα για την απόσταση από τα είδωλα στις θέσεις $x = \pm a^2/\ell$ είναι $R_{Tc\pm}^2 = r_T^2 \mp 2r_T(a^2/\ell) \cos\varphi + (a^2/\ell)^2$. Τα αντίθετα φορτία στο $r_T = 0$ εξουδετερώνονται αμοιβαία και δεν συνεισφέρουν στο δυναμικό, ενώ τα λοιπά φορτία και είδωλα είναι ίσα με $\pm\dot{\lambda}_0$, οπότε το δυναμικό εκφράζεται ως άθροισμα τεσσάρων όρων, ο καθένας με μορφή $-(\pm\dot{\lambda}_0/4\pi g)\ln(R_T^2/R_{T0}^2)$, όπου R_{T0} είναι η απόσταση του σημείου αναφοράς από κάθε $\pm\dot{\lambda}_0$. Μετατρέποντας το άθροισμα/διαφορά λογαρίθμων σε λογάριθμο γινομένου/πηλίκου, προκύπτει το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου για τη βοηθητική διάταξη.

Η ίδια έκφραση δίνει και το ζητούμενο δυναμικό της αρχικής διάταξης στην περιοχή $r_T < a$:

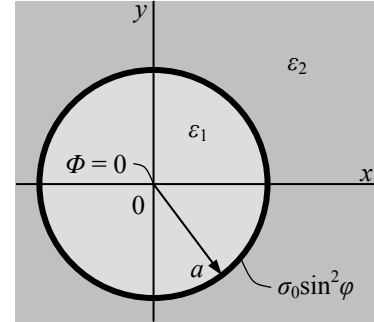
$$\Phi(r_T < a, \varphi) = \frac{-\dot{\lambda}_0}{4\pi g} \ln \left(\frac{r_T^2 - 2r_T \ell \cos \varphi + \ell^2}{r_T^2 + 2r_T \ell \cos \varphi + \ell^2} \frac{r_T^2 - 2r_T (a^2/\ell) \cos \varphi + (a^2/\ell)^2}{r_T^2 + 2r_T (a^2/\ell) \cos \varphi + (a^2/\ell)^2} \kappa^2 \right).$$

Η σταθερά κ^2 προέρχεται από το σύμπλεγμα των τεσσάρων αποστάσεων R_{T0}^2 από το σημείο αναφοράς. Δεν μπορεί να προσδιορισθεί από τα δεδομένα, όπως αναμένεται με οριακή συνθήκη τύπου *Neumann* (γνωστή η παράγωγος $\partial\Phi/\partial n$) σε ολόκληρο το όριο. Με τη σταθερά αυτή, ο αυθαίρετος προσθετός στο δυναμικό Φ έχει γραφεί ως $-(\dot{\lambda}_0/4\pi g)\ln(\kappa^2)$.

Σχόλια:

- Αν δοθεί η τιμή του Φ σε κάποιο σημείο, τότε προσδιορίζεται και η σταθερά κ^2 . Το σημείο αυτό δεν είναι απαραίτητο να είναι στο όριο $r_T = a$. Η απλούστερη επιλογή είναι $\kappa^2 = 1$, που δίνει $\Phi = 0$ όταν $\cos \varphi = 0$ (στον άξονα y).
- Στην παρούσα διάταξη, το δυναμικό προσδιορίστηκε από επαλληλία φορτίων και ειδώλων, και όχι με εφαρμογή της σχέσης (6.2-44), με $\lambda \rightarrow \pm \dot{\lambda}_0$ και $\varepsilon \rightarrow g$, που ουσιαστικά αποτελεί προετοιμασία για τη διατύπωση της σχέσης (6.2-46). Η χρήση αυτής της σχέσης, όπως και της αντίστοιχης σχέσης (6.2-41) για συνθήκη *Dirichlet*, ενδείκνυται ιδιαίτερα όταν πρόκειται για κατανομή, όπως $d\dot{\lambda} = \dot{\sigma} dl$, επειδή ο προσδιορισμός της θέσης και ακόμα περισσότερο της χωρικής εξάρτησης της κατανομής του ειδώλου είναι σχετικά χρονοβόρος ενέργεια, όπως φαίνεται και από το δεύτερο **σχόλιο** στο προηγούμενο **παράδ. 6.2-16**. Αντίθετα, όταν τα αίτια είναι γραμμικές κατανομές, όπως εδώ, η απευθείας εφαρμογή επαλληλίας που προτιμήθηκε εδώ αντιπροσωπεύει τόση προσπάθεια, όση η εφαρμογή της σχέσης (6.2-46), αλλά έχει το πρόσθετο πλεονέκτημα ότι εμφανίζονται απευθείας οι σχετικές αποστάσεις R_T και είναι πιο εύκολο να παρακολουθήσει κανείς την ορθότητα των αλγεβρικών πράξεων.
- Βεβαίως, θα μπορούσε να είχε εφαρμοσθεί η σχέση (6.2-44). Αντί γι' αυτό, ας αναγνωρισθούν οι όροι στη σχέση αυτή σε αντιπαράβολή με τους όρους του αποτελέσματος:
 - Το πρώτο πηλίκο περιγράφει τη συνεισφορά των φορτίων (στο $x = \pm \ell$) και το δεύτερο των ειδώλων (στο $x = \pm a^2/\ell$).
 - Στο δεύτερο πηλίκο, πολλαπλασιασμός αριθμητή και παρονομαστή με $(\ell/a)^2$ δίνει το πηλίκο των $R_{T\pm}^{*2} = (\ell/a)^2 r_T^2 \mp 2r_T \ell \cos \varphi + a^2$, όπως δηλαδή είναι στη σχέση (6.2-45).
 - Η σταθερά κ^2 υποκαθιστά το πηλίκο των δύο L^2 (ενός για κάθε σύμπλεγμα δύο φορτίων και ενός ειδώλου) στη σχέση (6.2-44).

Παράδειγμα 6.2-18: Στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ υπάρχει επιφανειακό φορτίο με πυκνότητα $\sigma(\varphi) = \sigma_0 \sin^2 \varphi$. Η επιτρεπτότητα είναι $\varepsilon(r_T < a) = \varepsilon_1$ και $\varepsilon(r_T > a) = \varepsilon_2$. Ζητείται το δυναμικό Φ παντού, με σημείο αναφοράς στον άξονα $r_T = 0$.



Επίλυση: Ο προβληματισμός κατά πόσο το φορτίο $\sigma(\varphi)$ ανήκει στην περιοχή $r_T < a$, ή στην $r_T > a$, ή αν πρέπει να επιμερισθεί μεταξύ των δύο περιοχών, έχει ήδη τεθεί στο **παράδ.**

6.2-10. Η απάντηση είναι ότι όλα αυτά είναι ισοδύναμα. Συνεπώς, είναι απλούστερο να θεωρηθεί ότι το $\sigma(\varphi)$ είναι, έστω και οριακά, ολόκληρο σε μία από τις περιοχές, είτε την $r_T < a$, είτε την $r_T > a$, δηλαδή ότι βρίσκεται σε ακτινική θέση $r_T' = a^-$ ή $r_T' = a^+$. Ανεξάρτητα πάντως από την επιλογή, θα είναι $d\lambda' = a\sigma_0 \sin^2 \varphi' d\varphi'$, με $0 < \varphi' < 2\pi$.

Η περιοχή $r_T < a$ δεν έχει φορτία, εκτός αν ληφθεί ότι το $\sigma(\varphi)$ βρίσκεται στο $r_T' = a^-$. Μια τέτοια επιλογή θα είχε ως συνέπεια ότι για τον κατοπτρισμό θα έπρεπε να ληφθούν στον άξονα και ισόποσα ετερόσημα φορτία, τα οποία να αναιρεθούν σε πρόσθετο βοηθητικό πρόβλημα, με διάταξη του είδους (a) . Αντίθετα, αν ληφθεί το $\sigma(\varphi)$ στο $r_T' = a^+$, αυτή η πρόσθετη εργασία αποφεύγεται. Συνεπώς, ελαφρώς προσηφορότερη είναι η επιλογή να θεωρηθεί ότι το $\sigma(\varphi)$ βρίσκεται στο $r_T' = a^+$, στην περιοχή $r_T > a$, και η περιοχή $r_T < a$ είναι χωρίς φορτία.

Με αυτή την επιλογή, το βοηθητικό πρόβλημα για την περιοχή $r_T < a$ αφορά χώρο με παντού $\varepsilon = \varepsilon_1$ και αφού η εξεταζόμενη περιοχή δεν έχει φορτία το δυναμικό παράγεται μόνο από είδωλο στην ακτίνα $r_T = a^+$, με τιμή $\sigma_c = [2\varepsilon_1/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\sigma_0 \sin^2 \varphi$. Συνεπώς, σε κάθε r_T για το βοηθητικό πρόβλημα, και στην περιοχή $r_T < a$ του αρχικού προβλήματος, το δυναμικό είναι:

$$\Phi(r_T < a, \varphi) = -\frac{a\sigma_0}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin^2 \varphi' \ln \left(\frac{r_T^2 - 2r_T a \cos(\varphi' - \varphi) + a^2}{a^2} \right),$$

όπου ο παρονομαστής είναι $R_{T0}^2 = a^2$, με το σημείο αναφοράς στο $r_{T0} = 0$ κατά την εκφώνηση.

Για το βοηθητικό πρόβλημα της περιοχής $r_T > a$, θεωρείται ότι παντού είναι $\varepsilon = \varepsilon_2$. Στην περιοχή αυτή υπάρχει εξαρχής στη θέση $r_T' = a$, $0 < \varphi' < 2\pi$ το φορτίο $\sigma(\varphi')$, που αποτελείται από τα στοιχειώδη $d\lambda' = a\sigma_0 \sin^2 \varphi' d\varphi'$. [Δεν υπάρχει πια λόγος να διευκρινισθεί ότι $r_T' = a^+$, αφού για το βοηθητικό πρόβλημα όλος ο χώρος είναι ενιαίος και οι θέσεις $r_T' = a^+$ και $r_T' = a$ ταυτίζονται.] Εισάγονται τα κατάλληλα είδωλα, $-d\lambda_{2c}$ και $+d\lambda_{2c}$, αντίστοιχα στον άξονα και στις θέσεις $r_{Tc}^- = a^2/a^+ = a^- = a$, σε κάθε φ' , όπου $d\lambda_{2c} = [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]d\lambda$. Όμως, κάθε $d\lambda$ και το αντίστοιχο $+d\lambda_{2c}$ βρίσκονται ουσιαστικά στις ίδιες θέσεις $r_T' = a^+ = a^- = a$, συνεπώς εκδηλώνονται μέσω του αθροίσματος $d\lambda + d\lambda_{2c} = [1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]d\lambda = [2\varepsilon_2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]d\lambda =$

$[2\varepsilon_2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]a\sigma_0 \sin^2 \varphi d\varphi$, ενώ τα φορτία $-d\lambda_{2c}$ δρουν αθροιστικά ως ένα γραμμικό φορτίο ίσο με $-\lambda_{2c} = -[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\int d\lambda_{2c} = -[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]\pi a\sigma_0$, επειδή $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi$. Συνεπώς, το δυναμικό από το άθροισμα $d\lambda + d\lambda_{2c}$ και το γραμμικό φορτίο $-\lambda_{2c}$ είναι:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \Phi_0 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\pi a \sigma_0}{4\pi \varepsilon_2} \ln \left(\frac{r_T^2}{r_{T0}^2} \right) - \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a\sigma_0}{4\pi \varepsilon_2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin^2 \varphi' \ln \left(\frac{r_T^2 - 2r_T a \cos(\varphi' - \varphi) + a^2}{r_{T0}^2 - 2r_{T0} a \cos(\varphi' - \varphi_0) + a^2} \right),$$

όπου $\Phi_0 = \Phi(r_{T0}, \varphi_0)$ είναι το δυναμικό σε κάποια θέση (r_{T0}, φ_0) . Δεν είναι δυνατόν να γίνει η επιλογή $r_{T0} = 0$, επειδή εκεί βρίσκεται το γραμμικό φορτίο. Είναι δυνατόν, όμως, να ληφθεί $r_{T0} = \delta \cdot a$, με $\delta \rightarrow 0$. Τότε, προκύπτει η έκφραση:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \left[\Phi_0 - \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) a \sigma_0}{4\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln(\delta^2) \right] + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) a \sigma_0}{4\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln \left(\frac{r_T^2}{a^2} \right) - \frac{a\sigma_0}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin^2 \varphi' \ln \left(\frac{r_T^2 - 2r_T a \cos(\varphi' - \varphi) + a^2}{a^2} \right).$$

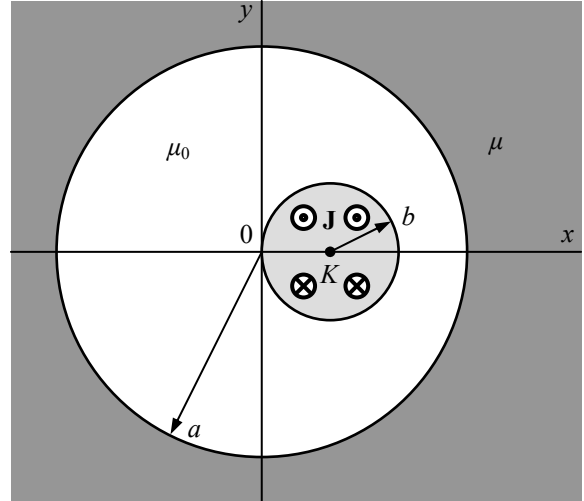
Η τετράγωνη αγκύλη είναι μια σταθερή ποσότητα Φ_{01} , ο όρος με το $\ln(r_T/a)^2 = 2\ln(r_T/a)$ αντιπροσωπεύει το δυναμικό του γραμμικού ειδώλου $-\lambda_{2c}$ στον άξονα, και ο όρος με το ολοκλήρωμα δίνει τη συνεισφορά των $d\lambda$ και $+d\lambda_{2c}$ αθροιστικά.

Οι δύο τελευταίες σχέσεις περιγράφουν το δυναμικό της δεύτερης βοηθητικής διάταξης, συνεπώς και το δυναμικό στην περιοχή $r_T > a$ της αρχικής διάταξης, αλλά με απροσδιόριστο ακόμα τον προσθετέο Φ_{01} . Για να προσδιορισθεί αυτός ο προσθετέος, θα χρησιμοποιηθεί η συνθήκη συνέχειας στο όριο $r_T = a$ μεταξύ των δύο περιοχών της αρχικής διάταξης, $\Phi_+ - \Phi_- = 0$ επειδή δεν υπάρχει ηλεκτρικό διπολικό στρώμα, όπου τα $\Phi_+ = \Phi(r_T = a^+, \varphi)$ και $\Phi_- = \Phi(r_T = a^-, \varphi)$ δίδονται από τις εκφράσεις $\Phi(r_T, \varphi)$ των δύο βοηθητικών προβλημάτων, με $r_T = a$. Εξισώνοντας, προκύπτει ότι $\Phi_{01} = 0$. Συνεπώς, το δυναμικό στην περιοχή $r_T = a$ είναι:

$$\Phi(r_T > a, \varphi) = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) a \sigma_0}{4\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \ln \left(\frac{r_T^2}{a^2} \right) - \frac{a\sigma_0}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin^2 \varphi' \ln \left(\frac{r_T^2 - 2r_T a \cos(\varphi' - \varphi) + a^2}{a^2} \right).$$

Σχόλιο: Στο βοηθητικό πρόβλημα για την περιοχή $r_T > a$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας το δεδομένο $\Phi(r_T = 0) = 0$ της εκφώνησης, ώστε να προσδιορισθεί η τιμή του Φ_0 . Ο λόγος είναι ότι το σημείο $r_T = 0$ βρίσκεται στην περιοχή $r_T < a$, με την οποία δεν έχει καμία σχέση η έκφραση $\Phi(r_T > a, \varphi)$ του βοηθητικού προβλήματος για την περιοχή $r_T > a$. Το γεγονός ότι το δυναμικό αυτό απειρίζεται λόγω του λ , όταν $r_T \rightarrow 0$, είναι τελείως αδιάφορο.

Παράδειγμα 6.2-19: Σε κενό (με μ_0) κυλινδρικό σωλήνα με ακτίνα a , που περιβάλλεται από υλικό με $\mu \gg \mu_0$, ρέει ηλεκτρικό ρεύμα με πυκνότητα $\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_0(y/b)$, σε κύλινδρο με κέντρο K (με $x_K = b, y_K = 0$) και ακτίνα b . Ζητείται το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} στον εσωτερικό χώρο του σωλήνα (στο χώρο $r_T < a$).



Επίλυση: Η ιδιότητα $\mu \gg \mu_0$ του παρακαίμενου χώρου V_c προσεγγίζεται με $\mu^{-1} \approx 0$, το οποίο σημαίνει ότι εκεί είναι $\mathbf{H}_c = \mu^{-1} \mathbf{B}_c \approx 0$,

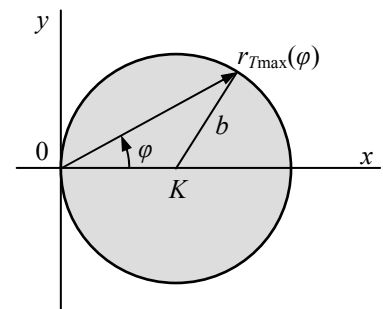
συνεπώς, στο χώρο αυτό είναι $\mathbf{J}_c = \nabla \times \mathbf{H}_c \approx 0$ και στο όριο είναι $H_\phi(r_T = a^+) \approx 0$. Σε βρόχο που βρίσκεται στο χώρο V_c και περιβάλλει την εσωτερική περιοχή, για παράδειγμα, σε κυκλικό βρόχο με ακτίνα $r_T = a^+$, στο νόμο του Ampere είναι $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} H_\phi a d\phi \approx 0$, συνεπώς μηδενίζεται και το ολικό ρεύμα, $\int dI = \int J_z dS + \int K_z dl = 0$, συμπεριλαμβάνοντας και την ενδεχόμενη παρουσία επιφανειακού ρεύματος στην επιφάνεια $r_T = a$. Όμως, είναι $\int J_z dS = 0$, λόγω της αντισυμμετρίας στο J_z (σε σχέση με το κέντρο του K), συνεπώς δεν υπάρχει ανάγκη για παρουσία επιφανειακού ρεύματος στην επιφάνεια $r_T = a$. Με $\mathbf{K} = 0$, $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_T$ και $\mathbf{H}_+ = \mathbf{H}_c \approx 0$ η οριακή συνθήκη $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{K}$ σημαίνει ότι πρακτικά είναι $H_\phi(r_T = a^-) = 0$.

Για την προκειμένη οριακή συνθήκη $H_\phi(r_T = a^-) = 0$, κατάλληλα είδωλα κάθε στοιχείου $dI' = J_z dS'$ είναι τα ομόρροπα $dI'_c = dI'$ στις θέσεις $r'_{Tc} = a^2/r'_T$, $\phi'_c = \phi'$. Η συμβολή των ειδώλων είναι δυνατό να προσδιορισθεί άμεσα. Για μια τέτοια πορεία επίλυσης χρειάζεται προηγουμένως να υπολογισθεί η πυκνότητα ρεύματος J_{cz} (επειδή είναι μεν $J_{zc} dS_c = J_z dS$, αλλά $dS_c \neq dS$, επειδή τα στοιχειώδη μήκη μεταβάλλονται κατά το μετασχηματισμό $r_{Tc} = a^2/r_T$, $\phi_c = \phi$), καθώς και η περιοχή του χώρου, στην οποία η πυκνότητα J_{cz} δεν είναι μηδενική.

Προτιμότερη είναι η αναγωγή στις αρχικές θέσεις των ρευμάτων, δηλαδή να χρησιμοποιηθεί η σχέση (6.2-46), μεταγραμμένη για διατάξεις μαγνητικού πεδίου με βάση τις αντιστοιχίες του Πίνακα 6.2-2. Οι αντιστοιχίες που αφορούν την παρούσα διάταξη είναι $\Phi \rightarrow A_z$, $\varepsilon \rightarrow \mu^{-1}$ και $dl \rightarrow dI$, συνεπώς:

$$A_z(r_T, \phi) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dI' \ln \left(\frac{R_T^2(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T) R_T^{*2}(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}'_T)}{r_T^2 L^2} \right).$$

Εδώ, η περιοχή με την πυκνότητα \mathbf{J} εκτείνεται στα διαστήματα $-\pi/2 < \phi' < \pi/2$ και $0 < r'_T < r'_{T\max}(\phi') = 2b \cos \phi'$, ενώ το στοι-



χειώδες ρεύμα είναι $dI' = J_z dS' = J_0(y'/b)r_T' dr_T' d\varphi'$, με $y' = r_T' \sin \varphi'$. Τέλος, για τις αποστάσεις R_T και R_T^* είναι, κατά τα γνωστά:

$$R_T^2(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}_T') = r_T'^2 - 2r_T' r_T \cos(\varphi' - \varphi) + r_T^2, \quad R_T^{*2}(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}_T') = \left(\frac{r_T'}{a}\right)^2 r_T'^2 - 2r_T' r_T \cos(\varphi' - \varphi) + a^2.$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$$A_z(r_T < a, \varphi) = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi b} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\varphi' \sin \varphi' \int_0^{2b \cos \varphi'} dr_T' r_T'^2 \ln \left(\frac{R_T^2(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}_T') R_T^{*2}(\mathbf{r}_T; \mathbf{r}_T')}{r_T^2 L^2} \right).$$

Στην έκφραση αυτή και σε αντίθεση με σχεδόν όλα τα άλλα παραδείγματα, τα όρια της ολοκλήρωσης ως προς r_T' εξαρτώνται από το φ' , την άλλη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Γι' αυτό, με τα όρια αυτά δεν μπορεί να αντιστραφεί η σειρά ολοκλήρωσης. Θα μπορούσε να ήταν εξωτερική η ολοκλήρωση ως προς r_T' , με όρια $0 < r_T' < 2b$, και τότε η εσωτερική ολοκλήρωση ως προς φ' θα ήταν στο διάστημα $-\varphi_{\max}(r_T') < \varphi' < +\varphi_{\max}(r_T')$, με $\varphi_{\max}(r_T') = \arccos(r_T'/2b)$.

Το μαγνητικό πεδίο προσδιορίζεται παραγωγίζοντας το διανυσματικό δυναμικό:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (A_z \mathbf{i}_z) = \frac{1}{\mu_0 r_T} \left[\mathbf{i}_T \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \mathbf{i}_\varphi \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T A_z) \right],$$

και κατά τη διαδικασία εξαλείφεται η σταθερά L^2 . Οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς τις άτονες μεταβλητές $\mathbf{r}_T = \{r_T, \varphi\}$, οι οποίες περιέχονται και στο όρισμα των R_T και R_T^* . Η έκφραση που προκύπτει μετά τις παραγωγίσεις δίνει το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}(r_T, \varphi)$ στο χώρο $r_T < a$, χωρίς διάκριση μεταξύ του τμήματος με την πυκνότητα \mathbf{J} και του υπόλοιπου τμήματος του χώρου αυτού.

Σχόλιο: Αν, παρά την επιχειρηματολογία που παρουσιάστηκε στην επίλυση, προτιμηθεί να προσδιορισθεί άμεσα η συνεισφορά των ειδώλων, τότε χρειάζονται οι εξής πρόσθετες ενέργειες, που βασίζονται στο μετασχηματισμό $r_{Tc} = a^2/r_T$, $\varphi_c = \varphi$:

- Η περιοχή με το είδωλο \mathbf{J}_c της πυκνότητας ρεύματος εκτείνεται, ως προς τη γωνία φ_c , πάλι στο διάστημα $\pi/2 < \varphi_c < \pi/2$, ενώ ακτινικά αντιστρέφεται η φορά της ανισότητας και είναι $r_{Tc} > r_{Tc\min}(\varphi) = a^2/(2b \cos \varphi_c)$. Επειδή είναι $x = r_T \cos \varphi$, το είδωλο του κύκλου με κέντρο K και ακτίνα b είναι ολόκληρο το τμήμα $x_c = r_{Tc} \cos \varphi_c > a^2/2b$ του επιπέδου.
- Για το εμβαδόν dS_c είναι $d\varphi_c = d\varphi$ και $r_{Tc} = a^2/r_T$, με διαφορικό $dr_{Tc} = -(a/r_T)^2 dr_T$, οπότε $dS_c = |r_{Tc} dr_{Tc} d\varphi_c| = (a/r_T)^4 r_T dr_T d\varphi = (a/r_T)^4 dS = (r_{Tc}/a)^4 dS$. Αν δεν ληφθεί η απόλυτη τιμή, τότε θα είναι $dr_{Tc} < 0$, που σημαίνει ολοκλήρωση από το άπειρο μέχρι το $r_{Tc\min}(\varphi)$.
- Είναι $J_z = J_0(y/b) = J_0(r_T/b) \sin \varphi = J_0(a^2/b r_{Tc}) \sin \varphi_c$ και επειδή $J_{zc} dS_c = J_z dS$, η πυκνότητα ρεύματος του ειδώλου είναι ίση με $J_{zc} = (a/r_{Tc})^4 J_z = J_0(a/r_{Tc})^6 (r_{Tc}/b) \sin \varphi_c$.

6.2.5 Άλλες διατάξεις κατοπτρισμού

Στον κατοπτρισμό, ένα αρχικό πρόβλημα για την εύρεση του δυναμικού σε κάποια περιοχή V (με δεδομένα τα φορτία και τα λοιπά αίτια στο εσωτερικό της και την οριακή συνθήκη στο περίβλημά της, την κλειστή επιφάνεια S) υποκαθίσταται από ένα βοηθητικό πρόβλημα, σε περιοχή $V^{(+)} = V \cup V_c$ ευρύτερη της V , με κατάλληλα πρόσθετα αίτια, τα είδωλα, σε κατάλληλες θέσεις μόνο του τμήματος V_c και με κατάλληλες οριακές συνθήκες στο όριο $S^{(+)}$ της περιοχής $V^{(+)}$. Ας υποθεθεί ότι το πρόβλημα οριακών τιμών για το χώρο $V^{(+)}$ επιλύεται και είναι γνωστή η κατανομή του δυναμικού $F^{(+)}$ στο χώρο αυτό. Τότε είναι γνωστό το δυναμικό $F^{(+)}$ και κάθε παράγωγός του και στην επιφάνεια S , το όριο του χώρου V , το οποίο όσον αφορά το χώρο $V^{(+)}$ είναι εσωτερική επιφάνεια. Αν συμβεί, η οριακή συνθήκη του αρχικού προβλήματος (στην επιφάνεια S) να ικανοποιείται από τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό του δυναμικού $F^{(+)}$ και της κάθετης παραγώγου του στην ίδια επιφάνεια, τότε η λύση F του αρχικού προβλήματος (στο χώρο V) ταυτίζεται με τη λύση $F^{(+)}$ του βοηθητικού προβλήματος στο ίδιο τμήμα V της ευρύτερης περιοχής $V^{(+)}$, με βάση το θεώρημα της μοναδικότητας. Και τότε διαπιστώνεται, εκ των υστέρων, ότι τα είδωλα στο χώρο V_c και οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $S^{(+)}$ πράγματι είναι τα κατάλληλα.

Αυτή ακριβώς η διαδικασία χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Για παράδειγμα, στις παραγράφους 6.2.1 και 6.2.3 εξετάσθηκε το δυναμικό από δύο σημειακά φορτία και διαπιστώθηκαν οι προϋποθέσεις, κάτω από τις οποίες το δυναμικό ικανοποιεί ομογενή συνθήκη *Dirichlet* ή *Neumann* σε επίπεδη επιφάνεια, ή ομογενή συνθήκη *Dirichlet* σε σφαιρική επιφάνεια. Το ίδιο έγινε στην παράγραφο 6.2.3 με γραμμικά φορτία και ομογενή συνθήκη *Dirichlet* ή *Neumann*, σε κυλινδρική τώρα επιφάνεια. Τα πορίσματα που εξήχθησαν αποτέλεσαν τη βάση για περαιτέρω επεκτάσεις, μεταξύ των οποίων και η περίπτωση, μία επίπεδη ή κυλινδρική (αλλά όχι σφαιρική) επιφάνεια να είναι το όριο μεταξύ υλικών με μικρές διαφορές στις ιδιότητές τους.

Η μέθοδος του κατοπτρισμού δεν περιορίζεται μόνο σε διατάξεις με τέτοια όρια, ούτε είναι αντικείμενο του κατοπτρισμού μόνο τα αίτια στο εσωτερικό του χώρου V . Άλλες περιπτώσεις διατάξεων, οι οποίες επιδέχονται επίλυση με κατοπτρισμό, παρουσιάζονται στην παρούσα παράγραφο, μέσω παραδειγμάτων με ένθετα σχόλια. Ειδικότερα, τα **παραδ. 6.2-20** και **6.2-21** αφορούν επίπεδο όριο, αλλά αντικείμενο του κατοπτρισμού είναι και η οριακή συνθήκη στο υπόλοιπο όριο, ενώ για τα **παραδ. 6.2-22** έως **6.2-24** αξιοποιείται η γνώση της λύσης σε άλλη, ευρύτερη διάταξη, στο χώρο $V^{(+)}$.

Παράδειγμα 6.2-20: Να συγκριθούν οι διατομές τριγώνου και συμμετρικού τετραπλεύρου του σχήματος, καθώς και οι οριακές συνθήκες, για να διερευνηθούν οι δυνατότητες επίλυσης με κατοπτρισμό της τριγωνικής διατομής. Υποτίθεται ότι είναι $\partial/\partial z = 0$.

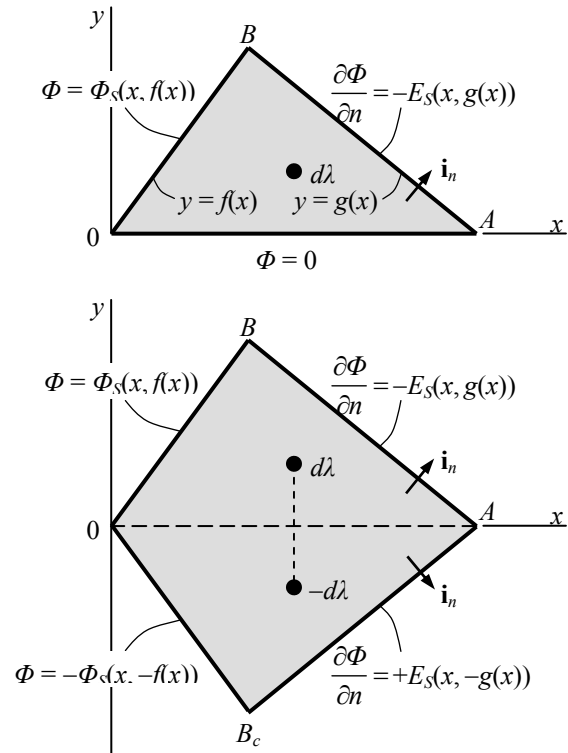
Επίλυση: Παρατηρείται ότι στο τετράπλευρο όλα τα δεδομένα είναι αντισυμμετρικά σε σχέση με τον άξονα x . Αυτή η παρατήρηση αφορά τόσο τις οριακές συνθήκες, όσο και τα αίτια. Συνεπώς, αναμένεται ότι το δυναμικό στο εσωτερικό του τετραπλεύρου θα ικανοποιεί σχέση αντισυμμετρίας:

$$\Phi(x, y=+h) = -\Phi(x, y=-h).$$

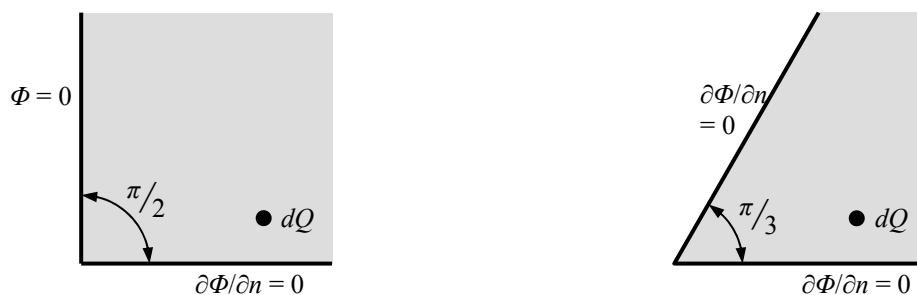
Αυτή η αντισυμμετρία διαπιστώνεται σε όλα τα στοιχεία που καθορίζουν το δυναμικό, τόσο στα φορτία $\pm d\lambda$, που κοντά τους ο λογαριθμικός απειρισμός έχει αντίθετο πρόσημο, όσο και στα εξωτερικά όρια. Συνέπεια της αντισυμμετρίας είναι ότι στο επίπεδο $y = 0$ θα μηδενίζεται το δυναμικό του τετραπλεύρου. Αυτό φαίνεται στο όριο $h \rightarrow 0$, στο οποίο η παραπάνω σχέση δίνει $\Phi_+ = -\Phi_-$, αλλά ταυτόχρονα πρέπει να είναι και $\Phi_+ = \Phi_-$, επειδή δεν υπάρχει κανένας λόγος ασυνέχειας, συνεπώς $\Phi_+ = \Phi_- = 0$. Αν, συνεπώς, μπορεί με οποιονδήποτε τρόπο να επιλυθεί το τετράπλευρο (το βοηθητικό πρόβλημα), τότε η λύση θα αντιπροσωπεύει και το δυναμικό στην αρχική διάταξη, αυτή με την τριγωνική διατομή.

Σχόλια:

- Αν το τρίγωνο είχε επεκταθεί σε συμμετρικό τετράπλευρο, με τις οριακές συνθήκες $\Phi = +\Phi_S(x, -f(x))$ στην πλευρά $0-B_c$ και $\partial\Phi/\partial n = -E_S(x, -g(x))$ στην πλευρά $A-B_c$, καθώς και είδωλο $+d\lambda$, ομόσημο του φορτίου, τότε το δυναμικό του τετραπλεύρου θα ήταν συμμετρικό ως προς τη διαγώνιο $0-A$, που σημαίνει $(\partial\Phi/\partial n)|_{0-A} = 0$, συνεπώς θα έδινε και το δυναμικό λύση στο αρχικό τρίγωνο, με οριακή συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$ στην πλευρά $0-A$.
- Τέτοιοι κατοπτρισμοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι, όταν το αρχικό τρίγωνο είναι ισοσκελές ορθογώνιο. Τότε, στο βοηθητικό πρόβλημα η περιοχή είναι τετραγωνική και επιδέχεται συστηματική επίλυση με χωρισμό μεταβλητών σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

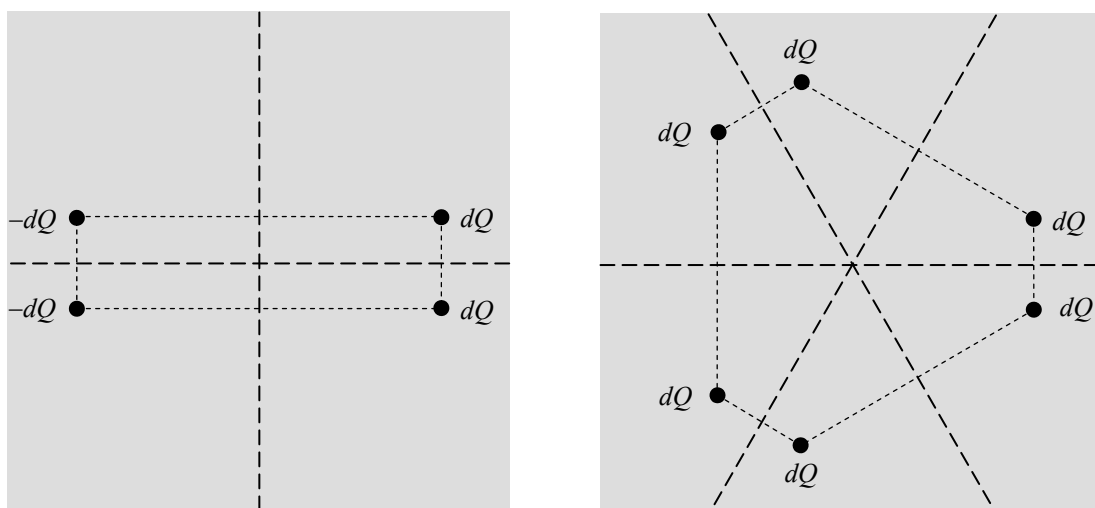


Παράδειγμα 6.2-21: Οι διατάξεις του σχήματος αφορούν την περιοχή $0 < \varphi < \Gamma_n = \pi/n$, με n θετικό ακέραιο (που στο σχήμα εξειδικεύεται σε $n = 2$ και $n = 3$). Στο εσωτερικό της διάταξης υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία, με αντιπροσωπευτικό το στοιχείο dQ . Στα όρια $\varphi = 0$ και $\varphi = \Gamma_n = \pi/n$ επικρατούν ομογενείς οριακές συνθήκες, $\Phi = 0$ ή $\partial\Phi/\partial n = 0$. Ζητείται να προσδιορισθεί διάταξη, από την επίλυση της οποίας προκύπτει και η λύση της αρχικής διάταξης.



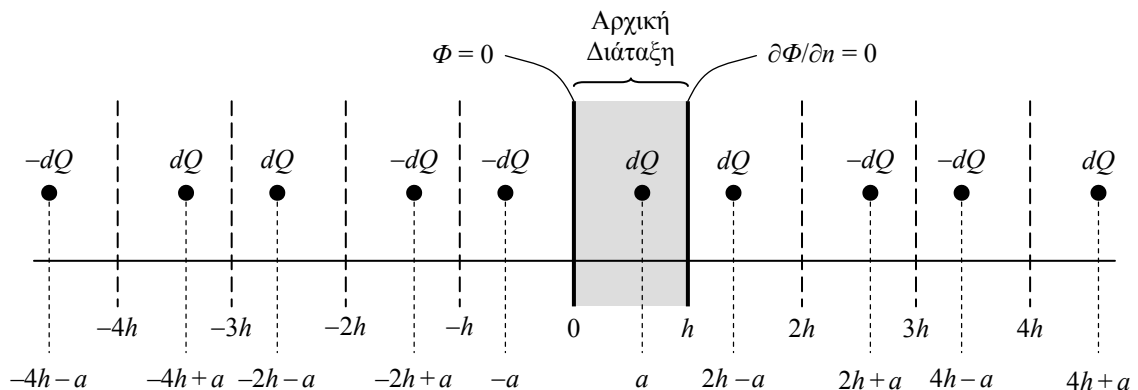
Επίλυση: Όταν και οι δύο πλευρές έχουν ίδιου είδους οριακή συνθήκη (και οι δύο *Dirichlet*, ή και οι δύο *Neumann*), το αποτέλεσμα ενός κατοπτρισμού ως προς ένα επίπεδο όριο είναι διάταξη με διπλάσια γωνία και με οριακή συνθήκη και στα δύο σκέλη ίδιου είδους με την αρχική. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία ώσπου να καλυφθεί όλος ο χώρος, και απομακρύνοντας τις επικαλύψεις, προκύπτει διάταξη με γνωστές τις θέσεις και τις τιμές του αρχικού αιτίου και των $(2n - 1)$ ειδώλων. Συνεπώς η τελική βοηθητική διάταξη είναι επιλύσιμη, και η λύση της αντιπροσωπεύει και την λύση της αρχικής διάταξης (στην περιοχή $0 < \varphi < \Gamma_n$).

Αν η οριακή συνθήκη είναι $\Phi = 0$ στο ένα ημιεπίπεδο και $\partial\Phi/\partial n = 0$ στο άλλο, τότε ένας κατοπτρισμός διπλασιάζει τη γωνία, από Γ_n σε $2\Gamma_n$, και σχηματίζεται διάταξη με την ίδια οριακή συνθήκη και στα δύο σκέλη, η οποία επιλύεται όπως στο προηγούμενο ενδεχόμενο, εφόσον είναι $2\Gamma_n = \pi/n$. Επομένως, και αυτή η αρχική διάταξη επιλύεται, αλλά αν είναι $\Gamma_n = \pi/(2n)$.

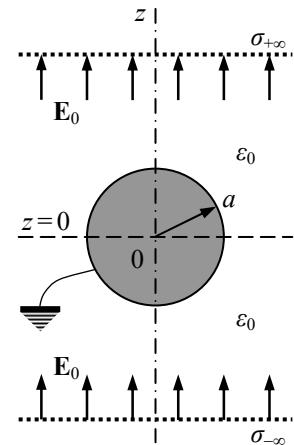


Σχόλια:

- Η περίπτωση $n = 1$ αντιπροσωπεύει τον κατοπτρισμό σε επίπεδο (παράγραφος 6.2.1).
- Αν η γωνία μεταξύ των δύο πλευρών είναι $\Gamma \neq \pi/n$ (με n φυσικό αριθμό), τότε δεν είναι δυνατόν να διαταχθούν είδωλα σε θέσεις συμμετρικές, και συνεπώς δεν είναι δυνατή η μαθηματικά ακριβής επίλυση. Όμως, ιδίως αν $\Gamma \ll \pi$ (πρακτικά, αρκεί $\Gamma < \pi/6$), είναι δυνατόν να τοποθετηθούν είδωλα στις κατοπτρικές θέσεις ως προς τα ημιεπίπεδα αφενός $\varphi = \Gamma, 2\Gamma, 3\Gamma, \dots$, και αφετέρου $\varphi = 0, -\Gamma, -2\Gamma, \dots$. Οι δύο αλληλουχίες καταλήγουν σε διαφορετική θέση για το είδωλο στο διάστημα $\pi < \varphi < \pi + \Gamma$. Αρκεί όμως, αυτό το είδωλο να τοποθετηθεί στην ενδιάμεση θέση. Η προσέγγιση αυτή είναι εξαιρετικά ακριβής, επειδή στην περιοχή $0 < \varphi < \Gamma$ που ενδιαφέρει προκαλείται στο δυναμικό σφάλμα σε τάξη $(\delta\varphi')^2$, πολύ μικρότερο από το σφάλμα $(\delta\varphi')$ στη γωνιακή θέση του τελευταίου ειδώλου.
- Αν ο χώρος V , με $0 < \varphi < \Gamma_n$, δεν εκτείνεται ακτινικά σε ολόκληρο το διάστημα $0 < r_T < \infty$, αλλά σε ένα τμήμα του, το $r_{T1}(\varphi) < r_T < r_{T2}(\varphi)$, η διαδικασία περιλαμβάνει και κατοπτρισμούς των ορίων $r_{T1}(\varphi)$ και $r_{T2}(\varphi)$ και των εκεί οριακών συνθηκών, όπως έχει γίνει με την πλευρά AB στο **παράδ. 6.2-20**.
- Στο όριο $n \rightarrow \infty$, η αρχική διάταξη οριοθετείται από δύο παράλληλα επίπεδα, στα $x = 0$ και $x = h$, με το αντιπροσωπευτικό στοιχειώδες φορτίο σε κάποια ενδιάμεση θέση $x = a$. Για την επίλυση με κατοπτρισμό, το βοηθητικό πρόβλημα τώρα περιλαμβάνει άπειρο αριθμό ειδώλων, τα οποία συμπεριλαμβάνοντας το αρχικό φορτίο βρίσκονται στις θέσεις $2nh \pm a$, με το κατάλληλο πρόσημο, ανάλογα με το είδος της οριακής συνθήκης, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Παράδειγμα 6.2-22: Μία σφαίρα με ακτίνα a , η οποία αποτελείται από αγώγιμο υλικό και είναι γειωμένη, τοποθετείται σε χώρο με επιτρεπτότητα ϵ_0 . Στο χώρο αυτό υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο πριν από την τοποθέτηση της σφαίρας ήταν ομογενές. Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ στο χώρο έξω από τη σφαίρα.



Επίλυση: Ας θεωρηθεί η σφαίρα με κέντρο στην αρχή των αξόνων, και ότι το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έχει μορφή $\mathbf{E} = \mathbf{i}_z E_0$. Το πεδίο αυτό παράγεται από κάποια κατανομή φορτίων στο άπειρο, η οποία μπορεί να υποθεθεί ως επιφανειακή, με πυκνότητα $\sigma_{\pm\infty} = \mp \epsilon_0 E_0$.

Κάθε στοιχείο $dQ_{\pm\infty}$ από τις επιφανειακές αυτές πυκνότητες, κατοπτριζόμενο στη σφαιρική επιφάνεια με το νόμο $\ell_c = a^2/\ell$ (με $\ell = \infty$), παράγει και ένα είδωλο απειροστά κοντά στην αρχή των αξόνων, σε θέσεις $z_c = 0^\pm$. Σε καθεμία από τις δύο θέσεις $z = \pm\infty$ στο άπειρο το συνολικό φορτίο είναι άπειρη ποσότητα, δεν είναι σαφές όμως, τουλάχιστον εκ των προτέρων, τι συμβαίνει με το συνολικό φορτίο σε κάθε μία από τις θέσεις $z_c = 0^\pm$, επειδή ο νόμος $dQ_c = -(a/\ell)dQ$, με το μήκος $\ell = \infty$ στον παρονομαστή, περιέχει απροσδιοριστία, αν επιχειρηθεί ολοκλήρωση σ' όλα τα φορτία. Αυτή η δυσκολία, όμως, παρακάμπτεται αναγνωρίζοντας ότι, σε κάθε περίπτωση, τα φορτία στις θέσεις $z_c = 0^\pm$ συναποτελούν ένα σημειακό δίπολο, $\mathbf{p}_c = \mathbf{i}_z p_c$, του οποίου η τιμή δεν είναι απαραίτητο να είναι γνωστή από την αρχή, αλλά μπορεί να προσδιορισθεί αργότερα.

Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές, σχηματίζεται το βοηθητικό πρόβλημα. Σ' αυτό όλος ο χώρος έχει επιτρεπτότητα ϵ_0 και υπάρχει ένα ηλεκτρικό δίπολο $\mathbf{p}_c = \mathbf{i}_z p_c$ στην αρχή των αξόνων και επί πλέον οι επιφανειακές πυκνότητες $\sigma_{\pm\infty} = \mp \epsilon_0 E$ σε θέσεις $z = \pm h$, με $h = \infty$, οι οποίες είναι υπεύθυνες για το ομογενές πεδίο $\mathbf{E} = \mathbf{i}_z E_0$. Η επίλυση μπορεί να γίνει με επαλληλία. Το δυναμικό σημειακού διπόλου, βλ. τη σχέση (5.2-19α), είναι $\Phi_p(\mathbf{r}) = (1/4\pi\epsilon_0 r^2) p_c \cos\theta$, σε σφαιρικές συντεταγμένες. Στη σχέση αυτή υποκρύπτεται η επιλογή του σημείου αναφοράς στο επίπεδο $z = 0$ (δηλαδή, $\cos\theta = 0$), που ταιριάζει με τη συνολικά αντισυμμετρική δομή της διάταξης, λόγω των $\sigma_{\pm\infty}$. Κατά συνέπεια, το δυναμικό λόγω των $\sigma_{\pm\infty}$ θα ληφθεί, επίσης, με αναφορά στο $z = 0$, για να διατηρηθεί η αντισυμμετρία. Ολοκληρώνοντας τη σχέση $-\partial\Phi/\partial z = E_0$ και με $\Phi(z=0)$ προκύπτει αμέσως ότι $\Phi_E = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta$.

Το συνολικό δυναμικό είναι $\Phi = \Phi_p + \Phi_E$, δηλαδή:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{p_c \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \cos\theta = \frac{E_0 \cos\theta}{r^2} \left(r^3 - \frac{p_c}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right).$$

Το δυναμικό μηδενίζεται όταν $\theta = \pi/2$ (που έχει ήδη ληφθεί ως αναφορά), αλλά επίσης σε σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα $r = (p_c/4\pi\epsilon_0 E_0)^{1/3}$. Ή, αντίστροφα, προκειμένου στη σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα a να είναι $\Phi = 0$, η διπολική ροπή του ειδώλου πρέπει να ληφθεί ίση με $p_c = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$, ομόσημη με το E_0 . Συνεπώς, η σχέση:

$$\Phi(r > a, \theta) = E_0 \frac{r^3 - a^3}{r^2} \cos\theta,$$

δίνει το δυναμικό μετά την εισαγωγή της γειωμένης αγωγίμης σφαίρας στο χώρο με το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Εύκολα φαίνεται ότι η σχέση αυτή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις, δηλαδή, ότι είναι $\nabla^2 \Phi = 0$ σε κάθε σημείο του χώρου, για $r > a$ δεν έχει ασυνέχεια ούτε η τιμή, ούτε η παράγωγος, στο $r = a$ είναι $\Phi = 0$, και τέλος όταν $r \gg a$ είναι $\partial\Phi/\partial z = -E_0$.

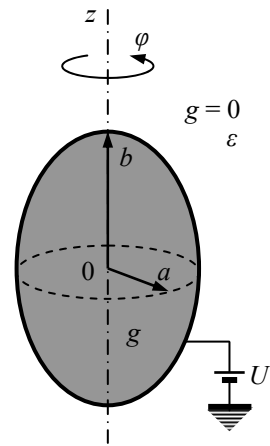
Σχόλια:

- Παρόμοια διαδικασία επιτρέπει την επίλυση των εξής διατάξεων:
 - Ομογενές πεδίο και σφαίρα με συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$. [Μηδενίζοντας την παράγωγο $\partial\Phi/\partial r$ προκύπτει ότι το διπολικό είδωλο είναι ίσο με $\mathbf{p}_c = -\mathbf{i}_z(2\pi\epsilon_0 E_0)$.]
 - Ομογενές πεδίο κάθετο στον άξονα κυλίνδρου με συνθήκη $\Phi = 0$. [Το είδωλο είναι διπολική ταινία $\mathbf{p}_{\ell\perp} = 2\pi\epsilon_0 \mathbf{E}_0$.]
 - Ομογενές πεδίο κάθετο στον άξονα κυλίνδρου με συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$. [Το είδωλο είναι διπολική ταινία $\mathbf{p}_{\ell\perp} = -2\pi\epsilon_0 \mathbf{E}_0$.]

Όμοιος ακριβώς είναι ο χειρισμός των αντίστοιχων τεσσάρων «εσωτερικών» προβλημάτων (δίπολο ή διπολική ταινία στο κέντρο σφαίρας ή στον άξονα κυλίνδρου, με οριακή συνθήκη είτε $\Phi = 0$, είτε $\partial\Phi/\partial n = 0$). [Το είδωλο είναι ζεύγος επιφανειακών φορτίων στο άπειρο του άξονα του διπόλου.]

- Όλα τα προηγούμενα προσαρμόζονται εύκολα σε διατάξεις αγωγίμων ή μαγνητικών υλικών, με βάση και τις σχετικές αντιστοιχίες.
- Οι διατάξεις σφαίρας ή κυλίνδρου, με $\Phi = 0$ ή $\partial\Phi/\partial n = 0$, μπορούν να αντιμετωπισθούν και με χωρισμό μεταβλητών στο οικείο σύστημα συντεταγμένων, σφαιρικό ή πολικό (δηλαδή, κυλινδρικό με $\partial/\partial z = 0$), όπως παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 7.

Παράδειγμα 6.2-23: Ένα αγώγιμο αντικείμενο έχει το σχήμα ενός ελλειψοειδούς, το οποίο παράγεται από την περιστροφή έλλειψης γύρω από το μεγάλο άξονά της. Τα μήκη ημιαξόνων του ελλειψοειδούς είναι ίσα με a για τους δύο μικρούς και με b για το μεγάλο ημιάξονα. Το αντικείμενο βρίσκεται σε μονωτικό μέσο με επιτρεπτότητα ε και συνδέεται σε δυναμικό U σε σχέση με το άπειρο. Ζητείται το δυναμικό στην περιοχή με το μονωτή, έξω από το ελλειψοειδές.



Επίλυση: Το βοηθητικό πρόβλημα αναζητείται σε διάταξη, στην οποία το δυναμικό έχει μία ισοδυναμική επιφάνεια με σχήμα ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Τέτοια διάταξη είναι αυτή του **παραδ. 6.2-4**. Εκεί διαπιστώθηκε ότι γραμμική πηγή ίση με $\dot{\lambda} = I/h$, τοποθετημένη στο τμήμα $-h < z' < +h$ του άξονα, παράγει σε ομογενές αγώγιμο υλικό δυναμικό με ισοδυναμικές επιφάνειες που περιγράφονται από τη σχέση:

$$\frac{r_T^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 + h^2} = 1, \text{ δηλαδή } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 + h^2} = 1.$$

Οι αντιστοιχίες μεταξύ μόνιμης ροής ρεύματος και ηλεκτροστατικής υποδηλώνουν ότι και στη διάταξη του παρόντος παραδείγματος οι παραπάνω ισοδυναμικές επιφάνειες εμφανίζονται από τη δράση γραμμικού φορτίου, με κατάλληλη τιμή λ_0 , αλλά πάντως στην ίδια θέση, στο ίδιο τμήμα $-h < z' < +h$ του άξονα, με $h^2 = b^2 - a^2$. Αυτό το γραμμικό φορτίο αποτελεί το είδωλο στην παρούσα διάταξη, σε χώρο που έχει παντού επιτρεπτότητα ε .

Μεταγράφοντας το αποτέλεσμα από το **παραδ. 6.2-4**, με τις αντικαταστάσεις $\dot{\lambda} = I/h \rightarrow \lambda_0$ και $g \rightarrow \varepsilon$, και εισάγοντας τις εκφράσεις για τα $\psi_{1,2}$, το δυναμικό στην παρούσα διάταξη είναι:

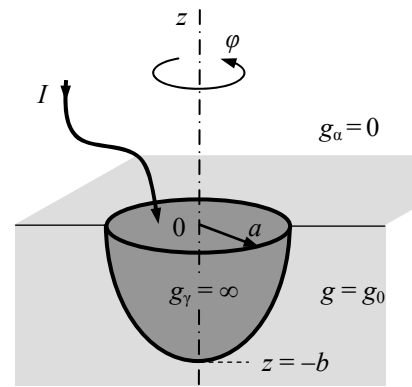
$$\Phi(r_T, z) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon} [\psi_2(r_T, z) - \psi_1(r_T, z)] = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon} \ln \left[\frac{\sqrt{r_T^2 + (h-z)^2} + h-z}{\sqrt{r_T^2 + (h+z)^2} - h-z} \right].$$

Απομένει ο προσδιορισμός της σταθεράς λ_0 . Στη θέση $r_T = a, z = 0$, από την οποία διέρχεται η επιφάνεια του ελλειψοειδούς και στην οποία είναι επιθυμητό να είναι $\Phi = U$, η σχέση αυτή δίνει $U = (\lambda_0/2\pi\varepsilon) \ln[(b+h)/(b-h)]$, από όπου υπολογίζεται η τιμή του ειδώλου λ_0 , και τελικά:

$$\Phi(r_T, z) = \frac{U}{\ln \left[\frac{b+h}{b-h} \right]} \ln \left[\frac{\sqrt{r_T^2 + (h-z)^2} + h-z}{\sqrt{r_T^2 + (h+z)^2} - h-z} \right].$$

Η σχέση αυτή περιγράφει το δυναμικό από το φορτίο λ_0 παντού στο χώρο, αλλά επίσης το καθαυτό ζητούμενο, το δυναμικό που παράγεται από το ελλειψοειδές στον υπόλοιπο χώρο.

Παράδειγμα 6.2-24: Ένας γειωτής έχει σχήμα μισού ελλειψοειδούς εκ περιστροφής γύρω από τον ημιάξονα με μήκος b . Οι άλλοι δύο ημιάξονες έχουν μήκος $a < b$. Ο γειωτής είναι τοποθετημένος με την ισημερινή τομή στο επίπεδο του εδάφους, το οποίο έχει ειδική αγωγιμότητα $g_0 = \text{σταθ}$. Θεωρώντας ότι το μέγιστο προσαγόμενο ρεύμα είναι ίσο με I , ζητείται η αντίσταση γείωσης, καθώς και η μέγιστη βηματική τάση, για μήκος βήματος ίσο με L .



Επίλυση: Με τον προσανατολισμό των αξόνων όπως στο σχήμα, και με αυτονόητο, αφού πρόκειται για γειωτή (βλ. και παράγραφο 5.2.4), ότι στον αέρα $z > 0$ είναι $g_\alpha = 0$ και ότι στο υλικό του γειωτή, στο εσωτερικό του μισού ελλειψοειδούς, είναι $g_\gamma \gg g_0$, δηλαδή ότι εκεί $g_\gamma = \infty$, οι οριακές συνθήκες στα όρια του εδάφους έχουν τις εξής συνέπειες:

- Στον αέρα, στον οποίο $g_\alpha = 0$, είναι $\mathbf{J}_\alpha(z > 0) = g_\alpha \mathbf{E}(z > 0) = 0$. Στη διαχωριστική επιφάνεια $z = 0$ του εδάφους με τον αέρα, στην οποία κατά τα γνωστά είναι $\partial\sigma/\partial t = 0$ για μόνιμη κατάσταση και $\mathbf{K} = 0$, επειδή στην επιφάνεια αυτή δεν υπάρχει μέσο που να δικαιολογεί μεγάλη πυκνότητα ρεύματος, περιγραφόμενη από \mathbf{K} , από τη σχέση $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-) = 0$ προκύπτει ότι $E_z(z=0^-) = (1/g_0)J_z(z=0^-) = 0$, δηλαδή $\partial\Phi/\partial n = 0$. Η συνθήκη αυτή επιτρέπει κατοπτρισμό του χώρου $z < 0$ στο χώρο $z > 0$ συμμετρικά, με αποτέλεσμα τον σχηματισμό πλήρους ελλειψοειδούς, με $g_\gamma = \infty$ στο εσωτερικό του και $g = g_0$ στο εξωτερικό του, και στο οποίο προσάγεται συνολικά ρεύμα ίσο με $2I$ (από I σε κάθε μισό).
- Στο εσωτερικό του πλήρους ελλειψοειδούς, αυτού το οποίο σχηματίστηκε κατά τον προηγούμενο κατοπτρισμό, είναι $g_\gamma = \infty$, συνεπώς εκεί είναι $\mathbf{E}_\gamma = (1/g_\gamma)\mathbf{J} = 0$. Στη διαχωριστική επιφάνεια του εδάφους με το ελλειψοειδές, η σχέση $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$ έχει ως αποτέλεσμα να μηδενίζεται στο όριο η εφαπτομενική συνιστώσα, συνεπώς στο όριο είναι $\Phi = \text{σταθ}$. Με αυτή τη συνθήκη, σύμφωνα με τα αποτελέσματα από το προηγούμενο παράδ. 6.2-23, υποδεικνύεται να τεθεί στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς η τιμή g_0 και να εισαχθεί σε μήκος $-h < z < h$ του άξονα z , με κατάλληλο h , κατάλληλη πηγή $\dot{\lambda}_0 = \text{σταθ}$. Ότι $\dot{\lambda}_0 = \text{σταθ}$, αυτό απαιτείται μόνο για να σχηματισθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες με το κατάλληλο σχήμα και δεν έχει καμία σχέση με το τι θα συνέβαινε, αν το ρεύμα $2I$ προσαγόταν σε ράβδο μήκους $2h$. [Σ' αυτή την περίπτωση, το ρεύμα δεν θα εκλυόταν ομοιόμορφα, ως $\dot{\lambda}_0$. Θα επρόκειτο για τελείως διαφορετική διάταξη, και μέρος των ζητουμένων θα ήταν και η κατανομή $\dot{\lambda}(z)$.]

Συγκρίνοντας με το **παράδ. 6.2-23**, τα γεωμετρικά δεδομένα ταυτίζονται (με τα μήκη των ημιαξόνων να ονομάζονται a και b και στις δύο διατάξεις), οπότε είναι και $h^2 = b^2 - a^2$. Οι αντιστοιχίες μεταξύ μόνιμης ροής ρεύματος και Ηλεκτροστατικής υποδεικνύουν τις αντικαταστάσεις $\varepsilon \rightarrow g_0$ και $\lambda_0 \rightarrow \dot{\lambda}_0 = 2I/2h = I/h$, αφού ρεύμα I προσάγεται σε κάθε μισό ελλειψοειδές, το αρχικό και το κατοπτρικό. Συνεπώς, σε ολόκληρο το χώρο του βοηθητικού προβλήματος μετά τους δύο κατοπτρισμούς, αλλά και στο χώρο του εδάφους στην αρχική διάταξη, το δυναμικό είναι:

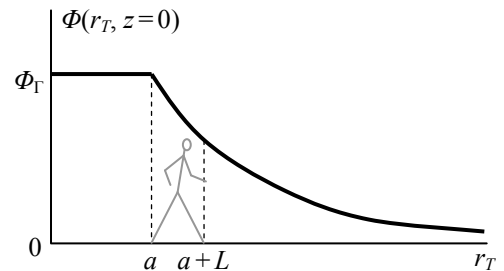
$$\Phi(r_T, z) = \frac{I}{2\pi g_0 h} \ln \left[\frac{\sqrt{r_T^2 + (h-z)^2} + h-z}{\sqrt{r_T^2 + (h+z)^2} - h-z} \right].$$

Η αντίσταση γείωσης (βλ. και παράγραφο 5.2.4) είναι $R_T = \Phi_T/I$. Το δυναμικό στο γειωτή είναι $\Phi_T = \Phi(r_T = a, z = 0)$, οπότε αμέσως προκύπτει, ότι $R_T = (2\pi g_0 h)^{-1} \ln[(b+h)/(b-h)]$.

Η βηματική τάση είναι η μέγιστη τιμή της διαφοράς $\Delta\Phi = \Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2)$ μεταξύ δύο σημείων \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 στο έδαφος, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $L = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Για τον προσδιορισμό της ενδιαφέρει η κατανομή του δυναμικού στην επιφάνεια του εδάφους. Εν γένει, πρόκειται για διδιάστατη εξάρτηση, εδώ όμως είναι $\partial/\partial\varphi = 0$ και το δυναμικό στην επιφάνεια του εδάφους εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση, οπότε και η βηματική τάση θα αντιστοιχεί σε μετακινήσεις αποκλειστικά ακτινικές. Στο $z = 0$, η κατανομή του δυναμικού είναι:

$$\Phi(r_T < a, z = 0) = \Phi_T = \frac{I}{2\pi g_0 h} \ln \left[\frac{\sqrt{a^2 + h^2} + h}{\sqrt{a^2 + h^2} - h} \right],$$

$$\Phi(r_T > a, z = 0) = \frac{I}{2\pi g_0 h} \ln \left[\frac{\sqrt{r_T^2 + h^2} + h}{\sqrt{r_T^2 + h^2} - h} \right],$$



με συμπεριφορά, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Σε αποστάσεις $r_T < a$, η επιφάνεια του εδάφους είναι πρακτικά το επίπεδο όριο του γειωτή, οπότε εκεί είναι $\Phi = \Phi_T = \text{σταθ}$, ενώ σε μεγαλύτερες αποστάσεις το δυναμικό είναι φθίνουσα συνάρτηση της ακτινικής απόστασης r_T , και η παράγωγός του έχει τη μέγιστη τιμή της στη θέση $r_T = a$. Συνεπώς, η βηματική τάση συναντάται μεταξύ των σημείων $r_T = a$ και $r_T = a + L$, σε οποιαδήποτε ακτίνα $\varphi = \text{σταθ}$ του επιπέδου $z = 0$, και έχει τιμή:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(r_T = a, z = 0) - \Phi(r_T = a + L, z = 0) \\ &= \frac{I}{2\pi g_0 h} \ln \left[\frac{\sqrt{a^2 + h^2} + h}{\sqrt{(a+L)^2 + h^2} + h} \frac{\sqrt{(a+L)^2 + h^2} - h}{\sqrt{a^2 + h^2} - h} \right]. \end{aligned}$$

6.3 Αριθμητικές και προσεγγιστικές τεχνικές

6.3.0 Εισαγωγικά

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκε η επίλυση της εξίσωσης *Poisson* ή *Laplace* σε ειδικές διατάξεις, οι οποίες επέτρεπαν άμεσο αναλυτικό χειρισμό. Τέτοιες ήταν οι μονοδιάστατες διατάξεις της παραγράφου 6.1.3, καθώς και οι διατάξεις με όρια ειδικής μορφής, η οποία επέτρεπε την εφαρμογή της τεχνικής του κατοπτρισμού (παράγραφος 6.2). Άλλες μαθηματικές τεχνικές (σύμμορφη απεικόνιση, χωρισμός μεταβλητών) παρουσιάζονται σε επόμενες παραγράφους.

Σε διατάξεις, των οποίων η γεωμετρία δεν επιτρέπει επίλυση με αναλυτικές τεχνικές, είναι απαραίτητη η χρήση αριθμητικών ή προσεγγιστικών τεχνικών. Τέτοια είναι η μέθοδος των ροπών (παράγραφος 6.3.1), στην οποία ουσιαστικά αναζητούνται τα αίτια που συγκεντρώνονται στο όριο του χώρου V . Ακολουθεί η υποκατάσταση των απειροστών διαφορών στις παραγώγους που συνθέτουν τον τελεστή $\nabla^2 \Phi$ με τις αντίστοιχες πεπερασμένες διαφορές, που οδηγεί στην ομώνυμη μέθοδο (παράγραφος 6.3.2), στην οποία διατυπώνεται ένα γραμμικό σύστημα για τον προσδιορισμό του δυναμικού στους κόμβους ενός πλέγματος. Στην παράγραφο 6.3.3 γίνεται αξιοποίηση μεταβολικών τεχνικών, οι οποίες συστηματοποιούνται στις μεθόδους *Galerkin* και *Rayleigh-Ritz*. Τέλος, στην παράγραφο 6.3.4 παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία αποτελεί υβρίδιο των δύο προηγούμενων τεχνικών. Στη μέθοδο αυτή πάλι εφαρμόζονται μεταβολικές τεχνικές, αλλά σε διακριτοποιημένη διάταξη, με τελικό αποτέλεσμα του δυναμικού να προσδιορίζεται πάλι στους κόμβους ενός πλέγματος μέσω της επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος.

Οι αριθμητικές τεχνικές που αναφέρθηκαν βασίζονται σε συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες του τελεστή του *Laplace* και των προβλημάτων οριακών τιμών, στα οποία συμμετέχει αυτός ο τελεστής. Προτιμήθηκε να παρουσιασθεί η μαθηματική τεκμηρίωση χωριστά, στο Παράρτημα Ε.1. Ενώ όμως στη μαθηματική ανάπτυξη του παραρτήματος χρησιμοποιείται το σύμβολο F για να παρασταθεί οποιοδήποτε δυναμικό από τα $\{\Phi, \Phi_{\text{επ}}, A_x, A_y, A_z, \Phi_m, \Phi_{\perp}, \Phi_{\perp m}\}$, στη παρουσίαση των αριθμητικών μεθόδων προτιμήθηκε να χρησιμοποιηθεί το πιο οικείο σύμβολο Φ του ηλεκτροστατικού δυναμικού, υπονοώντας βέβαια κάθε δυναμικό που υπακούει στην εξίσωση του *Laplace*.

Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει καμία διαχωριστική γραμμή μεταξύ αναλυτικών, προσεγγιστικών και αριθμητικών λύσεων. Ακόμα και σε λύσεις πλήρως αναλυτικές και με

κλειστή μορφή υποκρύπτεται σωρεία προσεγγίσεων, όπως είναι οι παραδοχές για γραμμικά ή επιφανειακά φορτία ή ρεύματα, για άπειρη έκταση ή άπειρο μήκος, για άπειρη ή μηδενική αγωγιμότητα κλπ. Επίσης, οι εκφράσεις σε κλειστή μορφή, όπως τα ολοκληρώματα επαλληλίας $\Phi = (1/4\pi\epsilon)\int dQ/R$ σε άπειρο χώρο, ή οι σχέσεις που περιγράφουν το δυναμικό από κατανομές φορτίων και λοιπών αιτίων σε χώρο που περιέχει κύλινδρο, σφαίρα κλπ., απαιτούν αριθμητική επίλυση, προκειμένου να προσδιορισθούν συγκεκριμένες τιμές για το δυναμικό, το πεδίο κλπ., όπως άλλωστε ενδιαφέρει σε οποιαδήποτε εφαρμογή. Όμοια, η επίλυση ενός προβλήματος με μορφή σειράς, όπως στο χωρισμό μεταβλητών, αφενός καταλήγει σε προσεγγιστική επίλυση, επειδή τελικά μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός όρων θα χρησιμοποιηθεί, αφετέρου απαιτεί, συνήθως, αριθμητικό προσδιορισμό των συντελεστών, ιδίως σε περιπτώσεις σύνθετων διατάξεων, όπως αυτές στην παράγραφο 7.2.3, όταν προκύπτει απειροδιάστατο γραμμικό σύστημα προς επίλυση.

Από τα προηγούμενα δεν πρέπει να συναχθεί το συμπέρασμα ότι ενδείκνυται η απευθείας χρήση αριθμητικών τεχνικών, χωρίς προηγούμενη αναλυτική επεξεργασία. Μία τέτοια προσέγγιση στερεί το χρήστη από το θεμελιώδες και αναντικατάστατο προσόν που έχει η αναλυτική λύση, δηλαδή τη γενικότητα στην έκφραση που προβάλλει την εξάρτηση της λύσης από τις παραμέτρους της διάταξης. Κατά συνέπεια, για το σχεδιασμό μιας διάταξης (πρόβλημα σύνθεσης) το ιδανικό είναι να ακολουθούνται κατά σειρά τα ακόλουθα βήματα:

- Υιοθέτηση ενός απλοποιημένου μοντέλου, το οποίο να υποκαθιστά τη διάταξη,
- Αναλυτική επίλυση του μοντέλου,
- Διερεύνηση της εξάρτησης της λύσης από τις παραμέτρους, ώστε να προκύψουν οι τιμές τους, ως εκτιμήσεις, αφού αναφέρονται στο μοντέλο,
- Αριθμητική επίλυση, με αρχικές εκτιμήσεις, τόσο για τις παραμέτρους, όσο και για την κατανομή της πεδιακής ποσότητας, όπως του Φ , αυτά που προέκυψαν από την αναλυτική επίλυση, και επαναλήψεις, ώσπου να επιτευχθεί η επιθυμητή συμπεριφορά.

Αλλά και σε προβλήματα ανάλυσης, όταν δηλαδή η διάταξη είναι δεδομένη και ζητούμενη είναι μόνο η συμπεριφορά της, είναι χρήσιμο να προηγηθεί η αναλυτική επίλυση ενός επιλύσιμου απλοποιημένου μοντέλου, και η λύση να χρησιμοποιηθεί ως πρώτη εκτίμηση για την αριθμητική επίλυση της πραγματικής διάταξης, με σκοπό να επιταχυνθεί η αριθμητική σύγκλιση. Αυτό είναι ιδιαίτερα επιτακτικό, όταν η διάταξη έχει στοιχεία, όπως ασυνέχειες, που έχουν ως αποτέλεσμα βραδείς ρυθμούς σύγκλισης των αριθμητικών μεθόδων.

6.3.1 Η μέθοδος των ροπών

Στο Παράρτημα Ε.1.1 παρουσιάζεται ότι το πρόβλημα οριακών τιμών για την εξίσωση του *Laplace* περιγράφεται εναλλακτικά, για το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ και γενικότερα για κάθε δυναμικό F , που υπακούει στην εξίσωση του *Laplace*, $\nabla^2 F = 0$, από την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi \frac{\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{R}}{R^3} dS, \quad (6.3-1)$$

με ολοκλήρωση στην κλειστή επιφάνεια S (το περίβλημα του χώρου V) και $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|$ την απόσταση του τυχαίου σημείου του χώρου V από κάθε σημείο της επιφάνειας S .

Σε ένα πρόβλημα οριακών συνθηκών σε κάθε στοιχείο dS της επιφάνειας S , γνωστή είναι μόνο μία από τις ποσότητες $\Phi(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S)$ και $(\partial \Phi / \partial n)|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S}$, ή ένας γραμμικός συνδυασμός τους, ενώ η άλλη είναι άγνωστη. Αν, όμως, υποθεθεί κάποια κατανομή στην S για την άγνωστη ποσότητα, τότε το ολοκλήρωμα θα μπορούσε να εκτελεσθεί, ώστε να προσδιορισθεί μία συνάρτηση $\tilde{\Phi}(\mathbf{r})$ σε κάθε \mathbf{r} . Αναμένεται αυτή η συνάρτηση να προσεγγίζει το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ τόσο καλύτερα, όσο πιο κοντά στην πραγματικότητα είχε υποθεθεί αρχικά η κατανομή της άγνωστης ποσότητας. Με βάση αυτές τις σκέψεις, μπορεί να διαμορφωθεί το ακόλουθο σχήμα διαδοχικών προσεγγίσεων:

- (1) Αρχική επιλογή για την κατανομή της άγνωστης ποσότητας στην επιφάνεια S .
- (2) Υπολογισμός της εκτίμησης $\tilde{\Phi}(\mathbf{r})$ για το δυναμικό σε κάθε θέση \mathbf{r} .
- (3) Προσδιορισμός στις οριακές θέσεις $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S$ είτε της τιμής $\tilde{\Phi}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S)$, είτε της κάθετης παραγώγου $(\partial \tilde{\Phi} / \partial n)|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S} = \mathbf{i}_n \cdot \nabla \tilde{\Phi}|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S}$, ανάλογα με την περίπτωση, ώστε να αποκτηθεί βελτιωμένη εκτίμηση για την κατανομή της άγνωστης ποσότητας.
- (4) Επιστροφή στο βήμα (2), χρησιμοποιώντας τη βελτιωμένη εκτίμηση, και επανάληψη της διαδικασίας, ώσπου να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση.

Όμως, σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας ενδιαφέρουν μόνο οι θέσεις $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S$, και εκεί πάλι χρειάζεται μόνο η τιμή $\tilde{\Phi}$, ή η παράγωγος $\partial \tilde{\Phi} / \partial n$, γιατί η άλλη ποσότητα είναι, άμεσα ή έμμεσα, γνωστή). Αυτό καθιστά στις ενδιάμεσες επαναλήψεις περιττό το βήμα (2), περιορίζοντας τον αριθμό των πράξεων, οι οποίες θα γίνουν αριθμητικά, ακόμα και στις απλούστερες γεωμετρίες. Στο τέλος, όταν επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση, στη δεξιά πλευρά της σχέσης (6.3-1) θα είναι ικανοποιητικά γνωστές τόσο η τιμή Φ , όσο και η παράγωγος $\partial \Phi / \partial n$, και τότε θα έχει νόημα να υπολογισθεί το Φ σε κάθε θέση \mathbf{r} του χώρου V .

Η κατάστρωση των εξισώσεων προσαρμόζεται στις πληροφορίες που είναι γνωστές από την οριακή συνθήκη. Γι' αυτό, θα εξετασθούν χωριστά τα διάφορα ενδεχόμενα.

Συνθήκη Dirichlet σε ολόκληρη την οριακή επιφάνεια S . Στη συνθήκη αυτή είναι γνωστό ότι για το δυναμικό είναι $\Phi(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S) = \Phi_S(\mathbf{r}_S)$, όπου Φ_S είναι κάποια γνωστή συνάρτηση η οποία ορίζεται στις θέσεις \mathbf{r}_S του ορίου. Τότε γνωστή ποσότητα είναι και το δεύτερο ολοκλήρωμα στη σχέση (6.3-1). Αν προσδιορισθεί και η ποσότητα $E_S(\mathbf{r}_S) = -(\partial\Phi/\partial n)|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S}$, τότε θα είναι γνωστοί (δηλαδή, θα μπορούν να υπολογισθούν) και οι δύο όροι στη δεξιά πλευρά της σχέσης (6.3-1), συνεπώς, θα είναι δυνατόν να προσδιορισθεί το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ παντού στο χώρο V . Ο στόχος είναι ακριβώς αυτός, να σχηματισθεί εξίσωση για την παράγωγο $E_S(\mathbf{r}_S) = -(\partial\Phi/\partial n)|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S}$, η οποία ακολούθως θα επιλυθεί αριθμητικά.

- Διατύπωση εξίσωσης για την κάθετη παράγωγο $E_S(\mathbf{r}_S)$: Ας ονομασθεί $\Phi_0(\mathbf{r})$ η συνεισφορά του δεύτερου ολοκληρώματος της σχέσης (6.3-1), δηλαδή ας ορισθεί:

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{i}'_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|^3} \Phi_S(\mathbf{r}'_S) dS', \quad (6.3-2)$$

με τονισμένες τις μεταβλητές ολοκλήρωσης και ό,τι εξαρτάται από αυτές, ιδίως το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}'_n , ώστε να αποφευχθεί η σύγχυση κατά την επικείμενη μετάβαση στο όριο $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S$. Η συνεισφορά αυτού του όρου στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $-\nabla\Phi_0$, οπότε η συνεισφορά του στην κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, απειροστά κοντά στο όριο, ως συνάρτηση μόνο της θέσης \mathbf{r}_S , είναι:

$$E_0(\mathbf{r}_S) = -\mathbf{i}_n \cdot (\nabla\Phi_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S}. \quad (6.3-3)$$

Στη σχέση αυτή, ο τελεστής ∇ προέρχεται από την κλίση του Φ_0 και γι' αυτό αναφέρεται στις άτονες συντεταγμένες. Συνεπώς, όταν αυτός ο τελεστής δράσει στη δεξιά πλευρά της σχέσης (6.3-2), δρα μόνο στην άτονη θέση \mathbf{r} , και όχι στις τονισμένες ποσότητες \mathbf{r}'_S και \mathbf{i}'_n . Παραλείποντας τις λεπτομέρειες, είναι $\nabla(\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{R}/R^3) = \mathbf{i}'_n(1/R^3) - 3\mathbf{R}(\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{R})/R^5$, οπότε η κάθετη παράγωγος $E_0(\mathbf{r}_S)$ εκφράζεται από τη συμμετρική σχέση:

$$E_0(\mathbf{r}_S) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{R^2(\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}'_n) - 3(\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{R})(\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{R})}{R^5} \Phi_S(\mathbf{r}'_S) dS', \quad (6.3-4)$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}'_S$. Η ζητούμενη ποσότητα έχει ήδη γραφεί ως $E_S(\mathbf{r}_S) = -(\partial\Phi/\partial n)|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S}$, οπότε η ολοκληρωτική εξίσωση (6.3-1) γράφεται:

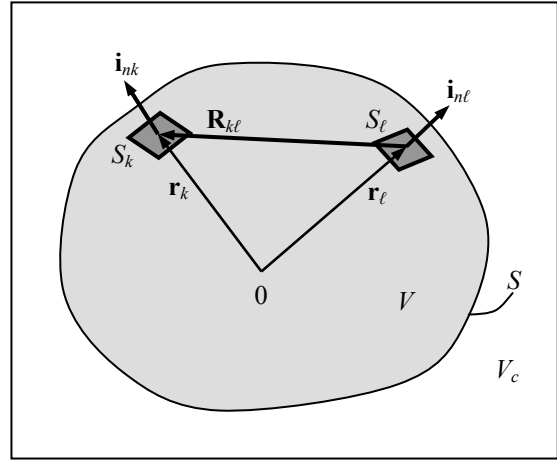
$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|} E_S(\mathbf{r}'_S) dS' + \Phi_0(\mathbf{r}), \quad (6.3-5)$$

και επειδή είναι $\nabla(1/R) = -\mathbf{R}/R^3$, παίρνοντας την κλίση αυτής τη σχέσης και μεταβαίνοντας στο όριο $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_S$ σχηματίζεται η επιθυμητή ολοκληρωτική εξίσωση:

$$E_S(\mathbf{r}_S) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}'_S)}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}'_S|^3} E_S(\mathbf{r}'_S) dS' + E_0(\mathbf{r}_S), \quad (6.3-6)$$

όπου η ποσότητα $E_0(\mathbf{r}_S)$ είναι γνωστή από τη σχέση (6.3-4).

- Διατύπωση γραμμικού συστήματος: Για την αριθμητική ολοκλήρωση, η επιφάνεια S θα χωρισθεί σε στοιχεία με πεπερασμένο εμβαδόν, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.3-1**, συνεπώς τα απειροστά στοιχεία dS' θα υποκατασταθούν από τα πεπερασμένα S_ℓ και η ολοκλήρωση θα υποκατασταθεί από άθροιση ως προς όλα τα S_ℓ . Στα ολοκληρώματα οι τονισμένες ποσότητες μετατρέπονται σε ποσότητες με δείκτη ℓ , οπότε $\mathbf{r}'_S \rightarrow \mathbf{r}_\ell$, και όμοια $E_S(\mathbf{r}'_S) \rightarrow E_\ell$ και $\Phi_S(\mathbf{r}'_S) \rightarrow \Phi_\ell$. Χρησιμοποιώντας, επίσης, το δείκτη k για να περιγραφούν οι ποσότητες που συνδέονται με τη θέση $\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}_k$, δηλαδή $E_S(\mathbf{r}_S) \rightarrow E_k$ και $E_0(\mathbf{r}_S) \rightarrow E_{0k}$, προκύπτει το διακριτό ανάλογο των σχέσεων (6.3-6) και (6.3-4):



Σχήμα 6.3-1

$$E_k + \sum_{\ell} \alpha_{k\ell} E_\ell = E_{0k} = \sum_{\ell} \beta_{k\ell} \Phi_\ell. \quad (6.3-7)$$

Με τον συμβολισμό $\mathbf{R}_{k\ell} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_\ell$ για τη σχετική απόσταση μεταξύ δύο στοιχείων της επιφάνειας S , οι συντελεστές στο γραμμικό σύστημα (6.3-7) είναι:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k\ell} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{i}_{nk} \cdot \mathbf{R}_{k\ell}}{R_{k\ell}^3} S_\ell, \\ \beta_{k\ell} &= \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{i}_{nk} \cdot \mathbf{i}_{n\ell}) R_{k\ell}^2 - 3(\mathbf{i}_{nk} \cdot \mathbf{R}_{k\ell})(\mathbf{i}_{n\ell} \cdot \mathbf{R}_{k\ell})}{R_{k\ell}^5} S_\ell. \end{aligned} \right\} \quad (\text{όταν } \ell \neq k) \quad (6.3-8)$$

Οι συντελεστές αυτοί καθορίζονται αποκλειστικά από τα γεωμετρικά δεδομένα (το σχήμα της επιφάνειας S και την κατάτμησή της στα στοιχεία S_ℓ), οπότε μπορούν να προσδιορισθούν στην αρχή της διαδικασίας και απλά να χρησιμοποιούνται σε κάθε βήμα.

Για τα στοιχεία με $\ell = k$ δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτές οι σχέσεις, επειδή τότε είναι $R_{kk} = 0$ και τα πηλικά αποκλίνουν. Ούτε, όμως, μπορούν αυτοί οι όροι να παραλειφθούν, επειδή η συνεισφορά τους δεν είναι αμελητέα. Για να προσδιορισθεί η κατάλληλη επιλογή, ας αναγνωρισθεί αρχικά το περιεχόμενο της σχέσης (6.3-7). Με τη μορφή $E_k = -\sum_{\ell} \alpha_{k\ell} E_{\ell} + \sum_{\ell} \beta_{k\ell} \Phi_{\ell}$ περιγράφει ότι η κάθετη συνιστώσα E_k του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση \mathbf{r}_k οφείλεται στη συνεισφορά σημειακών φορτίων ίσων με $\sigma_{\ell} S_{\ell} = -\epsilon E_{\ell} S_{\ell}$ και σημειακών διπόλων ίσων με $p_{S_{\ell}\ell} S_{\ell} = -\epsilon \Phi_{\ell} S_{\ell}$ σε όλα τα στοιχεία S_{ℓ} στις θέσεις r_{ℓ} της οριακής επιφάνειας S . Ότι πρόκειται για σημειακά φορτία και δίπολα φαίνεται και από τις εκφράσεις για τους συντελεστές $\alpha_{k\ell}$ και $\beta_{k\ell}$ στη σχέση (6.3-8) και ειδικότερα από την εξάρτηση του $\alpha_{k\ell}$ από το αντίστροφο τετράγωνο και του $\beta_{k\ell}$ από τον αντίστροφο κύβο της σχετικής απόστασης $R_{k\ell}$, συνυπολογίζοντας και τα $\mathbf{R}_{k\ell}$ στους αριθμητές. Όμως, τα $\sigma_{\ell} S_{\ell}$ και $p_{S_{\ell}\ell} S_{\ell}$ συμπεριφέρονται ως σημειακά μόνο στο όριο $S_{\ell} \rightarrow 0$, που εδώ σημαίνει $R_{k\ell}^2 \gg S_{\ell}$. Η ανισότητα αυτή παραβιάζεται κατ' εξοχήν όταν $\ell = k$, σε τιμή που φυσικά περιλαμβάνεται στην άθροιση. Τότε, όμως, είναι $\mathbf{R}_{k\ell} \rightarrow 0$, και κατάλληλο είναι το αντίθετο όριο, εκείνο με επιφανειακό φορτίο σ_{ℓ} και διπολικό στρώμα $p_{S_{\ell}\ell}$, με σταθερή πυκνότητα και σε επίπεδο με άπειρη έκταση, που αντίστοιχα παράγουν πεδίο ίσο με $\pm \mathbf{i}_n \ell^{1/2} \sigma_{\ell} / \epsilon$ (στις δύο όψεις της επιφάνειας) και $\mathbf{i}_n p_{S_{\ell}\ell} / \epsilon$ (μόνο στο εσωτερικό του στρώματος). Αυτές οι τιμές του πεδίου λαμβάνονται υπ' όψιν, χρησιμοποιώντας τις τιμές:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{kk} = -\frac{1}{2}, \\ \beta_{kk} = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{όταν } \ell = k) \quad (6.3-9)$$

Οι τιμές αυτές προκύπτουν και από τις σχέσεις (6.3-8), αν αντί του S_{ℓ} τεθεί το διαφορικό dS_{ℓ} και γίνει ολοκλήρωση στο στοιχείο S_{ℓ} , με $\mathbf{R}_{kk} = -h \mathbf{i}_{nk}$, $h \rightarrow 0$. Για παράδειγμα, στο ολοκλήρωμα που διατυπώνεται για το α_{kk} αναγνωρίζεται στερεή γωνία με μέτρο ίσο με 2π . Σε αντίθεση με τα $\alpha_{k\ell}$ και $\beta_{k\ell}$, τα στοιχεία με $\ell \neq k$ δεν προκαλούν ιδιαίτερη δυσκολία, ακόμη και τα S_{ℓ} και τα παρακείμενα στο S_k , εκτός αν υπάρχουν ακμές.

Συνθήκη Neumann σε ολόκληρη την επιφάνεια S . Τώρα, γνωστή είναι η κατανομή του κάθετου ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια S , η συνάρτηση $E_S(\mathbf{r}_S) = -(\partial\Phi/\partial n)|_{\mathbf{r}_S}$, ενώ άγνωστη είναι η κατανομή $\Phi_S(\mathbf{r}_S)$ του δυναμικού. Η εξίσωση, όμως, για το δυναμικό μπορεί να σχηματισθεί τώρα απευθείας από την ολοκληρωτική εξίσωση, χωρίς καμία παραγωγή:

$$\Phi_S(\mathbf{r}_S) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{R}}{R^3} \Phi_S(\mathbf{r}'_S) dS' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{R} E_S(\mathbf{r}'_S) dS', \quad (6.3-10)$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}'_S$. Το διακριτό αντίστοιχο αυτής της σχέσης είναι:

$$\Phi_k + \sum_{\ell} \alpha'_{k\ell} \Phi_{\ell} = \sum_{\ell} \beta'_{k\ell} E_{\ell}. \quad (6.3-11)$$

Πάλι, οι συντελεστές εξαρτώνται από τα γεωμετρικά δεδομένα της διάταξης, και τώρα είναι:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{k\ell} &= -\frac{\mathbf{i}_{n\ell} \cdot \mathbf{R}_{k\ell}}{4\pi R_{k\ell}^3} S_{\ell}, \\ \beta'_{k\ell} &= -\frac{1}{4\pi R_{k\ell}} S_{\ell}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{όταν } \ell \neq k) \quad (6.3-12)$$

όπου είναι $\mathbf{R}_{k\ell} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{\ell}$, και για τους ίδιους λόγους όπως πριν, επιλέγονται οι ειδικές τιμές:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{kk} &= -\frac{1}{2}, \\ \beta'_{kk} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{όταν } \ell = k) \quad (6.3-13)$$

Λοιπές οριακές συνθήκες: Όταν στη διάταξη επικρατούν μεικτές οριακές συνθήκες (στα τμήματα S_{ℓ_1} , S_{k_1} συνθήκες *Dirichlet* και στα τμήματα S_{ℓ_2} , S_{k_2} συνθήκες *Neumann*), τότε οι σχέσεις που συνδέουν E_{k_1} με Φ_{ℓ_1} και Φ_{k_2} με E_{ℓ_2} είναι όπως οι προηγούμενες. Επιπλέον χρειάζονται και μπορούν να εξαχθούν με παρόμοιο τρόπο οι σχέσεις που συνδέουν E_{k_1} με E_{ℓ_2} και Φ_{k_2} με Φ_{ℓ_1} . Φυσικά, η άθροιση είναι ως προς όλα τα ℓ (την ένωση $\ell_1 \cup \ell_2$), ενώ οι νέοι συντελεστές του γραμμικού συστήματος δεν απαιτούν ειδικό χειρισμό, καθώς είναι εκτός της κύριας διαγωνίου.

Τέλος, αν κάπου στο όριο, ή συνολικά, επικρατεί η γενική συνθήκη, με τη μορφή:

$$\Phi(\mathbf{r}_S) + \ell(\mathbf{r}_S) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = \Phi^*(\mathbf{r}_S), \quad (6.3-14)$$

όπου $\Phi^*(\mathbf{r}_S)$ και $\ell(\mathbf{r}_S)$ είναι γνωστές συναρτήσεις, με $\ell > 0$ (αλλά $\ell \neq 0, \infty$, επειδή τέτοιες τιμές καλύπτονται από τις συνθήκες *Dirichlet* και *Neumann*), τότε είναι δυνατόν να αντικατασταθεί στην ολοκληρωτική εξίσωση είτε $\Phi = \Phi^* - \ell \partial \Phi / \partial n$, οπότε προκύπτει έκφραση με μορφή και χειρισμό όπως στη συνθήκη *Dirichlet*, είτε $\partial \Phi / \partial n = \Phi^* / \ell - \Phi / \ell$, οπότε προκύπτει έκφραση παρόμοια με της συνθήκης *Neumann*.

Κλείνοντας ας επισημανθεί ότι όλα τα παραπάνω αναφέρονται αυστηρά σε τριδιάστατες διατάξεις. Οι αντίστοιχες εκφράσεις για διδιάστατες διατάξεις με $\partial / \partial z = 0$ εξάγονται αφού πρώτα στην ολοκληρωτική εξίσωση γίνει η ολοκλήρωση στο $-\infty < z' < +\infty$.

6.3.2 Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

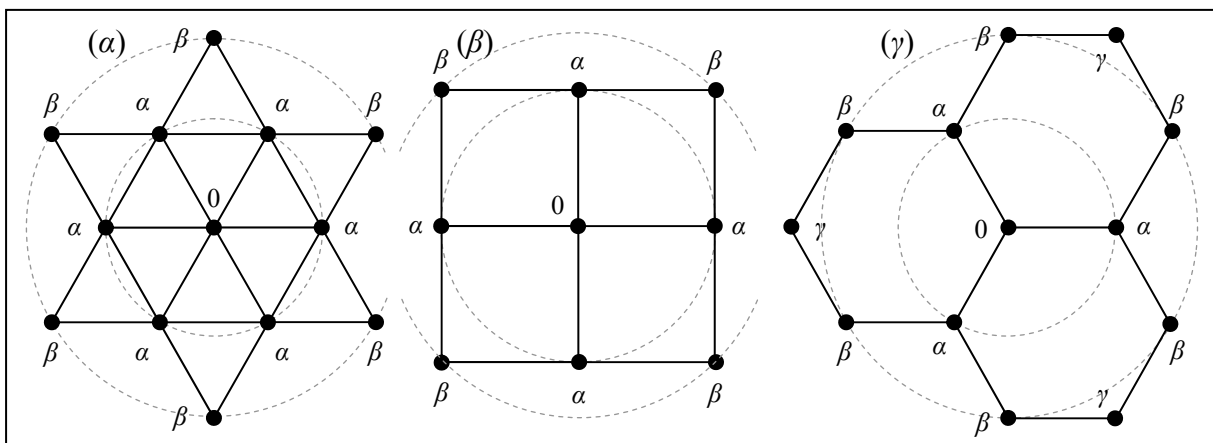
Μια χρήσιμη ιδιότητα της εξίσωσης *Laplace*, όπως παρουσιάζεται στο Παράρτημα E.1.2, είναι ότι η τιμή του δυναμικού στο κέντρο σφαίρας, ή στον άξονα κυλίνδρου με άπειρο μήκος (που αντιστοιχεί προς το κέντρο κύκλου σε δύο διαστάσεις), είναι ίση με τη μέση τιμή των τιμών του στην επιφάνεια της σφαίρας ή του κυλίνδρου (δηλαδή στην περιφέρεια του κύκλου), εφόσον στο εσωτερικό της σφαίρας ή του κυλίνδρου δεν υπάρχουν αίτια. Η ιδιότητα αυτή είναι ακριβής. Δεν εξαρτάται από το μέγεθος της σφαίρας κλπ., αρκεί μόνο να είναι $\nabla^2 \Phi = 0$ στο εσωτερικό της. Η προσέγγιση γίνεται όταν ληφθεί η μέση τιμή σε πεπερασμένο πλήθος σημείων στην επιφάνεια της σφαίρας ή στην περιφέρεια του κύκλου, που ισαπέχουν μεταξύ τους και αποτελούν κορυφές κανονικού πολυέδρου ή κανονικού πολυγώνου, αντίστοιχα).

Σε δύο διαστάσεις, το επίπεδο μπορεί να καλυφθεί από πλέγμα ισόπλευρων τριγώνων, τετραγώνων, ή κανονικών εξαγώνων, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.3-2**. Τότε θα είναι σε κάποιο σημείο θ , προσεγγιστικά:

$$\Phi_0 = \frac{1}{6} \sum \Phi_\alpha = \frac{1}{6} \sum \Phi_\beta, \text{ σε τριγωνικό πλέγμα,} \quad (6.3-15\alpha)$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum \Phi_\alpha = \frac{1}{4} \sum \Phi_\beta, \text{ σε τετραγωνικό πλέγμα,} \quad (6.3-15\beta)$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{3} \sum \Phi_\alpha = \frac{1}{6} \sum \Phi_\beta = \frac{1}{3} \sum \Phi_\gamma, \text{ σε εξαγωνικό πλέγμα.} \quad (6.3-15\gamma)$$



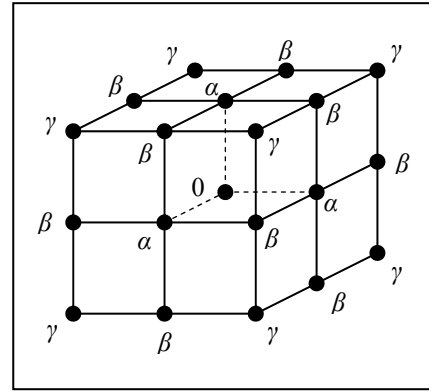
Σχήμα 6.3-2

Όμοια, σε τρεις διαστάσεις, στο κυβικό πλέγμα του **Σχήματος 6.3-3** θα είναι για το σημείο θ :

$$\Phi_0 = \frac{1}{6} \sum \Phi_\alpha = \frac{1}{12} \sum \Phi_\beta = \frac{1}{8} \sum \Phi_\gamma, \quad (6.3-16)$$

συμπεριλαμβάνοντας και τα κρυμμένα σημεία στις πίσω έδρες του κύβου, που δεν φαίνονται στο σχήμα.

Στις προηγούμενες σχέσεις, γραφή όπως $\sum \Phi_\alpha$ σημαίνει άθροιση των τιμών του δυναμικού στις θέσεις «α», χωρίς βέβαια αυτό να υπονοεί, ότι το δυναμικό έχει την ίδια τιμή σε όλες τις θέσεις αυτές.

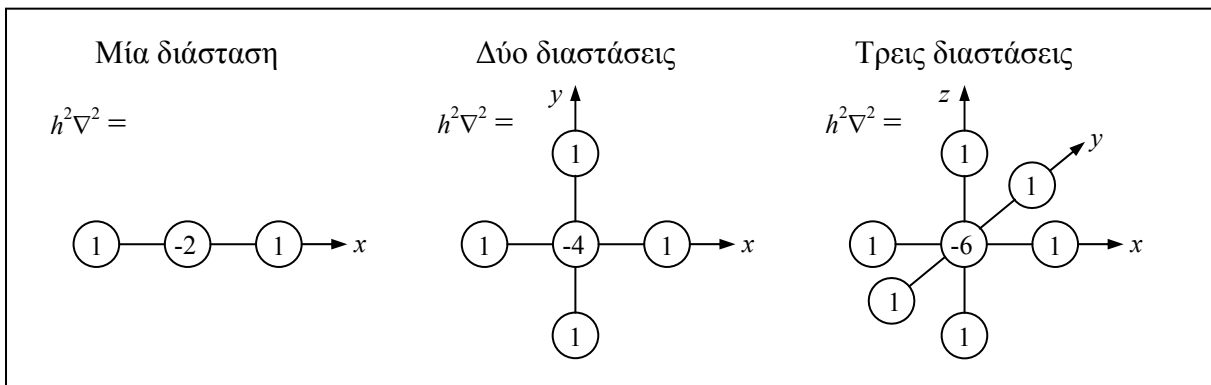


Σχήμα 6.3-3

Διακριτοποίηση Λαπλασιανής: Οι παραπάνω σχέσεις (6.1-15β) σε τετραγωνικό και (6.1-16) σε κυβικό πλέγμα με βήμα h συνδέονται άμεσα και με την προσέγγιση της Λαπλασιανής από πεπερασμένες διαφορές. Σε μία διάσταση η μερική παράγωγος είναι $\partial\Phi/\partial x \approx (1/h)[\Phi(x_0) - \Phi(x_0 - h)] \approx (1/h)[\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)]$, οπότε η δεύτερη μερική παράγωγος είναι $\partial^2\Phi/\partial x^2 \approx (1/h^2)[\Phi(x_0 - h) - 2\Phi(x_0) + \Phi(x_0 + h)]$. Προσθέτοντας παρόμοιες εκφράσεις για τις μερικές παραγωγούς $\partial^2\Phi/\partial y^2$ και $\partial^2\Phi/\partial z^2$ προκύπτει, ότι η διακριτή Λαπλασιανή (σε $\kappa = 1, 2,$ ή 3 διαστάσεις) είναι το άθροισμα των διαφορών $\Phi_\ell - \Phi_0$:

$$h^2 \nabla^2 \Phi = -(2\kappa) \Phi_0 + \sum_{\ell=1}^{2\kappa} \Phi_\ell. \quad (6.3-17)$$

Το αποτέλεσμα παριστάνεται γραφικά στο **Σχήμα 6.3-4**, σημειώνοντας τους συντελεστές που πολλαπλασιάζουν το Φ σε κάθε θέση του κυττάρου. Φυσικά, σε μία διάσταση δεν υπάρχει κανένας λόγος να επιλυθεί η εξίσωση του Laplace αριθμητικά, αφού προκύπτει αμέσως η λύση, $\Phi = Ax + B$, με τις σταθερές να προσδιορίζονται από τις τιμές στα δύο άκρα, που αντιπροσωπεύουν από κοινού το όριο S του μονοδιάστατου χώρου V .



Σχήμα 6.3-4

Διατύπωση συστήματος γραμμικών εξισώσεων: Τα προηγούμενα οδηγούν στην κατάστρωση ενός συστήματος από γραμμικές εξισώσεις. Επιλέγεται το σχήμα του πλέγματος (τριγωνικού, τετραγωνικού ή εξαγωνικού σε δύο διαστάσεις, κυβικού σε τρεις) και σε κάθε κόμβο εφαρμόζεται η αντίστοιχη από τις σχέσεις (6.3-15) ή (6.3-16). Απλούστερη πλεγματοποίηση μιας διδιάστατης διάταξης είναι σε τετραγωνικό πλέγμα, το οποίο αποτελεί το διακριτό αντίστοιχο της περιγραφής σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Σε τέτοιο πλέγμα, στον αντιπροσωπευτικό κόμβο (i, j) αντιστοιχεί η εξίσωση:

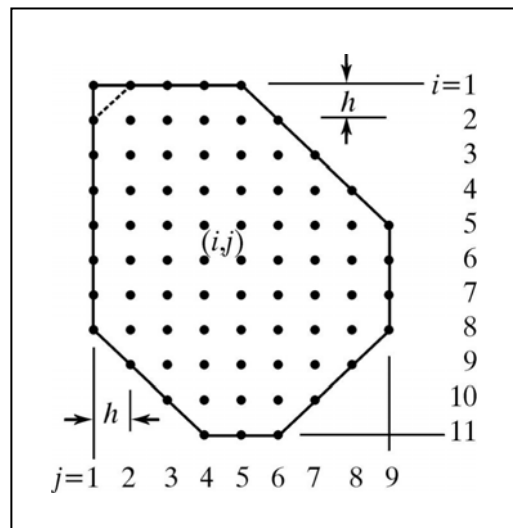
$$\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} - 4\Phi_{i,j} = 0, \quad (6.3-18)$$

και αντίστοιχα με κυβικό πλέγμα σε τρεις διαστάσεις για τον κόμβο (i, j, k) :

$$\Phi_{i-1,j,k} + \Phi_{i+1,j,k} + \Phi_{i,j-1,k} + \Phi_{i,j+1,k} + \Phi_{i,j,k-1} + \Phi_{i,j,k+1} - 6\Phi_{i,j,k} = 0. \quad (6.3-19)$$

Οι εξισώσεις αυτές προϋποθέτουν ότι ο κόμβος (i, j) ή (i, j, k) είναι στο εσωτερικό της διάταξης, και μάλιστα σε απόσταση από το όριο όχι μικρότερη από το βήμα h του πλέγματος. Αν παραβιάζεται αυτή η ιδιότητα, τότε στο εσωτερικό κύκλου ή σφαίρας με ακτίνα h βρίσκονται τα φορτία του τοιχώματος, οπότε παραβιάζεται βασική προϋπόθεση για τις σχέσεις (E.1-8) κ.επ. του Παραρτήματος E.1.2, συνεπώς και των διακριτών ανάλογων (6.3-15β) και (6.3-16).

Η απλούστερη περίπτωση συναντάται σε διατάξεις με σχήμα και διαστάσεις τέτοια, ώστε το πλέγμα να περατώνεται ακριβώς στο όριο της εξεταζόμενης περιοχής, όπως συμβαίνει στη διδιάστατη διάταξη του **Σχήματος 6.3-5**, όταν επιπλέον στο όριο είναι γνωστές οι τιμές του δυναμικού. Τότε, σε κάθε εσωτερικό κόμβο εφαρμόζεται η εξίσωση (6.3-18) ή (6.3-19), ενώ σε κάθε κόμβο του ορίου εφαρμόζεται απλά εξίσωση όπως $\Phi_{i,j,k} = \Phi_S(\mathbf{r} = \mathbf{r}_{i,j,k})$, και οι τιμές του δυναμικού σ' αυτούς τους κόμβους απλά εισάγονται στις σχέσεις (6.3-18) ή (6.3-19).



Σχήμα 6.3-5

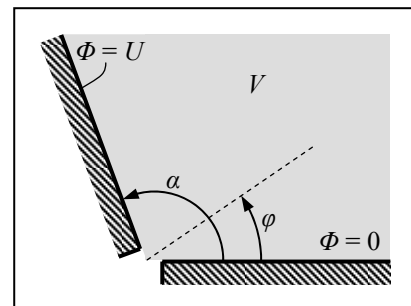
Κόμβοι του ορίου, όπως ο $(i = 1, j = 1)$ στο **Σχήμα**

6.3-5, στη θέση των οποίων το τοίχωμα σχηματίζει ορθή γωνία και αντίστοιχα, τριεδρη ορθή στερεά γωνία σε τρεις διαστάσεις, δεν συμμετέχουν καθόλου στη διαδικασία. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από την τιμή $\Phi_{1,1}$ και δεν αλλάζει, αν στο όριο η ορθή γωνία αντικατασταθεί από τη διακεκομμένη γραμμή. Η ακρίβεια περιορίζεται, άλλωστε, σε κλίμακα

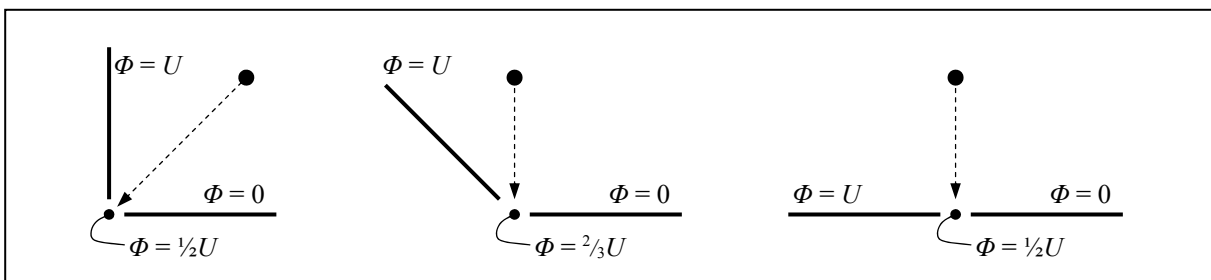
μήκους h . Το ίδιο συμβαίνει και αν η γωνία είναι οξεία, αλλά όχι σε αμβλείες γωνίες, όπως είναι οι υπόλοιπες στο **Σχήμα 6.3-5**.

Οι εξισώσεις (6.3-18) ή (6.3-19), μία για κάθε εσωτερικό κόμβο, σχηματίζουν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων για ισόποσους αγνώστους. Το μέγεθος του συστήματος είναι ίσο με περίπου V/h^3 σε τριδιάστατες διατάξεις με όγκο V και με S/h^2 σε διδιάστατες διατάξεις με διατομή S . Ένα τέτοιο μέγεθος είναι απαγορευτικά μεγάλο για ευθεία αντιστροφή του πίνακα των συντελεστών των αγνώντων. Κατάλληλες είναι οι μέθοδοι διαδοχικών προσεγγίσεων, στις οποίες το δυναμικό κάθε κόμβου προσδιορίζεται ως μέσος όρος των διαθέσιμων προσεγγίσεων για το δυναμικό των παρακείμενων κόμβων. Για την εφαρμογή των μεθόδων αυτών χρειάζεται προηγουμένως να θιγούν δύο σημεία: πώς αντιμετωπίζονται οι ενδεχομένες ασυνέχειες στην τιμή του δυναμικού στο όριο S (για συνθήκη *Dirichlet*, πάντοτε), και με ποιον τρόπο επιλέγονται οι τιμές για την αρχική από τις διαδοχικές προσεγγίσεις, με στόχο την ταχύτερη αριθμητική σύγκλιση.

Ασυνέχεια στην τιμή του δυναμικού στο όριο είναι κατ' εξοχήν η βηματική ασυνέχεια, που στην πράξη συναντάται, όταν δύο τμήματα του αγωγίμου ορίου έχουν διαφορετικές τιμές του δυναμικού. Ανεξάρτητα από το ακριβές σχήμα του ορίου, κοντά στην ασυνέχεια τα δύο τμήματα συμπεριφέρονται ως επίπεδες πλάκες με ημίσειρη έκταση, όπως στο **Σχήμα 6.3-6**, όπου έχει ληφθεί $\Phi(\varphi=0) = 0$ και $\Phi(\varphi=\alpha) = U$. Μία τέτοια διάταξη είναι, όμως, μονοδιάστατη, με το δυναμικό να εξαρτάται μόνο από τη γωνία φ και τη Λαπλασιανή να απλοποιείται σε $\nabla^2\Phi = r_T^{-2}\partial^2\Phi/\partial\varphi^2 = 0$. Ολοκληρώνοντας, χρησιμοποιώντας και τις τιμές $\Phi(\varphi=0,\alpha)$, προκύπτει αμέσως η εξάρτηση $\Phi = (U/\alpha)\varphi$. Η σχέση αυτή υποδεικνύει στη θέση ασυνέχειας του ορίου να ληφθεί ως τιμή του δυναμικού εκείνη που αντιστοιχεί στη γωνία φ , με την οποία η θέση με την ασυνέχεια προσεγγίζεται από τον κόμβο. Το **Σχήμα 6.3-7** παρουσιάζει μερικές συνηθισμένες περιπτώσεις.



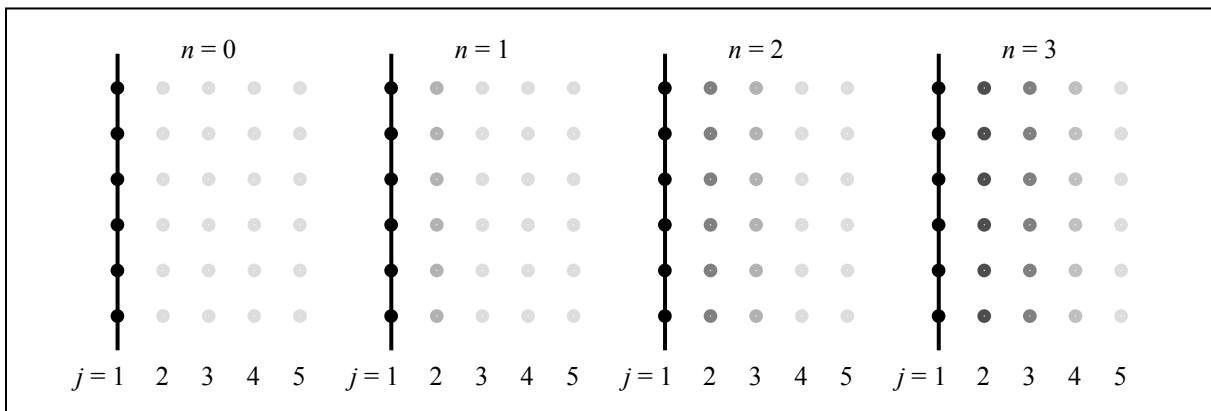
Σχήμα 6.3-6



Σχήμα 6.3-7

Επιλογή αρχικών εκτιμήσεων: Σε μία επαναληπτική μέθοδο πρέπει να δοθούν οι αρχικές εκτιμήσεις, με τις οποίες ως αφετηρία θα προσδιορισθούν διαδοχικές προσεγγίσεις, μέχρι να συγκλίνει η διαδικασία. Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης *Laplace* με διαδοχικές προσεγγίσεις είναι πολύ ευσταθής διαδικασία, η οποία συγκλίνει ανεξάρτητα από τις τιμές που έχουν επιλεγεί αρχικά ως εκτιμήσεις για τις τιμές του δυναμικού σε κάθε κόμβο του πλέγματος, όσο απαράδεκτα άστοχες και αν είναι οι εκτιμήσεις αυτές. Γι' αυτό το λόγο, είναι συνηθισμένο, πολλοί αριθμητιστές να μην καταβάλλουν καμία προσπάθεια να δώσουν αρχικές εκτιμήσεις, αλλά να «φορτώνουν» παντού μηδενικές τιμές ως αρχικές εκτιμήσεις. Μολονότι όμως σύγκλιση επιτυγχάνεται σε κάθε περίπτωση, το πλήθος των διαδοχικών προσεγγίσεων που θα χρειαστούν εξαρτάται καίρια από το πόσο εύστοχες είναι οι αρχικές εκτιμήσεις. Γι' αυτό, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για υπολογισμούς βιαστικούς και «με το χέρι», είναι πολύ σημαντικό να μην απέχουν πολύ οι πρώτες εκτιμήσεις από τις τελικές τιμές. Πάντως, ακόμα και αν η επίλυση γίνει με ηλεκτρονικό υπολογιστή, ο χρήστης πρέπει να προσπαθήσει να δώσει κάποιες αρχικές εκτιμήσεις που τουλάχιστον δεν είναι τελείως παράλογες, ώστε να αποφευχθεί η κατασπατάληση υπολογιστικών πόρων.

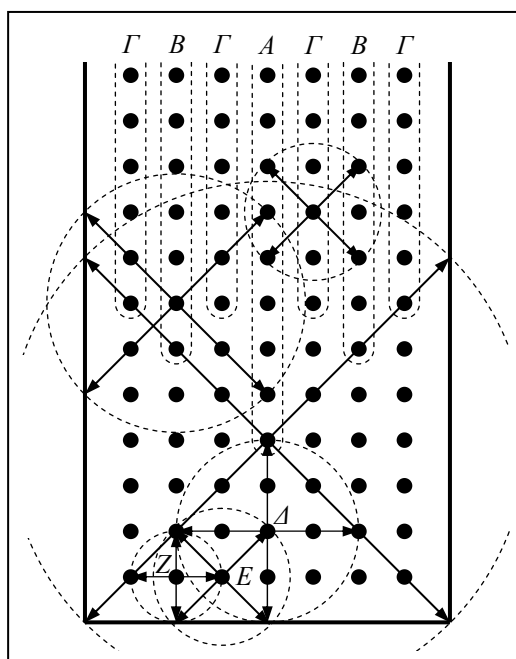
Για να επιδειχθεί η σημασία των αρχικών επιλογών, ας εξετασθεί το τμήμα ενός διδιάστατου πλέγματος κοντά στο όριο, βλ. **Σχήμα 6.3-8**, στο οποίο όσο πιο ανοιχτόχρωμοι εμφανίζονται οι κόμβοι, τόσο λιγότερο αξιόπιστη είναι η αριθμητική τιμή για το δυναμικό. Υποτίθεται πως αρχικά ($n = 0$) δεν καταβλήθηκε καμία προσπάθεια να δοθούν λογικές εκτιμήσεις, οπότε όλοι οι κόμβοι εμφανίζονται εξαιρετικά ανοιχτόχρωμοι, εκτός βέβαια από εκείνους στο όριο, με $j = 1$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά σχέση με μορφή $\Phi^{(n)} = 1/4 \sum_{(\pm h)} \Phi^{(n-1)}$, μετά την πρώτη σειρά εφαρμογής της (όταν $n = 1$), οι κόμβοι με $j = 3, 4, \dots$ δεν αποκτούν περισσότερο αξιόπιστες τιμές, επειδή στους κόμβους αυτούς απλά ανακατεύονται οι μη αξιόπιστες τιμές των παρακείμενων κόμβων. Αντιθέτως, στους κόμβους με $j = 2$ υπάρχει βελτίωση, επειδή,



Σχήμα 6.3-8

έστω και κατά 25%, έχουν ληφθεί υπ' όψιν οι τιμές των κόμβων στο όριο. Στην επόμενη σειρά προσεγγίσεων ($n = 2$), οι κόμβοι με $j = 2$ αποκτούν ακόμα πιο βελτιωμένες τιμές, επειδή λαμβάνονται επιπρόσθετα υπ' όψιν οι ελαφρά βελτιωμένες τιμές από τους δύο παρακείμενους κόμβους της ίδιας στήλης, ενώ αρχίζουν να βελτιώνονται και οι τιμές στη στήλη $j = 3$, που επηρεάζονται από έναν κόμβο της στήλης $j = 2$. Συνεχίζοντας τη διαδικασία φαίνεται πως μετά από κάθε προσέγγιση μετατίθεται το μέτωπο με τις βελτιωμένες τιμές κατά μία στήλη, αλλά ταυτόχρονα οι βελτιώσεις είναι όλο και μικρότερες. Με άλλα λόγια, κάθε επόμενη προσέγγιση μεταφέρει τις πληροφορίες από το όριο κατά ένα βήμα βαθύτερα στο εσωτερικό της διάταξης, έστω και αν οι πληροφορίες αυτές έχουν χάσει μέρος από την αξία τους, επειδή συμμετέχουν σε μέσες τιμές με τις αρχικές τυχαίες τιμές.

Είναι επιθυμητό να οι πληροφορίες από τις οριακές συνθήκες α διεισδύσουν από την αρχή βαθιά στο εσωτερικό του χώρου. Αυτό επιτυγχάνεται αρκετά εύκολα, όταν το βήμα h του πλέγματος επιλεγεί, ώστε η μικρότερη διάσταση της διάταξης να είναι πολλαπλάσιο του h κατά ακέραιη δύναμη του δύο ($h = 2^{-k} \ell_{\min}$) και οι αρχικές εκτιμήσεις επιλεγούν με τη σχέση $\Phi_0 = \frac{1}{4} \Sigma \Phi$ (ή, $\Phi_0 = \frac{1}{6} \Sigma \Phi$), αλλά με τη μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Στο **Σχήμα 6.3-9** φαίνεται ένα τέτοιο πλέγμα, με επτά εσωτερικούς κόμβους στο πλάτος a της διάταξης (δηλαδή, με $a = 2^3 h$). Αρχικά με ακτίνα ίση με $(4\sqrt{2})h$ οι τιμές του δυναμικού στο όριο προσδιορίζουν τις εκτιμήσεις για όλους τους κόμβους της ομάδας A , και ακολούθως με διαδοχικό υποδιπλασιασμό της ακτίνας καλύπτονται οι κόμβοι των ομάδων B και Γ . Για τους υπόλοιπους κόμβους, στις τρεις τριγωνικές περιοχές στο κάτω μέρος του πλέγματος, εφαρμόζονται διαδοχικά ακτίνες όπως για τους κόμβους Δ , E και Z , ώστε να συμπληρωθούν οι αρχικές εκτιμήσεις για όλους τους κόμβους του πλέγματος.



Σχήμα 6.3-9

Στο **Σχήμα 6.3-9** κάποιοι κύκλοι εκτείνονται έξω από το περίγραμμα της διάταξης και στο εσωτερικό τους περιέχονται φορτία, εκείνα του ορίου, παραβιάζοντας έτσι την απαίτηση για να ισχύουν οι σχέσεις (E.1-8). Όταν, όμως, αυτό που ζητείται, όπως εδώ, είναι να μην έχουν οι αρχικές εκτιμήσεις τελείως αυθαίρετες τιμές, η μαθηματική αυστηρότητα είναι περιττή.

Η μέθοδος του *Jacobi* είναι η απλούστερη διαδικασία διαδοχικών προσεγγίσεων. Σε κάθε τάξη προσέγγισης, η τιμή για το δυναμικό ενός κόμβου προσδιορίζεται από το μέσο όρο των τιμών που προσδιορίστηκαν στους πλησιέστερους κόμβους κατά την αμέσως προηγούμενη τάξη. Όταν η διάταξη έχει, με οριακές συνθήκες *Dirichlet*, τέτοιο σχήμα, ώστε να επιδέχεται την ανάπτυξη κανονικού πλέγματος (τετραγωνικού σε δύο διαστάσεις, κυβικού σε τρεις), με τρόπο ώστε κάθε σειρά κόμβων να αρχίζει και να τελειώνει στο όριο, η κωδικοποίηση της διαδικασίας είναι απλή. Οργανώνεται πίνακας $\Phi_{i,j}$ (ή $\Phi_{i,j,k}$), και στους κόμβους που ανήκουν στο όριο τίθεται ως τιμή του Φ η τιμή από την οριακή συνθήκη. Για τους εσωτερικούς κόμβους επιλέγονται κάποιες τιμές ως αρχικές εκτιμήσεις, ώστε να σχηματισθεί ο πίνακας $\Phi_{i,j(k)}^{(0)}$ με τις αρχικές εκτιμήσεις ($n = 0$) και ακολούθως εφαρμόζεται επαναληπτικά, για κάθε επόμενη προσέγγιση n , σε δύο και σε τρεις αντίστοιχα διαστάσεις, η σχέση:

$$\begin{aligned}\Phi_{i,j}^{(n)} &= \frac{1}{4} \left(\Phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n-1)} \right), \\ \Phi_{i,j,k}^{(n)} &= \frac{1}{6} \left(\Phi_{i-1,j,k}^{(n-1)} + \Phi_{i+1,j,k}^{(n-1)} + \Phi_{i,j-1,k}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1,k}^{(n-1)} + \Phi_{i,j,k-1}^{(n-1)} + \Phi_{i,j,k+1}^{(n-1)} \right),\end{aligned}\tag{6.3-20}$$

σε κάθε i, j (και k) που ανήκει στο εσωτερικό του χώρου. Για παράδειγμα, στο **Σχήμα 6.3-5** μόνο οι κόμβοι ($i = 2, j = 2$ έως 5), ($i = 3, j = 2$ έως 6), ($i = 4, j = 2$ έως 7) κλπ. μέχρι ($i = 10, j = 4$ έως 6) είναι εσωτερικοί και μόνο στις αντίστοιχες τιμές των (i, j) εφαρμόζεται η επαναληπτική μέθοδος, αφού μόνο εκεί είναι άγνωστο και προς προσδιορισμό το δυναμικό.

Η μέθοδος του *Jacobi* απαιτεί να προβλεφθεί στη μνήμη του υπολογιστή χώρος για δύο μόνο πίνακες, τον $\Phi_{i,j(k)}^{(n-1)}$ και τον $\Phi_{i,j(k)}^{(n)}$. Οι προγενέστερες τιμές δεν χρειάζονται, όταν υπολογίζονται οι τιμές $\Phi_{i,j(k)}^{(n)}$ και συνεπώς οι θέσεις μνήμης των $\Phi_{i,j(k)}^{(n-2)}$ μπορούν να διατεθούν στα $\Phi_{i,j(k)}^{(n)}$. Επίσης η μέθοδος *Jacobi* συγκλίνει αρκετά γρήγορα, υπάρχουν όμως περιθώρια για περαιτέρω επιτάχυνση, όπως επιτυγχάνεται με τις μεθόδους που ακολουθούν.

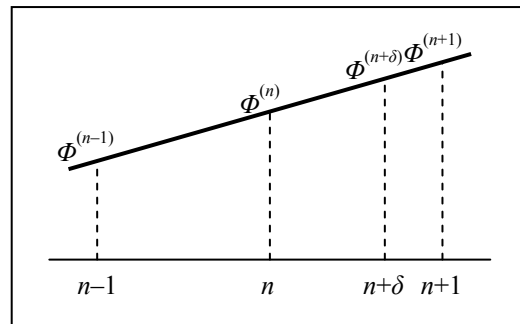
Μέθοδος των Gauss-Seidel: Διπλασιασμός της ταχύτητας σύγκλισης επιτυγχάνεται με την υιοθέτηση μιας απλής σκέψης. Αφού τα $\Phi^{(n)}$ αποτελούν καλύτερη προσέγγιση από όσο τα $\Phi^{(n-1)}$, ας χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό κάθε $\Phi_{i,j(k)}^{(n)}$ από τους παρακείμενους κόμβους οι τιμές της προσέγγισης $\Phi^{(n)}$, όσες βέβαια έχουν ήδη προσδιορισθεί, ενώ οι λοιπές θα προέρχονται από την προηγούμενη προσέγγιση. Αν το πλέγμα σαρώνεται, καθώς αυξάνουν τα i, j και k , αν πρώτα, δηλαδή, υπολογίζεται το $\Phi_{i,j,k}$ και αμέσως ύστερα το $\Phi_{i+1,j,k}$ κλπ., η σκέψη αυτή υλοποιείται μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned}\Phi_{i,j}^{(n)} &= \frac{1}{4} \left(\Phi_{i-1,j}^{(n)} + \Phi_{i,j-1}^{(n)} + \Phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n-1)} \right), \\ \Phi_{i,j,k}^{(n)} &= \frac{1}{6} \left(\Phi_{i-1,j,k}^{(n)} + \Phi_{i,j-1,k}^{(n)} + \Phi_{i,j,k-1}^{(n)} + \Phi_{i+1,j,k}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1,k}^{(n-1)} + \Phi_{i,j,k+1}^{(n-1)} \right).\end{aligned}\tag{6.3-21}$$

Η μέθοδος *Gauss-Seidel* έχει διπλάσια ταχύτητα σύγκλισης από τη μέθοδο *Jacobi*. Επιπλέον, χαρακτηρίζεται και από μειωμένες απαιτήσεις σε χώρο μνήμης, με ακριβώς τη μισή από τη μέθοδο *Jacobi*. Πράγματι, αφού το $\Phi_{i,j(k)}^{(n-1)}$ δεν πρόκειται χρησιμοποιηθεί άλλο, από τη στιγμή που υπολογίζεται το $\Phi_{i,j(k)}^{(n)}$, η θέση μνήμης που καταλαμβάνει μπορεί να διατεθεί στο τελευταίο. Όπως φαίνεται στη δεξιά πλευρά της σχέσης (6.3-21), οι θέσεις μνήμης με $i \mp 1$ κλπ. περιέχουν τις τιμές της τελευταίας διαθέσιμης προσέγγισης, και είναι αδιάφορο αν αυτές προσδιορίστηκαν στο βήμα $n-1$ ή το n .

Τα *παραδ. 6.3-1* και *6.3-2* επιδεικνύουν την εφαρμογή της μεθόδου *Gauss-Seidel*, σε συνδυασμό με την επιλογή πρόσφορων τιμών για τις αρχικές εκτιμήσεις, σε απλές διατάξεις, στις οποίες είναι εφικτή η γρήγορη επίλυση «με το χέρι».

Διαδοχική υπερχαλάρωση: Για περαιτέρω επιτάχυνση της σύγκλισης μπορεί να γίνει ο εξής συλλογισμός: Αφού μεταξύ διαδοχικών προσεγγίσεων η τιμή του $\Phi_{i,j(k)}$ μεταβάλλεται και είναι γνωστή για τα βήματα $(n-1)$ και n , ως χρησιμοποιηθούν αυτές οι τιμές σε σχήμα γραμμικής προεκβολής, όπως στο **Σχήμα 6.3-10**, για να εκτιμηθεί η τιμή π.χ. στο επόμενο βήμα $(n+1)$, και να χρησιμοποιηθεί αυτή η εκτίμηση για τον προσδιορισμό του $\Phi_{i,j(k)}$. Ή, ακόμα γενικότερα, ως θεωρηθεί ότι το βήμα n δεν περιορίζεται σε ακέραιες τιμές και ως χρησιμοποιηθεί η εκτίμηση της τιμής του $\Phi_{i-1,j(k)}$ στο «βήμα» $n + \delta$, και για τον υπολογισμό του $\Phi_{i,j(k)}^{(n)}$ να μη χρησιμοποιηθεί το $\Phi_{i-1,j(k)}^{(n-1)}$ (όπως στη μέθοδο *Jacobi*), ούτε και το $\Phi_{i-1,j(k)}^{(n)}$ (όπως στη μέθοδο *Gauss-Seidel*), αλλά κάποια καλύτερη εκτίμηση $\Phi_{i-1,j(k)}^{(n+\delta)}$. Με γραμμική προεκβολή προκύπτει $\Phi^{(n+\delta)} = \Phi^{(n)} + \delta \cdot [\Phi^{(n)} - \Phi^{(n-1)}] = (1 + \delta) \cdot \Phi^{(n)} - \delta \cdot \Phi^{(n-1)}$. Η βελτιωμένη αυτή εκτίμηση χρησιμοποιείται αντί του $\Phi^{(n)}$ της μεθόδου *Gauss-Seidel* ή του $\Phi^{(n-1)}$ της μεθόδου *Jacobi*, αλλά μόνο σε εκείνους τους παρακείμενους κόμβους, στους οποίους οι εκτιμήσεις έχουν προσδιορισθεί σε τάξη μέχρι n . Για τους άλλους κόμβους αναγκαστικά χρησιμοποιούνται οι τελευταίες διαθέσιμες εκτιμήσεις, οι $\Phi^{(n-1)}$, όπως και στη μέθοδο *Gauss-Seidel*. Το αποτέλεσμα, η μέθοδος διαδοχικής υπερχαλάρωσης (*successive over relaxation, SOR*), περιγράφεται από τον αλγόριθμο:



Σχήμα 6.3-10

$$\Phi_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{4} \left[(1 + \delta) (\Phi_{i-1,j}^{(n)} + \Phi_{i,j-1}^{(n)} + \Phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n-1)}) - \delta (\Phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n-1)} + \Phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n-1)}) \right], \quad (6.3-22)$$

με προφανή την επέκταση σε τρεις διαστάσεις. Στους κόμβους $i+1, j$ και $i, j+1$ δεν είναι ακόμα γνωστές οι εκτιμήσεις σε τάξη n . Γι' αυτό, οι αντίστοιχοι όροι έχουν συνολικά τον συντελεστή $(1 + \delta) - \delta = 1$. Δεν προκύπτει, όμως, κανένα υπολογιστικό κέρδος από αντίστοιχη αναδιάταξη, αντίθετα, προκύπτει επιβάρυνση των πράξεων κατά ένα πολλαπλασιασμό, εφόσον οι ποσότητες $\frac{1}{4}(1 + \delta)$ και $\frac{1}{4}\delta$ έχουν υπολογισθεί εξ αρχής.]

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως:

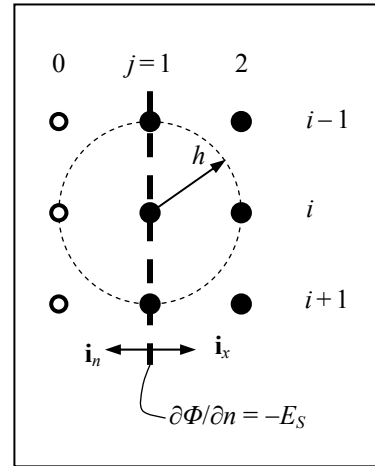
$$\Phi_{i,j}^{(n)} = (1 + \delta) \cdot \Phi_{i,j}^{(n)} \Big|_{\text{Gauss-Seidel}} - \delta \cdot \Phi_{i,j}^{(n)} \Big|_{\text{Jacobi}}, \quad (6.3-23)$$

και περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις τη μέθοδο *Jacobi* (όταν $\delta = -1$) και τη μέθοδο *Gauss-Seidel* (όταν $\delta = 0$). Η μέθοδος συγκλίνει (όταν $n \rightarrow \infty$), εφόσον $-1 < \delta < +1$. Είναι ταχύτερη από τη μέθοδο *Jacobi* για κάθε $\delta > -1$, καθώς και από τη μέθοδο *Gauss-Seidel*, όταν $\delta > 0$. Η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου δ εξαρτάται από τη διάταξη (το σχήμα και τη διακύμανση τιμών στο όριο), συνήθως, πάντως, βρίσκεται πλησιέστερα στο $\delta = 1$ απ' όσο στο $\delta = 0$.

Διαδοχική σμίκρυνση βήματος πλέγματος: Εκτός από τα προηγούμενα, πρόσθετη (και πολύ σημαντική, αν ο χρήστης ενδιαφέρεται, όπως άλλωστε θα έπρεπε) εξοικονόμηση σε υπολογιστικό χρόνο επιτυγχάνεται με διαδοχική σμίκρυνση του βήματος. Μετά την αρχική κατάστρωση του πλέγματος με (λεπτό) βήμα h , τα κύρια στάδια είναι:

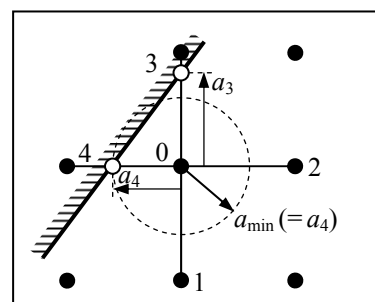
- (1) Επίλυση σε πλέγμα με χονδρό βήμα mh (με m θετικό ακέραιο), για να προσδιορισθεί το δυναμικό στις θέσεις με $(i, j, k) = m + 1, 2m + 1, 3m + 1, \dots$, με το όριο να βρίσκεται στις θέσεις με $(i, j, k) = 1$. Η διαδικασία επίλυσης υλοποιείται θέτοντας στον αλγόριθμο $\Phi_{i \pm m, j}$ αντί $\Phi_{i \pm 1, j}$ κλπ. και διακόπτεται όταν επιτευχθεί «μέτρια» σύγκλιση.
- (2) Προσδιορισμός των τιμών στους λοιπούς κόμβους, με τις τιμές στους κόμβους με $(i, j, k) = m + 1, 2m + 1$ κλπ. θεωρούμενες γνωστές, όπως έχουν προσδιορισθεί στο προηγούμενο στάδιο. Στο παρόν στάδιο εφαρμόζεται επαναληπτικά ο αλγόριθμος χρησιμοποιώντας τις τιμές των κόμβων $i \pm 1$ κλπ., εξαιρώντας όμως τους κόμβους, για τους οποίους είναι $(i, j, k) = m + 1, 2m + 1$ κλπ.
- (3) Τελική επίλυση του συστήματος (με βήμα πλέγματος h), χρησιμοποιώντας ως αρχικές εκτιμήσεις τις τιμές που προέκυψαν στα δύο προηγούμενα στάδια (1) και (2).

Οριακή συνθήκη Neumann: Σε όλα τα προηγούμενα έχει θεωρηθεί ότι συνολικά στο όριο S επικρατεί συνθήκη *Dirichlet*, $\Phi(\mathbf{r}_S) = \Phi_S(\mathbf{r}_S)$. Αρκετά συχνή είναι και η συνθήκη *Neumann*, $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_S} = -E_S$, ιδίως με την ομογενή μορφή της, $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_S} = 0$. Σε τέτοια περίπτωση, μεταξύ των άγνωστων ποσοτήτων περιλαμβάνονται και οι τιμές του δυναμικού στους κόμβους του ορίου, στους κόμβους με $j = 1$ στο **Σχήμα 6.3-11**, οπότε πρέπει να διατυπωθούν και οι αντίστοιχες εξισώσεις. Στις εξισώσεις αυτές εμφανίζεται ως προσθετέος και η τιμή του δυναμικού σε κόμβους που βρίσκονται έξω από το χώρο της διάταξης, όπως είναι ο κόμβος $(i, 0)$. Η τιμή του προσδιορίζεται αξιοποιώντας την οριακή συνθήκη. Π.χ., στο **Σχήμα 6.3-11** (όπου $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_x$) η οριακή συνθήκη δίνει τη σχέση $\Phi_{i,0} = \Phi_{i,2} - 2E_S h$. Η σχετική διαδικασία παρουσιάζεται στο **παράδ. 6.3-3**.



Σχήμα 6.3-11

Προσαρμογή πλέγματος στο σχήμα του ορίου: Στις σχέσεις (6.3-20) και (6.3-21), όλοι οι όροι στη δεξιά πλευρά έχουν τους ίδιους συντελεστές, $1/4$ ή $1/6$. Οι συντελεστές αυτοί εφαρμόζονται, όταν οι κόμβοι του κυττάρου απέχουν ενιαία απόσταση h από τον κεντρικό κόμβο. Ιδίως κοντά στα όρια, αυτό συχνά δεν είναι εφικτό, αλλά ένας ή περισσότεροι κόμβοι, βρίσκονται έξω από το όριο, όπως οι κόμβοι $\ell = 3$ και 4 στο **Σχήμα 6.3-12**. Ισοδύναμα, οι τιμές του δυναμικού είναι γνωστές σε απόσταση $a_\ell h$ από τον κεντρικό κόμβο, με $a_\ell \leq 1$ (αλλά $a_\ell > 0$). Τότε, οι παραπάνω συντελεστές διαφοροποιούνται. Η απλούστερη ρύθμιση είναι να μετακινηθούν οι εκτός ορίου κόμβοι στο όριο και να εφαρμοσθούν οι πεπερασμένες διαφορές σε πλέγμα με βήμα ίσο με $a_{\min} h$ (και όχι ίσο με h), όπου $a_{\min} = \min\{a_\ell\}$ είναι η ελάχιστη απόσταση δορυφορικού κόμβου από τον κεντρικό, σε μονάδες του βήματος h . Τότε, στη δεξιά πλευρά της σχέσης (6.3-17) πρέπει να ληφθεί το άθροισμα των διαφορών του δυναμικού σε απόσταση $a_{\min} h$. Με γραμμική παρεμβολή μέχρι τον κόμβο, κάθε διαφορά είναι ίση με $(a_{\min}/a_\ell)(\Phi_\ell - \Phi_0)$, όπου βέβαια $a_\ell = 1$, αν ο κόμβος ℓ είναι εσωτερικός. Έτσι, για $\kappa = 1, 2$ ή 3 διαστάσεις η Λαπλασιανή εκφράζεται ως:



Σχήμα 6.3-12

$$(a_{\min} h)^2 \nabla^2 \Phi = - \left(\sum_{\ell=1}^{2\kappa} w_\ell \right) \Phi_0 + \sum_{\ell=1}^{2\kappa} w_\ell \Phi_\ell, \quad (6.3-24a)$$

με $w_\ell = a_{\min}/a_\ell$ τους συντελεστές βάρους. Επειδή είναι $\nabla^2 \Phi = 0$, η σχέση αυτή δίνει:

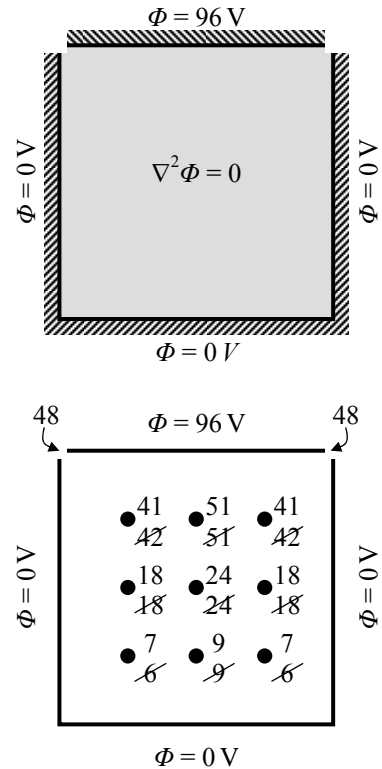
$$\Phi_0 = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{2\kappa} w_\ell} \sum_{\ell=1}^{2\kappa} w_\ell \Phi_\ell, \quad (6.3-24\beta)$$

για το δυναμικό Φ_0 του κεντρικού κόμβου. Η σχέση (6.3-24β) συμπεριφέρεται καλά, τόσο όταν $a_{\min} \rightarrow 0$, όσο και όταν $a_{\min} \rightarrow 1$: Αμέσως φαίνεται ότι $a_{\min} = 1$ σημαίνει πως για όλους τους κόμβους είναι $a_\ell = 1$. Τότε, είναι $w_\ell = 1$ για κάθε κόμβο, οπότε $\sum_\ell w_\ell = 2, 4$ ή 6 και αναπαράγεται η σχέση (6.3-17). Στο άλλο όριο, $a_{\min} \rightarrow 0$, ο κεντρικός κόμβος είναι πολύ κοντά στο τοίχωμα. Τότε για τον πλησιέστερο κόμβο του τοιχώματος, τον κόμβο ℓ' , είναι $a_{\ell'} \approx 0$, συνεπώς $a_{\min} = a_{\ell'} \approx 0$, οπότε για τον κόμβο αυτό είναι $w_{\ell'} \approx 1$. Αντίθετα, για τους υπόλοιπους κόμβους είναι $w_\ell = a_{\min}/a_\ell \approx 0$, με συνέπεια στον παρονομαστή να είναι $\sum_\ell w_\ell \approx w_{\ell'} \approx 1$ και στο άθροισμα του αριθμητή πρακτικά να συνεισφέρει μόνο ο πλησιέστερος κόμβος του τοιχώματος, δηλαδή $\Phi_0 \approx w_{\ell'} \Phi_{\ell'} \approx \Phi_{\ell'}$, όπως αναμένεται.

Άλλες γενικεύσεις ξεπερνούν κατά πολύ το αντικείμενο του παρόντος κειμένου και πρέπει να αναζητηθούν στην εξειδικευμένη βιβλιογραφία. Μεταξύ αυτών είναι:

- Η χρήση αλγορίθμων ανώτερης τάξης, στους οποίους για τον σχηματισμό της Λαπλασιανής συμμετέχουν και οι κόμβοι σε θέσεις $\pm 2h, \pm 3h$ κλπ., καθώς και εκείνοι στις διαγωνίους, και όχι ενώ μόνο εκείνοι σε απόσταση $\pm h$, όπως στη σχέση (6.3-17). Σε τέτοιους αλγορίθμους, πρέπει αντίστοιχα να επεκταθούν στην ίδια ανώτερη τάξη και οι λοιπές σχέσεις πρώτης τάξης, συγκεκριμένα όσες χρησιμοποιούν γραμμική παρεμβολή. Τέτοια είναι η σχέση (6.3-24α), η οποία περιγράφει παρεμβολή στη θέση των κόμβων που έχουν μετατοπισθεί για να συμπέσουν με το τοίχωμα. Επίσης, τέτοια είναι και η προσέγγιση της παραγώγου από πηλίκο διαφορών, που δίνει σχέσεις όπως $\Phi_{i,0} = \Phi_{i,2} - 2Esh$ κατά την απαιτούμενη παρεμβολή σε συνθήκη *Neumann*. Αυτή η επέκταση σε αλγορίθμους ανώτερης τάξης αντιστοιχεί με την εφαρμογή της μαθηματικής σχέσης (E.1-11), αντί για σχέσεις όπως η (E.1-9), με κατάλληλους συντελεστές βαρύτητας w_i .
- Η χρήση πλέγματος με άνισες αποστάσεις μεταξύ των κόμβων, κυρίως, για να σχηματισθεί πυκνό πλέγμα σε περιοχές με ιδιαιτερότητες, όπως ακμές κλπ. Σε τέτοιο πλέγμα όχι μόνο είναι οι αποστάσεις άνισες, αλλά και οι διαδοχικοί παρακείμενοι κόμβοι δεν σχηματίζουν ορθές γωνίες σε σχέση με τον κεντρικό κόμβο, οπότε σε πρώτη τάξη η σχέση (6.3-24β) επεκτείνεται με πρόσθετους συντελεστές βάρους: Ένα ολοκλήρωμα, όπως το (E.1-8), για τη μέση τιμή του δυναμικού σε επιφάνεια σφαίρας, προσεγγίζεται από άθροισμα, στο οποίο κάθε όρος αντιπροσωπεύει διαφορετικό κλάσμα του ολικού εμβαδού.

Παράδειγμα 6.3-1: Στο εσωτερικό μιας διάταξης με $\partial/\partial z = 0$, με τετραγωνική διατομή και διαστάσεις $4h \times 4h$, ισχύει η εξίσωση του Laplace, $\nabla^2 \Phi = 0$. Οι τιμές του δυναμικού στο όριο δηλώνονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό προσεγγιστικά με ακρίβεια ± 1 V, σε πλέγμα με βήμα h .



Επίλυση: Για τις αρχικές εκτιμήσεις ($n = 0$) θα χρειασθούν κατάλληλες τιμές στις δύο κορυφές της διατομής, στις οποίες εκδηλώνεται ασυνέχεια. Επειδή πρόκειται για ορθή γωνία και ενδιαφέρουν κόμβοι σε θέσεις με κλίση 45° σε σχέση με τις πλευρές, όπως δηλαδή στην πρώτη περίπτωση του Σχήματος 6.3-7, στις κορυφές αυτές τίθεται $\Phi = \frac{1}{2}(96 + 0)$. Σαρώνοντας τους κόμβους κατά σειρά, ώστε να αξιοποιηθούν οι οριακές συνθήκες, οι αρχικές εκτιμήσεις είναι $24 = \frac{1}{4}(96 + 0 + 0 + 0)$, ή $24 = \frac{1}{4}(48 + 48 + 0 + 0)$, για το κεντρικό κόμβο του πλέγματος, ύστερα $42 = \frac{1}{4}(48 + 96 + 24 + 0)$ και $6 = \frac{1}{4}(24 + 0 + 0 + 0)$ για τα άλλα σημεία στις διαγωνίους, και τέλος για τους υπόλοιπους κόμβους $51 = \frac{1}{4}(96 + 42 + 24 + 42)$, $18 = \frac{1}{4}(42 + 24 + 6 + 0)$ και $9 = \frac{1}{4}(24 + 6 + 0 + 6)$. Εδώ δεν χρειάστηκε στρογγυλοποίηση. Αν χρειαζόταν, θα γινόταν στους πλησιέστερους ακέραιους αριθμούς, επειδή ζητείται ακρίβεια ± 1 V, άλλωστε εδώ οι τιμές είναι ακόμα μόνο οι αρχικές εκτιμήσεις.

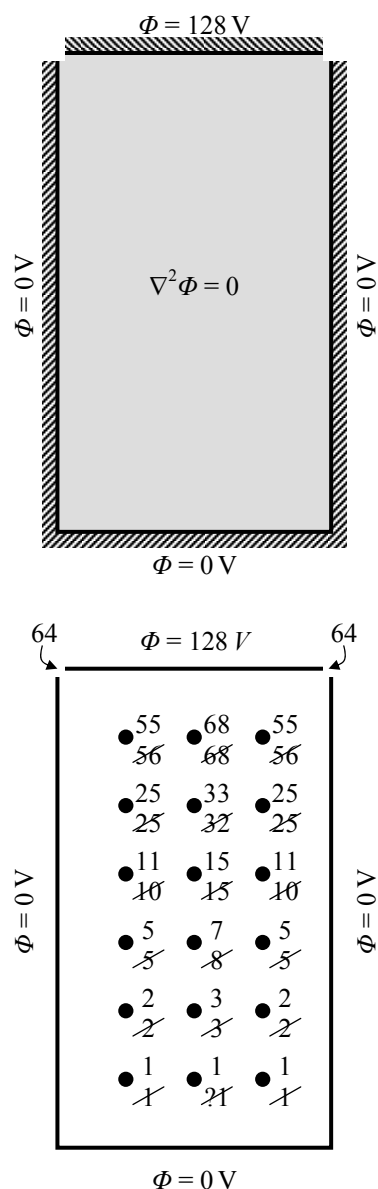
Για τη πρώτη σειρά προσεγγίσεων ($n = 1$), σε κάθε κόμβο είναι γνωστές οι τιμές στους 4 γειτονικούς κόμβους και μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτές οι τιμές για το μέσο όρο, με ακτίνα ίση με h και όχι π.χ. $h\sqrt{2}$, επειδή τότε ο κύκλος θα έτεμνε το όριο. Έτσι, με $i, j = 1$ στο όριο, στον κόμβο (2,2) είναι $41 \leftarrow 41,25 = \frac{1}{4}(96 + 51 + 18 + 0)$. Για τον επόμενο κόμβο (2,3) συμφέρει να αξιοποιηθεί η τιμή 41, η οποία μόλις προσδιορίστηκε και όχι η αρχική εκτίμηση 42, να εφαρμοσθεί, δηλαδή, η μέθοδος των Gauss-Seidel και όχι η μέθοδος του Jacobi, καθώς επίσης να αξιοποιηθεί η συμμετρία, που υπαγορεύει ότι $\Phi_{i,4} = \Phi_{i,2}$ για κάθε γραμμή i . Συνεπώς, για το $\Phi_{2,3}$ προτιμάται η αριθμητική $51 \leftarrow 50,5 = \frac{1}{4}(96 + 41 + 24 + 41)$, ενώ θα ήταν $51 = \frac{1}{4}(96 + 42 + 24 + 42)$ στη μέθοδο Jacobi, και παρόμοια για τους λοιπούς κόμβους.

Αφού ολοκληρωθεί η πρώτη σειρά προσεγγίσεων, διαπιστώνονται λίγες και μικρές αναθεωρήσεις (μόνο από 42 σε 41 και από 6 σε 7), οι οποίες θα συνέβαλλαν στην επόμενη (την $n = 2$) σειρά κατά 25%, δηλαδή πολύ λιγότερο από το κριτήριο στρογγυλοποίησης. Επομένως, θεωρείται ότι επιτεύχθηκε σύγκλιση και δεν χρειάζεται δεύτερη ($n = 2$) σειρά προσεγγίσεων.

Παράδειγμα 6.3-2: Στο εσωτερικό μιας διάταξης με $\partial/\partial z = 0$, με ορθογωνική διατομή διαστάσεων $4h \times 7h$, επικρατεί η εξίσωση του Laplace, $\nabla^2\Phi = 0$. Οι τιμές του δυναμικού στο όριο δηλώνονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό προσεγγιστικά με ακρίβεια ± 1 V, σε πλέγμα με βήμα h .

Επίλυση: Αρχικά, σημειώνεται ότι στις κορυφές με την ασυνέχεια η ενδεικνυόμενη τιμή είναι $64 = \frac{1}{2}(128+0)$. Για τις τιμές εκκίνησης, η εκτίμηση $\Phi_{3,3} = 32 = \frac{1}{4}(64+64+0+0)$ εντοπίζεται αμέσως, αλλά για τους αμέσως πιο κάτω κομβους στη μεσαία στήλη η διαδικασία που ακολουθήθηκε στο **Σχήμα 6.3-9** δίνει μηδενικές τιμές, που δεν φαίνονται ικανοποιητικές, ούτε ως πρώτες εκτιμήσεις, ιδίως όταν πρόκειται για υπολογισμό «με το χέρι» και είναι επιθυμητό να μειωθεί το πλήθος των πράξεων και να αξιοποιηθεί η ικανότητα για σκέψη. Προκειμένου να αξιοποιηθεί η εκτίμηση $\Phi_{3,3} = 32$, προτιμότερο είναι να τεθεί $\Phi_{3,7} = ? = 0$, με αποτέλεσμα $\Phi_{3,5} = 8 = \frac{1}{4}(32+0+?+0)$, που επιτρέπει να προσδιορισθεί κάθε δεύτερη τιμή στην πρώτη και στην τρίτη στήλη. Κατά σειρά είναι $56 = \frac{1}{4}(64+128+32+0)$, $10 = \frac{1}{4}(0+32+8+0)$ και $2 = \frac{1}{4}(0+8+?+0)$. Τώρα, προσδιορίζεται και το $\Phi_{3,7} = ? = 1 = \frac{1}{4}(2+2+0+0)$, και συμπληρώνονται οι εκτιμήσεις για το δυναμικό στους ενδιάμεσους κόμβους, με κύκλο ακτίνας h , με τις τιμές $25 \leftarrow 24,5 = \frac{1}{4}(0+56+32+10)$, $5 = \frac{1}{4}(0+10+8+2)$ κλπ. στην πρώτη και τρίτη στήλη, καθώς και $68 = \frac{1}{4}(56+128+56+32)$ κλπ. στη μεσαία στήλη.

Ακολουθεί η πρώτη προσέγγιση ($n = 1$), με εφαρμογή της σχέσης $\Phi = \langle \Phi \rangle_{\pm 1}$ για τη μέση τιμή σε ακτίνα h , π.χ. $\Phi_{2,2} = \Phi_{2,4} = 55 \leftarrow 55, 25 = \frac{1}{4}(0+128+68+25)$, και όχι πλέον με ακτίνα $h\sqrt{2}$, δηλαδή, όχι $\cancel{36} = \frac{1}{4}(64+128+32+0)$, επίσης $\Phi_{3,2} = 68 \leftarrow 67,5 = \frac{1}{4}(55+128+55+32)$, στρογγυλοποιώντας προς τα πάνω, επειδή έχει ληφθεί $55, 25 \rightarrow 55$, και όμοια για τους λοιπούς κόμβους, με κάθε νέο αποτέλεσμα να αναγράφεται στο σχήμα, διαγράφοντας το προηγούμενο. Η επόμενη προσέγγιση ($n = 2$) προκαλεί μεταβολή μόνο στον κόμβο (3,4), όπου προκύπτει $16 \leftarrow 15,5 = \frac{1}{4}(11+33+11+7)$, τιμή που δεν έχει αναγραφεί στο σχήμα. Εδώ, έγινε στρογγυλοποίηση προς τα πάνω, επειδή ήδη έχει ληφθεί $11, 25 \rightarrow 11$.

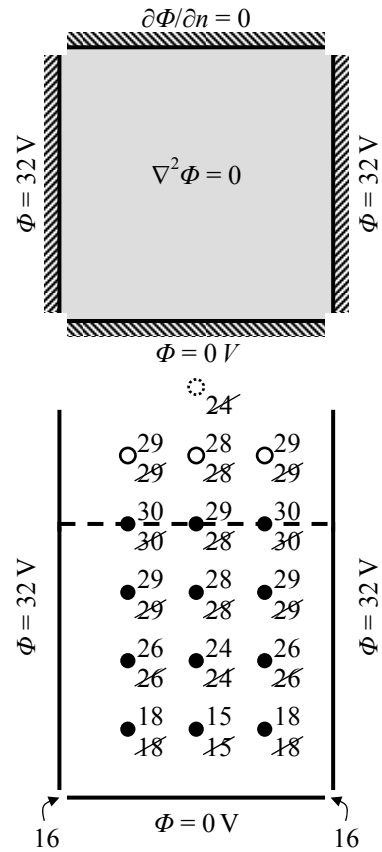


Παράδειγμα 6.3-3: Στο εσωτερικό μιας διάταξης με $\partial/\partial z = 0$, με τετραγωνική διατομή $4h \times 4h$, ισχύει η εξίσωση του Laplace, $\nabla^2 \Phi = 0$. Σε μία πλευρά του ορίου είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$ και στις άλλες δίδονται οι τιμές του δυναμικού. Ζητείται το δυναμικό με ακρίβεια ± 1 V, σε πλέγμα με βήμα h .

Επίλυση: Η ασυνέχεια στα άκρα της κάτω πλευράς αντιμετωπίζεται όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, λαμβάνοντας εκεί $\Phi = \frac{1}{2}(32 + 0) = 16$. Αντίθετα, στα άκρα της πάνω πλευράς δεν υπάρχει ασυνέχεια: Με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_y$ η οριακή συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$ σημαίνει $\partial\Phi/\partial y = 0$, που είναι απόλυτα συμβατό με τη συνθήκη στα πλευρικά τοιχώματα, στα οποία $\Phi(y) = \text{σταθ}$.

Για την οριακή συνθήκη *Neumann* οι τιμές είναι άγνωστες στο όριο, οπότε πρέπει να τεθούν και εκεί κόμβοι, ενώ επειδή είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$, οι πρόσθετοι κόμβοι έξω από την περιοχή της διάταξης θα έχουν δυναμικό ίσο με τους συμμετρικούς τους ως προς τη θέση του ορίου. Με αυτές τις παρατηρήσεις, αρχικά προσδιορίζεται στο κέντρο της αρχικής διάταξης η τιμή $24 = \frac{1}{4}(32 + 32 + 16 + 16)$ και ακολούθως για το μέσο του άνω ορίου η τιμή $28 = \frac{1}{4}(32 + 32 + 2 \times 24)$, όπου οι δύο τιμές των 24 V αναφέρονται στον κόμβο του κέντρου της διάταξης, ο οποίος μόλις εξετάστηκε, και στο συμμετρικό κόμβο έξω από την αρχική διάταξη, ο οποίος θα έχει το ίδιο δυναμικό. Με αυτές τις δύο τιμές προσδιορίζεται η τιμή $\Phi_{2,2} = \Phi_{2,4} = 29 = \frac{1}{4}(32 + 28 + 24 + 32)$, με την αρίθμηση των κόμβων να αναφέρεται στην αρχική διάταξη και με τον κόμβο (1,1) στην πάνω αριστερά κορυφή, και ακολούθως $30 \leftarrow 29,5 = \frac{1}{4}(32 + 28 + 2 \times 29)$ για τους άλλους δύο κόμβους του πάνω ορίου.

Οι εκτιμήσεις στους υπόλοιπους κόμβους της διάταξης συμπληρώνονται με διαδικασία ταυτόσημη με των δύο προηγούμενων παραδειγμάτων, οπότε αρκεί η αναγραφή στο πλέγμα των αποτελεσμάτων των αριθμητικών πράξεων (βλ. και το πρώτο **σχόλιο**). Ακολουθεί ο προσδιορισμός των τιμών σε πρώτη προσέγγιση από το μέσο όρο των τιμών των παρακείμενων κόμβων, τώρα πια μόνο των κόμβων σε απόσταση h . Στη λογική της μεθόδου *Gauss-Seidel*, για τις μέσες τιμές λαμβάνονται οι τελευταίες διαθέσιμες πληροφορίες, και όχι μόνο οι αρχικές εκτιμήσεις. Τα αποτελέσματα αναγράφονται στο πλέγμα με ταυτόχρονη διαγραφή κάθε τιμής, μόλις υπολογισθεί η βελτιωμένη προσέγγιση. Παρατηρείται ταύτιση, εκτός από τον κόμβο (1,3) όπου προκύπτει η βελτίωση $28 \rightarrow 29$, δηλαδή έχει επιτευχθεί σύγκλιση.



Σχόλια στα παραδ. 6.3-1 έως 6.3-3:

- Η διεξοδική αναγραφή των αριθμητικών πράξεων έγινε αποκλειστικά και μόνο για να διευκολυνθεί ο αναγνώστης να παρακολουθήσει τη διαδικασία, και όχι ως υπόδειγμα, για την παρουσίαση της επίλυσης στο διαγώνισμα. Δεν χρειάζεται καμία τεκμηρίωση όπως « $\frac{1}{4}(32 + 28 + 24 + 32) = 29$ », προκειμένου απλά να γραφεί στο πλέγμα η τιμή 29. Και, φυσικά, δεν είναι καθόλου απαραίτητο, αντιθέτως αντενδείκνυται, για την εν λόγω μέση τιμή να γίνει πρώτα η άθροιση $(32 + 28 + 24 + 32) = 116$ και μετά η διαίρεση $116/4 = 29$. Με μια ματιά, χωρίς δηλαδή να χρειάζεται να γραφεί τίποτα, φαίνονται οι επί μέρους μέσες τιμές ανά ζεύγη $\langle 32, 28 \rangle = 30$ και $\langle 24, 32 \rangle = 28$, οπότε τελικά $\langle 32, 28, 24, 32 \rangle = \langle 30, 28 \rangle = 29$. Η, εναλλακτικά, για την ίδια μέση τιμή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία κάποιος από τους προσθετέους, όπως η μικρότερη τιμή 24, και να υπολογισθεί, με μία μόνο ματιά ότι $\langle 32, 28, 24, 32 \rangle = 24 + \langle 8, 4, 0, 8 \rangle = 24 + 5 = 29$.
- Η σύγκλιση υπήρξε ταχύτατη. Ήταν αρκετή η αρχική εκτίμηση και μόνο μία σειρά από προσεγγίσεις, επειδή για τις αρχικές εκτιμήσεις χρησιμοποιήθηκε κύκλος με τη μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα στην εφαρμογή του τύπου $\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_a \Phi_a$, και ειδικά στο **παράδ. 6.3-2** επελέγη πρόσφορη αλληλουχία κόμβων για τον προσδιορισμό των εκτιμήσεων. Αυτές οι ενέργειες είχαν ως αποτέλεσμα να διεισδύσουν οι πληροφορίες από τις οριακές συνθήκες αμέσως βαθιά στο εσωτερικό του χώρου. Ιδιαίτερα όταν πρόκειται για υπολογισμούς γρήγορους και «με το χέρι», είναι πολύ σημαντικό, να μην απέχει πολύ η αρχική εκτίμηση από την τελική προσέγγιση. Όσο απλές και να είναι, οι υπερβολικά πολλές αριθμητικές πράξεις είναι χρονοβόρες και κουραστικές. Αν, αντίθετα, στο ίδιο **παράδ. 6.3-2** είχε ληφθεί αρχικά η τιμή $\Phi = 0$ σε κάθε κόμβο, θα χρειάζονταν 14 επαναλήψεις για να συγκλίνει το σύστημα στις τιμές που προκύπτουν μόνο με δύο επαναλήψεις.
- Η παρουσία ομογενούς οριακής συνθήκης *Neumann* σε επίπεδο όριο, όπως συναντάται στο **παράδ. 6.3-3**, μπορεί εναλλακτικά να αντιμετωπισθεί κατοπτρίζοντας συμμετρικά τη διάταξη ως προς αυτό το όριο, βλ. και το πρώτο **σχόλιο** στο **παράδ. 6.2-19**. Αν στην επίλυση της διευρυμένης διάταξης ληφθεί συστηματικά υπ' όψιν η συμμετρία, η προσπάθεια είναι παρεμφερής με την επίλυση που παρουσιάστηκε. Το άλλο ενδεχόμενο, ο αντισυμμετρικός κατοπτρισμός σε επίπεδο όριο με συνθήκη $\Phi = 0$, κυρίως εξυπηρετεί σε διατάξεις, στις οποίες τα δεδομένα είναι αντισυμμετρικά ως προς επίπεδο. Τότε, αρκεί να τεθεί $\Phi = 0$ στους κόμβους του επιπέδου αντισυμμετρίας, να επιλυθεί η μισή διάταξη και τα αποτελέσματα να αντιγραφούν στην άλλη μισή, με αντιστροφή του προσήμου.

6.3.3 Μεταβολικές τεχνικές

Μια διαφορετική αντιμετώπιση του προβλήματος οριακών τιμών είναι να αναζητηθούν προσεγγίσεις του δυναμικού Φ από κάποια συνάρτηση $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, εξαρτώμενη και από κάποιες παραμέτρους $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ με πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος. Μεταβάλλοντας την τιμή μιας παραμέτρου, η προσέγγιση $\tilde{\Phi}$ θα ικανοποιεί, με κάποιο κριτήριο, περισσότερο ή λιγότερο τις απαιτήσεις του προβλήματος. Αν προσδιορισθούν οι τιμές των παραμέτρων έτσι ώστε η συνάρτηση $\tilde{\Phi}$ να ικανοποιεί κατά τον καλύτερο τρόπο τις απαιτήσεις του προβλήματος, αυτή η επιλογή της $\tilde{\Phi}$ αποτελεί και την καλύτερη προσέγγιση για το δυναμικό Φ .

Για να προσδιορισθεί η μορφή της εκτίμησης $\tilde{\Phi}$, δύο ριζικά διαφορετικές αφετηρίες είναι οι εξής:

- Η προσέγγιση $\tilde{\Phi}$ να ικανοποιεί επακριβώς τη διαφορική εξίσωση, στην προκειμένη περίπτωση να είναι $\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0$ για οποιεσδήποτε τιμές των α_n , τα οποία ακολούθως υπολογίζονται με κριτήριο η $\tilde{\Phi}$ να προσεγγίζει με τον καλύτερο τρόπο τις οριακές συνθήκες. Η διαδικασία αυτή, μολονότι είναι θεμελιακά διαφορετική, έχει πολλές ομοιότητες με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών (Κεφ. 7), στην οποία πάλι αρχικά αναζητώνται συναρτήσεις, των οποίων η Λαπλασιανή είναι εκ ταυτότητας ίση με μηδέν. Οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στο χωρισμό μεταβλητών είναι συνεπώς κατάλληλες για το σχηματισμό της $\tilde{\Phi}$. Επίσης, σε δύο διαστάσεις, η $\tilde{\Phi}$ μπορεί να σχηματισθεί με τη βοήθεια συναρτήσεων που είναι πραγματικό ή φανταστικό μέρος αναλυτικών μιγαδικών συναρτήσεων. Στην περίπτωση αυτή αξιοποιούνται οι ίδιες ιδιότητες, οι οποίες οδηγούν στη μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισης, παράγρ. 6.4.
- Η προσέγγιση $\tilde{\Phi}$ να ικανοποιεί επακριβώς τις οριακές συνθήκες: Τότε οι συντελεστές α_n προσδιορίζονται με κριτήριο να είναι η Λαπλασιανή της προσέγγισης $\tilde{\Phi}$ κοντά στο μηδέν, όσο περισσότερο είναι εφικτό, ή να ικανοποιείται, επίσης προσεγγιστικά, κάποια άλλη ιδιότητα που ισοδυναμεί με μηδενισμό της Λαπλασιανής.

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζονται μέθοδοι της δεύτερης οικογένειας. Σε κάθε περίπτωση, επιλέγεται η απλούστερη μορφή για την προσέγγιση $\tilde{\Phi}$, άθροισμα με μορφή:

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) = f_0(\mathbf{r}) + \sum_n \alpha_n f_n(\mathbf{r}). \quad (6.3-25)$$

Το άθροισμα, συνήθως, αναφέρεται σε πεπερασμένο πλήθος όρων, αλλά μπορεί οι όροι να έχουν και άπειρο πλήθος.

Επιλογή των συναρτήσεων f_0 και f_n : Στη σχέση (6.3-25), η συνάρτηση f_0 επιλέγεται, ώστε να ικανοποιεί επακριβώς τις οριακές συνθήκες στο όριο S , ενώ οι συναρτήσεις f_n ώστε να ικανοποιούν την ομογενή μορφή των ίδιων οριακών συνθηκών. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση αναφέρεται σε μεικτές οριακές συνθήκες για το δυναμικό Φ , συγκεκριμένα, ότι στο τμήμα S_1 του ορίου είναι $\Phi(\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S1}) = Uf_D(\mathbf{r}_{S1})$, ενώ στο υπόλοιπο τμήμα S_2 του ορίου είναι $(\partial\Phi/\partial n)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S2}} = -EF_N(\mathbf{r}_{S2})$. Τότε, οι συναρτήσεις f_0 και f_n επιλέγονται ώστε:

ο Στο τμήμα S_1 του ορίου, με τη συνθήκη *Dirichlet*, να είναι:

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S1}) &= Uf_D(\mathbf{r}_{S1}) = \Phi(\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S1}), \\ f_n(\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S1}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.3-26)$$

ο Στο υπόλοιπο τμήμα S_2 του ορίου, με τη συνθήκη *Neumann*, να είναι:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_0}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S2}} &= -Ef_N(\mathbf{r}_{S2}) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S2}}, \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{S2}} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3-27)$$

Με την επιλογή αυτή, οποιαδήποτε τιμή και να έχουν οι συντελεστές a_n , οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται πλήρως από την προσέγγιση $\tilde{\Phi}$. Φυσικά, είναι δυνατόν να ταυτίζεται ένα από τα τμήματα S_1 και S_2 με το όριο S και να έχει το άλλο μηδενική έκταση, καλύπτοντας έτσι και το ενδεχόμενο να επικρατούν σε ολόκληρο το όριο αμιγείς συνθήκες *Dirichlet* ή *Neumann*.

Κριτήριο βελτιστοποίησης: Εν γένει η συνάρτηση $\tilde{\Phi}$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace*, είναι δηλαδή $\nabla^2\tilde{\Phi} \neq 0$. Το ζητούμενο είναι να προσδιορισθούν κατάλληλα οι συντελεστές a_n των συναρτήσεων f_n , δηλαδή, οι παράμετροι a_n της συνάρτησης $\tilde{\Phi}$, ώστε η συνάρτηση $\tilde{\Phi}$ να «απέχει» κατά το δυνατόν λιγότερο από το δυναμικό Φ . Ως «απόσταση» (που θα ελαχιστοποιηθεί) μεταξύ δύο συναρτήσεων, εδώ των $\tilde{\Phi}$ και Φ , ορίζεται η ποσότητα:

$$\mathcal{D}_\ell(\tilde{\Phi}, \Phi) = \frac{1}{V} \int_V |\tilde{\Phi} - \Phi|^\ell dV, \quad (6.3-28)$$

ή, πρακτικά ισοδύναμα, η ℓ -στή ρίζα της δεξιάς πλευράς, του ολοκληρώματος ανά μονάδα όγκου. Οι ακραίες τιμές $\ell = 1$ και $\ell = \infty$ (πρακτικά, για κάθε $\ell > 4$) έχουν συμπληρωματικά μειονεκτήματα, η μεν $\ell = 1$ ότι πρακτικά αδιαφορεί για εξαιρετικά μεγάλες τιμές $|\tilde{\Phi} - \Phi|$ συγκεντρωμένες σε πολύ μικρό όγκο, η δε $\ell = \infty$ ότι ενδιαφέρεται μόνο για τις μεγάλες τιμές $|\tilde{\Phi} - \Phi|$. Η τιμή $\ell = 2$, ως ενδιάμεση, έχει σε μικρότερο βαθμό τα μειονεκτήματα, αλλά και τα πλεονεκτήματα των δύο άκρων, και επιπλέον επιδέχεται εύκολο αναλυτικό χειρισμό.

Επειδή, βέβαια, το δυναμικό Φ είναι άγνωστο, δεν είναι δυνατόν να επιδιωχθεί η ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος $\int_V |\tilde{\Phi} - \Phi|^2 dV$. Όμως, η σχέση (6.3-28) μπορεί να γενικευθεί, ώστε να δίνει την απόσταση όχι απλώς μεταξύ των συναρτήσεων $\tilde{\Phi}$ και Φ , αλλά γενικότερα μεταξύ κάποιων «συναρτησιακών» $F(\tilde{\Phi})$ και $F(\Phi)$ που εξαρτώνται από τις συναρτήσεις αυτές. Συναρτησιακά F που η απόστασή τους μπορεί να ελαχιστοποιηθεί (και η ονομασία της αντίστοιχης μεθόδου) είναι:

- ο Η Λαπλασιανή του δυναμικού, $F(\Phi) = \nabla^2 \Phi$, οπότε θα ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα:

$$\int_V (\nabla^2 \tilde{\Phi} - \nabla^2 \Phi)^2 dV = \int_V (\nabla^2 \tilde{\Phi})^2 dV = \min \quad (\text{μέθοδος Galerkin}), \quad (6.3-29)$$

όπου βέβαια $\nabla^2 \Phi = 0$ για το δυναμικό.

- ο Η κλίση του δυναμικού, $F(\Phi) = \nabla \Phi$, και τώρα η ποσότητα προς ελαχιστοποίηση είναι η:

$$\int_V |\nabla \tilde{\Phi} - \nabla \Phi|^2 dV = \int_V |\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}|^2 dV = \min \quad (\text{μέθοδος Rayleigh-Ritz}). \quad (6.3-30)$$

Μέθοδος Galerkin: Η απλούστερη εννοιολογικά επιλογή είναι να αναζητηθούν προσεγγίσεις $\tilde{\Phi}$ με τη μορφή του αθροίσματος (6.3-25), τέτοιες ώστε κατά το δυνατόν να μηδενίζεται η Λαπλασιανή τους, με την έννοια του ολοκληρώματός του τετραγώνου της, όπως στη σχέση (6.3-29). Με $\tilde{\Phi} = f_0 + \sum_n \alpha_n f_n$, όπως στη σχέση (6.3-25), είναι:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla^2 \tilde{\Phi})^2 dV &= \int_V \left[\nabla^2 f_0 + \sum_n (\alpha_n \nabla^2 f_n) \right]^2 dV \\ &= \int_V (\nabla^2 f_0)^2 dV + 2 \sum_n \alpha_n \int_V (\nabla^2 f_0)(\nabla^2 f_n) dV \\ &\quad + \sum_{n,n'} \alpha_n \alpha_{n'} \int_V (\nabla^2 f_n)(\nabla^2 f_{n'}) dV. \end{aligned} \quad (6.3-31)$$

Πρόκειται για συνάρτηση των συντελεστών α_n . Ακρότατο που διαπιστώνεται ότι είναι ελάχιστο έχει, όταν οι παράγωγοι ως προς κάθε α_n είναι ίσες με μηδέν. Μηδενίζοντας την παράγωγο της σχέσης (6.3-31) ως προς το αντιπροσωπευτικό α_n , προκύπτει το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\sum_{n'} \alpha_{n'} \int_V (\nabla^2 f_n)(\nabla^2 f_{n'}) dV = - \int_V (\nabla^2 f_n)(\nabla^2 f_0) dV. \quad (6.3-32)$$

Αυτοτελείς εξισώσεις για κάθε α_n σχηματίζονται, αν οι συναρτήσεις f_n (με $n \neq 0$) έχουν επιλεγεί με πρόσθετο κριτήριο να ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας:

$$\int_V (\nabla^2 f_n)(\nabla^2 f_{n'}) dV = 0, \quad \text{όταν } n' \neq n. \quad (6.3-33)$$

Τότε, στο άθροισμα της σχέσης (6.3-31) μόνο ο όρος με $n' = n$ είναι μη μηδενικός, οπότε οι συντελεστές είναι απλούστατα ίσοι με:

$$\alpha_n = - \frac{\int_V (\nabla^2 f_n)(\nabla^2 f_0) dV}{\int_V (\nabla^2 f_n)^2 dV}. \quad (6.3-34)$$

Μέθοδος Rayleigh-Ritz: Σύμφωνα με την αρχή ελάχιστης ενέργειας, βλ. και σχέσεις (E.1-25) και (E.1-28) στο Παράρτημα E.1.3, για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις, άρα και για την προσέγγιση $\tilde{\Phi}$ και το δυναμικό Φ , ισχύει:

$$\int_V |\nabla \tilde{\Phi}|^2 dV - \int_V |\nabla \Phi|^2 dV = \int_V |\nabla(\tilde{\Phi} - \Phi)|^2 dV \geq 0, \quad (6.3-35)$$

όταν οι $\tilde{\Phi}$ και Φ ικανοποιούν την ίδια οριακή συνθήκη *Dirichlet* σε ολόκληρη την επιφάνεια S , με τις ίδιες οριακές τιμές, και για το δυναμικό είναι $\nabla^2 \Phi = 0$ στο χώρο V . Η ισότητα συναντάται μόνο όταν $\tilde{\Phi} = \Phi$. Συνεπώς, μπορεί να θεωρηθεί ότι όσο πιο μικρό είναι το ολοκλήρωμα $\int_V |\nabla(\tilde{\Phi} - \Phi)|^2 dV$, άρα και το $\int_V |\nabla \tilde{\Phi}|^2 dV$ (αφού το δεύτερο ολοκλήρωμα έχει τιμή ανεξάρτητη από την όποια επιλογή για τη συνάρτηση $\tilde{\Phi}$), τόσο καλύτερη προσέγγιση για το δυναμικό Φ αντιπροσωπεύει, τότε, αυτή η συνάρτηση $\tilde{\Phi}$. Με $\tilde{\Phi} = f_0 + \sum_n \alpha_n f_n$, όπως ορίστηκε προηγουμένως, είναι:

$$\begin{aligned} \int_V |\nabla \tilde{\Phi}|^2 dV &= \int_V \left[\nabla f_0 + \sum_n (\alpha_n \nabla f_n) \right] \cdot \left[\nabla f_0 + \sum_{n'} (\alpha_{n'} \nabla f_{n'}) \right] dV \\ &= \int_V |\nabla f_0|^2 dV + 2 \sum_n \left(\alpha_n \int_V (\nabla f_0) \cdot (\nabla f_n) dV \right) \\ &\quad + \sum_{n,n'} \alpha_n \alpha_{n'} \int_V (\nabla f_n) \cdot (\nabla f_{n'}) dV. \end{aligned} \quad (6.3-36)$$

Για να είναι αυτή η έκφραση ελάχιστη, πρέπει οι μερικές παράγωγοι ως προς κάθε α_n να είναι ίσες με μηδέν. Έτσι, προκύπτει το γραμμικό σύστημα, με αγνώστους τα α_n :

$$\sum_{n'} \left[\alpha_{n'} \int_V (\nabla f_n) \cdot (\nabla f_{n'}) dV \right] = - \int_V (\nabla f_n) \cdot (\nabla f_0) dV. \quad (6.3-37)$$

Η επίλυση γραμμικού συστήματος μπορεί να αποφευχθεί, αν έχουν επιλεγεί οι συναρτήσεις f_n (εκτός της f_0) με την πρόσθετη ιδιότητα να ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας:

$$\int_V (\nabla f_n) \cdot (\nabla f_{n'}) dV = 0, \quad \text{όταν } n' \neq n. \quad (6.3-38)$$

Τότε, οι συντελεστές α_n είναι:

$$\alpha_n = - \frac{\int_V (\nabla f_n) \cdot (\nabla f_0) dV}{\int_V |\nabla f_n|^2 dV}. \quad (6.3-39)$$

Σύνοψη: Στις δύο μεθόδους που παρουσιάστηκαν, ως προσέγγιση του δυναμικού λαμβάνεται το άθροισμα (6.3-25), με τις συναρτήσεις f_0 και f_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τις σχέσεις (6.3-26) ή/και (6.3-27) στο όριο. Ανάλογα με τη μέθοδο:

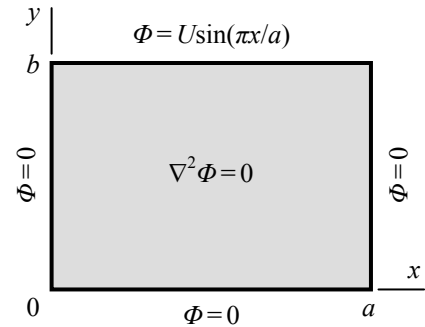
- ο Στη μέθοδο *Galerkin*, οι συναρτήσεις f_n (με $n \neq 1$) επιλέγονται, ώστε να ικανοποιούν επιπλέον τη συνθήκη ορθογωνιότητας (6.3-33), και οι συντελεστές α_n προσδιορίζονται από τη σχέση (6.3-34), ενώ χωρίς ορθογωνιότητα προσδιορίζονται από το σύστημα (6.3-32).
- ο Στη μέθοδο *Rayleigh-Ritz*, για τις συναρτήσεις f_n (με $n \neq 1$) η συνθήκη ορθογωνιότητας δίδεται από τη σχέση (6.3-38), και τότε οι συντελεστές α_n προσδιορίζονται από τη σχέση (6.3-39), ενώ αλλιώς προσδιορίζονται από το σύστημα εξισώσεων (6.3-37).

Οι σχέσεις έχουν διατυπωθεί για τη γενική περίπτωση τριδιάστατων διατάξεων. Όταν η διάταξη είναι διδιάστατη, με $\partial/\partial z = 0$, τότε φυσικά οι συναρτήσεις f_0 και f_n εξαρτώνται από δύο συντεταγμένες, οπότε τα παραπάνω ολοκληρώματα $\int_V(\dots)dV$ αντικαθίστανται από ολοκληρώματα $\int_S(\dots)dS$ στη διατομή της διάταξης. Το **παράδ. 6.3-4** παρουσιάζει την επίλυση μιας τέτοιας διδιάστατης διάταξης και με τις δύο μεθόδους.

Ασυνέχεια στις οριακές συνθήκες: Αν το όριο έχει ασυνέχεια στις οριακές συνθήκες, όπως αν σε κάποια θέση \mathbf{r}_{S0} του ορίου είναι $\Phi(\mathbf{r} = \mathbf{r}_{S0}^-) = U_-$ και $\Phi(\mathbf{r} = \mathbf{r}_{S0}^+) = U_+ \neq U_-$, τότε η αναζήτηση συναρτήσεων f_0 συναντά δυσκολίες, επειδή οι συνηθισμένες συναρτήσεις είναι συνεχείς. Η διέξοδος είναι να εφαρμοσθεί επαλληλία $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, με $\nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0$ ώστε να είναι $\nabla^2 \Phi = 0$. Ο όρος Φ_1 επιλέγεται να εκδηλώνει την προκαθορισμένη ασυνέχεια στη θέση \mathbf{r}_{S0}^\pm , αδιαφορώντας για τις τιμές του στο υπόλοιπο όριο, ενώ ο όρος Φ_2 να ικανοποιεί τέτοιες οριακές συνθήκες, ώστε με το ήδη επιλεγμένο Φ_1 το άθροισμα $\Phi_1 + \Phi_2$ να ικανοποιεί τις απαιτήσεις για την αρχική συνάρτηση Φ . Για τη συνηθισμένη βηματική ασυνέχεια σε γωνία α , είναι χρήσιμη η συνάρτηση $\Phi_1 = U_- + (U_+ - U_-)\varphi/\alpha$, βλ. παράγρ. 6.3.2 και **Σχήμα 6.3-6**, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν $\alpha = \pi/2$ και $\alpha = \pi$ (βλ. και **Σχήμα 6.3-7**). Το **παράδ. 6.3-5** παρουσιάζει τη σχετική διαδικασία για την απομάκρυνση της ασυνέχειας.

Παράδειγμα 6.3-4: Ζητείται το δυναμικό $\Phi(x,y)$ στο εσωτερικό της διδιάστατης διάταξης του σχήματος.

Επίλυση: Και για τις δύο μεθόδους στο άθροισμα $\tilde{\Phi} = f_0 + \sum_n \alpha_n f_n$ αρχικά γίνεται η επιλογή $f_0 = U(y/b)\sin(\pi x/a)$. Κριτήριο για την επιλογή υπήρξε να ισχύει $f_0(x=0, y) = f_0(x=a, y) = f_0(x, y=0) = 0$ και $f_0(x, y=b) = U\sin(\pi x/a)$, να ικανοποιεί η συνάρτηση f_0 παντού τις οριακές συνθήκες



του ζητούμενου δυναμικού Φ . Ακολούθως, για κάθε n η συνάρτηση $f_n = \sin(\pi x/a)\sin(n\pi y/b)$ αποτελεί πρόσφορη επιλογή, επειδή ικανοποιούνται οι ομογενείς εκφράσεις των αρχικών οριακών συνθηκών, $f_n(x=0, y) = f_n(x=a, y) = f_n(x, y=0) = f_n(x, y=b) = 0$. Όπως θα δειχθεί στην οικεία ενότητα της επίλυσης, οι συναρτήσεις f_n ικανοποιούν τις απαιτούμενες σχέσεις ορθογωνιότητας.

Μέθοδος Galerkin: Για τον έλεγχο της ορθογωνιότητας χρειάζονται, σύμφωνα με τη σχέση (6.3-33), οι Λαπλασιανές των f_n :

$$\nabla^2 f_n = - \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(n \frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(n\pi \frac{y}{b} \right).$$

Κατά την ολοκλήρωση ως προς y του γινομένου $(\nabla^2 f_n)(\nabla^2 f_{n'})$ εμφανίζεται το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^b dy \sin \left(n\pi \frac{y}{b} \right) \sin \left(n'\pi \frac{y}{b} \right) = \frac{1}{2} \int_0^b dy \cos \left((n-n')\pi \frac{y}{b} \right) - \frac{1}{2} \int_0^b dy \cos \left((n+n')\pi \frac{y}{b} \right),$$

που, εν γένει, είναι ίσο με μηδέν, επειδή $\sin 0 = 0$ και $\sin(\kappa\pi) = 0$, όπου $\kappa = (n \mp n')$, εκτός από το ενδεχόμενο $n - n' = 0$, κατά το οποίο ο πρώτος όρος δεν μηδενίζεται, αλλά είναι ίσος με $b/2$. Συνεπώς, πράγματι, οι συναρτήσεις f_n ικανοποιούν την ορθογωνιότητα της σχέσης (6.3-33).

Για τον προσδιορισμό των συντελεστών α_n από τη σχέση (6.3-34), στον αριθμητή χρειάζεται η Λαπλασιανή της f_0 :

$$\nabla^2 f_0 = -U \frac{y}{b} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right).$$

Το ολοκλήρωμα στον αριθμητή της σχέσης (6.3-34), με μήκος L στη διεύθυνση z , είναι:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla^2 f_0)(\nabla^2 f_n) dV &= \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(n \frac{\pi}{a} \right)^2 \right] UL \int_0^b \sin \left(n\pi \frac{y}{b} \right) \frac{y dy}{b} \int_0^a \sin^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) dx \\ &= \dots = (-1)^n \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b} \right)^2 \right] U \frac{ab}{2n\pi} L, \end{aligned}$$

ενώ το ολοκλήρωμα στον παρονομαστή της ίδιας σχέσης (6.3-34) είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla^2 f_n)^2 dV &= \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(n \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^2 L \int_0^a \sin^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) dx \int_0^b \sin^2 \left(n \pi \frac{y}{b} \right) dy \\ &= -\frac{ab}{4} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(n \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^2 L. \end{aligned}$$

Το πηλίκο των δύο τελευταίων εκφράσεων δίνει τους συντελεστές α_n :

$$\alpha_n = -\frac{\int_V (\nabla^2 f_n)(\nabla^2 f_0) dV}{\int_V (\nabla^2 f_n)^2 dV} = \frac{2(-1)^n U}{\pi n \left[1 + (na/b)^2 \right]},$$

και το δυναμικό Φ στη μέθοδο *Galerkin*, και με τις συγκεκριμένες επιλογές για τις συναρτήσεις f_0 και f_n , προσεγγίζεται από τη συνάρτηση:

$$\tilde{\Phi} = U \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \left[\frac{y}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^n \sin(n\pi y/b)}{n(1+n^2 a^2/b^2)} \right],$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όσες και όποιες τιμές έχουν επιλεγεί για τον θετικό ακέραιο αριθμό n , που μπορεί να είναι και το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

Μέθοδος *Rayleigh-Ritz*: Τώρα χρειάζονται οι ποσότητες:

$$\nabla f_0 = \mathbf{i}_x \pi U \frac{y}{ab} \cos \left(\pi \frac{x}{a} \right) + \mathbf{i}_y \frac{U}{b} \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right), \text{ και}$$

$$\nabla f_n = \mathbf{i}_x \frac{\pi}{a} \cos \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(n \pi \frac{y}{b} \right) + \mathbf{i}_y n \frac{\pi}{b} \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \cos \left(n \pi \frac{y}{b} \right),$$

οπότε για τον έλεγχο της ορθογωνιότητας, με την έννοια τώρα της σχέσης (6.3-38), με μήκος L στη διεύθυνση z , προκύπτει ότι για $n' \neq n$ είναι:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla f_n) \cdot (\nabla f_{n'}) dV &= L \int_0^a dx \int_0^b dy \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(n \pi \frac{y}{b} \right) \sin \left(n' \pi \frac{y}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(n \frac{\pi}{b} \right)^2 \sin^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) \cos \left(n \pi \frac{y}{b} \right) \cos \left(n' \pi \frac{y}{b} \right) \right]. \end{aligned}$$

Για $n' \neq n$ η ολοκλήρωση ως προς y δίνει μηδενικό αποτέλεσμα, για παρόμοιους λόγους όπως στην αντίστοιχη ολοκλήρωση για τη μέθοδο *Galerkin*. Διαπιστώθηκε, έτσι, ότι ισχύει η επιθυμητή συνθήκη ορθογωνιότητας. Για τους συντελεστές α_n , τώρα, εμπλέκονται οι ποσότητες:

$$\int_V |\nabla f_n|^2 dV = \dots = \frac{\pi^2}{4} L \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right),$$

στον παρονομαστή της σχέσης (6.3-39), ενώ στον αριθμητή της ίδιας σχέσης είναι:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla f_n) \cdot (\nabla f_0) dV &= L \frac{U}{b} \int_0^a dx \int_0^b dy \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) y \sin \left(n\pi \frac{y}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + n \frac{\pi}{b} \sin^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) \cos \left(n\pi \frac{y}{b} \right) \right] \\ &= \dots = -\frac{\pi UL}{2} \frac{b}{a} \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Οι συντελεστές α_n προσδιορίζονται από το πηλίκο των δύο τελευταίων ποσοτήτων και είναι ίσοι με :

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} U \frac{(-1)^n}{n(1+n^2 a^2/b^2)}.$$

Προκύπτουν οι ίδιες τιμές για τους συντελεστές α_n , όπως και στη μέθοδο *Galerkin*, οπότε και το δυναμικό Φ προσεγγίζεται από την ίδια συνάρτηση, όπως προηγουμένως:

$$\tilde{\Phi} = U \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \left[\frac{y}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^n \sin(n\pi y/b)}{n(1+n^2 a^2/b^2)} \right].$$

Για τους όρους που συμμετέχουν στην άθροιση, ισχύουν τα ίδια όπως στη μέθοδο *Galerkin*.

Σχόλια:

- Με τη διαδικασία του χωρισμού μεταβλητών (βλ. παράγραφο 7.2.2) η λύση προσδιορίζεται πρακτικά αμέσως:

$$\Phi(x, y) = \frac{U}{\sinh \left(\pi \frac{b}{a} \right)} \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sinh \left(\pi \frac{y}{a} \right),$$

χωρίς ανάγκη για καμία προσέγγιση. Η προσέγγιση $\tilde{\Phi}$ ταυτίζεται με την ακριβή λύση $\Phi(x, y)$, αν ληφθούν όλοι οι φυσικοί ακέραιοι n στο άθροισμα, που τότε αντιπροσωπεύει σειρά. Η ισότητα $\tilde{\Phi} = \Phi$ οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις f_n περιέχουν την εξάρτηση από το y μόνο μέσω των συναρτήσεων $\sin(n\pi y/b)$, που αποτελούν πλήρη βάση, βλ. παράγραφο 7.2.3. Αλγεβρικά, η ισότητα φαίνεται εύκολα, χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές σειρές:

$$\zeta = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\zeta) \quad \text{και} \quad \sinh \zeta = \frac{2}{\pi} \sinh \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2} \sin(n\zeta).$$

Το πραγματικό ζητούμενο, βέβαια, δεν είναι να προσδιορισθεί η λύση, αλλά να επιδειχθεί η διαδικασία για τις μεθόδους *Galerkin* και *Rayleigh-Ritz*.

- Για τη διαδικασία δεν ήταν καθοριστικό το γεγονός ότι η οριακή συνθήκη $\Phi(x, y=b)$ εμπλέκει τη συνάρτηση $\sin(\pi x/a)$. Η διαδικασία θα ήταν πανομοιότυπη αν η οριακή συνθήκη είχε γενικότερα τη μορφή $\Phi(x, y=b) = Ug(x)$, με οποιαδήποτε συνάρτηση $g(x)$, τέτοια όμως, ώστε να είναι $g(x=0) = g(x=a) = 0$ και να μην υπάρχει ασυνέχεια στις κορυφές. Οι πρόσφορες επιλογές θα ήταν, τότε, οι συναρτήσεις $f_0 = U(y/b)g(x)$ και $f_n = g(x)\sin(n\pi y/b)$. Βέβαια, τα ολοκληρώματα δεν θα εκφράζονται εν γένει με κλειστή μορφή, πάντοτε, όμως, υπάρχει η δυνατότητα για αριθμητικό προσδιορισμό τους.
- Στη συνάρτηση f_0 , αντί του όρου (y/b) θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε συνάρτηση $h(y)$, με $h(y=0) = 0$ και $h(y=b) = 1$, όπως η $h(y) = (y/b)^\ell$. Ανατρέχοντας, όμως, στην επίλυση, φαίνεται αμέσως ότι η επιλογή με $\ell = 1$ είναι η πιο εξυπηρετική, επειδή έχει σταθερή την πρώτη παράγωγο και μηδενική τη δεύτερη, απλοποιώντας έτσι σημαντικά τις ολοκληρωτέες παραστάσεις.
- Για την αναζήτηση συναρτήσεων f_n , που ικανοποιούν την οικεία σχέση ορθογωνιότητας, χρήσιμες είναι αυτές που χρησιμοποιούνται στο χωρισμό μεταβλητών και που παρουσιάζονται γενικότερα στο Κεφάλαιο 7, ανάλογα με τη μορφολογία της διάταξης.
- Η πορεία που ακολουθήθηκε στην παρουσίαση της επίλυσης (πρώτα η επιλογή κάποιων f_n και ύστερα η διερεύνηση, αν ικανοποιείται η ορθογωνιότητα) έγινε μόνο για λόγους οικονομίας στην παρουσίαση. Η κανονική πορεία αρχίζει με επιλογή των ποσοτήτων που εμπλέκονται στην ορθογωνιότητα, των $\nabla^2 f_n$ ή των ∇f_n . Αυτές οι ποσότητες επιλέγονται, ώστε να ικανοποιούν τη σχέση (6.3-33) ή (6.3-38), και ακολούθως σχηματίζονται οι συναρτήσεις f_n , με ολοκλήρωση των επιλογών $\nabla^2 f_n$ ή ∇f_n , με τις σταθερές ολοκλήρωσης καθοριζόμενες από τις απαιτήσεις μηδενισμού στα όρια.
- Οι συναρτήσεις f_0 και f_n εκφράστηκαν ως γινόμενα $X(x)Y(y)$. Συνήθως τέτοιες επιλογές διευκολύνουν στην περαιτέρω ανάλυση.
- Μολονότι έχουν σημειωθεί αρκετές ομοιότητες με το χωρισμό μεταβλητών (πλήρης βάση, ορθογωνιότητα) και μολονότι οι συναρτήσεις $X(x)$ και $Y(y)$ στις συναρτήσεις f_0 και f_n του παραδείγματος συναντώνται στο χωρισμό μεταβλητών, υπάρχει θεμελιώδης διαφορά. Στο χωρισμό μεταβλητών είναι $\Phi = \sum_n \alpha_n X_n(x)Y_n(y)$ με $\nabla^2[X_n(x)Y_n(y)] = 0$ και αναζητώνται οι συνδυασμοί που ικανοποιούν και τις οριακές συνθήκες, ενώ εδώ το άθροισμα $\tilde{\Phi} = f_0 + \sum_n \alpha_n f_n$ ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες και αναζητώνται οι συνδυασμοί που ικανοποιούν και την εξίσωση του Laplace, $\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0$, στο μέτρο του εφικτού, δηλαδή με την έννοια της ελαχιστοποίησης κάποιας κατάλληλης ποσότητας.

Παράδειγμα 6.3-5: Ζητείται το δυναμικό $\Phi(x,y)$ στο εσωτερικό της διδιάστατης διάταξης του προηγούμενου παραδείγματος, αλλά με την οριακή συνθήκη $\Phi = U(1-x/a)$ στο όριο $y=b$.

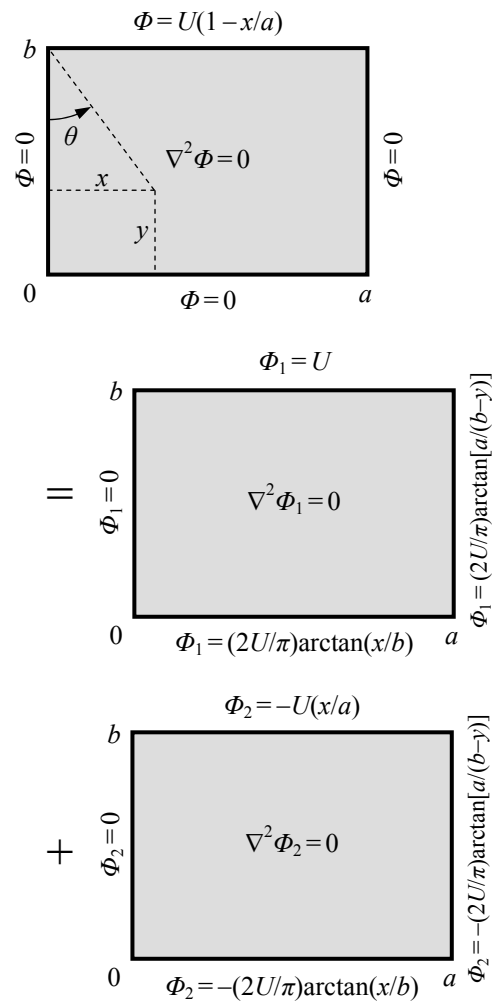
Επίλυση: Σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, τώρα η οριακή συνθήκη $\Phi|_{y=b} = U(1-x/a)$, προκαλεί ασυνέχεια στην κορυφή $x=0, y=b$: Είναι $\Phi(x=0, y \rightarrow b) = 0$, ενώ αντίθετα $\Phi(x \rightarrow 0, y=b) = U \neq 0$. Η διέξοδος σε τέτοιες περιπτώσεις είναι να εφαρμοσθεί επαλληλία, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, με την πρώτη συνάρτηση να απορροφά την ασυνέχεια. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, τέτοια συνάρτηση είναι η επιλογή $\Phi_1 = (2/\pi)U\theta$, που επειδή $\tan \theta = x/(b-y)$, γράφεται αμέσως ως συνάρτηση των (x,y) , $\Phi_1 = (2/\pi)U \arctan[x/(b-y)]$.

Η συνάρτηση Φ_1 ικανοποιεί $\nabla^2 \Phi_1 = 0$ στο εσωτερικό, ενώ σε κάθε πλευρά του ορίου έχει τις τιμές που προκύπτουν θέτοντας στη συνάρτηση $\Phi_1(x,y)$ διαδοχικά τις τιμές $x=0, x=a, y=0$ και $y=b$. Έτσι, προσδιορίζεται το πρόβλημα οριακών τιμών για τον όρο Φ_2 : Να είναι $\nabla^2 \Phi_2 = 0$ στο εσωτερικό και στο όριο να έχει τέτοιες τιμές, ώστε το άθροισμα $\Phi_1 + \Phi_2$ να αναπαράγει τις αρχικές οριακές συνθήκες, αυτές για το δυναμικό Φ .

Οι οριακές συνθήκες για το Φ_2 είναι απαλλαγμένες από ασυνέχειες. Για την προσεγγιστική επίλυση $\tilde{\Phi}_2 = f_{20} + \sum_n \alpha_n f_{2n}$ δεν τροποποιείται τίποτα σε σχέση με το **παράδ. 6.3-4** ως προς τις συναρτήσεις f_{2n} , οι οποίες καλούνται στο ίδιο σχήμα να ικανοποιούν ίδιου τύπου ομογενείς οριακές συνθήκες και ορθογωνιότητα, συνεπώς η επιλογή $f_{2n} = \sin(\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$ παραμένει κατάλληλη. Η συνάρτηση f_{20} , η οποία καλείται να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες της Φ_2 , μπορεί να σχηματισθεί με οποιεσδήποτε συναρτήσεις g_ℓ , τέτοιες ώστε $g_\ell(0) = 0$, ως άθροισμα στο οποίο κάθε όρος ικανοποιεί διαδοχικά την οριακή συνθήκη σε κάθε πλευρά, χωρίς να καταστρέφει τη συνθήκη της προηγούμενης, όπως επιδεικνύεται από τους πρώτους όρους:

$$f_{02}(x,y) = -\frac{2U}{\pi} \left[\frac{g_1(y-b)}{g_1(-b)} \arctan \frac{x}{b} + \frac{g_2(x)}{g_2(a)} \left(\arctan \frac{a}{b-y} - \frac{g_1(y-b)}{g_1(-b)} \arctan \frac{a}{b} \right) + \dots \right].$$

Η συνέχιση της διαδικασίας (υπολογισμός του ∇f_{20} ή $\nabla^2 f_{20}$ κλπ.) προφανώς παρέλκει.



6.3.4 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Στη μεθοδο αυτή, όπως και στις μεθόδους της προηγούμενης παραγράφου, το δυναμικό εκφράζεται ως συνάρτηση $\tilde{\Phi}$, της οποίας οι παραμετροι πάλι προσδιορίζονται από την ελαχιστοποίηση κάποιας θετικής ποσότητας. Η διαφορά έγκειται στον τρόπο σχηματισμού της συνάρτησης $\tilde{\Phi}$, τρόπο που έχει μάλιστα ως αποτέλεσμα να αποτελούν οι παράμετροι τις προσεγγίσεις για τις τιμές του δυναμικού στους κόμβους ενός πλέγματος. Δηλαδή, τώρα, η συνάρτηση $\tilde{\Phi}$ έχει τη μορφή $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}; \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \dots)$.

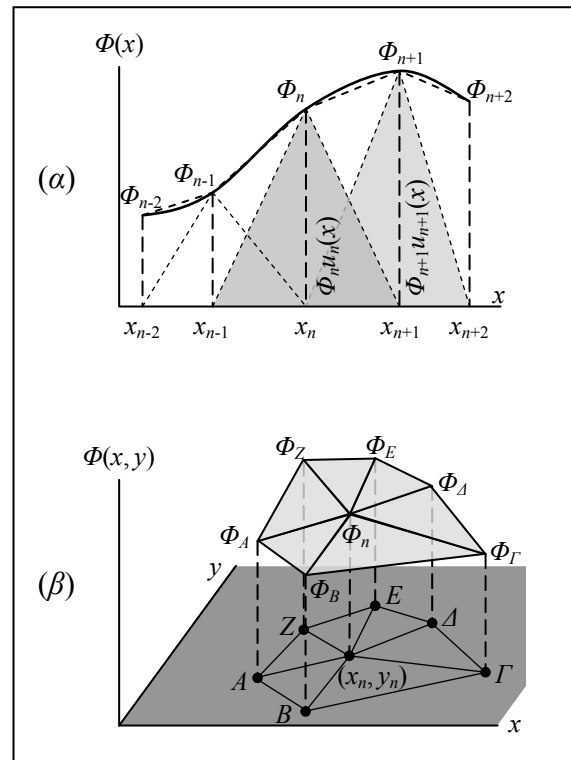
Για να περιγραφεί με ποιο τρόπο σχηματίζεται η συνάρτηση $\tilde{\Phi}$, ας σημειωθεί πρώτα, ότι μία καμπύλη, η γραφική παράσταση μιας μονοδιάστατης συνάρτησης $\Phi(x)$, μπορεί να προσεγγισθεί από τεθλασμένη γραμμή (διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα), τέτοια ώστε στη θέση x_n να έχει την τιμή Φ_n , βλ. **Σχήμα 6.3-13α**. Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών (μία επιφάνεια) μπορεί να προσεγγισθεί από διαδοχικές στοιχειώδεις τριγωνικές επιφάνειες, όπως η $\Phi(x, y)$ στο **Σχήμα 6.3-13β**.

Σε μία διάσταση, η συνάρτηση που σχηματίζεται έχει τις τιμές Φ_n σε κάθε κόμβο του μονοδιάστατου πλέγματος και μεταξύ διαδοχικών κόμβων (στο μονοδιάστατο στοιχείο j με μήκος $h_j = x_{n+1} - x_n$, που δεν υπάρχει κανένας λόγος να είναι σταθερό) ορίζεται με γραμμική παρεμβολή. Μολονότι το αποτέλεσμα της παρεμβολής γράφεται αμέσως ως $\Phi(x_n < x < x_{n+1}) = \Phi_n + [(\Phi_{n+1} - \Phi_n)/(x_{n+1} - x_n)](x - x_n)$, για την επικείμενη επέκταση σε δύο και τρεις διαστάσεις είναι προτιμότερη για το $\Phi_j(x) = \Phi(x_n < x < x_{n+1})$ η γενικότερη μορφή:

$$\Phi_j(x) = P_j + Q_j x, \quad (6.3-40)$$

όπου οι συντελεστές P_j και Q_j προσδιορίζονται από την επίλυση του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} P_j + Q_j x_n &= \Phi_n, \\ P_j + Q_j x_{n+1} &= \Phi_{n+1}. \end{aligned} \quad (6.3-41)$$



Σχήμα 6.3-13

Σε δύο διαστάσεις, η επέκταση του μονοδιάστατου πλέγματος έχει τη μορφή πλέγματος από τριγωνικά στοιχεία (τα οποία δεν υπάρχει κανένας λόγος να έχουν όλα το ίδιο σχήμα ή μέγεθος), με τη βοήθεια των οποίων καλύπτεται ολόκληρη η περιοχή που ενδιαφέρει. Στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο j , με κορυφές στους κόμβους n , m και k , στις κορυφές η συνάρτηση $\Phi(x,y)$ έχει τις τιμές Φ_n , Φ_m και Φ_k και ενδιάμεσα προσεγγίζεται από την εξίσωση επίπεδης επιφάνειας:

$$\Phi_j(x,y) = P_j + Q_j x + R_j y, \quad (6.3-42)$$

όπου οι συντελεστές P_j , Q_j και R_j προσδιορίζονται πάλι από ένα γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} P_j + Q_j x_n + R_j y_n &= \Phi_n, \\ P_j + Q_j x_m + R_j y_m &= \Phi_m, \\ P_j + Q_j x_k + R_j y_k &= \Phi_k. \end{aligned} \quad (6.3-43)$$

Η επέκταση σε τρεις διαστάσεις αναφέρεται σε πλέγμα, του οποίου τα στοιχεία είναι τετραέδρα (τριγωνικές πυραμίδες), τα οποία καλύπτουν το χώρο που ενδιαφέρει. Στις κορυφές n , m , k και ℓ του τετραέδρου j το δυναμικό έχει τις τιμές Φ_n , Φ_m , Φ_k και Φ_ℓ και στο εσωτερικό του τετραέδρου η προσέγγιση γίνεται από γραμμική σχέση, όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, ανεξάρτητα από το ότι τώρα δεν υπάρχει δυνατότητα για γεωμετρική αναπαράσταση:

$$\Phi_j(x,y,z) = P_j + Q_j x + R_j y + S_j z, \quad (6.3-44)$$

όπου οι συντελεστές P_j , Q_j , R_j και S_j προσδιορίζονται πάλι από ένα γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} P_j + Q_j x_n + R_j y_n + S_j z_n &= \Phi_n, \\ P_j + Q_j x_m + R_j y_m + S_j z_m &= \Phi_m, \\ P_j + Q_j x_k + R_j y_k + S_j z_k &= \Phi_k, \\ P_j + Q_j x_\ell + R_j y_\ell + S_j z_\ell &= \Phi_\ell. \end{aligned} \quad (6.3-45)$$

Παραμένοντας σε τρεις διαστάσεις, με προφανή την απλοποίηση σε δύο (και αδιάφορη τη μονοδιάστατη περίπτωση), η αντιστροφή του συστήματος (6.3-45) εκφράζει τους συντελεστές ως γραμμική σχέση των δυναμικών στους κόμβους, συνεπώς και η προσέγγιση Φ_j για το δυναμικό σε κάθε στοιχείο είναι γραμμική σχέση των τιμών του δυναμικού στους κόμβους. Και επειδή η περιοχή που ενδιαφέρει αποτελείται από τα τετραεδρικά στοιχεία, μέσω των συναρτήσεων Φ_j προσεγγίζεται το δυναμικό $\Phi(x,y,z)$ σε ολόκληρη την περιοχή, έτσι ώστε:

- Σε κάθε κόμβο η προσέγγιση είναι να ακριβής και να ταυτίζεται με το δυναμικό στη θέση του κόμβου,

- ο Σε κάθε σημείο του υπόλοιπου χώρου η προσέγγιση να είναι γραμμική σχέση των τιμών που έχει το δυναμικό στις κορυφές του τετραέδρου, στο οποίο ανήκει το σημείο.

Η προσέγγιση αυτή μπορεί να γραφεί ως $\tilde{\Phi}(x, y, z; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_m, \dots, \Phi_n, \dots)$, με παραμέτρους τις τιμές του δυναμικού σε όλους τους κόμβους. Με την έννοια αυτή, αποτελεί προσέγγιση που προϋποθέτει ότι η τιμή του δυναμικού είναι γνωστή σε κάθε κόμβο. Φυσικά, γνωστή είναι η τιμή μόνο στους κόμβους του ορίου με συνθήκη *Dirichlet*. Ουσιαστικά, έχει σχηματισθεί μια συνάρτηση $\tilde{\Phi}(x, y, z; \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \dots, \tilde{\Phi}_m, \dots, \tilde{\Phi}_n, \dots)$ με παραμέτρους τις εκτιμήσεις $\tilde{\Phi}_n$ για τις τιμές του δυναμικού στους κόμβους. Ενωσιολογικά, η σχέση αυτή δεν έχει καμία διαφορά από τη σχέση $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}; a_1, a_2, a_3, \dots)$ της προηγούμενης παραγράφου 6.3.3. Απλά, εκείνο που εκεί ήταν κάποια παράμετρος a_n (συντελεστής κάποιας συνάρτησης f_n), εδώ εξειδικεύεται στην εκτίμηση $\tilde{\Phi}_n$ για την τιμή του δυναμικού στον αντίστοιχο κόμβο.

Για τις μεθόδους *Galerkin* ή *Rayleigh-Ritz*, η συνάρτηση $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}; a_1, a_2, a_3, \dots)$ γράφηκε ως άθροισμα, $\tilde{\Phi} = f_0 + \sum_n a_n f_n$. Αυτό έγινε, ώστε η εφαρμογή ουσιαστικά της μεθόδου των ελάχιστων τετραγώνων να σχηματίζει γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές a_n . Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αυτό είναι περιττό, επειδή ήδη από την κατασκευή της η συνάρτηση $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}; \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \dots)$ είναι γραμμική σχέση για τις παραμέτρους $\tilde{\Phi}_n$.

Παρένθετα, επειδή δεν ενδιαφέρει άμεσα, ας σημειωθεί ότι είναι δυνατόν να θεωρηθεί και η συνάρτηση $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}; \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \dots)$ ως άθροισμα $f_0 + \sum_n a_n f_n$. Αυτό γίνεται εισάγοντας τις συναρτήσεις $f_n \rightarrow u_n(\mathbf{r})$, από τις οποίες κάθε μία ορίζεται να έχει την τιμή της μονάδας στον αντίστοιχο κόμβο, δηλαδή να είναι $u_n(\mathbf{r} = \mathbf{r}_n) = 1$, να μεταβάλλεται γραμμικά γύρω από τον κόμβο μέχρι μηδενισμού της στους λοιπούς κόμβους των στοιχείων που περιέχουν και τον κόμβο, και να είναι ίση με μηδέν παντού αλλού. Αν πολλαπλασιασθούν με την τιμή του δυναμικού στον αντίστοιχο κόμβο, τότε σε μία διάσταση η γραφική παράσταση των γινομένων $\Phi_n u_n$ έχει τριγωνική μορφή, με βάση την ένωση των δύο παρακειμένων στοιχείων και ύψος την τιμή του δυναμικού, όπως παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.3-13α** για τους κόμβους n και $n+1$. Σε δύο διαστάσεις, η γραφική παράσταση έχει μορφή πυραμίδας, με βάση το πολύγωνο που σχηματίζεται από όλα τα τριγωνικά στοιχεία (έξι στο **Σχήμα 6.3-13β**) που έχουν τον κόμβο n ως μία από τις κορυφές τους. Τουλάχιστον σε μία διάσταση, μπορεί να δει κανείς εύκολα ότι το άθροισμα των $\Phi_n u_n$ δίνει την τεθλασμένη γραμμή. Γενικότερα, το άθροισμα $\tilde{\Phi} = f_0 + \sum_n a_n f_n$ εδώ εξειδικεύεται στο άθροισμα $\tilde{\Phi} = \sum_n \tilde{\Phi}_n u_n + \sum_n \tilde{\Phi}_n u_n$, με τη f_0 να αντιστοιχεί στο πρώτο άθροισμα, το οποίο περιέχει τους όρους για τους κόμβους (με n') του ορίου, ενώ το δεύτερο άθροισμα (με n) αναφέρεται στους εσωτερικούς κόμβους.

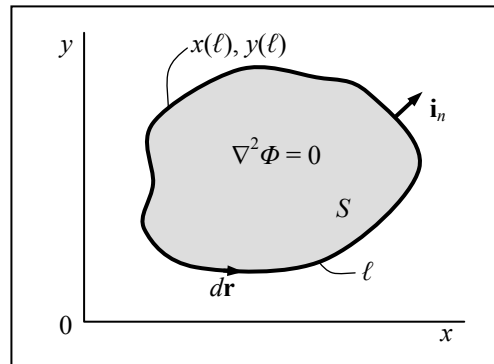
Από τη στιγμή που ορίσθηκε η συνάρτηση $\tilde{\Phi}$, τα επόμενα βήματα είναι ταυτόσημα με των μεθόδων *Galerkin* και *Rayleigh-Ritz*. Υπολογίζεται το ολοκλήρωμα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί (το $\int_V (\nabla^2 \tilde{\Phi})^2 dV$ ή το $\int_V |\nabla \tilde{\Phi}|^2 dV$), και εξισώνονται με το μηδέν οι παράγωγοί του ολοκληρώματος ως προς κάθε $\tilde{\Phi}_n$. Έτσι, σχηματίζεται το γραμμικό σύστημα για τις τιμές όλων των $\tilde{\Phi}_n$ των εσωτερικών κόμβων. Ως εδώ, όλη η διαδικασία γίνεται αναλυτικά και στοιχειοθετεί τον αλγόριθμο για την επίλυση. Για τις συγκεκριμένες εκφράσεις καθώς και τις επεκτάσεις της μεθόδου, ας συμβουλευθεί ο αναγνώστης την εξειδικευμένη βιβλιογραφία.

6.4 Σύμμορφη απεικόνιση

6.4.1 Διδιάστατες διατάξεις και σύμμορφη απεικόνιση

Διδιάστατες διατάξεις, ειδικότερα διατάξεις χωρίς εξάρτηση από την αξονική συντεταγμένη z , είναι (βλ. και παράγρ. 6.1.3) οι διατάξεις με σχήμα γενικευμένου ορθού κυλίνδρου, στις δύο βάσεις των οποίων (σε κάποιες θέσεις $z = z_{1,2}$) επικρατεί ομογενής οριακή συνθήκη *Neumann*, $\partial\Phi/\partial n = 0$, δηλαδή, $\partial\Phi/\partial z = 0$, και στις ενδιάμεσες θέσεις ($z_1 < z < z_2$) όλα τα δεδομένα της διάταξης (σύσταση εσωτερικού χώρου, θέση εγκάρσιου ορίου και μορφή και τιμή οριακής συνθήκης) δεν μεταβάλλονται με το z . Τότε, οποιαδήποτε ποσότητα ενδιαφέρει, όπως το δυναμικό και τα πεδία, εξαρτάται μόνο από την εγκάρσια θέση $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ ή $\mathbf{r}_\perp = (r_T, \varphi)$. Επιπλέον, διδιάστατη εξάρτηση έχει το κυματικό πλάτος του δυναμικού (του Φ_\perp και του $\Phi_{\perp m}$) σε μία γραμμή μεταφοράς, όπου η κυματική εξάρτηση από το z ενσωματώνεται στη φάση, είτε ως $\exp(-jkz)$ στην περιγραφή με φασιθέτες, είτε ως $f(\omega t - kz)$.

Σε διδιάστατες διατάξεις η εσωτερική περιοχή V υποκαθίσταται από τη διατομή S της διάταξης, βλ. **Σχήμα 6.4-1**, και η παράπλευρη οριακή επιφάνεια από το περίγραμμα ℓ της διατομής, μια κλειστή γραμμή (βρόχο), που ως περιγραφεί σε παραμετρική μορφή, $x = x(\ell)$ και $y = y(\ell)$, χρησιμοποιώντας ως παράμετρο την απόσταση ℓ από κάποια αφετηρία κατά μήκος του περιγράμματος. Γράφοντας Φ και εννοώντας οποιοδήποτε από τα $\{\Phi, \Phi_{\text{επ}}, A_x, A_y, A_z, \Phi_m, \Phi_\perp, \Phi_{\perp m}\}$, στο όριο ℓ η οριακή συνθήκη έχει, γενικά, τη μορφή $\alpha\Phi|_\ell + \beta(\partial\Phi/\partial n)|_\ell = \gamma$, αλλά συνήθως πρόκειται για συνθήκη *Dirichlet*, $\Phi|_\ell = \dots$, ή *Neumann*, $(\partial\Phi/\partial n)|_\ell = \dots$. Στο εσωτερικό της διατομής S οι ιδιότητες ε , μ , ή g είναι, συνήθως, σταθερές, οπότε στο δυναμικό δρα ο τελεστής του *Laplace*, και δεν υπάρχουν αίτια, οπότε το δυναμικό υπακούει στην εξίσωση του *Laplace*, που με $\partial/\partial z = 0$ γράφεται:



Σχήμα 6.4-1

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \frac{\partial\Phi}{\partial r_T} \right) + \frac{1}{r_T^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (6.4-1)$$

σε καρτεσιανές και πολικές (διδιάστατες κυλινδρικές) συντεταγμένες, αντίστοιχα.

Η διδιάστατη εξίσωση (6.4-1) του *Laplace* ικανοποιείται αυτόματα τόσο από το πραγματικό, όσο και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής μιγαδικής συνάρτησης, βλ. Παράρτημα E.2.2, ως απόρροια των συνθηκών *Cauchy-Riemann*. Αυτό υποδεικνύει για την επίλυση ενός

διδιάστατου προβλήματος οριακών τιμών για την εξίσωση του *Laplace* να αναζητηθεί η αναλυτική συνάρτηση, της οποίας το πραγματικό (ή το φανταστικό) μέρος ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες στο όριο ℓ . Η πορεία περιγράφεται εκτενέστερα στη συνέχεια αυτής της παραγράφου και υλοποιείται ειδικότερα στις τρεις παραγράφους που ακολουθούν.

Συμβολισμοί: Σε διδιάστατες διατάξεις η περιγραφή της θέσης γίνεται με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) , ή με πολικές (r_T, φ) , και δεν υπάρχει καμία ανάγκη να χρησιμοποιηθεί η ποσότητα z ως αξονική συντεταγμένη, καθώς και οι ποσότητες r και θ ως σφαιρικές συντεταγμένες. Αυτό επιτρέπει να περιγραφεί η θέση από τη μιγαδική ποσότητα $z = x + jy = r_T \exp(j\varphi)$, σε καρτεσιανή και πολική μορφή, στην τελευταία με $\varphi = \text{Arg}\{z\}$ για το όρισμα και τη συχνή απλούστευση $r_T \rightarrow r = |z| = \text{Abs}\{z\}$ για το μέτρο. Επίσης, η μιγαδική συνάρτηση $w(z)$ αναλύεται ως $w = u + jv = \rho \exp(j\theta)$, με όρισμα $\theta = \text{Arg}\{w\}$ και μέτρο $\rho = |w| = \text{Abs}\{w\}$, χωρίς να συγχέεται το μέτρο ρ με χωρική πυκνότητα φορτίου, που δεν μπορεί να υπάρχει, όταν είναι $\nabla^2 \Phi = 0$, όπως εδώ. Περιστασιακή χρήση του z ως συντεταγμένης θα είναι σαφής, όπως «ο άξονας z ». Επίσης, το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{i}_z (= \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y)$ δεν προκαλεί ασάφειες.

Υπαρξη αναλυτικής συνάρτησης $\Omega(z) = \Phi(x, y) + j\Psi(x, y)$: Στο εσωτερικό της περιοχής S πρέπει να ικανοποιείται $\nabla^2 \Phi = 0$. Συνεπώς, το δυναμικό $\Phi(x, y)$ είναι κατ' αρχήν κατάλληλο για να αποτελέσει το πραγματικό μέρος μιας αναλυτικής μιγαδικής συνάρτησης $\Omega = \Phi + j\Psi$. Για να δειχθεί ότι πάντοτε υπάρχει τέτοια συνάρτηση Ω , ας σημειωθεί πρώτα ότι η συνάρτηση $\Phi(x, y)$ υπάρχει. Είναι η μοναδική λύση ενός καλά διατυπωμένου προβλήματος οριακών τιμών. Όποια και να είναι η συνάρτηση $\Phi(x, y) = \text{Re}\{\Omega\}$, η συζυγής αρμονική συνάρτηση $\Psi(x, y) = \text{Im}\{\Omega\}$ προσδιορίζεται με χρήση των συνθηκών *Cauchy-Riemann* (βλ. Παράρτημα Ε.2.2, με τις αντικαταστάσεις $u \rightarrow \Phi$ και $v \rightarrow \Psi$). Συγκεκριμένα, από την αφετηρία (x_0, y_0) μέχρι το σημείο (x, y) , και με διαδρομή με εναλλάξ $x = \text{σταθ.}$ και $y = \text{σταθ.}$, όπου είναι $x = \text{σταθ.}$, δηλαδή $dy = 0$, τότε ολοκληρώνεται αμέσως η συνθήκη $\partial\Psi/\partial y = \partial\Phi/\partial x$, ενώ στα τμήματα με $y = \text{σταθ.}$, δηλ. $dx = 0$, το ίδιο συμβαίνει με τη συνθήκη $\partial\Psi/\partial x = -\partial\Phi/\partial y$. Αλλά και για οποιαδήποτε διαδρομή, εν γένει με $dx, dy \neq 0$, η σχέση που ορίζει τη διαδρομή, όπως η $y(x)$, συνδέει τα διαφορικά, $dy = y'(x)dx$, και η συνάρτηση $\Psi(x, y)$ προκύπτει από ένα απλό ολοκλήρωμα ως προς x :

$$\Psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{\partial\Phi}{\partial y} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial x} dy \right]. \quad (6.4-2)$$

Η αφετηρία (x_0, y_0) λειτουργεί ως σημείο αναφοράς για τη συνάρτηση Ψ , δηλαδή $\Psi(x_0, y_0) = 0$.

Η φυσική ερμηνεία της συνάρτησης Ψ αναφέρεται τόσο στο σχήμα των γραμμών $\Psi = \text{σταθ.}$, όσο και στην τιμή του Ψ σε κάθε τέτοια γραμμή.

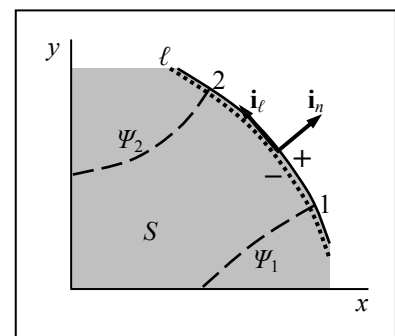
- Οι γραμμές $\Psi = \text{σταθ.}$ είναι κάθετες στις ισοδυναμικές γραμμές $\Phi = \text{σταθ.}$, επειδή τα Φ και Ψ είναι συστατικά της αναλυτικής συνάρτησης Ω . Την ίδια ιδιότητα έχουν και οι πεδιακές, ή «δυναμικές», γραμμές για το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ή το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m$, οπότε προφανώς οι γραμμές $\Psi = \text{σταθ.}$ αντιπροσωπεύουν τις πεδιακές γραμμές. Οι πεδιακές γραμμές ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά. Τέτοια φορτία δεν υπάρχουν στην περιοχή S , επειδή είναι $\nabla^2\Phi = 0$, συνεπώς οι πεδιακές γραμμές έχουν ως αφετηρία και ως τέρμα σημεία στο όριο ℓ της περιοχής S .
- Σε μια καμπύλη ℓ , που προσδιορίζεται παραμετρικά, ως $x = x(\ell)$, $y = y(\ell)$, με παράμετρο ℓ την απόσταση κατά μήκος της, το στοιχειώδες μήκος είναι $d\mathbf{r} = [(dx/d\ell)\mathbf{i}_x + (dy/d\ell)\mathbf{i}_y]d\ell$. Το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα είναι $\mathbf{i}_\ell = d\mathbf{r}/d\ell = (dx/d\ell)\mathbf{i}_x + (dy/d\ell)\mathbf{i}_y$, συνεπώς το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα είναι $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_\ell \times \mathbf{i}_z = (dy/d\ell)\mathbf{i}_x - (dx/d\ell)\mathbf{i}_y$. Τότε, είναι:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \mathbf{i}_n \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dy}{d\ell} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dx}{d\ell} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{dy}{d\ell} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{dx}{d\ell} = \frac{\partial\Psi}{\partial\ell}, \quad (6.4-3\alpha)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι συνθήκες *Cauchy-Riemann* (E.2-3) για τις συζυγές αρμονικές συναρτήσεις $\{\Phi, \Psi\}$. Άρα, μεταξύ δύο σημείων 1 και 2 είναι:

$$\Psi_2 - \Psi_1 = \Psi(x_2, y_2) - \Psi(x_1, y_1) = \int_1^2 \frac{\partial\Psi}{\partial\ell} d\ell = \int_1^2 \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\ell. \quad (6.4-3\beta)$$

Θεωρώντας τώρα (Σχήμα 6.4-2), ότι η διαδρομή ολοκλήρωσης συμπίπτει με ένα τμήμα του περιγράμματος ℓ , αλλά από την πλευρά της περιοχής S , εκεί η ποσότητα $\partial\Phi/\partial n$ είναι γνωστή, είτε εκ των προτέρων, ως οριακή συνθήκη *Neumann*, είτε εκ των υστέρων, μετά την επίλυση του προβλήματος οριακών συνθηκών, και η διαφορά $\Psi_2 - \Psi_1$ συνδέεται με την εισερχόμενη ροή (ανά μονάδα μήκους). Ειδικότερα, με $\partial\Phi/\partial n = \mathbf{i}_n \cdot \nabla\Phi$:



Σχήμα 6.4-2

- ο Σε διάταξη Ηλεκτροστατικής, με $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ και $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, για μήκος h είναι:

$$h\epsilon(\Psi_2 - \Psi_1) = -\epsilon h \int_1^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_n d\ell = -\int_1^2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{i}_n (hd\ell), \quad (6.4-4\alpha)$$

η εισερχόμενη ηλεκτρική ροή. Αν στον παρακείμενο χώρο είναι $\mathbf{D}_c = 0$, τότε $-\mathbf{D} \cdot \mathbf{i}_n = \sigma$ είναι το επιφανειακό φορτίο στο όριο.

- ο Σε διάταξη ροής ρεύματος, με $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ και $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$, ακριβώς ανάλογα:

$$hg(\Psi_2 - \Psi_1) = -\int_1^2 \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_n (hd\ell), \quad (6.4-4\beta)$$

το εισερχόμενο ηλεκτρικό ρεύμα. Αν είναι $\mathbf{J}_c = 0$ στον παρακείμενο χώρο και $\mathbf{K} = 0$ στο όριο, τότε είναι $-\mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_n = \dot{\sigma}$, το εκλυόμενο επιφανειακό φορτίο (ανά sec) στο όριο.

- ο Σε διάταξη Μαγνητοστατικής (με $\mathbf{J} = 0$), με τις αντικατάστασεις $\Phi \rightarrow \Phi_m$ και $\Psi \rightarrow \Psi_m$ (για λόγους ομοιομορφίας), είναι $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m$ και $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, οπότε με την ίδια διαδικασία προκύπτει:

$$h\mu(\Psi_{m2} - \Psi_{m1}) = -\int_1^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}_n (hd\ell), \quad (6.4-4\gamma)$$

η εισερχόμενη μαγνητική ροή.

Οι τρεις αντιστοιχίσεις της διαφοράς $\Psi_2 - \Psi_1$ με ολοκλήρωμα ροής έγιναν με ολοκλήρωση κατά μήκος ενός τμήματος του ορίου ℓ . Όμως, οι τιμές της συνάρτησης Ψ παραμένουν αμετάβλητες στις καμπύλες $\Psi = \text{σταθ.}$, οπότε η διαφορά $\Psi_2 - \Psi_1$ αντιπροσωπεύει, με την αντίστοιχη κανονικοποίηση, γενικότερα τη ροή που διέρχεται μεταξύ των γραμμών $\Psi = \Psi_1$ και $\Psi = \Psi_2$. Για τους λόγους αυτούς, η συνάρτηση Ψ ονομάζεται «συνάρτηση ροής».

Μεταφορά της έκφρασης του Φ μεταξύ των επιπέδων w και z : Όπως περιγράφεται στο Παράρτημα Ε.2.3, μια αναλυτική συνάρτηση $w(z)$ μετασχηματίζει την περιοχή S (με όριο την κλειστή καμπύλη ℓ) του επιπέδου z , στην οποία αναφέρεται το πρόβλημα οριακών τιμών, στην περιοχή S' (με όριο την καμπύλη ℓ') στο επίπεδο w . Ας εξετασθεί στο επίπεδο w το πρόβλημα οριακών τιμών, με διαφορική εξίσωση $\nabla_w^2 \Phi = (\partial^2/\partial u^2)\Phi + (\partial^2/\partial v^2)\Phi = 0$ στην περιοχή S' , και στο περίγραμμα ℓ' με τις οριακές συνθήκες, στις οποίες μέσω της ίδιας συνάρτησης $w(z)$ μετασχηματίζονται οι αρχικές συνθήκες (στο όριο ℓ της περιοχής S στο επίπεδο z), όπως πιο συγκεκριμένα περιγράφεται αμέσως μετά. Πρόκειται για ένα καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών τιμών στο επίπεδο w , που θα έχει κάποια μοναδική λύση $\Phi = \Phi(u, v)$. Για την αρμονική συνάρτηση Φ μπορεί να προσδιορισθεί η συζυγής αρμονική συνάρτηση $\Psi(u, v)$, όπως περιγράφεται στη σχέση (6.4-2), ώστε να σχηματισθεί η αναλυτική συνάρτηση $\Omega(w) =$

$\Phi + j\Psi$. Όμως, είναι $w = w(z)$, συνεπώς η σύνθετη συνάρτηση $\Omega[w(z)]$ είναι αναλυτική ως συνάρτηση του z , ικανοποιεί δηλαδή και στο επίπεδο z την εξίσωση του Laplace, $\nabla_z^2 \Phi = (\partial^2/\partial x^2)\Phi + (\partial^2/\partial y^2)\Phi = 0$, και όμοια για η συνάρτηση Ψ . Επίσης, ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στο αρχικό όριο ℓ , επειδή ουσιαστικά η αλλαγή μεταβλητών από z σε $w(z)$ ακολουθείται από την αντιστροφή της, από w σε $z(w)$. Συνεπώς, η μοναδική λύση του αρχικού προβλήματος είναι η συνάρτηση $\Phi[u=u(x,y), v=v(x,y)]$. Μάλιστα, για τον προσδιορισμό της αρκεί η επίλυση του προβλήματος στο επίπεδο w και δεν απαιτείται ο προσδιορισμός της συνάρτησης Ψ . Η αναφορά στη συνάρτηση Ψ έγινε μόνο για να τεκμηριωθεί ότι στο επίπεδο w υπάρχει η αναλυτική συνάρτηση $\Omega(w) = \Phi + j\Psi$.

Μετασχηματισμός οριακών συνθηκών: Ας θεωρηθεί ότι μία γραμμή ℓ , ειδικότερα είτε ολόκληρο το όριο της περιοχής S , είτε μόνο ένα τμήμα του ορίου, περιγράφεται με παραμετρική μορφή, $x=x(s)$ και $y=y(s)$. Τότε, με την αναλυτική συνάρτηση $w(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ η γραμμή αυτή απεικονίζεται στη γραμμή ℓ' , που περιγράφεται πάλι παραμετρικά από τις σχέσεις $u(s) = u[x=x(s), y=y(s)]$ και $v(s) = v[x=x(s), y=y(s)]$. Θα εξετασθεί χωριστά, πώς μετασχηματίζεται η συνθήκη *Dirichlet* από τη γραμμή ℓ στη γραμμή ℓ' και πώς η συνθήκη *Neumann*, και από τη διαδικασία αυτή θα είναι εύκολη η γενίκευση στη γενική συνθήκη.

- Στη συνθήκη *Dirichlet* δίδεται, ότι σε κάποιο τμήμα ℓ του ορίου είναι $\Phi[x(s), y(s)] = \Phi_\ell(s)$, όπου $\Phi_\ell(s)$ είναι η γνωστή συνάρτηση που προσδιορίζει την τιμή του δυναμικού σε κάθε σημείο Σ της γραμμής ℓ , το οποίο αντιστοιχεί σε κάποια τιμή της παραμέτρου s . Τότε ο μετασχηματισμός της συνθήκης *Dirichlet* στο επίπεδο w διατυπώνεται με απλή αντικατάσταση, ως:

$$\Phi(x(s), y(s)) = \Phi_\ell(s) \Rightarrow \Phi(u(s), v(s)) = \Phi_\ell(s), \quad (6.4-5)$$

δηλαδή, κάθε σημείο του ορίου, τόσο στην αρχική γραμμή ℓ , όσο και στην απεικόνισή της ℓ' , έχει την ίδια τιμή για το δυναμικό.

- Στη συνθήκη *Neumann* δίδεται η κάθετη παράγωγος $\partial\Phi/\partial n$ κατά μήκος της γραμμής ℓ , ως συνάρτηση της παραμέτρου s , δηλαδή δίδεται ότι $(\partial\Phi/\partial n)|_\ell = \Phi_{n\ell}(s)$, που είναι διδόμενη συνάρτηση κατά μήκος της γραμμής ℓ . Στη σχέση (6.4-3α) δείχθηκε προ ολίγου, ότι είναι $\partial\Phi/\partial n = \partial\Psi/\partial\ell$, και αν αντί των (x, y) χρησιμοποιηθούν τα (u, v) , θα είναι και $\partial\Phi/\partial n' = \partial\Psi/\partial\ell'$ στο επίπεδο w . Όμως, $d\ell' = |w'(z(s))| d\ell$, με βάση το μηχανισμό μεγέθυνσης των απειροστών μηκών κατά τη σύμμορφη απεικόνιση, βλ. σχέση (E.2-11) στο Παράρτημα E.2.3. Συνεπώς, η κάθετη παράγωγος στο επίπεδο w θα είναι:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{x(s), y(s)} = \Phi_{n\ell}(s) \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right|_{u(s), v(s)} = \frac{1}{|w'(z(s))|} \Phi_{n\ell}(s). \quad (6.4-6)$$

Αν σε κάποιο σημείο Σ_0 της γραμμής ℓ είναι $w'(z) = 0$, τότε στο σημείο αυτό δεν μπορεί να εφαρμοσθεί η σχέση (6.4-6). Αυτό αντιμετωπίζεται θεωρώντας ότι η γραμμή ℓ αποτελείται από δύο τμήματα, ℓ_1 και ℓ_2 , που συνδέονται στο σημείο Σ_0 . Σε κάθε τμήμα εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός (6.4.6) αυτοτελώς, με αποτέλεσμα τις εκφράσεις για την κάθετη παράγωγο $\partial\Phi/\partial n'$ ακόμα και σε θέσεις οριακά κοντά στο Σ_0 και από τις δύο πλευρές). Στο σημείο Σ_0 είναι ενδεχόμενο να εκδηλωθεί ασυνέχεια στην τιμή της κάθετης παραγώγου $\partial\Phi/\partial n'$, μολονότι η συνάρτηση $\Phi_{n\ell}(s)$ είναι εκεί συνεχής. Επίσης, στο ίδιο σημείο Σ_0 , επειδή εκεί είναι $w'(z) = 0$, δεν ορίζεται το όρισμα $\text{Arg}\{w'\}$, με συνέπεια εκεί η απεικόνιση να μην είναι σύμμορφη, με ενδεχόμενο αποτέλεσμα να είναι, εκεί, λεία η καμπύλη ℓ , αλλά στην καμπύλη ℓ' να εμφανίζεται γωνία.

- Στη γενική συνθήκη δίδεται ότι κάποιος γραμμικός συνδυασμός $\alpha(s)\Phi(s) + \beta(s)(\partial\Phi/\partial n)|_S$ έχει την τιμή $\gamma(s)$. Όπως και στην παράγραφο 6.1.2, η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως $\Phi(s) + L(s)(\partial\Phi/\partial n)|_S = \Phi^*(s)$, βλ. σχέση (6.1-23), μετά από διαίρεση με το συντελεστή $\alpha(s)$. Ο συντελεστής $L(s)$ όχι μόνο έχει διαστάσεις μήκους, αλλά και φυσικό περιεχόμενο ως ισοδύναμο μήκος, σύμφωνα με τη φυσική ερμηνεία που συνοδεύεται από το **Σχήμα 6.1-4** στην παράγραφο 6.1.2, οπότε μετασχηματίζεται πολλαπλασιαζόμενος με το μέτρο $|w'(z)|$. Έτσι, αναιρείται η διαίρεση με την ίδια ποσότητα κατά το μετασχηματισμό της παραγώγου $\partial\Phi/\partial n$. Επαναφέροντας το συντελεστή $\alpha(s)$ συνάγεται ότι, όπως και στη συνθήκη *Dirichlet*, ο μετασχηματισμός δεν μεταβάλλει τη μορφή της οριακής συνθήκης:

$$\begin{aligned} \alpha(s)\Phi(x(s), y(s)) + \beta(s) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{x(s), y(s)} &= \gamma(s) \\ \Rightarrow \alpha(s)\Phi(u(s), v(s)) + \beta(s) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{u(s), v(s)} &= \gamma(s). \end{aligned} \quad (6.4-7)$$

Στις εφαρμογές, οι πιο συνηθισμένες οριακές συνθήκες είναι η συνθήκη *Dirichlet* με σταθερή τιμή του δυναμικού, και η ομογενής συνθήκη *Neumann*. Σύμφωνα με τις προηγούμενες εκφράσεις, αυτές οι περιπτώσεις μετασχηματίζονται απλά ως:

$$\begin{aligned} \Phi(x(s), y(s)) = U &\Rightarrow \Phi(u(s), v(s)) = U, \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{x(s), y(s)} = 0 &\Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{u(s), v(s)} = 0. \end{aligned} \quad (6.4-8)$$

Αν όμως είναι $\partial\Phi/\partial n = -E_0 = \text{σταθ.} \neq 0$, τότε στη μετασχηματισμένη συνθήκη θα είναι $\partial\Phi/\partial n \neq \text{σταθ.}$, λόγω της παρουσίας του συντελεστή $|w'(z)|^{-1} \neq \text{σταθ.}$. Επίσης, επειδή οι καμπύλες $\Phi = \text{σταθ.}$ και $\Psi = \text{σταθ.}$ τέμνονται ορθογώνια, η συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$ σημαίνει ότι το τμήμα ℓ του ορίου με τέτοια συνθήκη ταυτίζεται με γραμμή $\Psi = \text{σταθ.}$, άρα το ίδιο θα συμβαίνει και στην απεικόνιση ℓ' , δηλαδή η ℓ' θα είναι κάθετη στις γραμμές $\Phi = \text{σταθ.}$, οπότε στην ℓ' θα είναι πάλι $\partial\Phi/\partial n' = 0$, όπως αναφέρεται στη σχέση (6.4-8β).]

Σχόλιο: Η παραμετρική μορφή, $x=x(s)$ και $y=y(s)$, για την περιγραφή της γραμμής ℓ έχει χρησιμοποιηθεί για τις ανάγκες της παρουσίασης, αλλά και επειδή αντιπροσωπεύει σχετικώς γενικό τρόπο περιγραφής μιας γραμμής. Ως παράμετρος s μπορεί να επιλεγεί οποιαδήποτε πρόσφορη ποσότητα, ανάλογα και με το σχήμα του ορίου. Μπορεί να είναι η απόσταση κατά μήκος του ορίου ℓ , όπως έχει αναφερθεί σε σχέση με το **Σχήμα 6.4-1**, αλλά αυτή η επιλογή συνήθως δεν εξυπηρετεί ιδιαίτερα. Φυσικά, μπορεί να είναι μία συντεταγμένη, όπως $s = x$, οπότε η γραμμή ℓ περιγράφεται ως $x = x$ και $y = y(x)$. Επίσης, σε διαφορετικά τμήματα του ορίου μπορεί να επιλεγεί διαφορετική ποσότητα για να χρησιμεύσει ως παράμετρος. Τέλος, αν η παράμετρος s αντιπροσωπεύει στο επίπεδο z κάποια ποσότητα με γεωμετρικό περιεχόμενο (απόσταση, γωνία κλπ.), το περιεχόμενο αυτό συνήθως δεν μεταφέρεται στο επίπεδο w κατά το μετασχηματισμό $w(z)$.

Διαδικασία για επίλυση προβλήματος οριακών συνθηκών με την εξίσωση Laplace:

Το πρόβλημα περιλαμβάνει τη διαφορική εξίσωση $\nabla^2\Phi = 0$ στην περιοχή S και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες στο όριο ℓ της S . Η πορεία που ακολουθείται περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- (α) Επιλογή κατάλληλης συνάρτησης $w(z)$, που να μετασχηματίζει το αρχικό, ίσως πολύπλοκο, σχήμα της S με το όριο ℓ στο απλούστερο σχήμα S' και το όριό του ℓ' .
- (β) Μεταφορά των οριακών συνθηκών από το όριο ℓ στο νέο όριο ℓ' . Ειδικά οι συνθήκες $\Phi = U$ και $\partial\Phi/\partial n = 0$ μεταφέρονται αμετάβλητες, σύμφωνα με τις σχέσεις (6.4-8).
- (γ) Επίλυση του προβλήματος σε συντεταγμένες (u, v) , με διαφορική εξίσωση στην περιοχή S' τη $\nabla_w^2\Phi = (\partial^2/\partial u^2)\Phi + (\partial^2/\partial v^2)\Phi = 0$ και με οριακές συνθήκες στο περίγραμμα ℓ' αυτές που έχουν προσδιορισθεί στο βήμα (β). Το αποτέλεσμα είναι η συνάρτηση $\Phi(u, v)$.
- (δ) Χρήση της συνάρτησης $w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, για να μεταγραφεί η λύση στις συντεταγμένες της αρχικής περιοχής S , με τη μορφή $\Phi(x, y) = \Phi[u(x, y), v(x, y)]$.
- (ε) Προσδιορισμός οποιασδήποτε ποσότητας χρειάζεται στο αρχικό πρόβλημα, αυτό στην περιοχή S , όπως το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, η πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J} = -g\nabla\Phi$ σε

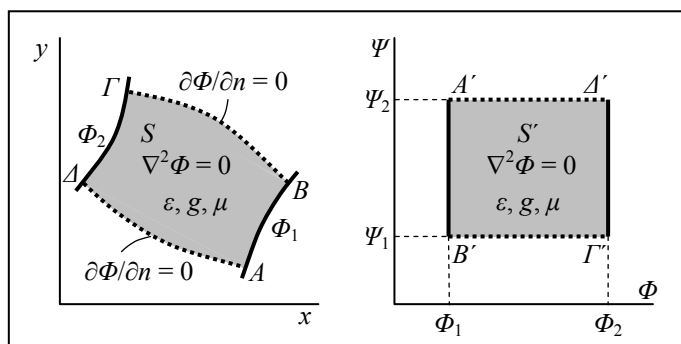
αγώγιμο υλικό, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_c - \mathbf{D})$ στο όριο, κλπ. Για προσδιορισμό χωρητικότητας και συγγενών ποσοτήτων, βλ. κατωτέρω.)

Από τα παραπάνω βήματα, το δυσκολότερο και κρισιμότερο είναι το πρώτο, η επιλογή κατάλληλης συνάρτησης $w(z)$. Αυτό το βήμα μπορεί να γίνει απευθείας, ή με διαδοχικούς ενδιάμεσους μετασχηματισμούς, ως $w_1 = w_1(z)$, $w_2 = w_2(w_1)$, ..., $w_n = w_n(w_{n-1})$, ώστε συνολικά να σχηματίζεται η σύνθετη αναλυτική συνάρτηση $w(z) = w_n(w_{n-1}(\dots w_2(w_1(z))))$. Για να επιτευχθεί αυτό το βήμα, χρήσιμες είναι οι γενικές γνώσεις για τη συμπεριφορά διάφορων αναλυτικών συναρτήσεων, όπως παρουσιάζεται στην παράγραφο 6.4.2 που ακολουθεί, καθώς και οι γνώσεις για τις ιδιότητες ειδικών μετασχηματισμών, όπως του ρητογραμμικού και των *Schwarz* και *Christoffel* που παρουσιάζονται αντίστοιχα στις παραγράφους 6.4.3 και 6.4.4. Πάντως, δεν μπορεί να δοθεί καμία εγγύηση ότι θα καταστεί εφικτό να διατυπωθεί η συνάρτηση $w(z)$.

Υπολογισμός στοιχείων κυκλωμάτων: Όταν το αρχικό πρόβλημα οριακών συνθηκών διατυπώνεται με σκοπό να προσδιορισθούν από την επίλυσή του μακροσκοπικές ποσότητες (χωρητικότητα C , αντιστάση R ή αγωγιμότητα G , αυτεπαγωγή L ή μαγνητική αντίσταση R_m) προς χρήση σε ανάλυση ή σύνθεση κυκλωμάτων, είναι προτιμότερο, αλλά και ταχύτερο, να τροποποιηθεί ελαφρά η προηγούμενη πορεία. Συγκεκριμένα, μετά τα βήματα (α) και (β), όπου οι οριακές συνθήκες θα είναι απλά $\Phi = \Phi_{1,2}$ και $\partial\Phi/\partial n = 0$, αξιοποιείται η λύση $\Phi(w)$ και η συζυγής αρμονική συνάρτηση $\Psi(w)$, δηλαδή η αναλυτική συνάρτηση $\Omega = \Phi + j\Psi$, ως όργανο ενός ακόμα μετασχηματισμού, ώστε τελικά η περιοχή S να απεικονισθεί σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου, όπως στο **Σχήμα 6.4-3**. Ο υπολογισμός των ποσοτήτων C , R ή G και L ή R_m στο ορθογώνιο είναι στοιχειώδης:

$$C = \epsilon h \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Phi_2 - \Phi_1}, \quad G = \frac{1}{R} = gh \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Phi_2 - \Phi_1}, \quad \frac{L}{N^2} = \frac{1}{R_m} = \mu h \frac{\Psi_{m2} - \Psi_{m1}}{\Phi_{m2} - \Phi_{m1}}, \quad (6.4-9)$$

όπου h είναι το μήκος στην τρίτη διάσταση, κάθετα στο επίπεδο x - y . Με επίκληση της φυσικής σημασίας της συζυγούς αρμονικής συνάρτησης Ψ , βλ. σχέσεις (6.4-4), διαπιστώνεται αμέσως πως το αποτέλεσμα (6.4-9) για τη χωρητικότητα κλπ. ισχύει και στην αρχική διάταξη.



Σχήμα 6.4-3

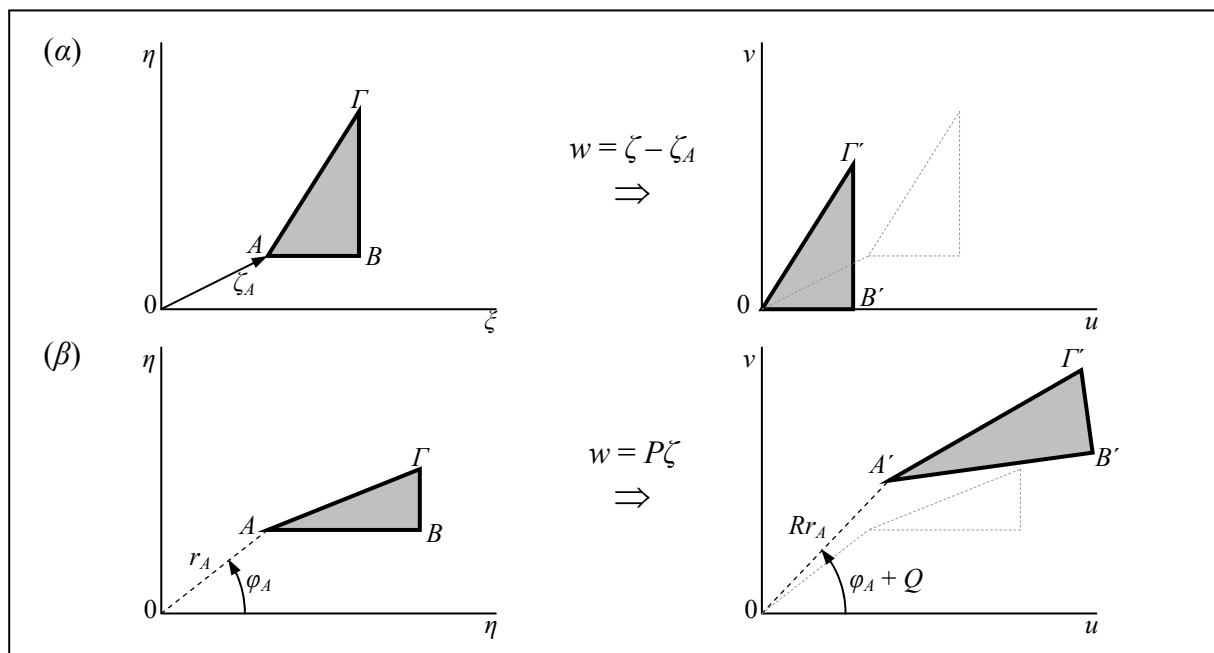
6.4.2 Απεικόνιση με βασικές συναρτήσεις

Στην παρούσα παράγραφο μελετώνται διάφορες βασικές συναρτήσεις ως προς τις ιδιότητές τους να μετασχηματίζουν γραμμές και όρια περιοχών, ως αλληλουχία γραμμών. Ο μιγαδικός αριθμός γράφεται $\zeta = \xi + j\eta$, με συστατικά που θεωρούνται αδιάστατες ποσότητες, ενώ τα συστατικά του μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ έχουν διαστάσεις μήκους.

Μετατόπιση, μεγέθυνση και στροφή περιοχής: Προσθέτοντας στο ζ μία σταθερή μιγαδική ποσότητα, δηλαδή σχηματίζοντας τη συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta - \zeta_0$, το σχήμα μετατοπίζεται κατά τον προσθετέο $-\zeta_0$, χωρίς καμία άλλη παραμόρφωση. Έτσι, αν είναι $\zeta(A) = \zeta_0$, τότε $w(A') = 0$, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.4-4α**. Πολλαπλασιάζοντας το $\zeta = r \exp(j\varphi)$ με μία σταθερή μιγαδική ποσότητα $P = R \exp(jQ)$, δηλαδή εφαρμόζοντας τη συνάρτηση $w(\zeta) = P\zeta = (Rr) \exp[j(Q + \varphi)]$, όλα τα μήκη μεγεθύνονται κατά $R = |P|$ (σμικρύνονται, αν $R < 1$) και στρέφονται κατά $Q = \text{Arg}\{P\}$ ως προς την αρχή των αξόνων, όπως στο **Σχήμα 6.4-4β**. Ο συνδυασμός αυτών των δύο ενεργειών, ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$w(\zeta) = P \cdot (\zeta - \zeta_0) = P\zeta - P\zeta_0, \quad (6.4-10)$$

μετατοπίζει κατά $-\zeta_0$ και ακολούθως μεγεθύνει και στρέφει κατά P , ή πρώτα μεγεθύνει και στρέφει κατά P και ύστερα μετατοπίζει, αλλά κατά $-P\zeta_0$. Η χρησιμότητα του μετασχηματισμού είναι για να προσαρμόζει την εξεταζόμενη διατομή ως προς τη θέση, το μέγεθος και τον προσανατολισμό της.



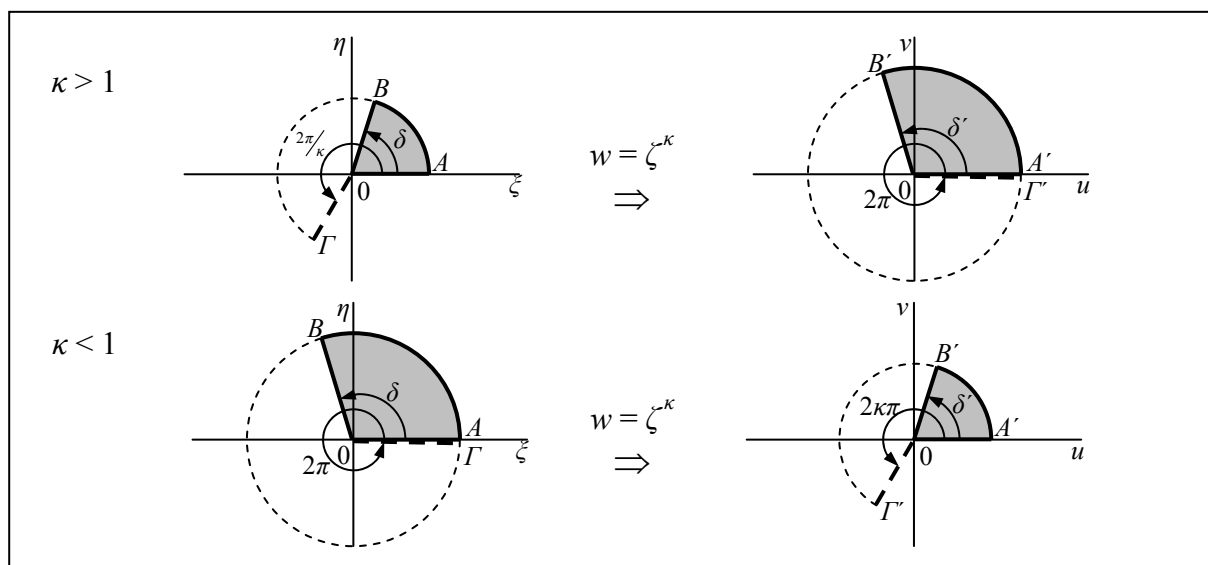
Σχήμα 6.4-4

Προσαρμογή γωνίας: Στη συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^{\kappa}$, όπου κ είναι πραγματικός θετικός αριθμός, γράφοντας τις ποσότητες σε πολική μορφή, $\zeta = r \exp(j\varphi)$ και $w = \rho \exp(j\theta)$, φαίνεται αμέσως ότι $\rho = r^{\kappa}$ και $\theta = \kappa\varphi$. Με τη συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^{\kappa}$ κυκλικά τόξα με κέντρο στην αρχή των αξόνων του επιπέδου ζ μετασχηματίζονται πάλι σε κυκλικά τόξα του επιπέδου w , με κέντρο πάλι στην αρχή των αξόνων, αλλά η ακτίνα μεταβάλλεται από r σε r^{κ} , που είναι μεγαλύτερη της αρχικής, αν $\kappa > 1$, και μικρότερη, αν $\kappa < 1$. Επίσης, ημιευθείες διερχόμενες από την αρχή των αξόνων απεικονίζονται σε όμοιες ημιευθείες, αλλά με τη γωνία της κλίσης ίση με $\kappa\varphi$, αντί της αρχικής φ . Με βάση τις τιμές των απεικονίσεων, είναι:

$$w(\zeta) = \zeta^{\kappa} = r^{\kappa} \exp(j\kappa\varphi) \Rightarrow \begin{cases} r = \rho_0^{-\kappa} & \Rightarrow \rho = \rho_0, \\ \varphi = \frac{1}{\kappa}\theta_0 & \Rightarrow \theta = \theta_0. \end{cases} \quad (6.4-11)$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί για να μετατρέψει γωνία δ με κορυφή στο $\zeta = 0$ σε γωνία δ' με κορυφή στο $w = 0$, επιλέγοντας την τιμή του κ , ώστε να είναι $\delta' = \kappa\delta$. Οι συνηθισμένες επιλογές είναι $\delta' = \pi$ και $\delta' = \pi/2$. [Άλλες ιδιότητες μετασχηματισμού της συνάρτησης $w(\zeta) = \zeta^{\kappa}$ στις ειδικές περιπτώσεις $\kappa = 1/2$ και $\kappa = 2$ παρουσιάζονται αργότερα.]

Αν είναι $\kappa > 1$, τότε η συνάρτηση $w(\zeta)$ δεν είναι μονότιμη. Για να γίνει μονότιμη, πρέπει από το επίπεδο ζ να λαμβάνονται μόνο σημεία με γωνιακό πλάτος ίσο με $2\pi/\kappa$, όπως στο διάστημα $0 < \varphi < 2\pi/\kappa$. Παρόμοια, αν είναι $\kappa < 1$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $\zeta(w)$ γίνεται μονότιμη περιορίζοντας τις τιμές του ορίσματος $\theta = \text{Arg}\{w\}$, όπως στο διάστημα $0 < \theta < 2\kappa\pi$. Αυτές οι επιλογές, μαζί με ενδεικτικές απεικονίσεις με τη συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^{\kappa}$, παρουσιάζονται στο **Σχήμα 6.4-5** για τα δύο ενδεχόμενα $\kappa > 1$ και $\kappa < 1$.



Σχήμα 6.4-5

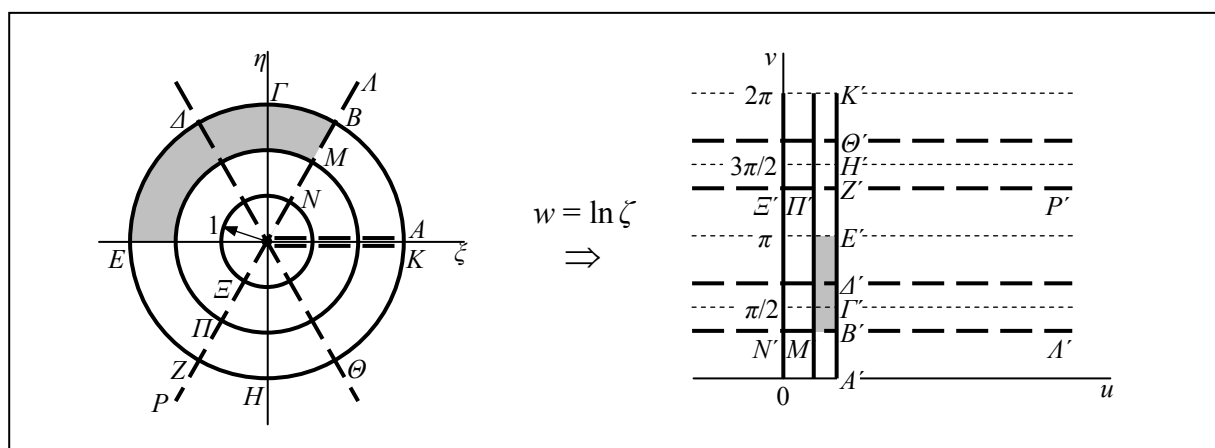
Απεικονίσεις σε $u = u_0$ και $v = v_0$: Η χρήση αναλυτικών συναρτήσεων αποσκοπεί, η απεικόνιση της περιοχής S του επιπέδου ζ στην περιοχή S' του επιπέδου w να καταστήσει πιο εύκολα επιλύσιμη την εξίσωση του *Laplace*, με τις μετασχηματισμένες οριακές συνθήκες. Αν η περιοχή S' έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου, τότε η επίλυση είναι εφικτή σε κάθε περίπτωση με χωρισμό μεταβλητών, και με ιδιαίτερα απλή διαδικασία όταν οι οριακές συνθήκες έχουν εναλλάξ τη μορφή $\Phi = σταθ.$ και $\partial\Phi/\partial n = 0$, που δεν μεταβάλλεται κατά το μετασχηματισμό, βλ. σχέση (6.4-8) της παραγρ. 6.4.1. Για τους λόγους αυτούς, κυρίως ενδιαφέρουν οι μετασχηματισμοί σε ευθείες $u = u_0$ ή $v = v_0$, όπως αυτοί που ακολουθούν.

Ομόκεντροι κύκλοι και ακτίνες: Στη συνάρτηση $w(\zeta) = \ln \zeta$, με αντίστροφο της τη συνάρτηση $\zeta = \exp w$, τα συστατικά μέρη είναι $\xi = e^u \cos v$ και $\eta = e^u \sin v$ ή αντίστροφα $u = \ln r = \frac{1}{2} \ln(\xi^2 + \eta^2)$ και $v = \varphi = \arctan_2(\eta/\xi)$. Για να γίνει η συνάρτηση μονότιμη, τίθεται ο περιορισμός $0 < v < 2\pi$, ενώ $u = \text{τυχόν}$, οπότε το επίπεδο ζ μετασχηματίζεται σε ταινία με πλάτος 2π . Η ποσότητα v μπορεί να οριστεί και σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα με πλάτος 2π .

Στη συγκεκριμένη περίπτωση της λογαριθμικής συνάρτησης αμέσως φαίνεται το σχήμα των γραμμών που απεικονίζονται σε ευθείες $u = u_0$ και $v = v_0$:

$$w(\zeta) = \ln \zeta \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \exp u_0 & \Rightarrow u = u_0, \\ \eta = \xi \tan v_0 & \Rightarrow v = v_0. \end{cases} \quad (6.4-12)$$

Η πρώτη σχέση περιγράφει, ότι κύκλοι, όπως ο $AB\Gamma\Delta EZH\Theta K$ στο **Σχήμα 6.4-6**, με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα $r = \exp u_0$, απεικονίζονται σε ευθύγραμμα τμήματα $u = u_0$, με μήκος ίσο με 2π . Η δεύτερη σχέση δηλώνει ότι οι ευθείες $v = v_0$ είναι οι απεικονίσεις ημιευθειών, των οποίων η αφετηρία, η αρχή των αξόνων, απεικονίζεται στο $u \rightarrow -\infty$, με το v εξαρτώμενο από τη γωνία, με την οποία η ημιευθεία προσεγγίζει το $r \rightarrow 0$.



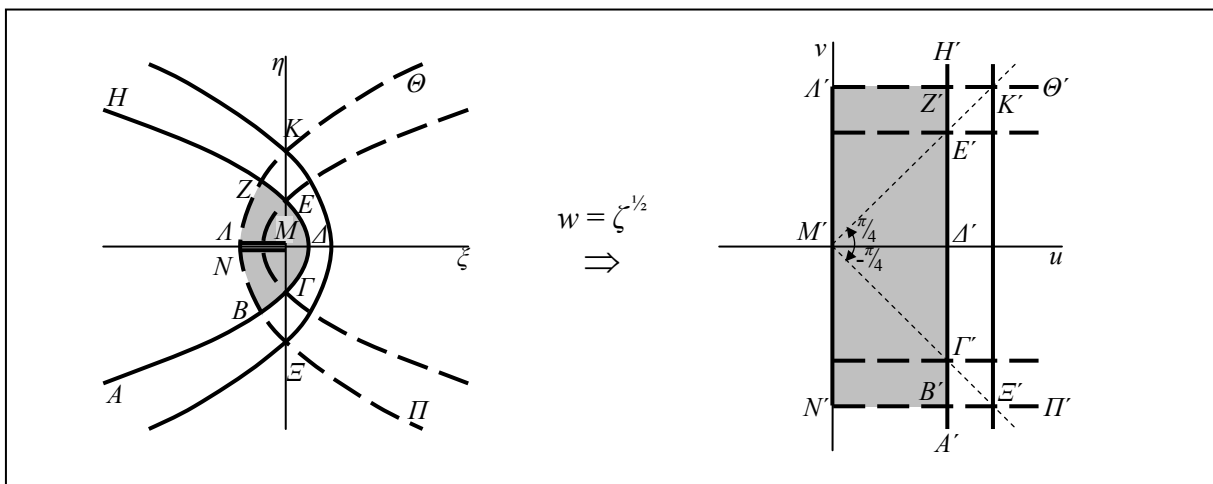
Σχήμα 6.4-6

Ομοεστιακές παραβολές: Για τη συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^{1/2}$ πρέπει να ορισθεί ο πρωτεύων κλάδος, ώστε να καταστεί μονότιμη. Μία συνηθισμένη επιλογή είναι να θεωρηθεί ότι η γωνία φ στο επίπεδο ζ εκτείνεται στο διάστημα $-\pi < \varphi < +\pi$. Συνέπεια της επιλογής είναι, η κλαδική τομή να ταυτίζεται με τον αρνητικό ημιάξονα των ζ και το επίπεδο ζ να μετασχηματίζεται στο ημιεπίπεδο $u > 0$, δηλαδή, η γωνία θ περιορίζεται στο διάστημα $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Όσα έχουν αναφερθεί για τη γενικότερη συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^\kappa$ ισχύουν και εδώ, με $\kappa = 1/2$: Οι κύκλοι μετασχηματίζονται σε ημικύκλια και οι ημιευθείες πάλι σε ημιευθείες, αλλά με μισή πολική γωνία).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κυρίως ενδιαφέρει να εξετασθεί ποιες γραμμές του επιπέδου ζ μετασχηματίζονται σε ευθείες $u = u_0 = \text{σταθ.}$ και $v = v_0 = \text{σταθ.}$ Στον αντίστροφο μετασχηματισμό, $\zeta = w^2$, δηλαδή, $\zeta + j\eta = (u + jv)^2 = (u^2 - v^2) + j(2uv)$, εξισώνοντας πραγματικό και φανταστικό μέρος προκύπτει $\xi = u^2 - v^2$ και $\eta = 2uv$. Θέτοντας $u = u_0$ και απαλείφοντας το v μεταξύ των δύο σχέσεων, και όμοια θέτοντας $v = v_0$ και απαλείφοντας το u , προκύπτουν οι εξισώσεις για τις γραμμές που μετασχηματίζονται σε ευθείες $u = u_0 = \text{σταθ.}$ και $v = v_0$:

$$w(\zeta) = \zeta^{1/2} \Rightarrow \begin{cases} \xi = u_0^2 - \frac{\eta^2}{4u_0^2} \Rightarrow u = u_0, \\ \xi = -v_0^2 + \frac{\eta^2}{4v_0^2} \Rightarrow v = v_0, \end{cases} \quad (6.4-13)$$

με τις ειδικές περιπτώσεις $u_0 = 0$ και $v_0 = 0$ να εξετάζονται στη συνέχεια. Και οι δύο ευθείες γραμμές $u = u_0 = \text{σταθ.}$ και $v = v_0$ είναι απεικονίσεις των παραβολών $\xi = a - \eta^2/(4a)$, συμμετρικών ως προς $\eta = 0$, που τέμνουν τους άξονες στα σημεία $(\xi = a, \eta = 0)$ και $(\xi = 0, \eta = \pm 2a)$, με την εστία όλων τους στην αρχή των αξόνων και με τη διευθετούσα στο $\xi = 2a$. Οι παραβολές με τα κοίλα προς τα αρνητικά ξ , όπως η $AB\Gamma\Delta EZH$, αντιστοιχούν σε $a = u_0^2 > 0$ και απει-



Σχήμα 6.4-7

κονίζονται στις ευθείες $u = u_0 > 0$, όπως στο **Σχήμα 6.4-7**, με τις τιμές $u_0 < 0$ να μην είναι αποδεκτές, σύμφωνα με την επιλογή για τη θέση της κλαδικής τομής. Οι παραβολές με τα κοίλα προς τα θετικά ζ αντιστοιχούν σε $a = -v_0^2 < 0$. Για τις παραβολές αυτές πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν η ασυνέχεια που προκαλεί η παρουσία της κλαδικής τομής. Έτσι, το πάνω μισό $\Theta K Z I$ μιας τέτοιας παραβολής απεικονίζεται στην ημιευθεία $v = +|v_0^2|^{1/2}$, $u > 0$, ενώ το κάτω μισό $N B \Xi \Pi$ στην ημιευθεία $v = -|v_0^2|^{1/2}$, $u > 0$.

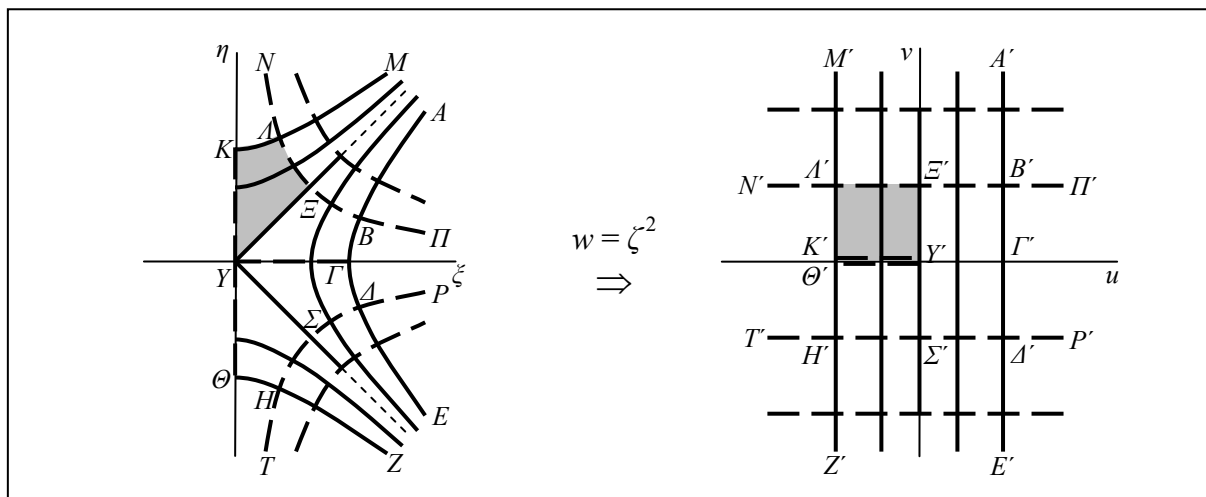
Όταν είναι $a \rightarrow 0$, η παραβολή $\zeta = a - \eta^2/(4a)$ εκφυλίζεται σε ζεύγος ημιευθειών. Ειδικότερα, όταν $a \rightarrow 0^-$, τότε στο επίπεδο ζ πρόκειται για τις ημιευθείες $\eta = 0^\pm$, $\zeta > 0$, που απεικονίζονται και οι δύο στον ημιάξονα $v = 0^\pm$, $u > 0$, χωρίς περαιτέρω συνέπειες. Αντίθετα, το όριο $a \rightarrow 0^+$ αντιπροσωπεύει στο επίπεδο ζ τις δύο πλευρές της κλαδικής τομής, τις ημιευθείες $\eta = 0^\pm$, $\zeta < 0$. Η απεικόνισή τους είναι συνολικά ο άξονας $u = 0$, με το τμήμα $v > 0$ να προέρχεται από το $\eta = 0^+$ και το τμήμα $v < 0$ από το $\eta = 0^-$. Στο **Σχήμα 6.4-7** τμήμα αυτών των γραμμών αντιπροσωπεύεται από τα ευθύγραμμα τμήματα AM και NM . Αυτές οι απεικονίσεις φαίνονται και από τη σχέση (6.4-11α).

Οι παραβολές $\zeta = a - \eta^2/(4a)$, μαζί με τα όρια $a \rightarrow 0$, αποτελούν δύο οικογένειες γραμμών, η μία με όσες έχουν $a > 0$ και η άλλη με $a < 0$, ανεξάρτητα αν εξετάστηκαν από κοινού. Κάθε μέλος της μιας οικογένειας τέμνεται ορθογώνια με κάθε μέλος της άλλης.

Οι παραβολές με συμμετρία ως προς τον άξονα ζ είναι εν γένει διπαραμετρική οικογένεια, με γενική μορφή $\zeta = a + b\eta^2$, ενώ οι παραβολές $\zeta = a - \eta^2/(4a)$ είναι ειδική περίπτωση, με $b = 1/(4a)$. Επιλέγοντας κατάλληλα τις παραμέτρους του μετασχηματισμού (6.4-10) είναι δυνατόν να προσαρμοσθεί μία μεμονωμένη παραβολή στη μορφή $\zeta = a - \eta^2/(4a)$ και ακολούθως με τη συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^{1/2}$ να απεικονισθεί σε ευθεία. Δεν υπάρχει, βέβαια, εξασφάλιση ότι οι άλλες γραμμές που απαρτίζουν το όριο θα έχουν εξ ίσου βολική απεικόνιση.

Ισοσκελείς υπερβολές: Για τη συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^2$, προκειμένου να είναι μονότιμη η αντίστροφη της $\zeta = w^{1/2}$, ας τεθεί ο περιορισμός $\zeta > 0$, ή, ισοδύναμα, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Με βάση τα προηγούμενα, βλ. σχέση (6.4-11), είναι προφανείς οι μετασχηματισμοί ημικύκλιου σε κύκλο και ημιευθείας σε ημιευθεία με διπλάσια πολική γωνία. Εδώ, κυρίως ενδιαφέρουν οι ιδιότητες μετασχηματισμού σε ευθείες $u = u_0$ ή $v = v_0$. Με ίδια διαδικασία, όπως στην προηγούμενη συνάρτηση, από τις σχέσεις $u = \zeta^2 - \eta^2$, $v = 2\zeta\eta$ προκύπτει:

$$w(\zeta) = \zeta^2 \Rightarrow \begin{cases} \zeta^2 - \eta^2 = u_0 & \Rightarrow u = u_0, \\ 2\zeta\eta = v_0 & \Rightarrow v = v_0. \end{cases} \quad (6.4-14)$$



Σχήμα 6.4-8

Οι ευθείες $u = u_0$ είναι οι απεικονίσεις των γραμμών $\zeta^2 - \eta^2 = u_0$, που είναι ισοσκελείς υπερβολές με ασυμπτώτους τις ευθείες $\eta = \pm\zeta$. Δεδομένου ότι και τα δύο πρόσημα είναι αποδεκτά για το u_0 , το ενδεχόμενο $u_0 = a^2 > 0$ αντιστοιχεί σε υπερβολές με μορφή $\zeta^2 = a^2 + \eta^2$, ειδικότερα στο σκέλος με τα κοίλα προς τα θετικά ζ (δεδομένου ότι οι τιμές $\zeta < 0$ έχουν εξαιρεθεί), όπως η καμπύλη $AB\Gamma\Delta E$ του Σχήματος 6.4-8. Για το ενδεχόμενο $u_0 = -a^2 < 0$, που αντιστοιχεί σε υπερβολές με μορφή $\eta^2 = a^2 + \zeta^2$, ο περιορισμός $\zeta > 0$ διατηρεί τα δεξιά μισά κάθε σκέλους της αντίστοιχης υπερβολής, όπως τις καμπύλες $ZH\Theta$ και $K\Lambda M$, με τα ακραία σημεία K και Θ αυτών των γραμμών να απεικονίζονται στις δύο πλευρές της κλαδικής τομής του επιπέδου w . Τέλος, μέλος αυτής της οικογένειας γραμμών είναι τα τμήματα $\zeta > 0$ των ασυμπτώτων $\eta = \pm\zeta$, που αντιστοιχούν σε $a = 0$ και απεικονίζονται στον άξονα $u = 0$.

Η δεύτερη οικογένεια γραμμών, που απεικονίζεται στις ημιευθείες $v = v_0$ με $u > 0$ και που είναι ορθογώνια προς την πρώτη, περιγράφεται από σχέσεις με μορφή $\zeta\eta = \frac{1}{2}v_0 = \pm b^2$. Πάλι πρόκειται για ισοσκελείς υπερβολές, τώρα με ασυμπτώτους τους άξονες, αλλά λαμβάνονται υπ' όψιν μόνο τα σκέλη που αντιστοιχούν σε $\zeta > 0$. Τέτοια είναι η καμπύλη $N\Lambda\Xi B\Pi$, που αντιστοιχεί σε $v_0 > 0$, και η $P\Delta\Sigma H\Gamma$ που απεικονίζεται σε $v_0 < 0$. Τέλος, η ίδια οικογένεια περιλαμβάνει, ως μία οντότητα που απεικονίζεται στον άξονα $v_0 = 0$, τόσο τον άξονα $\zeta = 0$, του οποίου κάθε μισό απεικονίζεται στις δύο πλευρές της κλαδικής τομής $u < 0$ (βλ. τα ευθύγραμμα τμήματα KY και ΘY), όσο και τον ημιάξονα $\eta = 0, \zeta > 0$.

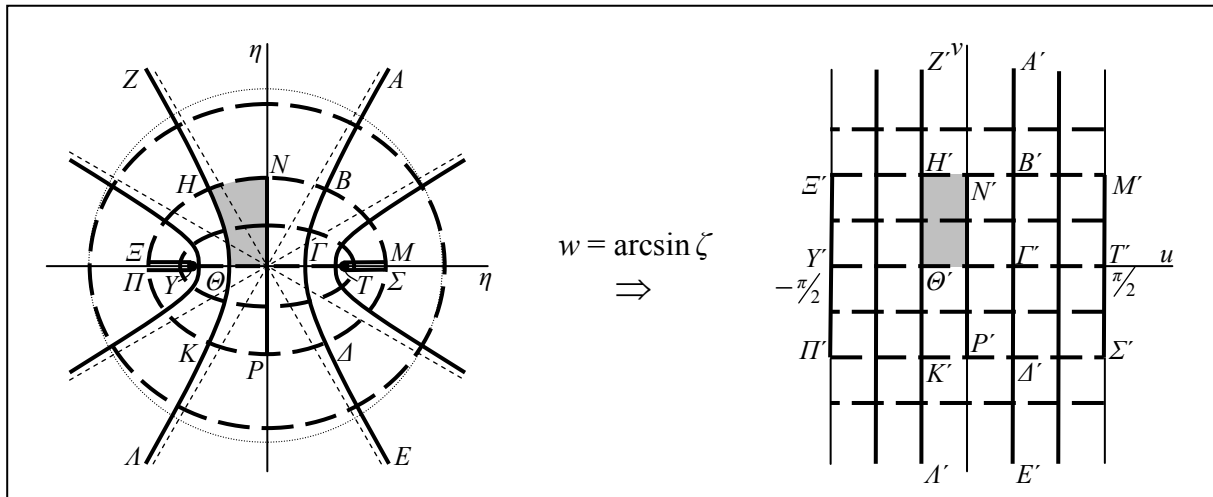
Οι ισοσκελείς υπερβολές αποτελούν ειδική περίπτωση, όταν $b = a$, των υπερβολών $(\zeta/a)^2 - (\eta/b)^2 = \pm 1$. Η γενική περίπτωση υπερβολών καλύπτεται από τη συνάρτηση $w(\zeta) = \arcsin \zeta$ που ακολουθεί.

Ομοεστιακές ελλείψεις και υπερβολές: Η συνάρτηση $w(\zeta) = \arcsin \zeta$, με αντίστροφη της την $\zeta = \sin w$, όπου $\zeta = \sin u \cosh v$ και $\eta = \cos u \sinh v$, γίνεται μονότιμη αν περιορισθεί κατάλληλα το επίπεδο w . Οποιαδήποτε και αν είναι η επιλογή, πρέπει να αποκλείει τη δυνατότητα οι όροι $\cos u$ και $\sinh v$ στο γινόμενο για το η να παίρνουν και οι δύο ελεύθερα τόσο θετικές, όσο και αρνητικές τιμές, γιατί τότε κάθε τιμή του η θα αντιστοιχεί σε δύο συνδυασμούς προσήμων για τα $\cos u$ και $\sinh v$. Είτε θα τεθεί ο περιορισμός $v > 0$, ώστε να είναι $\sinh v > 0$ και να είναι αποδεκτά και τα δύο πρόσημα του $\cos u$, είτε θα επιτραπούν όλες οι τιμές του v , οπότε θα τεθεί περιορισμός όπως $\cos u > 0$, δηλαδή $-\pi/2 < u < +\pi/2$. Εδώ θα υιοθετηθεί αυτή η δεύτερη επιλογή, οπότε το επίπεδο ζ απεικονίζεται στη ζώνη $-\pi/2 < u < +\pi/2$ του επιπέδου w . Ειδικότερα, κάθε τεταρτημόριο του επιπέδου ζ απεικονίζεται στο αντίστοιχο τεταρτημόριο αυτής της ζώνης, επειδή $\operatorname{sgn}(\zeta) = \operatorname{sgn}(\sin u) = \operatorname{sgn}(u)$ και $\operatorname{sgn}(\eta) = \operatorname{sgn}(\sinh v) = \operatorname{sgn}(v)$. Η εναλλακτική επιλογή να περιορισθεί το v σε θετικές τιμές, συνοδεύεται από τη δυνατότητα να ορισθεί το u σε διάστημα με πλάτος 2π , όπως το $-\pi < u < +\pi$. Όμως, στις απεικονίσεις με την επιλογή αυτή εμφανίζονται πρόσθετες ασυνέχειες, συνδεόμενες με τον τερματισμό του επιπέδου w στο $v = 0$, με συνέπεια η επιλογή αυτή να είναι, συνήθως, λιγότερο εύχρηστη.

Θέτοντας στις σχέσεις $\zeta = \sin u \cosh v$ και $\eta = \cos u \sinh v$ διαδοχικά $u = u_0$ και $v = v_0$ και απαλείφοντας την άλλη μεταβλητή (v ή u) με τη βοήθεια των σχέσεων $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$ και αντίστοιχα $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$, προκύπτουν οι εκφράσεις για τις γραμμές του επιπέδου ζ που απεικονίζονται στις ευθείες $u = u_0$ και $v = v_0$ (με $-\pi/2 < u_0 < +\pi/2$ και $-\infty < v_0 < +\infty$):

$$w(\zeta) = \arcsin \zeta \Rightarrow \begin{cases} \frac{\zeta^2}{\sin^2 u_0} - \frac{\eta^2}{\cos^2 u_0} = 1 & \Rightarrow u = u_0, \\ \frac{\zeta^2}{\cosh^2 v_0} + \frac{\eta^2}{\sinh^2 v_0} = 1 & \Rightarrow v = v_0. \end{cases} \quad (6.4-15)$$

Η πρώτη σχέση περιγράφει, ότι στις ευθείες $u = u_0$ απεικονίζονται οι υπερβολές με ασυμπτώτους $|\eta| = |\zeta \cot u_0|$ και εστίες στα $\zeta = \pm 1$. Σε τιμές $u_0 > 0$ αντιστοιχεί το σκέλος της υπερβολής με τα κοίλα προς το θετικό άξονα των ζ , επειδή $\zeta = \sin u_0 \cosh v > 0$, όπως η καμπύλη $AB\Gamma\Delta E$ στο **Σχήμα 6.4-9**. Αντίστοιχα, σε $u_0 < 0$ απεικονίζεται το άλλο σκέλος, το $ZH\Theta K\Lambda$. Οι τιμές που μηδενίζουν έναν παρονομαστή στη σχέση (6.4-14α) αντιπροσωπεύουν εκφυλισμένες υπερβολές. Όσον αφορά τον μηδενισμό του ημιτόνου, η τιμή $u_0 = 0$ αντιστοιχεί σε $\zeta = 0$ με $\eta = \sinh v$, στον άξονα των η , ο οποίος αντιπροσωπεύει τα δύο σκέλη μιας υπερβολής, στο όριο που οι δύο ασύμπτωτοί της έχουν ανοίξει τόσο ώστε να συμπίπτουν. Στο



Σχήμα 6.4-9

σχήμα τμήμα αυτής της υπερβολής είναι το ευθύγραμμο τμήμα NP . Ο μηδενισμός του συνημιτόνου οφείλεται στις τιμές $u_0 = \pm\pi/2$, που αντιστοιχούν σε $\eta = 0$ με $\zeta = \pm\cosh v$, δηλαδή στα τμήματα $\zeta > 1$ και $\zeta < -1$ του άξονα $\eta = 0$. Πρόκειται για υπερβολή, της οποίας οι ασύμπτωτοι έχουν κλείσει μέχρι να συμπέσουν. Μέρος από τα δύο σκέλη αυτής την υπερβολής παρουσιάζεται στο σχήμα ως τα διπλά ευθύγραμμα τμήματα $MT\Sigma$ και $\Xi Y\Pi$, όπου τα σημεία T και Y είναι στις θέσεις $\zeta = \pm 1$ των εστιών όλων των υπερβολών.

Η δεύτερη οικογένεια γραμμών που εμπλέκεται στον παρόντα μετασχηματισμό, αυτών που περιγράφονται από τη σχέση (6.4-14β) αντιπροσωπεύει ελλείψεις, με τις εστίες στις θέσεις $\zeta = \pm 1$, $\eta = 0$ και με το μεγάλο ημιάξονα, ίσο με $\cosh v_0$, κατά μήκος του άξονα ζ και το μικρό, ίσο με $\sinh v_0$, κατά μήκος του άξονα η , όπως φαίνεται και στην καμπύλη $MBNHE-ΠΚΡΔ\Sigma$. Στα διπλά σημεία $\Xi-Π$ και $\Sigma-M$, η έλλειψη τέμνεται από την εκφυλισμένη υπερβολή με $u_0 = \pm\pi/2$. Τα σημεία αυτά απεικονίζονται σε διακριτά σημεία $\Xi'-Π'$ και $\Sigma'-M'$ στο επίπεδο w , ως αποτέλεσμα της επιλογής της κλαδικής τομής στα $u = \pm\pi/2$. Για μεγάλες τιμές του v_0 είναι $\cosh v_0 \approx \sinh v_0$, οι δύο ημιάξονες έχουν περίπου το ίδιο μήκος και η έλλειψη μοιάζει πολύ με κύκλο. Στο σχήμα, η εξωτερική έλλειψη αντιστοιχεί στην τιμή $u_0 = 1,5$ και ήδη στην τιμή αυτή είναι έντονη η ομοιότητα με τον περιγραμμένο κύκλο που έχει σχεδιασθεί για λόγους σύγκρισης. Για μικρές τιμές $v_0 \approx 0$ είναι $\sinh v_0 \approx 0$, ο μικρός ημιάξονας πρακτικά μηδενίζεται και η έλλειψη εκφυλίζεται στη διπλή γραμμή $\eta = \cos u \sinh v_0 = \pm 0$ με $|\zeta| < 1$, τη γραμμή TY που συνδέει τις δύο εστίες των ελλείψεων.

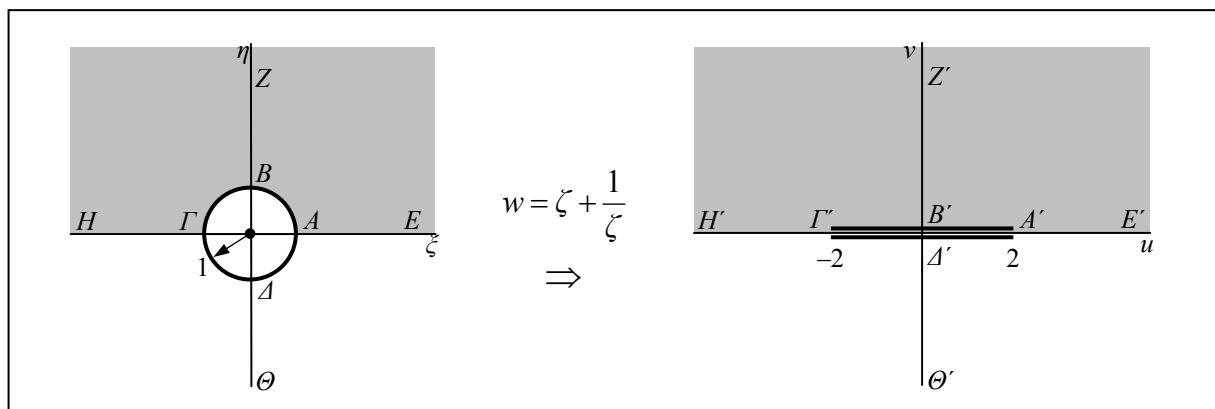
Απομάκρυνση κύκλου: Η συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ έχει δύο αντιστρόφους, τις ρίζες του τριωνύμου $\zeta^2 - w\zeta + 1 = 0$, δηλαδή, η αντίστροφος συνάρτηση $\zeta(w)$ δεν είναι μονότιμος. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός, ότι αν για κάποιο $\zeta = \zeta_1$ είναι $w_1 = w(\zeta_1) = \zeta_1 + 1/\zeta_1$, τότε για το $\zeta = \zeta_2 = 1/\zeta_1$ θα είναι πάλι $w(\zeta_2) = \zeta_2 + 1/\zeta_2 = 1/\zeta_1 + \zeta_1 = w(\zeta_1)$, δηλαδή τα σημεία ζ και $1/\zeta$ έχουν την ίδια απεικόνιση. Πρέπει δηλαδή το επίπεδο ζ να περιορισθεί κατάλληλα, ώστε να μην είναι και τα δύο αυτά σημεία, το ζ και το $1/\zeta$, στο πεδίο ορισμού της $w(\zeta)$. Από την πολική μορφή $\zeta = r \exp(j\varphi)$ και $1/\zeta = r^{-1} \exp(-j\varphi)$ φαίνεται αμέσως, ότι το ένα σημείο είναι μέσα και το άλλο έξω από το μοναδιαίο κύκλο: Αν είναι $r = |\zeta| > 1$, τότε είναι $|1/\zeta| = 1/r < 1$, και αντίστροφα. Ας γίνει η επιλογή να περιορίζεται το επίπεδο ζ μόνο στα σημεία έξω από το μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή να εξαιρούνται τα σημεία με $|\zeta| < 1$ από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $w(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$. Αν από το επίπεδο ζ ενδιαφέρουν μόνο τα σημεία με $r_c = |\zeta_c| < 1$, τότε η διαδικασία που παρουσιάζεται στη συνέχεια μπορεί να προσαρμοσθεί κατάλληλα. Συνήθως είναι απλούστερο να προηγηθεί ένας μετασχηματισμός $\zeta = 1/\zeta_c$, που μετασχηματίζει την περιοχή με $|\zeta_c| < 1$ στην περιοχή με $|\zeta| > 1$. [Επίσης, από την πολική μορφή $\zeta = r \exp(j\varphi)$ και $1/\zeta = r^{-1} \exp(-j\varphi)$ φαίνεται ότι αν, για παράδειγμα, είναι $0 < \varphi = \text{Arg}\{\zeta\} < \pi$, τότε είναι $0 > -\varphi = \text{Arg}\{1/\zeta\} > \pi$. Συνεπώς, η συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ μπορεί να γίνει μονότιμη με τον περιορισμό $\eta > 0$, ή με $\eta < 0$, που δεν οδηγεί όμως σε ενδιαφέρουσες απεικονίσεις.]

Με δεδομένη την επιλογή $|\zeta| > 1$ για τον πρωτεύοντα κλάδο, η συνάρτηση:

$$w(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta} = r \exp(j\varphi) + \frac{1}{r} \exp(-j\varphi), \quad (6.4-16)$$

δίνει τις απεικονίσεις που παρουσιάζονται στο **Σχήμα 6.4-10**, και ειδικότερα:

- ο Ο μοναδιαίος (με $r = 1$) κύκλος $AB\Gamma A$ μετασχηματίζεται σε $w = \exp(j\varphi) + \exp(-j\varphi) = 2\cos \varphi + j0$ και απεικονίζεται στο διπλό ευθύγραμμο τμήμα $-2 < u < 2, v = 0$.



Σχήμα 6.4-10

- ο Η ημιευθεία $\varphi = 0$, ειδικότερα ο ημιάξονας AE , έχει $\xi = r > 1$ και $\eta = 0$, συνεπώς $\zeta = r$. Ο μετασχηματισμός της, $w = r + 1/r$, απεικονίζει στην ημιευθεία $u = r + 1/r > 2$, $v = 0$.
- ο Η συμμετρική προς την προηγούμενη ημιευθεία $\varphi = +\pi$ (ή $\varphi = -\pi$), ακριβέστερα ο ημιάξονας GH , έχει $\xi = -r < -1$, $\eta = 0$ και συνεπώς $\zeta = -r$, οπότε μετασχηματίζεται σε $w = -(r + 1/r)$ και απεικονίζεται στην ημιευθεία $u = -(r + 1/r) < -2$, $v = 0$.
- ο Οι ημιευθείες BZ και $\Delta\Theta$, για τις οποίες είναι $\varphi = \pm\pi/2$ και συνεπώς $\zeta = \pm jr$, μετασχηματίζονται σε $w = \pm j(r - 1/r)$, που απεικονίζεται στους αντίστοιχους ημιάξονες $u = 0$, $v = \pm(r - 1/r)$.

Στον ίδιο μετασχηματισμό, $w = \zeta + 1/\zeta$, με το ζ σε πολική μορφή, $\zeta = r \exp(j\varphi)$, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $w = u + jv$ είναι $u = (r + 1/r) \cos \varphi$ και $v = (r - 1/r) \sin \varphi$. Θέτοντας $r = r_0$, με τη σχέση $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ απαλείφεται το φ . Ακολούθως, θέτοντας $\varphi = \varphi_0$, προσθαφαιρώντας τις δύο σχέσεις, και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τα αποτελέσματα, απαλείφεται το r . Έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$w(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta} \Rightarrow \begin{cases} r = r_0 & \Rightarrow \frac{u^2}{(r_0 + 1/r_0)^2} + \frac{v^2}{(r_0 - 1/r_0)^2} = 1, \\ \varphi = \varphi_0 & \Rightarrow \frac{u^2}{4 \cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{4 \sin^2 \varphi_0} = 1. \end{cases} \quad (6.4-17)$$

Η πρώτη σχέση δηλώνει, ότι κύκλοι με ακτίνα $r = r_0 > 1$ απεικονίζονται σε ελλείψεις, με την ακραία περίπτωση $r_0 \approx 1$ να απεικονίζεται στην εκφυλισμένη έλλειψη που αντιπροσωπεύει το διπλό ευθύγραμμο τμήμα AGA , με $-2 < u < +2$ και $v = 0^\pm$. Επίσης, ημιευθείες $\varphi = \varphi_0$ απεικονίζονται σε τέταρτα υπερβολών, καθώς και στους ημιάξονες, ως εκφυλισμένες υπερβολές, όταν η γωνία φ_0 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pi/2$. Αυτή η απεικόνιση δεν έχει άμεσο πρακτικό ενδιαφέρον. Θα μπορούσε, βέβαια, μετά από προσαρμογή να απεικονισθούν οι ελλείψεις και οι υπερβολές σε ευθείες $u = \text{σταθ.}$, $v = \text{σταθ.}$, με τη συνάρτηση $\arcsin \zeta$, βλ. σχέση (6.4-15). Αυτό θα ενέπλεκε την αλληλουχία $w_1 = \zeta + 1/\zeta$, $w_2 = \frac{1}{2}w_1$, $w_3 = \arcsin w_2$, $w_4 = w_3 - \pi/2$ και τέλος $w_5 = \pm jw_4$, με το πρόσημο που δίνει $|\zeta| > 1$. Με απλές αλγεβρικές πράξεις προκύπτει ότι $w_5 = \ln \zeta$, η συνάρτηση που απεικονίζει απευθείας κύκλους και ημιευθείες σε $u = \text{σταθ.}$ και $v = \text{σταθ.}$, βλ. σχέση (6.4-12). Αντίθετα, κάποιο πρακτικό ενδιαφέρον έχει η συνάρτηση $\zeta = \frac{1}{2}[1 \pm (1 + w^2)^{1/2}]$, η αντίστροφη της $w = \zeta + 1/\zeta$, που απεικονίζει ελλείψεις και υπερβολές του επιπέδου w σε κυκλικά τόξα και ημιευθείες στο επίπεδο ζ , προκειμένου εκεί η επίλυση να γίνει με χωρισμό μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες, αντί των καρτεσιανών, που θα ταίριαζαν στο ορθογώνιο που παράγει ο μετασχηματισμός $\zeta = \ln w$.

Γενικά σχόλια:

- Στους μετασχηματισμούς που συνδέονται με τα **Σχήματα 6.4-6** έως **6.4-9** μπορεί να παρακολουθήσει κανείς τις ιδιότητες που αναφέρονται στο Παράρτημα E.2.3 και που χαρακτηρίζουν την απεικόνιση ως σύμμορφη. Συγκεκριμένα:

(α) Οι γωνίες, ορθές στα αναφερόμενα σχήματα, διατηρούνται, εκτός από τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $w(\zeta)$ δεν είναι αναλυτική ή έχει μηδενική παράγωγο.

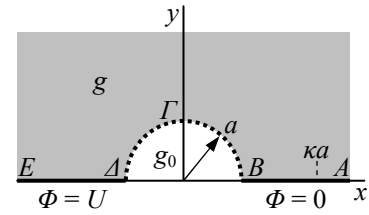
(β) Τα απειροστά στοιχεία απεικονίζονται σε όμοια σχήματα. Ακόμα και σε ορθογώνια με πεπερασμένες διαστάσεις, όπως οι σκιασμένες περιοχές στα αναφερόμενα σχήματα, μπορεί να παρατηρηθεί, ότι ο λόγος πλάτους προς μήκος διατηρείται, με την έννοια κάποιας μέσης τιμής όταν πρόκειται για καμπυλόγραμμο ορθογώνιο.

Επίσης, μπορεί να διαπιστωθεί ότι αντίστοιχες περιοχές είναι οι σκιασμένες, εφαρμόζοντας από τα κριτήρια που αναφέρονται στο Παράρτημα E.2.3, είτε το κριτήριο (γ) για τη διατήρηση της προσημασμένης γωνίας στις κορυφές, είτε το κριτήριο (δ) για τη φορά περιστροφής κατά μήκος του περιγράμματος.

- Από τις υπόλοιπες βασικές συναρτήσεις, η συνάρτηση $1/\zeta$ αποτελεί τη βάση για το ρητογραφικό μετασχηματισμό και παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο 6.4.3 αυτοτελώς, λόγω της ευρύτητας των διατάξεων που καλύπτει, με όρια που αποτελούνται από τόξα κύκλων και ευθύγραμμα τμήματα. Όσες άλλες συναρτήσεις παράγουν ενδιαφέρουσες απεικονίσεις μπορούν να θεωρηθούν σύνθετες, όπως η συνάρτηση $w(\zeta) = \sinh \zeta = -j \sin(j\zeta)$, η οποία σχηματίζεται από την αλληλουχία $w_1(\zeta) = j\zeta$, $w_2(w_1) = \sin w_1$ και $w(w_2) = -jw_2$.
- Ένα εκτενές απάνθισμα απεικονίσεων, στις οποίες περιλαμβάνονται και αποτελέσματα από την εφαρμογή του μετασχηματισμού των *Schwarz* και *Christoffel* (βλ. παράγρ. 6.4.4), υπάρχει στο Ruel V. Churchill, James W. Brown, «Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές», 2η έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005.

Στα *παραδ. 6.4-1* έως *6.4-7* παρουσιάζονται οι μετασχηματισμοί που μετατρέπουν το αρχικό πρόβλημα οριακών συνθηκών σε πρόβλημα εύκολα επιλύσιμο. Η λύση προσδιορίζεται αμέσως με μορφή $\Phi(u, v)$ και αντιστρέφεται για να προσδιορισθεί η σχέση $\Phi(x, y)$, όπου είναι εφικτό χωρίς ιδιαίτερη αλγεβρική εργασία. Για απλοποίηση στα σχήματα, για συνθήκη *Dirichlet* χρησιμοποιείται συνεχής γραμμή (—) και αναγράφεται η τιμή του Φ , ενώ για ομογενή συνθήκη *Neumann* χρησιμοποιείται γραμμή με στιγμές (.....) και δεν αναγράφεται τίποτα, επειδή εννοείται $\partial\Phi/\partial n = 0$. Όπου δεν ορίζεται η θέση του ορίου, εννοείται ότι η διάταξη εκτείνεται μέχρι το άπειρο, όπου εννοείται ότι είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$.

Παράδειγμα 6.4-1: Ο χώρος $y > 0$, $0 < z < L$ καταλαμβάνεται από ομογενές αγωγίμο υλικό, με ειδική αγωγιμότητα ίση με g , εκτός από την κυλινδρική περιοχή $r_T < a$. Οι επιφάνειες $y = 0$, $x > a$ και $y = 0$, $x < -a$ καλύπτονται από πολύ καλό αγωγό με $g_c = \infty$ και είναι η πρώτη γειωμένη και η δεύτερη σε δυναμικό U .



Στον υπόλοιπο χώρο, συμπεριλαμβανόμενης της περιοχής $r_T < a$, βρίσκεται μονωτής με $g_0 = 0$. Να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις $\Phi(x, y)$ και $\Psi(x, y)$ στο εσωτερικό του αγωγίμου υλικού και να χαραχθούν οι καμπύλες $\Phi = \text{σταθ.}$ και $\Psi = \text{σταθ.}$ ανά $\Delta\Phi = \Delta\Psi = \frac{1}{4}U$ και μέχρι $r_T = 5a$. Επίσης, να υπολογισθεί η αγωγιμότητα G_k της διάταξης, λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο το ρεύμα που διέρχεται από το τμήμα $a < x < ka$ του γειωμένου ορίου.

Επίλυση: Στο μήκος L της διάταξης όλα τα δεδομένα (σχήμα διατομής, οριακές συνθήκες, ιδιότητες χώρου) είναι ανεξάρτητα από τη συντεταγμένη z . Επίσης, στα όρια $z = 0$ και $z = L$ η παρουσία παρακείμενου μονωτή σημαίνει $\partial\Phi/\partial n = 0$, δηλαδή $\partial\Phi/\partial z = 0$. Πρόκειται, συνεπώς, για διάταξη με $\partial/\partial z = 0$, οπότε η μεταβλητή z μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί όχι πλέον ως συντεταγμένη, αλλά για να παραστήσει τη μιγαδική ποσότητα $z = x + jy$.

Στο εσωτερικό του αγωγίμου υλικού είναι $g = \text{σταθ.}$, οπότε το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση $\nabla^2\Phi = 0$. Συνεπώς, το δυναμικό είναι μέρος αναλυτικής συνάρτησης $\Omega = \Phi + j\Psi$ και σε κάθε επίπεδο w που παράγεται από απεικόνιση με αναλυτική συνάρτηση $w(z)$ το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, $\nabla_w^2\Phi = (\partial^2/\partial u^2)\Phi + (\partial^2/\partial v^2)\Phi = 0$.

Επειδή τα όρια της διάταξης περιέχουν ημιευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και κύκλο με κέντρο επίσης στην αρχή των αξόνων, κατάλληλη αναλυτική συνάρτηση είναι η λογαριθμική. Όπως έχει ορισθεί, η ποσότητα $z = x + jy$ δεν είναι αδιάστατη, αλλά έχει μονάδες μήκους, που προέρχονται από τις συντεταγμένες x και y . Το όρισμα της λογαριθμικής συνάρτησης πρέπει να είναι αδιάστατο, και αυτό επιτυγχάνεται διαιρώντας το z με το μήκος a . Θα χρησιμοποιηθεί, δηλαδή, η συνάρτηση $w(z) = \ln(z/a) = \ln(r/a) = \ln(r_T/a) + j\varphi$, όπου η θέση εκφράζεται στην πολική μορφή, $z = r \exp(j\varphi)$, με $r_T \rightarrow r$ για απλουστευση των συμβολισμών. Η αναγωγή σε πολλαπλάσια του μήκους a είναι ισοδύναμη με χρήση του μετασχηματισμού (6.4-10), που εδώ «μεγεθύνει» τον κύκλο κατά $P = 1/a$ και τον καθιστά με ακτίνα ίση με την αδιάστατη μονάδα.

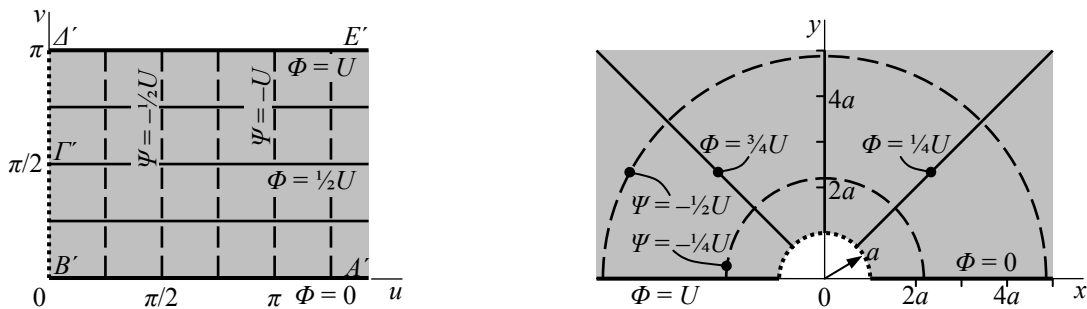
Η συνάρτηση $w(z) = \ln(z/a)$ έχει πραγματικό μέρος ίσο με $u = \ln(r_T/a)$ και φανταστικό $v = \varphi$, οπότε οι ημιευθείες $y = 0$, $x > a$ (δηλαδή, $\varphi = 0$ με $r_T/a > 1$) και $y = 0$, $x < -a$ (δηλαδή, $\varphi = \pi$ με $r_T/a > 1$) μετασχηματίζονται αντίστοιχα σε $u > 0$, $v = 0$ και σε $u = 0$, $v = \pi$, ενώ το ημικύ-

κλιο με ακτίνα a απεικονίζεται στην ευθεία $u = 0$, $0 < v < \pi$. Οι οριακές συνθήκες $\Phi = 0$ και $\Phi = U$ μεταφέρονται αυτούσιες στις απεικονίσεις $A'B'$ και $A'E'$ στο επίπεδο w , σύμφωνα με τη σχέση (6.4-8α). Το ίδιο γίνεται, με βάση τη σχέση (6.4-8β), και με τη συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$, που επικρατεί στο καμπύλο όριο $B'G'A'$, που αποτελεί διεπιφάνεια με ιδανικό μονωτή. Επίσης, είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$ και στο άπειρο του επιπέδου z , που απεικονίζεται στο $u = \infty$.

Στο επίπεδο w οι οριακές συνθήκες υποδεικνύουν εξάρτηση μόνο από τη συντεταγμένη v , οπότε με διαδοχικές ολοκληρώσεις της σχέσης $(\partial^2/\partial v^2)\Phi = 0$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τιμές $\Phi(v=0) = 0$ και $\Phi(v=\pi) = U$ προκύπτει αμέσως η έκφραση για το δυναμικό, $\Phi(v) = (U/\pi)v$. Η συζυγής αρμονική συνάρτηση Ψ προκύπτει εύκολα εφαρμόζοντας τις συνθήκες *Cauchy-Riemann*, σχέσεις (E.2-3), στη συνάρτηση $\Omega(w) = \Phi + j\Psi$. Συγκεκριμένα, η ισότητα $\partial\Psi/\partial u = -\partial\Phi/\partial v = -U/\pi$ δίνει $\Psi = -(U/\pi)u$, επιλέγοντας την αναφορά ώστε να είναι $\Psi(u=0) = 0$. Οι εκφράσεις αυτές μεταφέρονται αμέσως στο επίπεδο z και είναι:

$$\Phi(x, y) = \frac{U}{\pi} \varphi(x, y), \quad \Psi(x, y) = -\frac{U}{\pi} \ln \frac{r(x, y)}{a}.$$

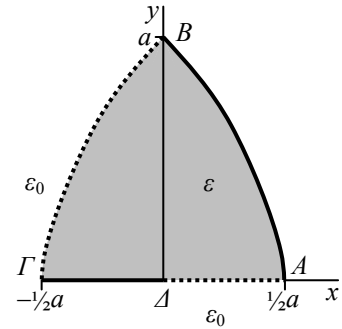
Οι γραμμές $\Phi = \text{σταθ.}$ είναι ημιευθείες, και ειδικότερα εκείνες ανά $\Delta\Phi = \frac{1}{4}U$ αντιστοιχούν στις τιμές $\varphi = n\pi/4$ (με $n = 0, 1, 2, 3, 4$). Οι γραμμές $\Psi = \text{σταθ.}$ είναι ομόκεντροι κύκλοι, και για βήμα $\Delta\Psi = \frac{1}{4}U$ οι ακτίνες είναι ίσες με $r = a \exp(n\pi/4)$, οι πρώτες από τις οποίες είναι ίσες με $r/a = 1.00, 2.19, 4.81, 10.55, \dots$



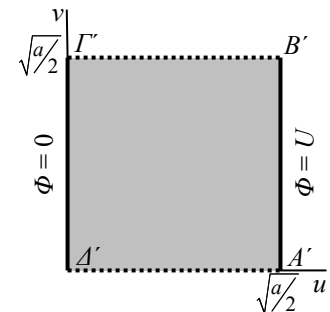
Η θέση $x = \kappa a$, $y = 0$ απεικονίζεται στο σημείο $u = \ln \kappa$, $v = 0$, και από εκεί διέρχεται η καμπύλη $\Psi_1 = -(U/\pi) \ln \kappa$, ενώ στο ημικύκλιο με ακτίνα a είναι $\Psi_2 = 0$. Στο επίπεδο $w = u + jv$ η διάταξη έχει απεικονισθεί σε διάταξη παράλληλων πλακών, οπότε εκεί η αγωγιμότητα είναι ίση με $G_\kappa = gL(\Psi_2 - \Psi_1)/(\Phi_2 - \Phi_1) = (gL/\pi) \ln \kappa$. Σε κάθε σχήμα που παράγεται από αναλυτική συνάρτηση η διαφορά $\Psi_2 - \Psi_1$ δίνει το διερχόμενο ηλεκτρικό ρεύμα ανά gL , σύμφωνα με τη σχέση (6.4-4β), οπότε και στην αρχική διάταξη η αγωγιμότητα είναι ίση με $G_\kappa = (gL/\pi) \ln \kappa$.

Σχόλιο: Στην αρχική διάταξη είναι $\partial/\partial n = 0$ στα $r_T = a$ και $r_T = \infty$ και τίποτε δεν εξαρτάται από το r_T ενδιάμεσα. Αναμένεται συνεπώς $\partial/\partial r_T = 0$, άρα $\partial^2\Phi/\partial\varphi^2 = 0$, με αποτέλεσμα $\Phi = (U/\pi)\varphi$.

Παράδειγμα 6.4-2: Μία γραμμή μεταφοράς περιέχει διηλεκτρικό υλικό με σταθερό ε ($\gg \varepsilon_0$) και μ_0 στην περιοχή που περικλείεται από τις γραμμές $x = \pm \frac{1}{2}(a^2 - y^2)/a$ και $y = 0$. Τα αγωγία όρια, καθώς και τα όρια που είναι ανοικτά στο περιβάλλον (με ε_0) σημειώνονται στο σχήμα (με συνεχή γραμμή και με στιγμές, αντίστοιχα). Ζητείται η κατανομή των συναρτήσεων Φ_{\perp} και Ψ_{\perp} στο εσωτερικό της διατομής, καθώς και η χωρητικότητα C_{ℓ} και η αυτεπαγωγή L_{ℓ} ανά μονάδα μήκους.



Επίλυση: Τα καμπύλα όρια AB και $B\Gamma$ της διατομής είναι τμήματα ομοεστιακών παραβολών, όπως στις σχέσεις (6.4-13), με την αντιστοιχία $a = 2u_0^2$ και $a = 2v_0^2$ για κάθε πρόσημο. Συνεπώς, με την αναλυτική συνάρτηση $w = z^{1/2}$ οι γραμμές AB και $B\Gamma$ απεικονίζονται σε τμήματα των ευθειών $u = (a/2)^{1/2}$ και $v = (a/2)^{1/2}$. Επίσης, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα $\Delta\Gamma$ και ΔA ανήκουν στις ίδιες οικογένειες γραμμών, ως τμήματα εκφυλισμένων παραβολών που αντιστοιχούν σε $u = 0$ και $v = 0$. Κατά συνέπεια, με τη συνάρτηση $w = z^{1/2}$ η διατομή της γραμμής μεταφοράς απεικονίζεται σε ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με $(a/2)^{1/2}$.

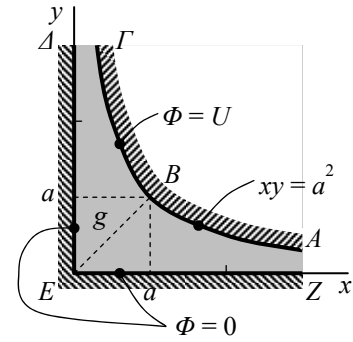


Το δυναμικό Φ_{\perp} είναι σταθερό στα αγωγία όρια και ας ληφθεί ίσο με $\Phi_{\perp, \Delta\Gamma} = 0$ και $\Phi_{\perp, AB} = U$. Στα ανοικτά όρια, ο παρακείμενος χώρος έχει $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$, που αντιστοιχεί σε οριακή συνθήκη $(\partial\Phi_{\perp}/\partial n)|_{B\Gamma} = (\partial\Phi_{\perp}/\partial n)|_{\Delta A} = 0$. Οι οριακές συνθήκες μεταφέρονται χωρίς καμία προσαρμογή στο επίπεδο w , οπότε αμέσως προσδιορίζεται το δυναμικό, $\Phi_{\perp} = U(2/a)^{1/2}u$. Η συνάρτηση $\Omega_{\perp} = \Phi_{\perp} + j\Psi_{\perp}$ είναι αναλυτική και συνεπώς ικανοποιεί τις συνθήκες *Cauchy-Riemann*. Εδώ ενδιαφέρει η σχέση $\partial\Phi_{\perp}/\partial u = \partial\Psi_{\perp}/\partial v$, από την οποία αμέσως προσδιορίζεται η συνάρτηση ροής, $\Psi_{\perp} = U(2/a)^{1/2}v$, με την αναφορά στο $v = 0$. Οι εκφράσεις για τα Φ_{\perp} και Ψ_{\perp} μεταφέρονται στο επίπεδο z , επιλύοντας ως προς u και v το σύστημα εξισώσεων $x = u^2 - v^2$ και $y = 2uv$. Οι τελικές εκφράσεις είναι:

$$\Phi_{\perp}(x, y) = U \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{a}}, \quad \Psi_{\perp}(x, y) = U \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{a}}.$$

Στο τετράγωνο του επιπέδου w , στο οποίο απεικονίζεται η διατομή της γραμμής μεταφοράς, προφανώς, η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους είναι $C_{\ell} = \varepsilon(A'B')/(A'\Delta') = \varepsilon(a/2)^{1/2}/(a/2)^{1/2} = \varepsilon$. Ή, ισοδύναμα, η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους προσδιορίζεται από τη σχέση (6.4-9α). Από τη σχέση $C_{\ell}L_{\ell} = \varepsilon\mu$ προκύπτει ακολούθως, ότι $L_{\ell} = \mu_0$.

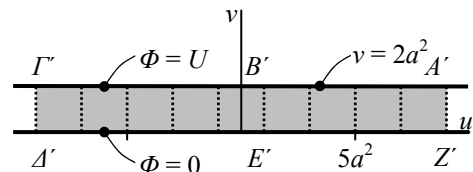
Παράδειγμα 6.4-3: Μία διάταξη με μήκος h αποτελείται από αγωγίμο υλικό, με σταθερή ειδική αγωγιμότητα g , που βρίσκεται στην περιοχή που οριοθετείται αφενός από τους θετικούς ημιάξονες x και y , και αφετέρου από την υπερβολή $xy = a^2$. Πέρα από αυτά τα όρια υπάρχει πολύ καλός αγωγός, $g_c = \infty$, σε δυναμικό $\Phi = 0$ και $\Phi_2 = U$, ενώ, αντίθετα, πέρα από το μήκος h βρίσκεται μονωτικό υλικό, με $g_0 = 0$.



- (α) Να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις $\Phi(x, y)$ και $\Psi(x, y)$ στο εσωτερικό της διάταξης.
- (β) Να χαραχθούν, μέχρι $x = 3a$ και $y = 3a$, οι καμπύλες $\Phi = 0,5 U$ και $\Phi = 0,1 U$, καθώς και οι καμπύλες $\Psi = \text{σταθ.}$, ανά $\Delta\Psi = U$.
- (γ) Να υπολογισθεί η αγωγιμότητα G_k που αντιστοιχεί στο ρεύμα που διέρχεται από τα τμήματα $x < ka$ και $y < ka$ του γειωμένου τοιχώματος.
- (δ) Αν το γειωμένο τοίχωμα τερματίζεται στις θέσεις $x = ka$ και $y = ka$, ποιο σχήμα πρέπει να έχει το όριο του αγωγίμου υλικού, ώστε η αγωγιμότητα της διάταξης να δίδεται από το αποτέλεσμα G_k του προηγούμενου ερωτήματος;

Επίλυση: (α) Πρόκειται για διάταξη με $\partial/\partial z = 0$, επειδή όλα τα δεδομένα είναι ανεξάρτητα από τη συντεταγμένη z στο μήκος h της διάταξης, ενώ στα άκρα $z = 0$ και $z = h$ η παρακαίμενη παρουσία μονωτή σημαίνει $\partial\Phi/\partial n = 0$. Συνεπώς, είναι $\partial\Phi/\partial z = 0$ και στη συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός $z = x + jy$. Επειδή είναι $g = \text{σταθ.}$ στο εσωτερικό του αγωγίμου υλικού, ισχύει $\nabla^2\Phi = 0$. Το δυναμικό είναι μέρος αναλυτικής συνάρτησης $\Omega = \Phi + j\Psi$ και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, $\nabla_w^2\Phi = (\partial^2/\partial u^2)\Phi + (\partial^2/\partial v^2)\Phi = 0$, σε κάθε επίπεδο w που παράγεται από απεικόνιση με αναλυτική συνάρτηση $w(z)$. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης $w(z) = z^2 = (x + jy)^2$ είναι ίσα με $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, οπότε οι ημιάξονες $y = 0$, $x > 0$ και $x = 0$, $y > 0$ μετασχηματίζονται αντίστοιχα σε $u = x^2 > 0$, $v = 0$ και σε $u = -y^2 < 0$, $v = 0$. Συνολικά, το γειωμένο όριο απεικονίζεται σε ολόκληρο τον άξονα $v = 0$, ενώ το όριο σε δυναμικό U απεικονίζεται στην ευθεία $v = 2xy = 2a^2$.

Στο επίπεδο w , οι οριακές συνθήκες παραμένουν με τη μορφή $\Phi(v=0) = 0$, $\Phi(v=2a^2) = U$, και $(\partial\Phi/\partial n)|_{u=\pm\infty} = 0$, δηλαδή $(\partial\Phi/\partial u)|_{u=\pm\infty} = 0$, με βάση τις σχέσεις (6.4-8).

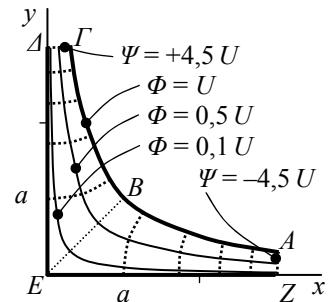


Προφανώς είναι $\partial/\partial u = 0$ και με άμεση ολοκλήρωση της σχέσης $\nabla_w^2\Phi = \partial^2\Phi/\partial v^2 = 0$, λαμβάνοντας υπ' όψιν και τις τιμές στις οριακές θέσεις $v = 0$ και $v = 2a^2$, προκύπτει $\Phi(v) = U(v/2a^2)$. Το αποτέλεσμα αυτό μεταφέρεται αμέσως στο επίπεδο

δο z , ως $\Phi(x, y) = U(xy/a^2)$. Η συζυγής αρμονική συνάρτηση Ψ προσδιορίζεται εύκολα, εφαρμόζοντας στη συνάρτηση $\Omega(w)$ τις συνθήκες *Cauchy-Riemann*, σχέσεις (Ε.2-3), ειδικότερα την ισότητα $\partial\Psi/\partial u = -\partial\Phi/\partial v = -U(1/2a^2)$, που δίνει $\Psi = -U(u/2a^2)$, με επιλογή της αναφοράς ώστε να είναι $\Psi(u=0) = 0$. Κατά συνέπεια, είναι:

$$\Phi(x, y) = U \frac{xy}{a^2}, \quad \Psi(x, y) = -U \frac{x^2 - y^2}{2a^2}.$$

(β) Οι ισοδυναμικές καμπύλες $\Phi = 0,5 U$ και $\Phi = 0,1 U$ περιγράφονται από τις σχέσεις $xy = 0,5 a^2$ και $xy = 0,1 a^2$ και σχεδιάζονται εύκολα, παίρνοντας σε κάθε x ή y ως τιμή του y ή x το μισό ή το ένα δέκατο της τιμής στο όριο. Αξιοσημείωτο είναι ότι κοντά στην κορυφή, στο σημείο E , η καμπύλη $\Phi = 0,1 U$ απομακρύνεται αισθητά από το γειωμένο όριο, υποδηλώνοντας ότι

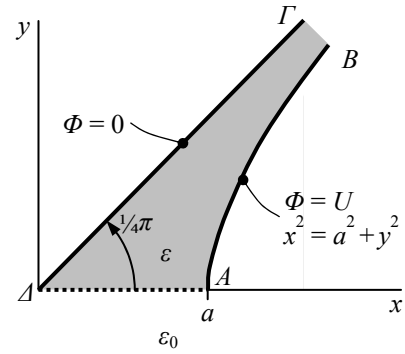


εκεί το ηλεκτρικό πεδίο έχει μικρή τιμή. Για τις καμπύλες ροής Ψ , το βήμα $\Delta\Psi = U$ αντιστοιχεί σε $\Delta u = -2a^2$, επειδή είναι $\Psi = -Uu/2a^2$. Οι ακραίες θέσεις Δ και Z αντιστοιχούν σε $u = \mp 9a^2$, οπότε το βήμα αυτό καλύπτεται από τις καμπύλες με $2\Psi = \pm(1, 3, 5, 7 \text{ και } 9) U$. Για να σχεδιασθούν αυτές οι καμπύλες στο επίπεδο (x, y) , αρκεί μόνο να προσδιορισθούν τα άκρα τους, στις καμπύλες με $\Phi = 0$ και $\Phi = U$, και από εκεί να ξεκινήσουν κάθετα προς το όριο.

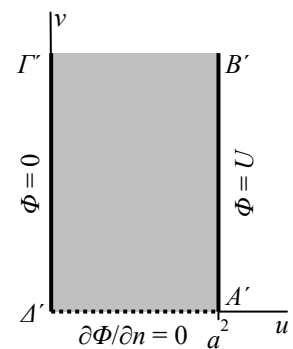
(γ) Στο γειωμένο τοίχωμα, η θέση $x = ka$ απεικονίζεται στο σημείο με $u = +(ka)^2$, $v = 0$, και η θέση $y = ka$ στο $u = -(ka)^2$, $v = 0$, όπου οι τιμές της συνάρτησης ροής είναι $\Psi_{1,2} = \mp 1/2 \kappa^2 U$, αντίστοιχα. Στο επίπεδο $w = u + jv$, στο οποίο η διάταξη έχει απεικονισθεί σε διάταξη παράλληλων πλακών, η αγωγιμότητα είναι ίση με $G_\kappa = gh(\Psi_2 - \Psi_1)/(\Phi_2 - \Phi_1) = gh(\kappa^2 U)/U = \kappa^2 gh$. Δεδομένου, όμως, ότι η διαφορά $\Psi_2 - \Psi_1$, πολλαπλασιασμένη με gh , αντιπροσωπεύει διερχόμενο ηλεκτρικό ρεύμα, βλ. σχέση (6.4-4β), η αγωγιμότητα έχει την ίδια τιμή και σε κάθε άλλο σχήμα που παράγεται από αναλυτική συνάρτηση, άρα και στην αρχική διάταξη η αγωγιμότητα είναι ίση με $G_\kappa = \kappa^2 gh$.

(δ) Το αποτέλεσμα $G_\kappa = \kappa^2 gh$ περιγράφει την αγωγιμότητα που αντιστοιχεί στο αγωγίμο υλικό μεταξύ των γραμμών ροής με $\Psi_1 = -1/2 \kappa^2 U$, και $\Psi_2 = +1/2 \kappa^2 U$. Οι γραμμές $\Psi = \text{σταθ.}$ είναι κάθετες προς τις γραμμές $\Phi = \text{σταθ.}$, οπότε στις γραμμές $\Psi = \Psi_{1,2}$, όπου τερματίζεται το αγωγίμο υλικό, θα είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$, ακριβώς όπως πρέπει να συμβαίνει στο όριο αγωγού με μονωτή. Συνεπώς, για να είναι $G = G_\kappa = \kappa^2 gh$ κατάλληλα πλευρικά όρια είναι αυτά που αντιστοιχούν σε $\Psi = -U(x^2 - y^2)/(2a^2) = \Psi_{1,2} = \mp 1/2 \kappa^2 U$, αφενός η γραμμή $x^2 = y^2 + (ka)^2$ με $y > 0$ και μέχρι την τομή με την υπερβολή $xy = a^2$, και αφετέρου η γραμμή $y^2 = x^2 + (ka)^2$.

Παράδειγμα 6.4-4: Διηλεκτρικό υλικό, με σταθερή επιτρεπτότητα $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ περικλείεται μεταξύ του ημιεπιπέδου $\varphi = \pi/4$ και του τμήματος $x, y > 0$ της επιφάνειας $x^2 = a^2 + y^2$, στο διάστημα $0 < z < h$. Τα όρια αυτά αποτελούνται από πολύ καλό αγωγό και είναι αντίστοιχα γειωμένα και σε δυναμικό U , ενώ ο υπόλοιπος χώρος περιέχει αέρα (με ε_0). Να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις $\Phi(x, y)$ και $\Psi(x, y)$ στο εσωτερικό της διάταξης και να υπολογισθεί η χωρητικότητα C_k , λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο το φορτίο που βρίσκεται σε μήκος $\Delta\Gamma = (\kappa a)$ του γειωμένου τοιχώματος.



Επίλυση: Επειδή είναι $\varepsilon = \text{σταθ.}$, το δυναμικό υπακούει στην εξίσωση του Laplace, $\nabla^2 \Phi = 0$, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της σύμμορφης απεικόνισης. Με την αναλυτική συνάρτηση $w = z^2$, με τα μέρη $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, το καμπύλο όριο AB απεικονίζεται στην ημιευθεία $u = a^2$, $v > 0$, το ευθύγραμμο όριο $\Gamma\Delta$ στην ημιευθεία $u = 0$, $v > 0$, και τέλος το ανοικτό όριο ΔA στο ευθύγραμμο τμήμα $0 < u < a^2$, $v = 0$. Εκτός από τις οριακές συνθήκες $\Phi = 0$, $\Phi = U$ και $(\partial\Phi/\partial n)|_\infty = 0$, πρέπει να διατυπωθεί και η συνθήκη στο τμήμα ΔA του ορίου. Εκεί ο παρακεείμενος χώρος χαρακτηρίζεται από $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$, οπότε η αντίστοιχη οριακή συνθήκη είναι, επίσης, $\partial\Phi/\partial n = 0$.



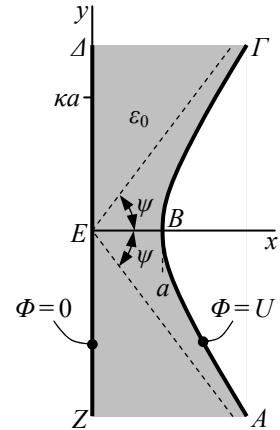
Μεταφέροντας τέτοιου τύπου οριακές συνθήκες αυτούσιες στην απεικόνιση της διηλεκτρικής περιοχής, διαπιστώνεται ότι η διάταξη χαρακτηρίζεται από $\partial\Phi/\partial n = 0$, οπότε η λύση της εξίσωσης Laplace στο επίπεδο w αμέσως προκύπτει ίση με $\Phi = (U/a^2)u$ και $\Psi = (U/a^2)v$, που μεταφέρονται στις συντεταγμένες της αρχικής διάταξης ως:

$$\Phi(x, y) = U \frac{x^2 - y^2}{a^2}, \quad \Psi(x, y) = U \frac{xy}{a^2}.$$

Το μήκος $\Delta\Gamma = (\kappa a)$ μετασχηματίζεται σε μήκος $\Delta'\Gamma' = (\kappa a)^2$, και για $v = (\kappa a)^2$ η συνάρτηση ροής έχει την τιμή $\Psi = (U/a^2)(\kappa a)^2 = \kappa^2 U$, οπότε η αντίστοιχη χωρητικότητα είναι ίση με $C_k = \varepsilon h(\Psi_2 - \Psi_1)/(\Phi_2 - \Phi_1) = \varepsilon h(\kappa^2 U)/U = \kappa^2 \varepsilon h$. Συνεπώς και στην αρχική διάταξη είναι $C_k = \kappa^2 \varepsilon h$.

Σχόλιο: Επεκτείνοντας συμμετρικά ως προς ΔA , όπου $\partial\Phi/\partial n = 0$, και εφαρμόζοντας έναν ενδιάμεσο μετασχηματισμό $w_1/z = 2^{1/2} \exp(1/4 j\pi)$ που μεγαθύνει κατά $\sqrt{2}$ και στρέφει κατά $\pi/4$, παράγεται η διάταξη του προηγούμενου παραδείγματος και με $g \rightarrow \varepsilon$ μπορούν να αξιοποιηθούν τα εκεί αποτελέσματα. Όμως, ταχύτερη είναι η απευθείας επίλυση που παρουσιάστηκε. Επίσης, είναι εφικτή, αλλά πιο πολύπλοκη, η επίλυση με $w = \arcsin \zeta$, βλ. **παράδ. 6.4-5**.

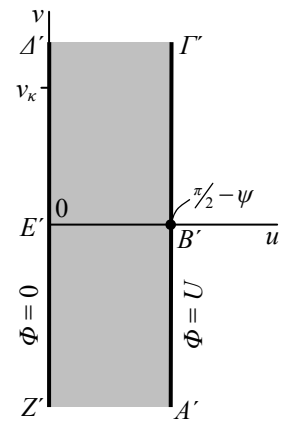
Παράδειγμα 6.4-5: Σε διάταξη χωρίς εξάρτηση από τη συντεταγμένη z , να προσδιορισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ στον κενό χώρο μεταξύ του γειωμένου επιπέδου $x = 0$ και επιφάνειας σε τάση U , με σχήμα παραγόμενο από την υπερβολή που διέρχεται από το σημείο $x = a, y = 0$, και με ασυμπτώτους με γωνία ψ σε σχέση με τον άξονα x . Επίσης, να προσδιορισθεί η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, που αντιστοιχεί στο τμήμα $0 < y < ka$ του γειωμένου επιπέδου.



Επίλυση: Η συνάρτηση $w(z) = z^2$ δεν είναι κατάλληλη για την παρούσα διάταξη, όχι μόνο επειδή η υπερβολή δεν είναι ισοσκελής, αλλά ακόμα και στην ειδική περίπτωση $\psi = \pi/4$, επειδή τότε με τη συνάρτηση αυτή το επίπεδο όριο απεικονίζεται στον αρνητικό ημιάξονα u και η υπερβολή σε γραμμή $u = σταθ.$, βλ. Σχήμα 6.4-8, παράγεται δηλαδή διατομή με σχήμα που δεν επιτρέπει άμεση επίλυση. Για την γενική περίπτωση υπερβολών η κατάλληλη συνάρτηση είναι το τόξο ημιτόνου. Και η εξεταζόμενη διάταξη περιέχει όχι μόνο την υπερβολή ABG , αλλά και την ευθεία ΔEZ , που αποτελεί εκφυλισμένη υπερβολή, της οποίας οι ασυμπτωτοι έχουν κλίση με γωνία $\pi/2$.

Η υπερβολή ABG , συγκρινόμενη με εκείνες του Σχήματος 6.4-9, έχει ασυμπτώτους που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, άρα δεν χρειάζεται να μετατοπισθεί, και τον ίδιο προσανατολισμό, άρα ούτε χρειάζεται να στραφεί. Δεν έχει, όμως, το ίδιο μέγεθος. Αυτό φαίνεται αν συγκριθεί η σχέση $x^2 - y^2 \cot^2 \psi = a^2$, ή $x^2/a^2 - y^2/(a \tan \psi)^2 = 1$ που περιγράφει την υπερβολή ABG , με την εξίσωση $\zeta^2/\sin^2 u_0 - \eta^2/\cos^2 u_0 = 1$ των υπερβολών που χειρίζεται ο μετασχηματισμός $\arcsin \zeta$, με $\zeta = \xi + j\eta$. Οι παρονομαστές διαφέρουν, επειδή οι εστίες της υπερβολής ABG δεν βρίσκονται στις θέσεις $x = \pm 1$. Δεν χρειάζεται, όμως, να προσδιορισθεί η θέση των εστιών. Αρκεί να προταχθεί ένας μετασχηματισμός, που να κάνει τις σχέσεις $x^2/a^2 - y^2/(a \tan \psi)^2 = 1$ και $\zeta^2/\sin^2 u_0 - \eta^2/\cos^2 u_0 = 1$ να συμπίπτουν. Τέτοιος είναι ο μετασχηματισμός (6.4-10), με μορφή $\zeta = Pz$, αλλά με πραγματικό P , επειδή μόνο μεγέθυνση χρειάζεται και όχι στροφή. Με $\zeta = Px$ και $\eta = Py$, οι δύο αυτές σχέσεις συμπίπτουν, αν είναι $u_0 = \pi/2 - \psi$ και $P = a^{-1} \cos \psi$. Συνενώνοντας τους μετασχηματισμούς $\zeta = Pz$ και $w = \arcsin \zeta$, η συνάρτηση για το μετασχηματισμό της αρχικής διάταξης είναι η $w(z) = \arcsin[(z/a)\cos \psi]$. Η αντίστροφη συνάρτηση $z = a \sin w/\cos \psi$ έχει πραγματικό μέρος $x = a \sin u \cosh v/\cos \psi$, που για $u = \pi/2 - \psi$ αντιστοιχεί σε $x_{AG} = a \cosh v$ και για $u = 0$ αντιστοιχεί σε $x_{AZ} = 0$. Επίσης, το φανταστικό μέρος της είναι $y = a \cos u \sinh v/\cos \psi$, που αντιστοιχεί σε $y_{AG} = a \tan \psi \sinh v$ και $y_{AZ} = a \sinh v/\cos \psi$. Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι τα x_{AG} και y_{AG} ικανοποιούν την εξίσωση της υπερβολής ABG .

Η αρχική περιοχή $AB\Gamma\Delta EZA$ απεικονίζεται σε ταινία με άπειρο μήκος και πλάτος $\pi/2 - \psi$. Με τις οριακές συνθήκες $\Phi = 0$ και $\Phi = U$, καθώς και την εννοούμενη συνθήκη στο άπειρο, $\partial\Phi/\partial n = 0$, να μεταφέρονται αυτούσιες, η επίλυση της εξίσωσης *Laplace* στο επίπεδο w είναι στοιχειώδης, $\Phi = Uu/(\pi/2 - \psi)$.

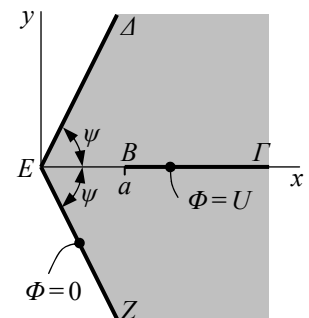


Τέλος, η χωρητικότητα που αντιστοιχεί στο τμήμα $0 < y < y_k = ka$ του γειωμένου επιπέδου είναι ίση με τη χωρητικότητα που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο τμήμα $0 < v < v_k = v(0, y_k)$ της απεικόνισης $u = 0$. Αμέσως φαίνεται ότι είναι $\kappa = \sinh v_k / \cos \psi$, οπότε η ζητούμενη χωρητικότητα (ανά μονάδα μήκους), τόσο στο επίπεδο w , όσο και στην αρχική διάταξη, είναι:

$$C_{\ell, \kappa} = \epsilon_0 \frac{v_k}{\pi/2 - \psi} = \epsilon_0 \frac{\operatorname{arcsinh}(\kappa \cos \psi)}{\pi/2 - \psi}.$$

Σχόλιο: Για να προσδιορισθεί το δυναμικό στην αρχική διάταξη, ως συνάρτηση $\Phi(x, y)$, πρέπει από το σύστημα εξισώσεων $\zeta = \sin u \cosh v$ και $\eta = \cos u \sinh v$ πρώτα να απαλειφεί το v , με τη βοήθεια της σχέσης $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$, και η σχέση που σχηματίζεται να λυθεί ως προς $u(x, y)$. Μολονότι δεν είναι αυτό το κύριο ζητούμενο εδώ, ας σημειωθεί ότι με στοιχειώδεις τεχνικές η διαδικασία δίνει το αποτέλεσμα $\operatorname{arcsin} \zeta = \operatorname{arcsin} \chi_- + j \ln [\chi_+ + (\chi_+^2 - 1)^{1/2}]$, όπου $2\chi_{\pm} = [(\zeta + 1)^2 + \eta^2]^{1/2} \pm [(\zeta - 1)^2 + \eta^2]^{1/2}$, και τέλος $\Phi = [U/(\pi/2 - \psi)] \operatorname{Re} \{ \operatorname{arcsin} \zeta \}$.

Παράδειγμα 6.4-6: Δύο γειωμένες αγωγίμες πλάκες με μεγάλες διαστάσεις σχηματίζουν διέδρη γωνία, με άνοιγμα ίσο με 2ψ . Στο επίπεδο συμμετρίας και σε απόσταση a από την ακμή της διέδρης γωνίας βρίσκεται μία τρίτη αγωγίμη πλάκα, σε δυναμικό $\Phi = U$. Ζητείται η κατανομή του δυναμικού Φ στον ενδιάμεσο χώρο.

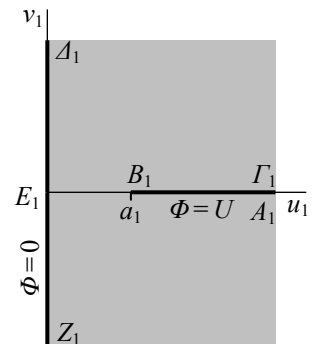


Επίλυση: Η γραμμή $B\Gamma$ μπορεί να θεωρηθεί εκφυλισμένη υπερβολή,

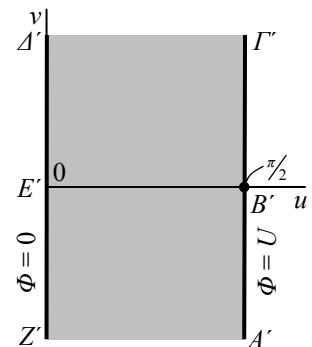
όπως η διπλή γραμμή $MT\Sigma$ στο Σχήμα 6.4-9, και θα μπορούσε ο χειρισμός της να γίνει με τη συνάρτηση $\operatorname{arcsin} \zeta$. Όμως, το τόξο ημιτόνου δεν είναι κατάλληλο για την τεθλασμένη γραμμή ΔEZ , καθώς η συνάρτηση arcsin μετασχηματίζει ευνοϊκά τις υπερβολές, αλλά όχι τις ασυμπτώτους τους. Αν, όμως, η γραμμή ΔEZ συνέπιπτε με τον άξονα y , τότε θα μπορούσε και αυτή να θεωρηθεί εκφυλισμένη υπερβολή, όπως η γραμμή NP στο Σχήμα 6.4-9,) και η συνάρτηση $\operatorname{arcsin} \zeta$ θα ήταν χρήσιμη. Αυτή η παρατήρηση υποδεικνύει τη διαδοχική εφαρμο-

γή δύο μετασχηματισμών, πρώτα με συνάρτηση της μορφής $w_1(z) = z^\kappa$, με κατάλληλο κ για να μετατραπεί η γωνία ψ σε ορθή, βλ. σχέση (6.4-11), και ακολούθως με το τόξο ημιτόνου.

Η συνάρτηση $w_1(z) = z^\kappa = r^\kappa \exp(j\kappa\varphi)$ μετατρέπει τις γωνίες με κορυφή στην αρχή των αξόνων από φ σε $\theta_1 = \kappa\varphi$. Για να μεταβληθεί η γωνία ψ σε $\pi/2$, ώστε να απεικονισθεί η τεθλασμένη γραμμή ΔEZ στον άξονα $u_1 = 0$, η επιλογή είναι $\kappa = \pi/2\psi$. Ταυτόχρονα, η γραμμή $B\Gamma$ παραμένει στον οριζόντιο άξονα (στο $\varphi = 0$ αντιστοιχεί το $\theta_1 = \kappa\varphi = 0$), αλλά η αφετηρία της μετατοπίζεται από το $x = a$ στο $u_1 = a_1 = a^\kappa$, και στο σχήμα συμβολίζεται ως $A_1B_1\Gamma_1$, με την προσθήκη του σημείου A_1 , για να προβληθεί ότι πρόκειται να θεωρηθεί εκφυλισμένη υπερβολή. Επίσης, οι συνθήκες $\Phi = 0$ και $\Phi = U$ απλά μεταφέρονται στα νέα όρια.



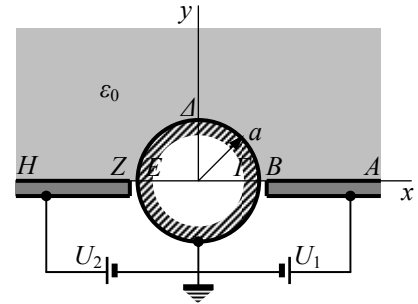
Για την εφαρμογή του δεύτερου μετασχηματισμού, με τη συνάρτηση $\arcsin \zeta$, πρέπει το σχήμα να μεγεθυνθεί κατάλληλα, ώστε η ημιεστιακή απόσταση της εκφυλισμένης υπερβολής $A_1B_1\Gamma_1$ να γίνει ίση με τη μονάδα, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Εδώ η διαδικασία είναι απλούστερη, δεδομένου ότι το άκρο B_1 της εκφυλισμένης υπερβολής βρίσκεται ακριβώς στην εστία και η ημιεστιακή απόσταση είναι ίση με a_1 , οπότε η μεγέθυνση γίνεται



με τον συντελεστή $1/a_1$ και η απεικόνιση γίνεται με τη συνάρτηση $w = \arcsin(w_1/a_1)$. Η αντίστροφη συνάρτηση $w_1 = a_1 \sin w$ έχει πραγματικό μέρος ίσο με $u_1 = a_1 \sin u \cosh v$ και φανταστικό ίσο με $v_1 = a_1 \cos u \sinh v$, οπότε αμέσως φαίνεται πως το γειωμένο όριο $u_1 = 0$ απεικονίζεται στον άξονα $u = 0$ και η διπλή ημιευθεία, αυτή σε τάση U , στην ευθεία $u = \pi/2$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την υπονοούμενη οριακή συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$ στο εγκάρσιο άπειρο, το οποίο στο επίπεδο w βρίσκεται στο $v = \pm\infty$, το δυναμικό είναι ανεξάρτητο από τη μεταβλητή v και συνεπώς είναι ίσο με $\Phi = (2U/\pi)u$. Για να γραφεί το δυναμικό ως $\Phi(x, y)$, η εξαγωγή της σχέσης $u = (u_1, v_1)$ περιγράφεται στο **σχόλιο** του προηγούμενου **παραδ. 6.4-5**, ενώ για τον πρώτο μετασχηματισμό είναι, προφανώς, $u_1(r, \varphi) = r^\kappa \cos(\kappa\varphi)$ και $v_1(r, \varphi) = r^\kappa \sin(\kappa\varphi)$.

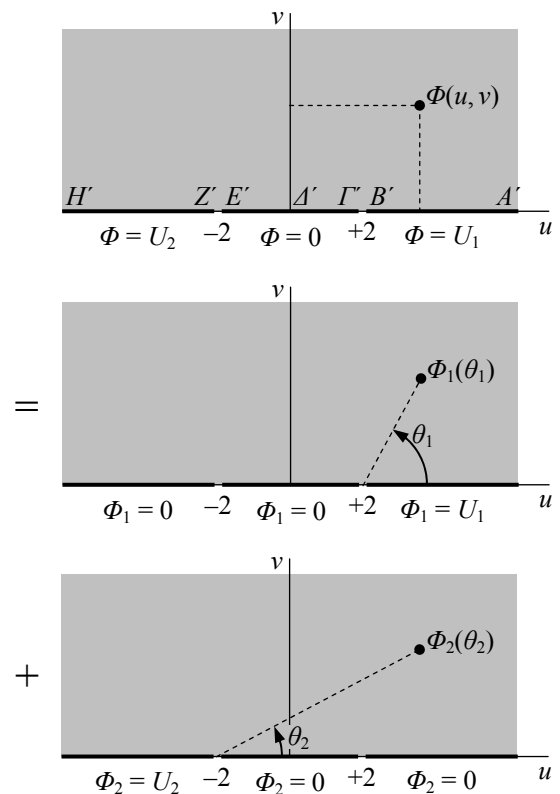
Σχόλιο: Εναλλακτικά, αρχικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση $w_2(z) = z^{\kappa'}$, με $\kappa' = \pi/\psi$, ώστε η τεθλασμένη γραμμή να απεικονισθεί στον αρνητικό ημιάξονα $u_2 < 0$, $v_2 = 0$. Αναγνωρίζοντας τις δύο ημιευθείες ως τα δύο σκέλη εκφυλισμένης υπερβολής, ο δεύτερος μετασχηματισμός γίνεται τώρα με τη συνάρτηση $\arcsin(2w_2/a_2 - 1)$, προτάσσοντας μετατόπιση κατά $-a_2/2$, ώστε η υπερβολή να τοποθετηθεί συμμετρικά, και μεγέθυνση κατά $1/(a_2/2)$.

Παράδειγμα 6.4-7: Δύο ομοεπίπεδες ημιάπειρες πλάκες, των οποίων οι ακραίες ακμές απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2a$, είναι σε δυναμικό U_1 και U_2 , αντίστοιχα. Μεταξύ τους παρεμβάλλεται ένας γειωμένος κύλινδρος, με μεγάλο μήκος και με διάμετρο ίση με $2a$. Ζητείται τη ηλεκτροστατικό δυναμικό στον υπόλοιπο χώρο (με επιτρεπτότητα ϵ_0).



Επίλυση: Η διάταξη είναι ανεξάρτητη από τη συντεταγμένη z , λόγω του μεγάλου μήκους. Επίσης, λόγω της συμμετρίας ως προς το επίπεδο $y = 0$ αρκεί να προσδιορισθεί το δυναμικό στην περιοχή $y > 0$, εξαιρώντας την περιοχή $r_T < a$, στην οποία είναι γνωστό ότι είναι $\Phi = 0$. Το σχήμα της διάταξης ταυτίζεται με εκείνο του *παράδ. 6.4-1*. Με το μετασχηματισμό $w(z) = \ln(z/a)$ πάλι η περιοχή που ενδιαφέρει απεικονίζεται σε ημιάπειρη ταινία, όμως τώρα οι οριακές συνθήκες δεν διευκολύνουν την επίλυση, ειδικότερα η διαφορετική συνθήκη $\Phi = 0$, αντί της $\partial\Phi/\partial n = 0$, στην ημιπεριφέρεια $B\Gamma A$. Δεν είναι εδώ κατάλληλη αυτή η συνάρτηση, αλλά εξυπηρετεί ο μετασχηματισμός με τη συνάρτηση $w = \zeta + 1/\zeta = z/a + a/z$, με την προφανή αναγωγή $\zeta = z/a$. Η συνάρτηση αυτή, βλ. και σχέση (6.4-16) και Σχήμα 6.4-10, πρακτικά διατηρεί τις ημιευθείες AB και ZH στη θέση τους, απλά τοποθετώντας τα νέα άκρα τους στα $u = \pm 2$, και μετατρέπει την ημιπεριφέρεια $\Gamma A E$ σε ευθύγραμμο τμήμα.

Η επίλυση στο επίπεδο w μπορεί να γίνει με επαλληλία, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Η πρώτη διάταξη έχει στο όριο $v = 0$ την οριακή συνθήκη $\Phi_1(u < +2) = 0$ και $\Phi_1(u > +2) = U_1$. Μία μετατόπιση, ώστε να μετακινηθεί στην αρχή των αξόνων το σημείο $u = +2$ με την ασυνέχεια στην τιμή του δυναμικού, και η εφαρμογή της λογαριθμικής συνάρτησης (βλ. *παράδ. 6.4-1*), περιγράφονται συνολικά από τη συνάρτηση $w_1 = \ln(w-2)$. Έτσι, προκύπτει $\Phi_1 = (U_1/\pi)(\pi - v_1)$, όπου $v_1 = \theta_1$, με τη γωνία θ_1 να έχει την κορυφή της στο σημείο ασυνέχειας (βλ. σχήμα). Όμοια, στη δεύτερη διάταξη, με $\Phi_2(u < -2) = U_2$ και $\Phi_2(u > -2) = 0$, ο μετασχηματισμός $w_2 = \ln(w+2)$ δίνει την έκφραση $\Phi_2 = (U_2/\pi)v_2 = (U_2/\pi)\theta_2$.



6.4.3 Ο ρητογραμμικός μετασχηματισμός

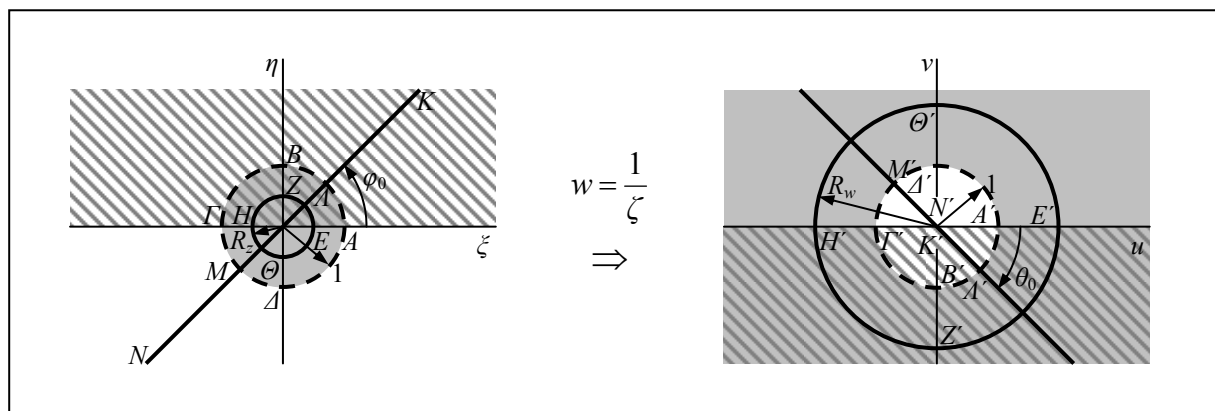
Ο ρητογραμμικός μετασχηματισμός έχει ως πυρήνα τη συνάρτηση $w = 1/\zeta$. Η μετάβαση από τη συνάρτηση αυτή στη γενική έκφραση γίνεται με διαδοχικές επεκτάσεις, που αφορούν μετατοπίσεις και στροφές στα δύο επίπεδα ζ και w . Οι επεκτάσεις αυτές δεν αλλοιώνουν τη μορφολογία των απεικονίσεων που παράγονται από τη βασική συνάρτηση $w = 1/\zeta$, οπότε είναι πολύ χρήσιμο να προταχθεί η μελέτη αυτής της συνάρτησης.

Η συνάρτηση $w = 1/\zeta$: Με την επιλογή $-\pi < \varphi < \pi$ και $-\pi < \theta < \pi$ για τον πρωτεύοντα κλάδο στα δύο επίπεδα ζ και w , χρησιμοποιώντας στη συνάρτηση:

$$w(z) = \frac{1}{\zeta}, \quad (6.4-18)$$

την πολική μορφή, $\zeta = r \exp(j\varphi)$, $w = \rho \exp(j\theta)$, συνεπώς $\rho = 1/r$ και $\theta = -\varphi$, φαίνεται αμέσως (βλ. και **Σχήμα 6.4-11**), ότι η συνάρτηση αυτή απεικονίζει:

- το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|\zeta| = r < 1$, στο εξωτερικό του $|w| = \rho > 1$,
- το άνω ημιεπίπεδο, $0 < \varphi < \pi$, στο κάτω ημιεπίπεδο, $0 > \theta > -\pi$,
- την αρχή των αξόνων, $\zeta = 0$, στο άπειρο, $w = \infty$,
- έναν κύκλο με κέντρο στην αρχή των αξόνων $\zeta = 0$ και ακτίνα R_ζ , σε κύκλο πάλι με κέντρο στη νέα αρχή των αξόνων $w = 0$, αλλά με την περιφέρειά του να διαγράφεται με αντίστροφη φορά (αν είναι $d\varphi > 0$, τότε είναι $d\theta = -d\varphi < 0$), και με την ακτίνα του ίση με $R_w = 1/R_\zeta$ (αν είναι $R_\zeta < 1$, τότε $R_w > 1$),
- μία ημιευθεία $\varphi = \varphi_0 = \text{σταθ.}$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πάλι σε ημιευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, με $\theta = \theta_0 = -\varphi_0 = \text{σταθ.}$, αλλά με αντίστροφη φορά διαγραφής του μήκους της (αν είναι $dr > 0$, τότε $d\rho = -\rho^2 dr < 0$),
- και τα αντίστροφα όλων των προηγούμενων.



Σχήμα 6.4-11

Απεικονίσεις κύκλων και ευθειών: Αν εκφρασθούν οι ποσότητες ζ και $w = 1/\zeta$ σε καρτεσιανή μορφή, $\zeta = \xi + j\eta$ και $w = u + jv$, οι συνιστώσες τους συνδέονται με τις σχέσεις:

$$u = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad v = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2} \Leftrightarrow \xi = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \eta = \frac{-v}{u^2 + v^2}. \quad (6.4-19)$$

Με λίγες αλγεβρικές πράξεις, φαίνεται ότι μία καμπύλη ℓ , με γενική μορφή:

$$\ell: a(\xi^2 + \eta^2) + b\xi + c\eta + d = 0, \quad (6.4-20\alpha)$$

όπου οι συντελεστές a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί, απεικονίζεται σε μία καμπύλη ℓ' :

$$\ell': d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0. \quad (6.4-20\beta)$$

με την ίδια γενική μορφή όπως η ℓ . Με μία απλή διερεύνηση επισημαίνονται τα ακόλουθα ενδεχόμενα για τη μορφή της καμπύλης ℓ :

- Αν είναι $a \neq 0$, τότε η καμπύλη ℓ περιγράφει περιφέρεια κύκλου, με κέντρο (ξ_c, η_c) και ακτίνα R_ζ , που είναι ίσα με:

$$\xi_c = -\frac{b}{2a}, \quad \eta_c = -\frac{c}{2a}, \quad R_\zeta^2 = \frac{b^2 + c^2}{4a^2} - \frac{d}{2a} > 0. \quad (6.4-21)$$

Αν δεν ικανοποιείται η ανισότητα, τότε στη σχέση (6.4-20α) η ισότητα δεν μπορεί να ικανοποιηθεί με πραγματικούς αριθμούς και η σχέση αυτή δεν περιγράφει καμπύλη. Τα ειδικότερα ενδεχόμενα είναι:

- Να είναι $d \neq 0$, δηλαδή, ο κύκλος ℓ να μη διέρχεται από την αρχή των αξόνων, $\zeta = 0$.

Τότε, η απεικόνιση ℓ' είναι κύκλος, με ακτίνα $R_w = |a/d|R_\zeta$.

- Να είναι $d = 0$, δηλαδή, ο κύκλος ℓ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, $\zeta = 0$.

Τώρα, η απεικόνιση ℓ' είναι ευθεία γραμμή, $bu - cv + a = 0$.

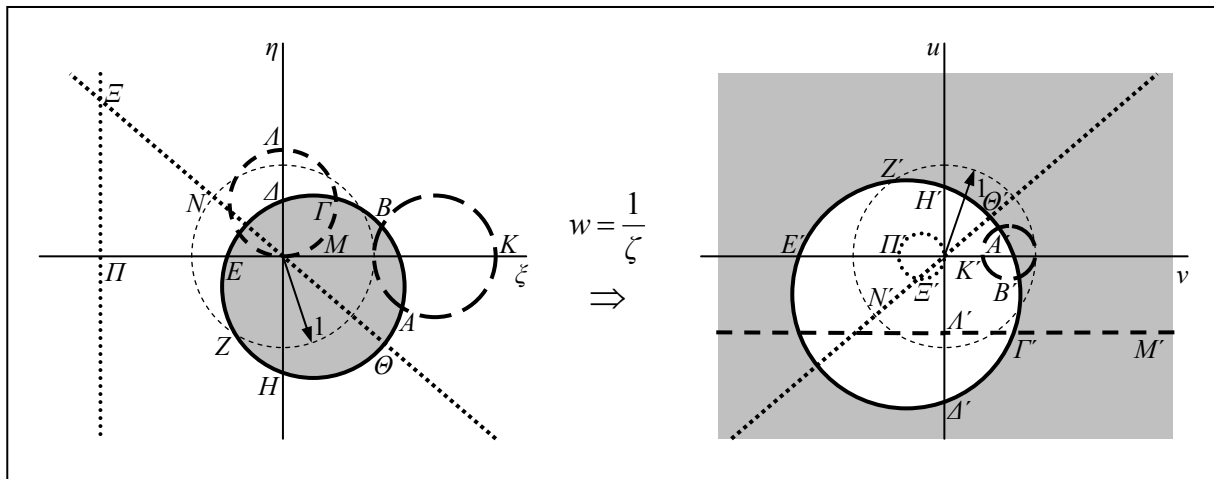
Και στις δύο περιπτώσεις, είτε η απεικόνιση ℓ' είναι κύκλος, είτε ευθεία, η ℓ' δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επειδή είναι $a \neq 0$.

- Αν είναι $a = 0$, η καμπύλη ℓ περιγράφει ευθεία γραμμή, $b\xi + c\eta + d = 0$, και η απεικόνιση ℓ' διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Ανάλογα με την περίπτωση:

- Αν είναι $d = 0$, η ευθεία ℓ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, $\zeta = 0$, και η απεικόνισή της ℓ' είναι ευθεία γραμμή, $bu - cv = 0$.

- Αν είναι $d \neq 0$, οπότε η ευθεία ℓ δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η απεικόνιση ℓ' είναι κύκλος, $d(u^2 + v^2) + bu - cv = 0$.

Όμοια ισχύουν και για την καμπύλη ℓ' , με προφανείς τις αντικαταστάσεις.



Σχήμα 6.4-12

Το **Σχήμα 6.4-12** παρουσιάζει παραδείγματα απεικονίσεων με τη συνάρτηση $w = 1/\zeta$. Οι κύκλοι $AB\Gamma\Delta E\Z H\Theta A$ και $AKBA$ δεν διέρχονται από την αρχή των αξόνων, οπότε απεικονίζονται πάλι σε κύκλους. Ο πρώτος κύκλος $AB\Gamma\Delta E\Z H\Theta A$ (συνεχής γραμμή) περιέχει σημεία τόσο μέσα ($r < 1$), όσο και έξω ($r > 1$) από το μοναδιαίο κύκλο, οπότε η απεικόνισή του περιέχει σημεία αντίστοιχα έξω ($\rho > 1$) και μέσα ($\rho < 1$) στο μοναδιαίο κύκλο, επειδή $\rho = 1/r$. Επίσης, ο ίδιος κύκλος εκτείνεται και στα τέσσερα τεταρτημόρια, και το ίδιο συμβαίνει και με την απεικόνισή του, με την αντιστοιχία $\zeta > 0 \Leftrightarrow u > 0$, αλλά $\eta > 0 \Leftrightarrow v < 0$, και αντίστροφα. Η αρχή των αξόνων απεικονίζεται στο άπειρο, οπότε ο κυκλικός δίσκος $AB\Gamma\dots\Theta A$ (περιοχή S) απεικονίζεται στην περιοχή S' έξω από τον κύκλο $A'B'\Gamma'\dots\Theta'A'$, μέχρι το άπειρο. Ως επιβεβαίωση, παρατηρείται ότι οι περιοχές S και S' βρίσκονται και οι δύο στην ίδια πλευρά, εδώ στην αριστερή, των αντίστοιχων διαδρομών, $AB\Gamma\dots\Theta A$ και $A'B'\Gamma'\dots\Theta'A'$.

Αντίθετα, ο δεύτερος κύκλος $AKBA$ (διακεκομμένη γραμμή με μεγάλες παύλες) καταλαμβάνει θέσεις με $\zeta > 0$ και έξω από το μοναδιαίο κύκλο, οπότε η απεικόνισή του είναι πάλι με $u > 0$, αλλά με $\eta > 0 \Leftrightarrow v < 0$, και αντίστροφα, και μέσα στο μοναδιαίο κύκλο. Επίσης, η αρχή των αξόνων δεν βρίσκεται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου, άρα και η απεικόνιση της αρχής των αξόνων, το άπειρο, δεν ανήκει στην απεικόνιση. Σε αντίθεση, δηλαδή, με την προηγούμενη περίπτωση, ο δίσκος $AKBA$ απεικονίζεται στο εσωτερικό του δίσκου $A'K'B'A'$, όπως μπορεί εναλλακτικά να διαπιστωθεί και από τη φορά περιστροφής στο περίγραμμα, που είναι ομόρροπη στο δίσκο και στην απεικόνισή του.

Ένας τρίτος κύκλος $M\Gamma A$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε απεικονίζεται στην ευθεία γραμμή $M'\Gamma'A'$, εδώ παράλληλη προς τον άξονα u . Ο αντίστοιχος δίσκος απεικονίζεται στην περιοχή $v < v_{M\Gamma A}$, με κάθε περιοχή στα αριστερά της πορείας $M\Gamma A$ ή $M'\Gamma'A'$.

Στο ίδιο **Σχήμα 6.4-12** παρουσιάζονται και δύο ευθείες γραμμές με τις απεικονίσεις τους. Η γραμμή $\Theta N \Xi$ (με τις χονδρές κουκκίδες) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε απεικονίζεται πάλι σε ευθεία. Γράφοντας την αρχική ευθεία ως $\infty \Theta N \Xi \infty$, παρεμβάλλοντας δηλαδή το άπειρο και την αρχή των αξόνων, προβάλλεται περισσότερο ότι η απεικόνισή της στο επίπεδο w είναι η ευθεία που περιγράφεται από την αλληλουχία $0' \Theta' \infty N' \Xi' 0'$. Ουσιαστικά, πρόκειται για δύο ημιευθείες, τη μία συνέχεια της άλλης, που απεικονίζονται πάλι σε δύο ημιευθείες, αλλά με αντίστροφη φορά, επειδή $1/0 = \infty$. Η περιοχή με $\eta > \eta_{\Theta N \Xi}$ απεικονίζεται στην περιοχή με $\nu < \nu_{\Theta N \Xi}$, όπως μπορεί να φανεί με διάφορους τρόπους. Τέλος, η ευθεία $\Xi \Pi$ (με τις λεπτές κουκκίδες), ή, εκτενέστερα, η ευθεία $\infty \Xi \Pi \infty$ δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε απεικονίζεται σε κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, την απεικόνιση του απείρου, και η περιοχή $\zeta > \zeta_{\Xi \Pi}$, που περιέχει την αρχή των αξόνων, αντιστοιχεί στην περιοχή έξω από τον δίσκο $0 \Xi' \Pi' 0$, που περιέχει το άπειρο.

Συγκεντρωτικά, οι ιδιότητες του μετασχηματισμού με τη συνάρτηση $w = 1/\zeta$ μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

Με τη συνάρτηση $w = 1/\zeta$ κύκλοι ℓ ή ευθείες ℓ (αδιακρίτως) του επιπέδου ζ απεικονίζονται στο επίπεδο w σε:

- ευθείες ℓ' , αν η αρχική καμπύλη ℓ διέρχεται από το $z = 0$,
- κύκλους ℓ' , αν η αρχική καμπύλη ℓ δεν διέρχεται από το $z = 0$.

Για την κοινή θεώρηση κύκλων και ευθειών μπορεί να θεωρηθεί η ευθεία γραμμή ως κύκλος που διέρχεται από το άπειρο και έχει, συνεπώς, άπειρη ακτίνα. Αν η αρχική καμπύλη ℓ διέρχεται από το σημείο A , με $\zeta_A = 0$, τότε η εικόνα αυτού του σημείου $w_A = 1/z_A$ θα είναι στο άπειρο, και επειδή η ℓ' πρέπει να διέρχεται από το A' , η ℓ' πρέπει να είναι ευθεία. Και αντίστροφα, αν στην ℓ δεν υπάρχει σημείο A με $\zeta_A = 0$, τότε είναι $w_A \neq \infty$ για όλα τα σημεία της ℓ' , η οποία πρέπει συνεπώς να είναι κύκλος.

Η θεώρηση αυτή είναι, επίσης, συμβατή με τη σχέση $|d|R_w = |a|R_\zeta$ που συνδέει τις ακτίνες, όταν η απεικόνιση είναι από κύκλο σε κύκλο, και επιτρέπει να της δοθεί ευρύτερο περιεχόμενο. Το ενδεχόμενο $a = 0$, να είναι η ℓ ευθεία γραμμή, συνδέεται με $R_\zeta = \infty$, που διατηρεί τη δυνατότητα να έχει το γινόμενο $|a|R_\zeta$ πεπερασμένη τιμή, για να μπορεί να εξισωθεί με $|d|R_w$ ώστε να προσδιορισθεί η ακτίνα R_w του παραγόμενου κύκλου, όταν $d \neq 0$.

Και ένα τελικό σχόλιο. Για να προσδιορισθεί ένας κύκλος (ή μία ευθεία) αρκούν τρία (ή δύο) σημεία. Συχνά, με τον τρόπο αυτό είναι πιο εύκολο να συσχετισθεί η καμπύλη ℓ με την απεικόνισή της ℓ' , και δεν χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (6.4-20αβ).

Διπαραμετρικός ρητογραμμικός μετασχηματισμός: Στο μετασχηματισμό $w = 1/\zeta$ η μεταβλητή ζ μπορεί να γραφεί ως $\zeta = (1/k_1)(z - z_\infty)$, που ισοδυναμεί με το να προηγηθεί στο επίπεδο z ένας μετασχηματισμός μετατόπισης κατά $-z_\infty$ και μεγέθυνσης/στροφής κατά $1/k_1$, βλ. και σχέση (6.4-10), με κατάλληλες τιμές για τις μιγαδικές ποσότητες z_∞ και k_1 . Με τον τρόπο αυτό, ο μετασχηματισμός γράφεται:

$$w_1(z) = k_1 \frac{1}{z - z_\infty}. \quad (6.4-22)$$

Η διαφορά μεταξύ του μετασχηματισμού w_1 και του $w = 1/\zeta$ είναι μόνο ότι παρεμβάλλεται η μετατόπιση και η μεγέθυνση/στροφή, ενέργειες που διατηρούν τη μορφή ενός κύκλου ή μιας ευθείας, συνεπώς με τη συνάρτηση (6.4-22) κύκλοι και ευθείες, αδιακρίτως, απεικονίζονται σε κύκλους και ευθείες. Αλλά, ενώ στο μετασχηματισμό $w = 1/\zeta$ το άπειρο είναι η απεικόνιση του $\zeta = 0$, τώρα στο άπειρο απεικονίζεται το σημείο $z = z_\infty$. Και επειδή οι γραμμές που φθάνουν μέχρι το άπειρο είναι οι ευθείες, και όχι οι κύκλοι, οι κύκλοι ή ευθείες του επιπέδου z , που διέρχονται από το σημείο $z = z_\infty$ απεικονίζονται σε ευθείες, ενώ οι λοιποί κύκλοι και ευθείες μετασχηματίζονται σε κύκλους. Αυτή η ιδιότητα αποτελεί το κριτήριο για την επιλογή της παραμέτρου z_∞ . Αν από κάποιο σημείο διέρχονται πολλοί κύκλοι ή ευθείες, συχνά εξυπηρετεί αυτό το σημείο να επιλεγεί ως z_∞ , ώστε όλες αυτές οι αρχικές γραμμές να μετασχηματισθούν σε ευθείες και ενδεχομένως σε επόμενο βήμα οι ευθείες αυτές να αντιμετωπισθούν με το μετασχηματισμό *Schwarz-Christoffel*. Η δεύτερη παράμετρος k_1 ορίζει τον προσανατολισμό και το μέγεθος του τελικού σχήματος. Αν είναι επιθυμητό κάποιο σημείο με $z = z_A$ να απεικονισθεί σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο $w_1 = w_A$, τότε πρέπει να γίνει η επιλογή $k_1 = (z_A - z_\infty)w_A$. Οι πιο συνηθισμένες επιλογές είναι με $w_A = \pm 1$ ή με $w_A = 0$.

Τριπαραμετρικός ρητογραμμικός μετασχηματισμός: Ο στόχος $w_1 = w_A$ μπορεί να επιτευχθεί όχι μόνο με μεγέθυνση/στροφή, που καθοπρίζεται από την παράμετρο k_1 , αλλά και σε συνδυασμό με μετατόπιση. Αυτή η πρόσθετη ευελιξία παρέχεται εισάγοντας μία τρίτη παράμετρο, ώστε ο μετασχηματισμός να περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$w_2(z) = k_2 \frac{z - z_0}{z - z_\infty}. \quad (6.4-23)$$

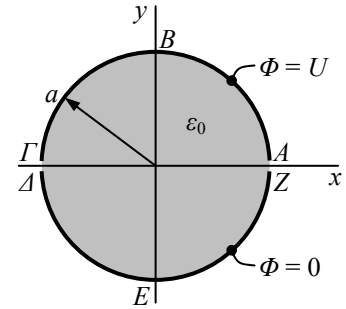
Για την παράμετρο z_∞ στον παρονομαστή ισχύουν όσα στο μετασχηματισμό w_1 , ενώ ο συντελεστής k_2 κάνει πάλι την τελική προσαρμογή στον προσανατολισμό και το μέγεθος της απεικόνισης. Το νέο στοιχείο είναι η παράμετρος z_0 . Αμέσως φαίνεται ότι $w_2(z = z_0) = 0$, που σημαίνει πως η παράμετρος z_0 είναι το σημείο που απεικονίζεται στην αρχή των αξόνων.

Γενικά σχόλια:

- Γράφοντας τον αριθμητή ως $z - z_0 = (z_\infty - z_0) + (z - z_\infty)$, η σχέση (6.4-23) παίρνει τη μορφή $w_2 = k_1/(z - z_\infty) + k_2 = w_1 + k_2$, όπου $k_1 = k_2(z_\infty - z_0)$, άρα πράγματι ο μετασχηματισμός w_2 διαφέρει από τον w_1 κατά μία μετατόπιση. Επίσης, στο όριο $z_0 \rightarrow \infty$, $k_2 \rightarrow 0$ είναι $k_2(z - z_0) = -k_2 z_0 = k_1$ και ο μετασχηματισμός w_2 μεταπίπτει στον w_1 .
- Οι δύο συναρτήσεις w_1 και w_2 είναι αναλυτικές παντού, εκτός βέβαια από το σημείο $z = z_\infty$, και η παράγωγος $w'(z)$ δεν μηδενίζεται πουθενά, συνεπώς οι απεικονίσεις είναι παντού σύμμορφες, εκτός από το σημείο z_∞ .
- Οι δύο μετασχηματισμοί w_1 και w_2 εμπλέκουν ως ενδιάμεσο, αλλά ουσιαστικό βήμα, τη συνάρτηση $w(\zeta) = 1/\zeta$. Όπως έχει σημειωθεί ήδη, η συνάρτηση αυτή απεικονίζει το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (με κέντρο στο $\zeta = 0$) στο εξωτερικό του και ότι η φορά διαγραφής της περιφέρειάς του αντιστρέφεται. Από την παρουσίαση του **Σχήματος 6.4-12** συνάγεται ότι το ίδιο συμβαίνει γενικότερα, όταν ο αρχικός δίσκος απλά περιέχει το σημείο $\zeta = 0$, ενώ όταν ο αρχικός δίσκος δεν περιέχει αυτό το σημείο, τότε το εσωτερικό του δίσκου απεικονίζεται πάλι στο εσωτερικό δίσκου και η φορά διαγραφής δεν αντιστρέφεται. Με τους μετασχηματισμούς (6.4-22) και (6.4-23) συμβαίνουν τα ίδια, ανάλογα αν το εσωτερικό του δίσκου περιέχει ή όχι το σημείο $z = z_\infty$. Σε κάθε περίπτωση, πάντως, απαιτείται προσοχή στη χρήση του ρητογραμμικού μετασχηματισμού, ώστε να επιλεγεί σωστά, ποια είναι η περιοχή S' του επιπέδου w , στην οποία απεικονίζεται η αρχική περιοχή S (όπου και αναζητείται η λύση της εξίσωσης $\nabla^2 \Phi = 0$).
- Ο ρητογραμμικός μετασχηματισμός ονομάζεται και «μετασχηματισμός του *Moebius*».

Τα **παραδ. 6.4-8** έως **6.4-10** παρουσιάζουν διατάξεις που αντιμετωπίζονται με εφαρμογή του ρητογραμμικού μετασχηματισμού. Σε αντίθεση με τα τελευταία από τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου 6.4.2, η μεταφορά του αποτελέσματος $\Phi(u, v)$ στο αρχικό επίπεδο για τη διατύπωση της σχέσης $\Phi(x, y)$, είναι εδώ εφικτή χωρίς ιδιαίτερη αλγεβρική δυσκολία. Ιδίως όταν οι συντελεστές $k_{1,2}$ έχουν απλή μορφή, οι σχέσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι απλές επεκτάσεις των σχέσεων (6.4-19). Επίσης, στα σχήματα πάλι υιοθετείται η απλούστευση, η συνεχής γραμμή (—) να συμβολίζει συνθήκη *Dirichlet* και εκεί να αναγράφεται η τιμή του Φ , και η γραμμή με στιγμές (.....) να συμβολίζει ομογενή συνθήκη *Neumann*. Όπου δεν ορίζεται η θέση του ορίου, εννοείται ότι η διάταξη εκτείνεται μέχρι το άπειρο και ότι εκεί είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$.

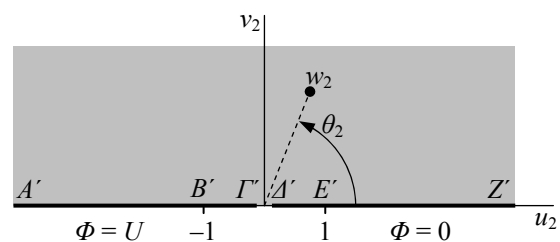
Παράδειγμα 6.4-8: Δύο αντιμέτωπα ημικυλινδρικά κελύφη με μεγάλο μήκος και ακτίνα ίση με a είναι το κάτω γειωμένο και το πάνω σε δυναμικό U . Ζητείται το δυναμικό Φ στον ενδιάμεσο κυλινδρικό χώρο, όπου η επιτρεπτότητα είναι ίση με ϵ_0 .



Επίλυση: Η διατομή της διάταξης έχει ως όριο της την περιφέρεια ενός κύκλου, με δύο σημεία με ασυνέχεια στην τιμή του δυναμικού. Αν μετασχηματισθεί ο κύκλος στον άξονα $v = 0$, τότε η επίλυση είναι εφικτή, όπως στο παράδ. 6.4-7, ιδιαίτερα μάλιστα αν το δυναμικό έχει ασυνέχεια μόνο σε ένα σημείο του άξονα u , και κατά προτίμηση στο $u = 0$. Προκειμένου η εφαρμογή του ρητογραμμικού μετασχηματισμού να δώσει τέτοια απεικόνιση, κατάλληλες επιλογές για τις παραμέτρους είναι (α) $z_\infty = a$, ώστε το διπλό σημείο $A-Z$ να μετακινηθεί στο άπειρο και να απομακρυνθεί το ένα σημείο ασυνέχειας από το πεπερασμένο τμήμα της απεικόνισης, και (β) $z_0 = -a$, ώστε το δεύτερο σημείο ασυνέχειας, το διπλό σημείο $\Gamma-\Delta$, να μετακινηθεί στο $w_2 = 0$. Η επιλογή του z_∞ εξασφαλίζει, ότι ο κύκλος απεικονίζεται σε ευθεία γραμμή, αλλά για να συμπέσει αυτή η γραμμή με τον άξονα $v = 0$, ή με οποιαδήποτε άλλη συγκεκριμένη ευθεία, πρέπει ο συντελεστής k_2 να έχει κατάλληλη τιμή. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί παίρνοντας οποιοδήποτε τρίτο σημείο και απαιτώντας η απεικόνισή του να είναι σε συγκεκριμένη θέση του άξονα $v = 0$, ή οποιασδήποτε άλλης ευθείας προτιμηθεί. Ας επιλεγεί το σημείο B , με $z_B = ja$, να απεικονισθεί στο σημείο $w_{2B} = -1$. Εξισώνοντας $w_{2B} = k_2(z_B - z_0)/(z_B - z_\infty)$, δηλαδή $-1 = k_2(ja + a)/(ja - a)$ προκύπτει $k_2 = -j$. Επομένως, ο μετασχηματισμός θα γίνει με τη συνάρτηση:

$$w_2(z) = -j \frac{z+a}{z-a} = -j - \frac{2ja}{z-a}$$

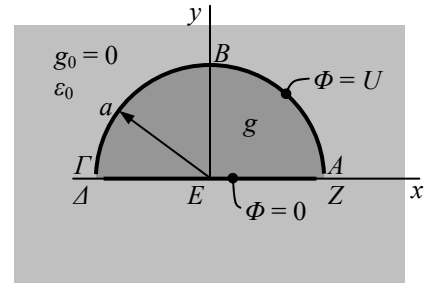
Με το μετασχηματισμό $w_2(z)$ το εσωτερικό του κύκλου απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο, τόσο επειδή είναι στα αριστερά της πορείας $A'B'\Gamma'$..., όσο και επειδή είναι $w_2(z=0) = j$.



Μετά τη μεταφορά των οριακών συνθηκών, η επίλυση γίνεται αμέσως, είτε με έναν πρόσθετο μετασχηματισμό $w = \ln w_2$, όπως στο παράδ. 6.4-7, είτε απευθείας, αναγνωρίζοντας ότι πρόκειται για διάταξη με εξάρτηση μόνο από τη γωνία θ_2 , οπότε $\nabla^2 \Phi = \rho_2^{-2} \partial^2 \Phi / \partial \theta_2^2$ και η ολοκλήρωση δίνει απλά $\Phi(u_2, v_2) = (U/\pi)\theta_2 = (U/\pi)\text{arccot}(u_2/v_2)$, λαμβάνοντας υπ' όψιν και τις οριακές συνθήκες. Η μεταγραφή του δυναμικού ως $\Phi(x, y)$ προκύπτει αμέσως, εξισώνοντας:

$$w_2 = u_2 + jv_2 = -j - j \frac{2a}{(x-a) + jy} = \dots \Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{U}{\pi} \text{arccot} \frac{-2ay}{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

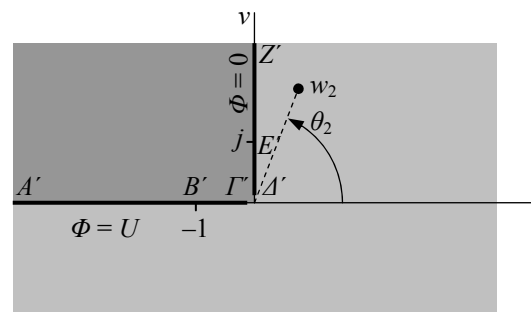
Παράδειγμα 6.4-9: Σε διάταξη με μεγάλο μήκος, ο χώρος μεταξύ μιας γειωμένης ταινίας με πλάτος $2a$ και ενός ημικυλινδρικού κελύφους με ακτίνα a , που είναι σε δυναμικό U , περιέχει ομογενές αγωγίμο υλικό, με ειδική αγωγιμότητα g . Ο υπόλοιπος χώρος είναι μονωτής (με $g_0 = 0$ και ϵ_0). Ζητείται το δυναμικό Φ και στις δύο περιοχές.



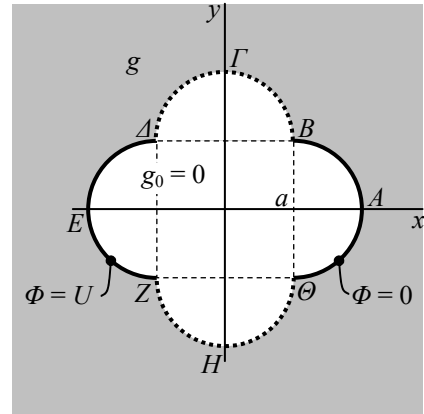
Επίλυση: Και οι δύο περιοχές καταλαμβάνονται από ομογενές υλικό, συνεπώς το δυναμικό περιγράφεται από την εξίσωση του *Laplace*, σε δύο διαστάσεις, επειδή γενικά όλα τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι ανεξάρτητα από τη συντεταγμένη z και το μήκος είναι μεγάλο. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ρητογραμμικός μετασχηματισμός w_2 τριών παραμέτρων, με $z_\infty = a$, ώστε και τα δύο τμήματα του ορίου να απεικονισθούν σε ευθείες, με το ένα σημείο ασυνέχειας να απεικονίζεται σε $w_{2A} = w_{2Z} = \infty$, και με $z_0 = -a$, ώστε να είναι $w_{2\Gamma} = w_{2A} = 0$, όπου και τέμνονται οι ευθείες του επιπέδου w_2 .

Για το συντελεστή k_2 , ας χρησιμοποιηθεί η ίδια τιμή, $k_2 = -j$, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, με μοναδικό λόγο ότι είναι ήδη διαθέσιμες οι συναρτήσεις $u_2(x, y)$ και $v_2(x, y)$. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό με την ίδια μορφή, $w_2(z) = -j(z + a)/(z - a)$, το ημικύκλιο $AB\Gamma$ θα απεικονισθεί πάλι στον ημιάξονα $v = 0, u < 0$. Εξετάζοντας την απεικόνιση του σημείου E , $w_2(z = z_E = 0) = j$, συνάγεται ότι η απεικόνιση $A'E'Z'$, της οποίας είναι γνωστή η θέση των δύο σημείων A' και E' , συμπίπτει με τον ημιάξονα $u = 0, v > 0$. Η ίδια πληροφορία εξάγεται και παρατηρώντας ότι η γωνία $B\Gamma - \Delta E$ είναι ορθή, με στροφή αριστερά, άρα ίδια πρέπει να είναι και η γωνία $B'\Gamma' - A'E'$, επειδή η απεικόνιση με αναλυτική συνάρτηση, όπως η $w_2(z)$, είναι σύμμορφη και δεν αλλοιώνει τις γωνίες.

Από τις δύο περιοχές του επιπέδου z , ο ημιδίσκος βρίσκεται στα αριστερά της πορείας $AB\Gamma\Delta EZ$, συνεπώς η απεικόνιση του ημιδίσκου θα βρίσκεται στα αριστερά της απεικόνισης $A'B'\Gamma'A'E'Z'$, στο δεύτερο τεταρτημόριο του επιπέδου w_2 . Αντίστοιχα, τα άλλα τρία τεταρτημόρια θα είναι η απεικόνιση του εξωτερικού χώρου. Μεταφέροντας τις οριακές συνθήκες και είτε εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $w = \ln w_2$, χωριστά σε κάθε περιοχή, είτε απευθείας επιλύοντας μονοδιάστατη διάταξη, το δυναμικό προκύπτει ίσο με $\Phi(u_2, v_2) = (2U/\pi)(\theta_2 - \pi/2)$ στον αγωγό (με $\pi/2 < \theta_2 < \pi$), και με $\Phi(u_2, v_2) = (2U/3\pi)(\pi/2 - \theta_2)$ στο μονωτή (με $-\pi < \theta_2 < \pi/2$).



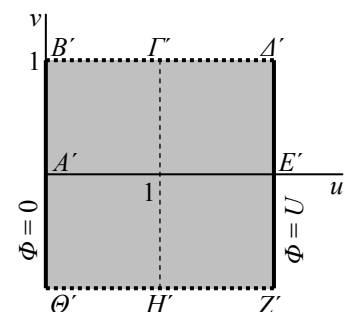
Παράδειγμα 6.4-10: Μία ράβδος από μονωτικό υλικό (με $g_0 = 0$) με μεγάλο μήκος είναι βυθισμένη σε αγώγιμο περιβάλλον, με σταθερή ειδική αγωγιμότητα g . Η διατομή της ράβδου αποτελείται από ένα τετράγωνο $2a \times 2a$, στο οποίο τις τέσσερις πλευρές είναι προσαρτημένα ημικύκλια με διάμετρο επίσης ίση με $2a$. Δύο αντιμέτωπα καμπύλα όρια της ράβδου έχουν επικάλυψη από πολύ καλό αγωγό, και μεταξύ τους εφαρμόζεται τάση U . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ στον αγώγιμο χώρο και η αγωγιμότητα G_ℓ ανά μονάδα μήκους.



Επίλυση: Το όριο του αγώγιμου χώρου αποτελείται από τέσσερα ημικύκλια, που ανήκουν σε κύκλους τεμνόμενους στο $z = 0$. Με $z_\infty = 0$, ο ρητογραμμικός μετασχηματισμός, μετασχηματίζει αυτούς τους κύκλους σε τέσσερις ευθείες. [Είναι τελείως αδιάφορο, αν το σημείο z_∞ ανήκει στο όριο ή όχι. Αρκεί ένας κύκλος (ή, ευθεία) να διέρχεται από αυτό, για να απεικονισθεί σε ευθεία.] Μάλιστα, οι τέσσερις ευθείες σχηματίζουν ένα ορθογώνιο, επειδή στο επίπεδο z οι γωνίες στα σημεία B, A, Z και Θ είναι ορθές, με τα κοίλα προς την πλευρά που ενδιαφέρει, και η σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί τις γωνίες. Και ένα ορθογώνιο, με οριακές συνθήκες εναλλάξ $\Phi = \text{σταθ.}$ και $\partial\Phi/\partial n = 0$, είναι σχήμα που επιτρέπει άμεση επίλυση.

Έχοντας κατά νου τη γενικότερη έκφραση w_2 του ρητογραμμικού μετασχηματισμού, ήδη έχει γίνει η επιλογή $z_\infty = 0$. Για τις παραμέτρους z_0 και k_2 ως κριτήριο επιλογής μπορεί να ληφθεί, το γειωμένο τοίχωμα να απεικονισθεί σε έναν άξονα, ας πούμε στον άξονα $u = 0$. Ας ληφθεί, λοιπόν, πρώτα $z_0 = 2a$, ώστε το σημείο A να απεικονισθεί στο $w_2 = 0$, οπότε η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $w_2 = k_2(z - 2a)/z$. Ακολουθώντας, για το σημείο B , με $z_B = (1 + j)a$, ας ληφθεί $w_{2B} = j$, δηλαδή $j = k_2(1 + j - 2)/(1 + j) = jk_2$, δηλαδή $k_2 = 1$.

Η τελική μορφή του μετασχηματισμού, $w_2 = (z - 2a)/z$, απεικονίζει την αρχική περιοχή, το εξωτερικό της ράβδου, στο εσωτερικό ενός τετραγώνου 2×2 . Με βάση και τις αρχικές συνθήκες, το δυναμικό είναι ίσο με $\Phi = (U/2)u$. Γράφοντας τη συνάρτηση του μετασχηματισμού ως $w_2 = 1 - 2a/z$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.4-19), η έκφραση για το δυναμικό μεταφέρεται αμέσως στο επίπεδο z , ως $\Phi = U[1/2 - ax^2 + y^2]$.



Η αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους στο επίπεδο w είναι ίση με $G_\ell = g(B'\Theta')/(A'E') = g$, οπότε και στην αρχική διάταξη είναι η αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους ίση με $G_\ell = g$.

6.4.4 Ο μετασχηματισμός των Schwarz-Christoffel

Στην παράγραφο 6.4.2 παρουσιάσθηκε η συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^\kappa$ (με $\kappa > 0$), με βασική ιδιότητα ότι μετατρέπει γωνία δ με κορυφή στο $\zeta = 0$ σε γωνία $\delta' = \kappa\delta$ με κορυφή στο $w = 0$. Συνδυάζοντας αυτή τη συνάρτηση με το μετασχηματισμό μετατόπισης και σχηματίζοντας τη συνάρτηση $w(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^\kappa$, αντιμετωπίζεται η προσαρμογή γωνίας με κορυφή στο ζ_0 . Τίθεται, λοιπόν, το ερώτημα αν αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να χειρισθεί τις γωνίες ενός πολυγώνου, για να το μετατρέψει σε πολύγωνο με πιο ευνοϊκό σχήμα. Με επαναληπτική εφαρμογή του μετασχηματισμού $w(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^\kappa$ αυτό δεν είναι εφικτό, επειδή σε κάθε εφαρμογή οι λοιπές πλευρές του πολυγώνου παραμορφώνονται και παύουν να είναι ευθείες. Η ζητούμενη επέκταση είναι μέσω του μετασχηματισμού των Schwarz και Christoffel.

Η βασική μορφή του μετασχηματισμού των Schwarz και Christoffel περιγράφεται από τη συνάρτηση $w_{SC}(\zeta)$, η οποία ορίζεται από την παράγωγό της, που είναι:

$$w'_{SC}(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - \xi_1)^{k_1}} \frac{1}{(\zeta - \xi_2)^{k_2}} \cdots \frac{1}{(\zeta - \xi_n)^{k_n}} \cdots \frac{1}{(\zeta - \xi_N)^{k_N}} = \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\zeta - \xi_n)^{k_n}}. \quad (6.4-24)$$

Οι σταθερές ποσότητες ξ_n είναι πραγματικοί αριθμοί, μη ταυτιζόμενοι, που μπορούν συνεπώς να διαταχθούν, $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \dots < \xi_N$, και αντιπροσωπεύουν διακριτά σημεία Σ_n στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Οι εκθέτες k_n είναι επίσης πραγματικοί αριθμοί, μη μηδενικοί, για τους οποίους θα προσδιορισθούν αργότερα ορισμένοι περιορισμοί.

Η συνάρτηση $w'_{SC}(\zeta)$ ορίζεται σε κάθε θέση ζ , εκτός από τα σημεία $\zeta_n = \xi_n + j0$ του πραγματικού άξονα. Το ολοκλήρωμα $w_{SC}(\zeta) = \int w'_{SC}(\zeta') d\zeta'$ είναι αναλυτική συνάρτηση, εκτός από τα σημεία $\zeta = \xi_n$, ανεξάρτητα από τη διαδρομή ολοκλήρωσης, εφόσον μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών διαδρομών δεν περιέχεται ιδιάζον σημείο ζ_n . Αυτό εξασφαλίζεται, αποκλείοντας τις διαδρομές που τέμνουν τον οριζόντιο άξονα $\eta = 0$, στον οποίο βρίσκονται όλα τα σημεία $\zeta = \xi_n$, οπότε τα σημεία ζ' κατά μήκος της διαδρομής ολοκλήρωσης, άρα και τα τερματικά σημεία ζ , είναι μόνο στο ανω ημιεπίπεδο. Συνεπώς, η συνάρτηση $w_{SC}(\zeta)$ είναι:

$$w_{SC}(\zeta) = \int_{\zeta'}^{\zeta} w'_{SC}(\zeta') d\zeta', \quad \text{με } \text{Im}\{\zeta\} \geq 0, \text{Im}\{\zeta'\} \geq 0, \quad (6.4-25)$$

ως αόριστο ολοκλήρωμα, αδιαφορώντας προς το παρόν για τη σταθερά ολοκλήρωσης. Θεωρητικά, αποδεκτή είναι και η εναλλακτική επιλογή, να είναι $\text{Im}\{\zeta, \zeta'\} \leq 0$, απλώς αυτή η επιλογή δεν έχει καθιερωθεί ως σύμβαση.

Η συμπεριφορά του μετασχηματισμού συνδέεται με την παρουσία των εκθετών k_n και ειδικότερα με την ιδιότητα των μιγαδικών αριθμών ότι στον πολλαπλασιασμό αθροίζονται τα ορίσματα, ενώ στην ύψωση σε δύναμη το όρισμα πολλαπλασιάζεται με τον εκθέτη, και τα ορίσματα εκδηλώνονται, βέβαια, ως γωνίες. Επειδή είναι $dw = w' d\zeta$, παραλείποντας πλέον το δείκτη SC, τα ορίσματα $d\zeta$ και dw συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

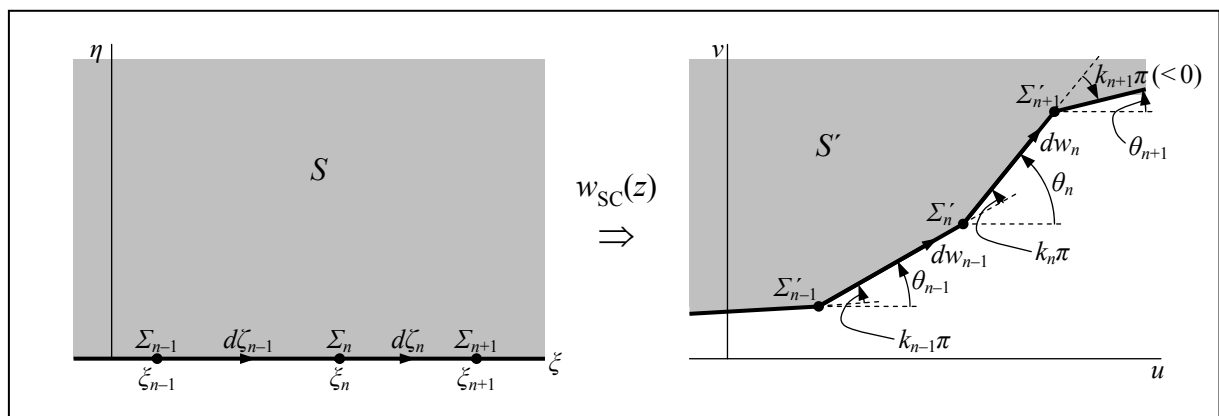
$$\begin{aligned} \text{Arg}\{dw\} &= \text{Arg}\{d\zeta\} + \text{Arg}\{w'\} \\ &= \text{Arg}\{d\zeta\} + \sum_n \text{Arg}\{(\zeta - \zeta_n)^{-k_n}\} \\ &= \text{Arg}\{d\zeta\} - \sum_n k_n \text{Arg}\{\zeta - \zeta_n\}. \end{aligned} \quad (6.4-26)$$

Ενδιαφέρει η απεικόνιση του πραγματικού άξονα, δηλαδή των σημείων Σ με $\zeta = \xi + j0$, αλλά με $\xi \neq \zeta_n$. Για τέτοια σημεία είναι $d\zeta = d\xi (> 0)$, συνεπώς $\text{Arg}\{d\zeta\} = 0$, ενώ το όρισμα της διαφοράς $\zeta - \zeta_n$ εξαρτάται από το εάν το σημείο Σ βρίσκεται στα δεξιά ή στα αριστερά του ζ_n . Αν είναι $\zeta = \xi > \zeta_n$, τότε $\zeta - \zeta_n > 0$, οπότε $\text{Arg}\{\zeta - \zeta_n\} = 0$, ενώ αν $\zeta < \zeta_n$, τότε $\text{Arg}\{\zeta - \zeta_n\} = \pi$. Για το τμήμα $\Sigma_n \Sigma_{n+1}$ του άξονα ξ , με στοιχειώδες μήκος $d\zeta = d\zeta_n$, κάθε σημείο του βρίσκεται στο διάστημα $\zeta_n < \xi < \zeta_{n+1}$, οπότε στο όρισμα $\text{Arg}\{dw_n\}$ της απεικόνισης dw_n του $d\zeta_n$ στη σχέση (6.4-26) μη μηδενική συνεισφορά έχουν, σύμφωνα με τα προηγούμενα, μόνο οι όροι που αναφέρονται στα $\zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+j}, \dots, \zeta_N$, και η συνεισφορά κάθε όρου είναι ίση με $-k_{n+j} \text{Arg}\{\zeta - \zeta_{n+j}\} = -k_{n+j}\pi$. Οι διαπιστώσεις αυτές αποτυπώνονται ως:

$$\theta_n = \text{Arg}\{dw_n\} = -\pi \sum_{\ell=n+1}^N k_\ell, \quad (6.4-27)$$

και η διαφορά μεταξύ των ορισμάτων διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων του άξονα u είναι:

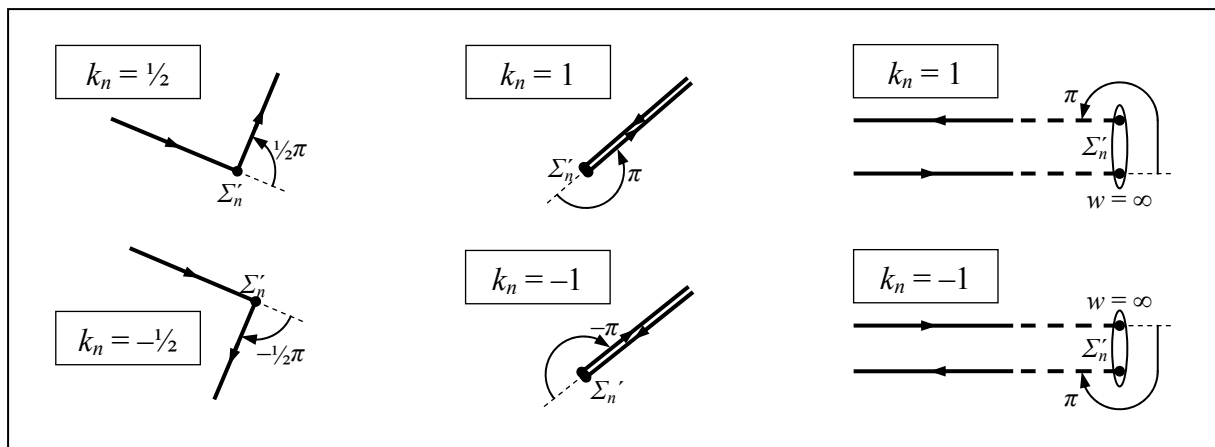
$$\theta_n - \theta_{n-1} = k_n \pi. \quad (6.4-28)$$



Σχήμα 6.4-13

Οι **βασικές ιδιότητες** του μετασχηματισμού *Schwarz-Christoffel* συνάγονται από τη συμπεριφορά αυτή. Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 6.4-13**:

- Κάθε τμήμα $\Sigma_{n-1}\Sigma_n$ απεικονίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα $\Sigma'_{n-1}\Sigma'_n$, επειδή κάθε στοιχειώδες μήκος $d\zeta_n$ στρέφεται κατά $\text{Arg}\{dw_n\}$, το οποίο είναι ανεξάρτητο από τη θέση $\zeta = \zeta$ του $d\zeta_n$ στο $\Sigma_{n-1}\Sigma_n$, αφού όλα τα σημεία στο $\Sigma_{n-1}\Sigma_n$ ικανοποιούν την σχέση $\zeta_n < \zeta < \zeta_{n+1}$.
- Η απεικόνιση κάθε ευθύγραμμου τμήματος είναι στραμμένη κατά $k_n\pi$ σε σχέση με του προηγούμενου, με τη γωνία να καθορίζεται από τον εκθέτη k_n του όρου $\zeta - \zeta_n$ στον παρονομαστή, όπου ζ_n είναι η θέση του σημείου Σ_n , στο οποίο συνδέονται τα διαδοχικά τμήματα. Στα σημεία Σ_n η παράγωγος $w'(z)$ και η συνάρτηση $w(z)$, δεν είναι αναλυτικές, γι' αυτό εκεί η απεικόνιση δεν είναι σύμμορφη, $\theta_n - \theta_{n-1} = k_n\pi$ ενώ $\varphi_n - \varphi_{n-1} = 0$.
- Συνολικά, ο άξονας $\eta = 0$ μετασχηματίζεται σε μία τεθλασμένη γραμμή. Οι γωνίες $k_n\pi$ μετρώνται εξωτερικά, από την προέκταση του ενός τμήματος μέχρι το επόμενο, και είναι προσημασμένες: Στο **Σχήμα 6.4-13** οι γωνίες $k_{n-1}\pi$ και $k_n\pi$ είναι θετικές (για τους εκθέτες είναι $k_{n-1}, k_n > 0$), ενώ η γωνία $k_{n+1}\pi$ είναι αρνητική (οφείλεται σε εκθέτη $k_{n+1} < 0$).
- Πρέπει να είναι $-1 \leq k_n \leq 1$ για κάθε εκθέτη, ώστε να είναι $-\pi \leq \theta_n - \theta_{n-1} = k_n\pi \leq +\pi$ και η στροφή κατά $k_n\pi$ να έχει φυσική σημασία.
- Με κατάλληλες τιμές του εκθέτη k_n μπορούν να σχηματισθούν γωνίες με εύχρηστη τιμή, ιδίως με τις τιμές $k_n = \pm 1/2$, που αντιστοιχούν σε ορθή γωνία, με τα δύο πρόσημα να αντιστοιχούν σε αριστερή και δεξιά στροφή. Υπάρχει, επίσης, η δυνατότητα να επιλεγούν τιμές που αντιστοιχούν σε εκφυλισμένες γωνίες, ειδικότερα οι τιμές $k_n = \pm 1$, που περιγράφουν γωνία μεταξύ γραμμών που ταυτίζονται ή είναι παράλληλες και θεωρούνται ότι συναντώνται στο άπειρο. Τα ενδεχόμενα αυτά παρουσιάζονται στο **Σχήμα 6.4-14**.



Σχήμα 6.4-14

Μετασχηματισμός σε πολύγωνο: Η σύμμορφη απεικόνιση ενδιαφέρει για να επιλυθεί η διδιάστατη εξίσωση του *Laplace* με τις οριακές τιμές σε κλειστή γραμμή. Γι' αυτό, στην προκειμένη περίπτωση πρέπει να θεωρηθεί ότι ο πραγματικός άξονας κλείνει μέσω του απείρου και ότι η τεθλασμένη γραμμή της απεικόνισης αποτελεί το περίγραμμα ενός πολυγώνου.

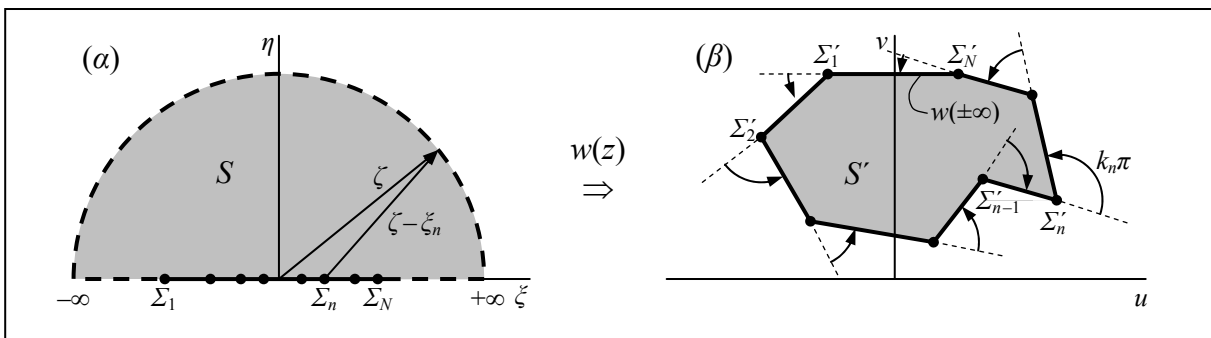
Προκειμένου και η απεικόνισή του άξονα $\eta = 0$ να είναι κλειστή γραμμή (πολύγωνο), πρέπει τα άκρα του άξονα στο $\mp\infty$ να εκδηλώνονται σαν ένα σημείο και να απεικονίζονται στο ίδιο σημείο του επιπέδου w . Πρέπει, δηλαδή, να είναι $w(\zeta = -\infty + j0) = w(\zeta = +\infty + j0)$. Όμως, $0 = w(\zeta = -\infty) - w(\zeta = +\infty) = \int_{+\infty}^{-\infty} w'(\zeta) d\zeta$, ως ολοκλήρωμα της παραγώγου (6.4-24). Η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει σε ημικύκλιο $\zeta = r \exp(j\varphi)$ με $r \rightarrow \infty$, οπότε $d\zeta = jr \exp(j\varphi) d\varphi$, με όρια από $\varphi = 0$ μέχρι $\varphi = \pi$, ώστε να παραμείνει η διαδρομή στην περιοχή $\eta \geq 0$, βλ. **Σχήμα 6.4-15(α)**. Με $r \rightarrow \infty$ είναι $(\zeta - \zeta_n) \approx \zeta$, συνεπώς $(\zeta - \zeta_n)^{k_n} \approx (r e^{j\varphi})^{k_n} = r^{k_n} \exp(jk_n\varphi)$, οπότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w'(\zeta) d\zeta = \int_0^\pi \frac{1}{r^{\sum k_n}} \frac{jr \exp(j\varphi)}{\exp[j(\sum k_n \varphi)]} d\varphi = \frac{1}{r^{\sum k_n - 1}} j \int_0^\pi \exp[-j(\sum k_n - 1)\varphi] d\varphi.$$

Πρέπει να είναι $\int_{+\infty}^{-\infty} w'(\zeta) d\zeta = 0$, όπως προαναφέρθηκε, ώστε να είναι $w(\zeta = \infty) = w(\zeta = -\infty)$ και ο άξονας $\eta = 0$ να μετασχηματίζεται σε πολύγωνο, και καθώς είναι $r \rightarrow \infty$, αυτό σημαίνει:

$$\sum_{n=1}^N k_n > 1. \tag{6.4-29}$$

Επίσης, η περιοχή S με $\eta > 0$, [την οποία ορίζεται ο μετασχηματισμός (6.4-25)], βρίσκεται στα αριστερά της διαδρομής $\Sigma_1 \dots \Sigma_{n-1} \Sigma_n \Sigma_{n+1} \dots$, συνεπώς η απεικόνισή της, η περιοχή S' , βρίσκεται πάλι στα αριστερά της τεθλασμένης γραμμής $\Sigma'_1 \dots \Sigma'_n \dots \Sigma'_N \Sigma'_1$, που πρέπει να είναι πολύγωνο, όπως στο **Σχήμα 6.4-15(β)**. Σε κάθε κορυφή του πολυγώνου το όριο στρέφεται κατά γωνία $k_n\pi$. Όμως, η συνολική στροφή όταν διανυθεί όλο το περίγραμμα του πολυγώνου, όπως και κάθε άλλης κλειστής καμπύλης, είναι ίση με 2π , συνεπώς $\sum_1^N k_n = 2$.



Σχήμα 6.4-15

Για να εξαχθεί η ισότητα $\sum_1^N k_n = 2$ έχει υποθεθεί ότι η περιοχή S' είναι το εσωτερικό του πολυγώνου. Αν η αλληλουχία $\Sigma'_1 \dots \Sigma'_n \dots \Sigma'_N \Sigma'_1$ είχε αντίθετη φορά από αυτή του **Σχήματος 6.4-15(β)**, τότε το άνω ημιεπίπεδο ζ θα απεικονιζόταν στο εξωτερικό του πολυγώνου και η συνολική στροφή θα ήταν ίση με -2π , με αποτέλεσμα το αθροισμα των εκθετών να είναι ίσο με -2 . Αυτό θα ήταν σε αντίφαση με τη σχέση (6.4-29), συνεπώς επιβεβαιώνεται ότι το άνω ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο εσωτερικό του πολυγώνου.

Συνοψίζοντας, η βασική συνάρτηση του μετασχηματισμού Schwarz-Christoffel, η συνάρτηση $w(\zeta)$, ορίζεται στις σχέσεις (6.4-24) και (6.4-25):

$$w(\zeta) = \int \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\zeta' - \zeta_n)^{k_n}} d\zeta', \quad \text{με } \text{Im}\{\zeta\} \geq 0, \text{Im}\{\zeta'\} \geq 0, \quad (6.4-30\alpha)$$

όπου ζ_n είναι πραγματικοί αριθμοί και για τους εκθέτες ισχύουν οι περιορισμοί:

$$-1 \leq k_n \leq +1, \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^N k_n = 2. \quad (6.4-30\beta)$$

Με τη συνάρτηση αυτή:

- Ο άξονας των πραγματικών αριθμών ($\text{Im}\{\zeta\} = \eta = 0$) μετασχηματίζεται σε ένα πολύγωνο με N κορυφές.
- Το άνω ημιεπίπεδο ($\eta > 0$) απεικονίζεται στο εσωτερικό του πολυγώνου.
- Οι κορυφές Σ'_n του πολυγώνου είναι οι απεικονίσεις των σημείων Σ_n , με $\zeta_n = \zeta_n + j0$ ($n = 1, 2, \dots, N$) του άξονα $\eta = 0$.
- Οι πλευρές $\Sigma'_n \Sigma'_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) του πολυγώνου είναι αντίστοιχα οι απεικονίσεις των ευθύγραμμων τμημάτων $\zeta_n < \zeta < \zeta_{n+1}$ του άξονα $\eta = 0$, ενώ η πλευρά $\Sigma'_N \Sigma'_0$ αντιστοιχεί από κοινού στα τμήματα $\zeta_N < \zeta < +\infty$ και $-\infty < \zeta < \zeta_1$ του άξονα $\eta = 0$.
- Η εξωτερική γωνία στην κορυφή Σ'_n του πολυγώνου είναι ίση με $k_n \pi$.

Παραλλαγή της βασικής συνάρτησης: Το ευθύγραμμο τμήμα $-\infty \Sigma_1$ βρίσκεται στα αριστερά όλων των σημείων Σ_n και σύμφωνα με τη σχέση (6.4-27) η απεικόνισή του έχει κλίση ίση με $-\pi \sum_1^N k_n$. Αντίθετα, το ευθύγραμμο τμήμα $\Sigma_{N\infty}$ βρίσκεται στα δεξιά όλων των σημείων Σ_n και η απεικόνισή του έχει μηδενική κλίση. Συνεπώς, η παραπάνω σχέση $\sum_1^N k_n = 2$ σημαίνει ότι οι κλίσεις των απεικονίσεων των $-\infty \Sigma_1$ και $\Sigma_{N\infty}$ συμπίπτουν και ότι η απεικόνιση του $\zeta = \pm\infty$ βρίσκεται σε κάποιο σημείο της πλευράς $\Sigma'_N \Sigma'_1$ του πολυγώνου. Αν, όμως, είναι $\sum_1^N k_n \neq 2$, τότε οι κλίσεις των απεικονίσεων των $-\infty \Sigma_1$ και $\Sigma_{N\infty}$ δεν συμπίπτουν,

ενώ η απεικόνιση του άξονα $\eta = 0$ εξακολουθεί να είναι ένα πολύγωνο, αν είναι $\sum_1^N k_n > 1$, βλ. σχέση (6.4-29), επειδή τότε είναι $w(\zeta = -\infty) = w(\zeta = +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι στην απεικόνιση του άξονα $\eta = 0$ εμφανίζεται άλλη μία κορυφή, το σημείο Σ_0' , που είναι η απεικόνιση του σημείου Σ_0 , για το οποίο είναι $\zeta_0 = \pm\infty$, $\eta_0 = 0$. Στο σημείο Σ_0 αντιστοιχεί εκθέτης k_0 , τέτοιος ώστε $k_0 + \sum_1^N k_n = 2$. Ο περιορισμός $-1 < k_0 < +1$ αφορά και αυτόν τον εκθέτη, ώστε και στο σημείο Σ_0' η γωνία $k_0\pi$ να έχει φυσικό νόημα. Το αποτέλεσμα είναι πως τώρα η απαίτηση για το άθροισμα γίνεται $1 < \sum_1^N k_n < 3$.

Με βάση τα παραπάνω, αυτή η παραλλαγή του μετασχηματισμού *Schwarz-Christoffel* εμπλέκει πάλι τη συνάρτηση:

$$w(\zeta) = \int \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\zeta' - \zeta_n)^{k_n}} d\zeta', \quad \text{με } \text{Im}\{\zeta\} \geq 0, \text{Im}\{\zeta'\} \geq 0, \quad (6.4-31\alpha)$$

όπου ζ_n είναι πάλι πραγματικοί αριθμοί και για τους εκθέτες ισχύουν οι περιορισμοί:

$$-1 \leq k_n \leq +1 \quad \text{και} \quad -1 \leq k_0 \leq +1, \quad \text{αλλά} \quad 1 < \sum_{n=1}^N k_n < 3. \quad (6.4-31\beta)$$

Με την παραλλαγή αυτή:

- Ο άξονας των πραγματικών αριθμών ($\text{Im}\{\zeta\} = \eta = 0$) μετασχηματίζεται πάλι σε ένα πολύγωνο, αλλά με $N+1$ κορυφές.
- Το άνω ημιεπίπεδο ($\eta > 0$) απεικονίζεται πάλι στο εσωτερικό του πολυγώνου.
- Τα σημεία Σ_n , με $\zeta_n = \zeta_n + j0$, $n = 1, 2, \dots, N$, του άξονα $\eta = 0$ απεικονίζονται πάλι σε κορυφές Σ_n' του πολυγώνου, ενώ η πρόσθετη (η $N+1$) κορυφή Σ_0' , που παρεμβάλλεται μεταξύ των κορυφών Σ_N' και Σ_1' , είναι η απεικόνιση του σημείου Σ_0 , με $\zeta_0 = \pm\infty$, που βρίσκεται στη θέση $\zeta_0 = \pm\infty + j0$.
- Οι πλευρές $\Sigma_n'\Sigma_{n+1}'$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) του πολυγώνου είναι αντίστοιχα οι απεικονίσεις των ευθύγραμμων τμημάτων $\zeta_n < \zeta < \zeta_{n+1}$ του άξονα $\eta = 0$, με $\zeta_0 = -\infty$ και $\zeta_{N+1} = +\infty$ και υπονοώντας ότι Σ_{N+1}' είναι το σημείο Σ_0' .
- Η εξωτερική γωνία στην κορυφή Σ_n' του πολυγώνου είναι ίση με $k_n\pi$, όταν $n = 1, 2, \dots, N$, και στην κορυφή Σ_0' η εξωτερική γωνία είναι ίση με $k_0\pi$, όπου $k_0 = 2 - \sum_1^N k_n$.

Η παραλλαγή αντιπροσωπεύει το όριο $\zeta_0 \rightarrow \infty$ του βασικού μετασχηματισμού (6.4-30), περιλαμβάνοντας και την τιμή $n = 0$. Τότε, ο πρώτος όρος γίνεται $(\zeta - \zeta_0)^{-k_0} \approx (-\zeta_0)^{-k_0}$, ίσως με μία σταθερή ποσότητα που η παράλειψή της δεν αλλοιώνει τα χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού και που μπορεί να ενσωματωθεί στη σταθερά K της γενίκευσης που ακολουθεί.

Γενίκευση των σχέσεων (6.4-30) και (6.4-31) είναι ο μετασχηματισμός:

$$w(\zeta) = K \int_{Z_0}^{\zeta} \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\zeta' - \zeta_n)^{k_n}} d\zeta' = K \int_0^{\zeta} \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\zeta' - \zeta_n)^{k_n}} d\zeta' + A, \quad (6.4-32)$$

με $\text{Im}\{\zeta\} \geq 0, \text{Im}\{Z_0\} \geq 0, \text{Im}\{\zeta'\} \geq 0,$

για τον οποίο ισχύουν όλα τα προηγούμενα, ανάλογα αν είναι $\sum_1^N k_n = 2$ ή $1 < \sum_1^N k_n < 3$. Εδώ, το ολοκλήρωμα διατυπώνεται ως ορισμένο, με την τιμή του κάτω ορίου Z_0 να ρυθμίζει τη θέση του πολυγώνου σε σχέση με τους άξονες, έτσι ώστε να είναι $w(Z_0) = 0'$. Εναλλακτικά, το ίδιο επιτυγχάνεται με συγκεκριμένο το κάτω όριο ολοκλήρωσης, όπως το μηδέν, και με μετατόπιση κατά κατάλληλο A . Με το συντελεστή K , εν γένει μιγαδικό, μπορεί να ρυθμισθεί το μέγεθος και ο προσανατολισμός του πολυγώνου.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\zeta(w = w_{SC})$ μετασχηματίζει ένα πολύγωνο του επιπέδου w σε ευθεία γραμμή, τον άξονα $\eta = 0$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός εμπλέκει κάποιες παραμέτρους k_n , αυτές που στον ευθύ μετασχηματισμό υπεισέρχονται ως εκθέτες. Οι τιμές των k_n καθορίζονται από το σχήμα του πολυγώνου, ειδικότερα τις εξωτερικές γωνίες. Αντίστοιχα, οι τιμές των παραμέτρων ζ_n προσδιορίζονται από τις θέσεις των κορυφών, ώστε να είναι $\zeta_n = \zeta(w = w_n)$, όπου w_n είναι η θέση της κορυφής Σ'_n .

Η χρήση του μετασχηματισμού Schwarz-Christoffel αφορά την επίλυση διδιάστατων διατάξεων οριακών τιμών, στις οποίες το όριο έχει το σχήμα ενός πολυγώνου, ενδεχομένως εκφυλισμένου. Θεωρώντας ότι το πολύγωνο ορίζεται στο επίπεδο z , η διαδικασία επίλυσης περιλαμβάνει δύο διαδοχικά βήματα:

- Πρώτα, με τον αντίστροφο μετασχηματισμό, $\zeta = \zeta(w_1 = z)$, το δεδομένο πολύγωνο απεικονίζεται στον πραγματικό άξονα, $\text{Im}\{\zeta\} = \eta = 0$, του επιπέδου ζ .
- Ακολούθως, εφαρμόζοντας τον ευθύ μετασχηματισμό, $w = w_2(\zeta)$, ο πραγματικός άξονας απεικονίζεται στο επίπεδο w πάλι σε πολύγωνο, όχι απαραίτητα με τον ίδιο αριθμό κορυφών όπως το αρχικό, αλλά με σχήμα που να επιτρέπει την επίλυση του προβλήματος οριακών τιμών για την εξίσωση του *Laplace*. Φυσικά, αυτή η ενέργεια είναι περιττή, αν οι οριακές συνθήκες επιτρέπουν να επιλυθεί η διάταξη απευθείας στο επίπεδο ζ .

Και στα δύο βήματα, κατά την απεικόνιση μεταφέρονται σε κάθε τμήμα του ορίου οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες και, κατά τα γνωστά, οριακές συνθήκες με μορφή $\Phi = \text{σταθ.}$ και $\partial\Phi/\partial n = 0$ μεταφέρονται αυτούσιες. Στη συνέχεια θα σχολιασθεί χωριστά η εφαρμογή καθενός από τα δύο αυτά βήματα.

Ο μετασχηματισμός του αρχικού πολυγώνου είναι το πρώτο, αλλά και δυσκολότερο βήμα. Μολονότι η συνάρτηση $w_1(\zeta)$ είναι μαθηματικά καλά προσδιορισμένη μέσω ενός ολοκληρώματος, μόνο σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να διατυπωθεί σε κλειστή μορφή. Στις πιο απλές ειδικές περιπτώσεις εμφανίζεται η λογαριθμική και οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων, που ορίζονται στον **Πίνακα Ε.2-3** του Παραρτήματος Ε.2, και η αντιστροφή τους είναι άμεση. Άλλες ειδικές περιπτώσεις περιγράφονται σε κλειστή μορφή από ανώτερες υπερβατικές συναρτήσεις, όπως τα ελλειπτικά ολοκληρώματα και οι ελλειπτικές συναρτήσεις. Αλλά και σ' αυτές τις ειδικές αυτές περιπτώσεις, μολονότι υπάρχει μαθηματική συνάρτηση για το ολοκλήρωμα που ορίζει την $w_1(\zeta)$, για την εξαγωγή συγκεκριμένων ποσοτικών πληροφοριών είναι, συνήθως, αποτελεσματικότερο η ολοκλήρωση και η αντιστροφή να γίνουν αριθμητικά, όπως άλλωστε είναι απαραίτητο όταν δεν υπάρχει η δυνατότητα να εκφραστούν οι συναρτήσεις αυτές με κλειστή μορφή.

Με βάση τον αριθμό κορυφών του αρχικού πολυγώνου, ας σχολιασθούν διάφορα ενδεχόμενα για τη συνάρτηση $z(\zeta)$, δηλαδή, τη $z = w_1(\zeta)$:

- **Πολύγωνο με δύο κορυφές** (εκφυλισμένο): Πρόκειται για διάταξη με όριο δύο παράλληλες ευθείες, που θεωρούνται ότι συναντώνται στο άπειρο, όπου και τέμνονται με εξωτερική γωνία ίση με π , συνεπώς είναι $k_1 = k_2 = 1$. Μία τέτοια διάταξη παρουσιάζει το **παράδ. 6.4-11**. Όπως περιγράφεται εκτενέστερα στο παράδειγμα, με τις επιλογές $\zeta_1 = -1$ και $\zeta_2 = +1$ ο μετασχηματισμός μπορεί να εκφρασθεί με κλειστή μορφή:

$$z(\zeta) = K \int_{z_0}^{\zeta} \frac{1}{(\zeta'+1)} \frac{1}{(\zeta'-1)} d\zeta' = \frac{K}{2} \ln \frac{\zeta-1}{\zeta+1} + A, \quad (6.4-33)$$

όπου η δεύτερη σταθερά A περιγράφει τη συνεισφορά του κάτω ορίου Z_0 . Η αντίστροφη συνάρτηση προσδιορίζεται επιλύοντας ως προς ζ μία γραμμική σχέση, με αποτέλεσμα:

$$\zeta(z) = -\coth\left(\frac{z-A}{K}\right). \quad (6.4-34)$$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει, ότι μία εναλλακτική διατύπωση της σχέσης $z(\zeta)$ είναι $z = K \operatorname{arccoth}(-\zeta) + A = K' \operatorname{arctanh} \zeta + A'$, με διαφορετικές τις σταθερές K και K' , καθώς και τις A και A' , χωρίς όμως αυτό να έχει καμία συνέπεια.

- **Δισορθογώνιο τρίγωνο** (εκφυλισμένο): Στη διάταξη αυτή, οι δύο πλευρές του τριγώνου είναι παράλληλες ημιευθείες, που στα πεπερασμένα άκρα τους τέμνονται από την τρίτη πλευρά σε ορθή γωνία, ενώ στο άπειρο σχηματίζουν εξωτερική γωνία ίση με π . Θεωρώ-

ντας ότι η κορυφή στο άπειρο του επιπέδου z απεικονίζεται στο σημείο $\zeta_0 = \mp\infty$, με εκθέτη $k_0 = 1$, και ότι οι άλλες δύο κορυφές στα σημεία $\zeta_{1,2} = \mp 1$, με $k_{1,2} = 1/2$, ο μετασχηματισμός γράφεται:

$$z(\zeta) = K \int_{Z_0}^{\zeta} \frac{1}{(\zeta'+1)^{1/2}} \frac{1}{(\zeta'-1)^{1/2}} d\zeta' = K \operatorname{arccosh} \zeta + A = K' \arcsin \zeta + A', \quad (6.4-35)$$

με αντίστροφη συνάρτηση:

$$\zeta(z) = \sin\left(\frac{z - A'}{K'}\right) \text{ κλπ.} \quad (6.4-36)$$

- Σε τυχαίο τρίγωνο είναι απλούστερο να αντιστοιχισθεί μία κορυφή με το σημείο $\zeta_0 = \mp\infty$ και οι άλλες δύο με τις θέσεις $\zeta_1 = 0$ και $\zeta_2 = +1$, ή $\zeta_1 = -1$ και $\zeta_2 = +1$, με εξωτερικές γωνίες που αντιστοιχούν σε εκθέτες με τιμές k_1 και k_2 , ενώ ο τρίτος εκθέτης $k_0 = 2 - k_1 - k_2$, δεν υπεισέρχεται στο ολοκλήρωμα. Η δεύτερη επιλογή, με $\zeta_{1,2} = \mp 1$, ταιριάζει περισσότερο σε ισοσκελή τρίγωνα, στα οποία είναι $k_1 = k_2$. Ο μετασχηματισμός περιγράφεται από συνάρτηση, στην οποία το ολοκλήρωμα εν γένει δεν εκφράζεται με τη βοήθεια καθιερωμένων συναρτήσεων, συγκεκριμένα:

$$z(\zeta) = K \int_{Z_0}^{\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - \zeta_1)^{k_1} (\zeta' - \zeta_2)^{k_2}} = \begin{cases} K \int_{Z_0}^{\zeta} \frac{d\zeta'}{\zeta'^{k_1} (\zeta' - 1)^{k_2}}, \\ K \int_{Z_0}^{\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' + 1)^{k_1} (\zeta' - 1)^{k_2}}. \end{cases} \quad (6.4-37)$$

Με τη συνάρτηση αυτή είναι εφικτή η απεικόνιση οποιουδήποτε τριγώνου του επιπέδου z στον πραγματικό άξονα του επιπέδου ζ . Αρχικά, το αόριστο ολοκλήρωμα παράγει τρίγωνο όμοιο προς το δεδομένο, επειδή σε τρίγωνα η ομοιότητα εξαρτάται μόνο από τις τιμές των γωνιών, συνεπώς από τις τιμές των $k_{1,2}$. Ακολουθώντας, οι παράμετροι K και Z_0 επιλέγονται με τέτοιες τιμές, ώστε να παραγάγουν μεγέθυνση/στροφή και μετατόπιση, όσο χρειάζεται για να σχηματισθεί το αρχικά δεδομένο τρίγωνο. Φυσικά, στη γενική περίπτωση τριγώνου είναι ματαιοπονία να επιδιωχθεί αντιστροφή με αναλυτικές τεχνικές.

- Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο η επίλυση γίνεται, συνήθως, είτε απευθείας, αν οι οριακές συνθήκες το επιτρέπουν, είτε με χωρισμό μεταβλητών, ιδίως σε σύνθετες διατάξεις, σαν αυτή του *παρ. 7.2-14* στο επόμενο Κεφ. 7. Για επίλυση με το μετασχηματισμό *Schwarz-Christoffel* είναι προτιμότερο να τεθούν τα τέσσερα ζ_n στις θέσεις ± 1 και $\pm 1/m^{1/2}$,

με $0 < m < 1$. Όλοι οι εκθέτες είναι ίσοι με $\frac{1}{2}$, οπότε ο μετασχηματισμός $z(\zeta)$ γράφεται ως:

$$z(\zeta) = K \int_0^\zeta \frac{d\zeta'}{\sqrt{(1-\zeta'^2)(1-m\zeta'^2)}} + A = K F(\zeta; m) + A. \quad (6.4-38)$$

Το ορθογώνιο που σχηματίζεται έχει κορυφές κατά σειρά στις θέσεις $z(-m^{1/2})$, $z(-1)$, $z(+1)$ και $z(+m^{1/2})$, συνεπώς οι διαφορές $|z(+1) - z(-1)|$ και $|z(+m^{1/2}) - z(-1)|$ δίνουν τα μήκη των πλευρών. Το πηλίκο των δύο αυτών μηκών εξαρτάται μόνο από την παράμετρο m , επειδή ο συντελεστής A απαλείφεται κατά τις αφαιρέσεις και ο K κατά τη διαίρεση. Εξισώνοντας το πηλίκο αυτό με το λόγο των πλευρών του δεδομένου ορθογωνίου προσδιορίζεται η τιμή της παραμέτρου m που εξασφαλίζει ότι ο μετασχηματισμός παράγει ορθογώνιο όμοιο προς το δεδομένο. Τέλος, στις σταθερές K και A δίδονται τέτοιες τιμές, ώστε το παραγόμενο ορθογώνιο να έχει το μέγεθος, τον προσανατολισμό και τη θέση του δεδομένου.

- Σε τυχαίο τετράπλευρο, πεντάπλευρο κλπ. η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη. Στην περίπτωση του τυχαίου τριγώνου, όπως έχει ήδη παρουσιασθεί, η σχέση (6.4-37) παράγει αρχικά τρίγωνο όμοιο με το επιθυμητό, με βάση μόνο τις τιμές των εκθετών k_n και ανεξάρτητα από την επιλογή των τριών ζ_n , και ακολούθως οι σταθερές K και Z_0 προσαρμόζουν το τρίγωνο ώστε να ταυτίζεται με το επιθυμητό. Για την ομοιότητα δύο τετραπλεύρων δεν αρκεί, όμως, η ισότητα των γωνιών, αλλά απαιτείται μία επιπρόσθετη πληροφορία, όπως ο λόγος δύο πλευρών, κλπ. σε ανώτερα πολύγωνα. Μόνο για τρεις κορυφές μπορεί να γίνει η επιλογή των ζ_n , ενώ οι τιμές των επιπλέον ζ_n είναι αντικείμενο προσδιορισμού, με κριτήριο να σχηματίζεται πολύγωνο όμοιο προς το επιθυμητό. Για παράδειγμα, στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αυτός ο προσδιορισμός έγινε μέσω της παραμέτρου m .

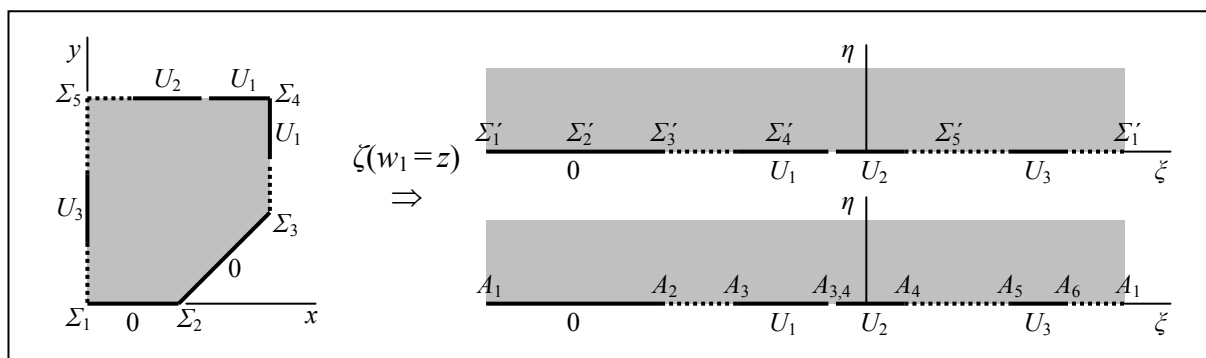
Με δεδομένο ότι τελικά η επίλυση θα γίνει αριθμητικά, το απλούστερο είναι όλες οι θέσεις ζ_n να προσδιορισθούν από το μη γραμμικό σύστημα:

$$z_n = \int_0^\zeta \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\zeta' - \zeta_n)^{k_n}} d\zeta', \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (6.4-39\alpha)$$

όπου z_n είναι οι γνωστές θέσεις των κορυφών του πολυγώνου. Όταν προσδιορισθούν οι τιμές των ζ_n , ο μετασχηματισμός $w(z)$ γράφεται ως:

$$z(\zeta) = \int_0^\zeta \prod_{n=1}^N \frac{1}{(\zeta' - \zeta_n)^{k_n}} d\zeta', \quad (6.4-39\beta)$$

χωρίς κανένα συντελεστή K και χωρίς ελεύθερο το κάτω όριο ολοκλήρωσης.

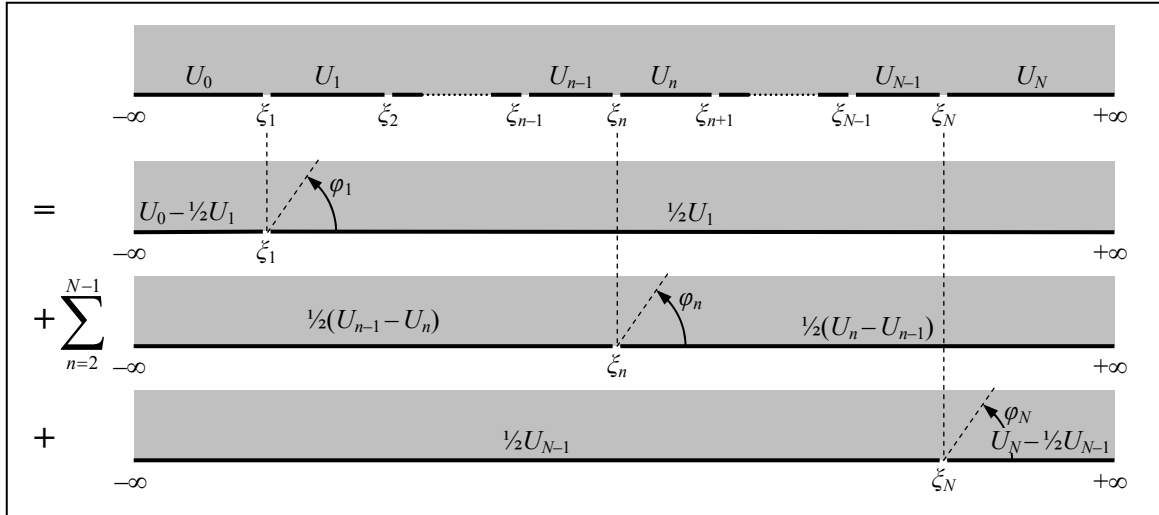


Σχήμα 6.4-16

Η επίλυση του μετασχηματισμένου πολυγώνου, του άξονα $\eta = 0$, αποτελεί αυθυπόστατη ενέργεια, η οποία εκτελείται με βάση τις οριακές συνθήκες που έχουν μεταφερθεί από το αρχικό πολύγωνο, αλλά χωρίς καμία άλλη αναφορά σ' αυτό. Για παράδειγμα, στο **Σχήμα 6.4-16** υποτίθεται πως το αρχικό σχήμα είναι ένα πεντάγωνο, με τις οριακές συνθήκες που αναφέρονται στο σχήμα. (Τα τμήματα με συνθήκη *Dirichlet*, $\Phi = \text{σταθ.}$, σημειώνονται με συνεχή γραμμή και αναγράφεται η τιμή του δυναμικού, ενώ στα τμήματα με γραμμή με στιγμές ικανοποιείται ομογενής συνθήκη *Neumann*, $\partial\Phi/\partial n = 0$.) Με τον κατάλληλο μετασχηματισμό, υποτίθεται πως το πεντάγωνο έχει απεικονισθεί στον άξονα $\eta = 0$, όπου μεταφέρονται και οι οριακές συνθήκες, και Σ'_n είναι οι απεικονίσεις των κορυφών Σ_n του αρχικού πενταγώνου. Όσον αφορά όμως τη διάταξη που προκύπτει, η θέση, αλλά και αυτή ακόμα η ύπαρξη των σημείων Σ'_2 , Σ'_4 και Σ'_5 είναι τελείως αδιάφορη και δεν επηρεάζει σε τίποτε την κατανομή του δυναμικού στο επίπεδο ζ . Το μόνο που ενδιαφέρει για να προσδιορισθεί το δυναμικό $\Phi(\zeta, \eta)$ στο ημιεπίπεδο $\text{Im}\{\zeta\} > 0$, είναι η κατανομή των οριακών συνθηκών στο όριο, τον πραγματικό άξονα. Και για να περιγραφεί αυτή η κατανομή, αυτό που χρειάζεται είναι κυρίως τα σημεία A_1, A_2, \dots , στα οποία μεταβάλλεται η μορφή της οριακής συνθήκης, από *Neumann* σε *Dirichlet* ή αντίστροφα, και δευτερευόντως το σημείο $A_{3,4}$, εσωτερικό του τμήματος A_3A_4 , στο οποίο διατηρείται η μορφή της οριακής συνθήκης, τύπου *Dirichlet*, αλλά απλά αλλάζει η τιμή του δυναμικού, από U_1 σε U_2 .

Θεωρώντας ότι στον άξονα $\eta = 0$, όπως και στο αρχικό πολύγωνο, η οριακή συνθήκη έχει αλλού τη μορφή $\Phi = \text{σταθ.}$, και αλλού είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$, η διαδικασία επίλυσης εξαρτάται από το πλήθος διακριτών τμημάτων με ομογενή συνθήκη *Neumann*. Ειδικότερα:

- Τμηματικά σταθερό δυναμικό, $\Phi(\xi_n < \zeta < \xi_{n+1}) = U_n = \text{σταθ.}$, με $\xi_0 = -\infty$ και $\xi_{N+1} = +\infty$, σε όλα τα n , και κανένα τμήμα δεν έχει συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$: Μία τέτοια διάταξη είναι άμεσα επιλύσιμη στο επίπεδο ζ , χωρίς να χρειάζεται κανένας περαιτέρω μετασχηματισμός.



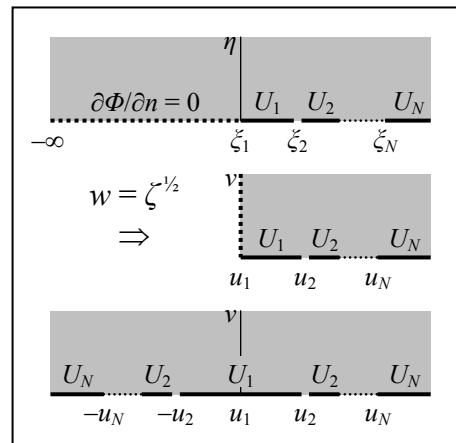
Σχήμα 6.4-17

Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας επαλληλία, $\Phi = \sum_n \Phi_n$, των N διατάξεων που φαίνεται στο **Σχήμα 6.4-17** και επιβεβαιώνεται εύκολα, αθροίζοντας τις επιμέρους τιμές του δυναμικού στο όριο. Τέτοια διάταξη, χωρίς να χρειάζεται, όμως, επαλληλία, εμφανίζεται στο **παράδ. 6.4-11**. Σε κάθε επιμέρους διάταξη, μετρώντας τη γωνία φ_n με κορυφή στο σημείο ζ_n , το δυναμικό είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2}U_0 + (U_1 - U_0) \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) = \frac{1}{2}U_0 + (U_1 - U_0) \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\zeta - \zeta_1}{\eta}, \\ \Phi_n &= (U_n - U_{n-1}) \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n \right) = (U_n - U_{n-1}) \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\zeta - \zeta_n}{\eta}, \quad (n \neq 1, N) \quad (6.4-40) \\ \Phi_N &= \frac{1}{2}U_N + (U_N - U_{N-1}) \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_N \right) = \frac{1}{2}U_N + (U_N - U_{N-1}) \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\zeta - \zeta_N}{\eta}, \end{aligned}$$

με τη συνάρτηση του τόξου εφαπτομένης να επιστρέφει τιμές στο διάστημα από $-\pi/2$ μέχρι $+\pi/2$ (ώστε να είναι $0 \leq \varphi_n \leq \pi$). Αθροίζοντας προκύπτει το δυναμικό $\Phi(\zeta, \eta)$.

- Ένα τμήμα με συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$: Τα άκρα του ορίου με τη συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$ επιλέγεται να απεικονίζονται, στα σημεία $\zeta_0 = -\infty$ και προαιρετικά $\zeta_1 = 0$, όπως στο **Σχήμα 6.4-18**. Η συνάρτηση $w(\zeta) = \zeta^{1/2}$ απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στο πρώτο τεταρτημόριο και μεταφέρει τη συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$ στον θετικό ημιάξονα. Κατοπτρίζοντας τη διάταξη ως προς αυτόν τον άξονα σχηματίζεται διάταξη ακριβώς όπως η αμέσως προηγούμενη. Αν στο τμήμα



Σχήμα 6.4-18

του ορίου με συνθήκη *Dirichlet* το δυναμικό έχει παντού την ίδια τιμή, $\Phi = U$, η λύση προφανώς είναι $\Phi(\eta > 0) = U$, χωρίς βέβαια να χρειάζεται ο χειρισμός που περιγράφηκε.

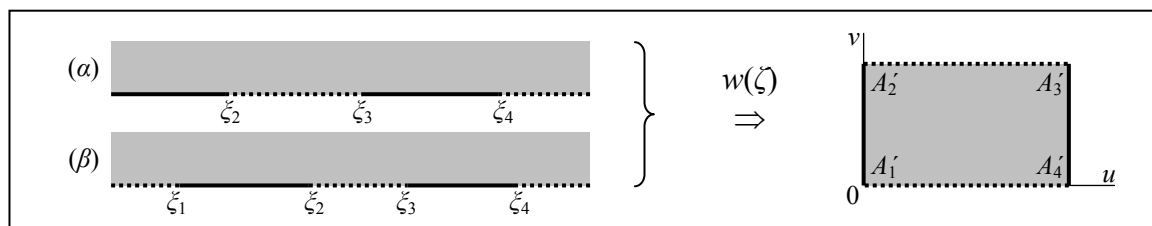
- Δύο τμήματα με συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$: Προφανώς, άλλα δύο τμήματα θα έχουν συνθήκη *Dirichlet*, και για την επίλυση η κατάλληλη ενέργεια είναι, καθένα από τα τέσσερα τμήματα να απεικονισθεί σε πλευρές ορθογωνίου (άρα $k_n = +1/2$), που επιλύεται πιο εύκολα. Ακόμα και η αριθμητική επίλυση διευκολύνεται, επειδή οι γραμμές $\Phi = \text{σταθ.}$ τέμνονται ορθογώνια από τις γραμμές $\Psi = \text{σταθ.}$, όπως είναι και οι γραμμές με $\partial\Phi/\partial n = 0$. Η μορφή της συνάρτησης μετασχηματισμού εξαρτάται από το αν στο άπειρο του άξονα $\eta = 0$ αλλάζει η μορφή της οριακής συνθήκης, από *Dirichlet* σε *Neumann* ή αντίστροφα, όπως στο **Σχήμα 6.4-19(α)**, και τότε υπονοείται $\xi_1 = \mp\infty$, ή όχι, όπως στο **Σχήμα 6.4-19(β)**. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις, εξυπηρετεί η συνάρτηση $w(\zeta)$ να έχει μορφή:

$$w(\zeta) = \int_{\xi_4}^{\zeta} \frac{d\zeta'}{\sqrt{(\zeta' - \xi_2)(\zeta' - \xi_3)(\zeta' - \xi_4)}}, \quad (\text{με } \xi_1 = \mp\infty) \quad (6.4-41)$$

$$w(\zeta) = \int_{\xi_4}^{\zeta} \frac{d\zeta'}{\sqrt{(\zeta' - \xi_1)(\zeta' - \xi_2)(\zeta' - \xi_3)(\zeta' - \xi_4)}}.$$

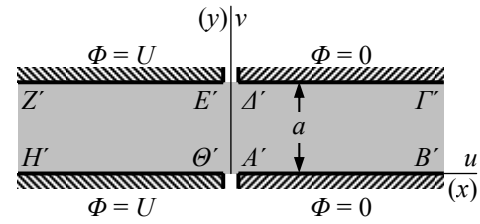
Ως κάτω όριο έχει επιλεγεί το ιδιαίρον σημείο ξ_4 που βρίσκεται δεξιότερα. Συνέπειες της επιλογής είναι ότι η αντίστοιχη κορυφή του ορθογωνίου τοποθετείται στην αρχή των αξόνων και ότι το ορθογώνιο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, με τις πλευρές του κάθετες και παράλληλες προς τους άξονες και δεν συντρέχει λόγος για περαιτέρω μετατόπιση ή στροφή του. Αν κάθε πλευρά με συνθήκη *Dirichlet* έχει σταθερή τιμή του δυναμικού, η λύση στο επίπεδο w διατυπώνεται αμέσως, αλλιώς θα γίνει επίλυση της διάταξης με χωρισμό μεταβλητών, βλ. παράγρ. 7.2.3.

- Τρία ή περισσότερα τμήματα με συνθήκη $\partial\Phi/\partial n = 0$, και ισόποσα με συνθήκη *Dirichlet*, αντιμετωπίζονται ως προφανείς επεκτάσεις της προηγούμενης περίπτωσης, με απεικόνιση σε εξάπλευρο, οκτάπλευρο κλπ., με όλες τις γωνίες ορθές, με κάποιους εκθέτες ίσους με $k_n = -1/2$, ώστε να είναι $\sum_1^N k_n = 2$ ή $1\frac{1}{2}$. Σε κάθε περίπτωση, η διάταξη είναι σύνθετη.



Σχήμα 6.4-19

Παράδειγμα 6.4-11: Σε έναν κυματοδηγό με παράλληλες πλάκες σε απόσταση a είναι αναγκαίο στα αγωγίματα τοιχώματα να δημιουργηθεί ένα μικρό ($\ll a$) μονωμένο διάκενο, ώστε ένα τμήμα του κυματοδηγού να είναι γειωμένο και το υπόλοιπο σε τάση U .



Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ στο εσωτερικό του κυματοδηγού.

Επίλυση: Η διάταξη μπορεί να θεωρηθεί ως εκφυλισμένο πολύγωνο με δύο (!) κορυφές στο άπειρο, στα διπλά σημεία $B'-\Gamma'$ και $Z'-H'$, με τις εξωτερικές γωνίες ίσες με $+\pi$. Πολύγωνα σχηματίζονται ως απεικονίσεις του άξονα $\eta = 0$, με το μετασχηματισμό $w(\zeta)$ των *Schwarz-Christoffel*. Ας αναζητηθεί η συγκεκριμένη συνάρτηση $w(\zeta)$, από τη γενική μορφή της σχέσης (6.4-32), που να απεικονίζει στο συγκεκριμένο εκφυλισμένο πολύγωνο. [Στο σχήμα προσαρτώνται και άξονες (u, v) και τα σημεία σημειώνονται τονισμένα, επειδή το εκφυλισμένο πολύγωνο αποτελεί το αποτέλεσμα του ζητούμενου μετασχηματισμού.]

Η συνάρτηση $w(\zeta)$ θα περιέχει δύο σημεία ζ_n , που θα αντιστοιχούν στα σημεία $B-\Gamma$ και $Z-H$, με τους αντίστοιχους εκθέτες να είναι ίσοι με $+1$, επειδή στα αντίστοιχα σημεία του πολυγώνου η εξωτερική γωνία είναι ίση με π και στα δύο. Επίσης, είναι επιθυμητό στο επίπεδο ζ το τμήμα $AB\Gamma\Delta$ να βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα $\xi > 0, \eta = 0$, στην ημιευθεία $\varphi_\zeta = 0$, και το τμήμα $EZH\Theta$ στον αρνητικό ημιάξονα, $\xi < 0, \eta = 0$, στην ημιευθεία $\varphi_\zeta = \pi$, επειδή τότε οι οριακές συνθήκες, $\Phi(\varphi_\zeta=0) = 0$ και $\Phi(\varphi_\zeta=\pi) = U$, δίνουν αμέσως το αποτέλεσμα για το δυναμικό, $\Phi(\varphi_\zeta) = (U/\pi)\varphi_\zeta$. Πρέπει, συνεπώς, να ληφθεί $Z_0 = 0$, ώστε $w(0) = 0$ και το σημείο $\Theta-A$, το κοινό άκρο των τμημάτων $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$, να είναι στην αρχή των αξόνων, και $\zeta_1 = \zeta_{ZH} < 0$ και $\zeta_2 = \zeta_{B\Gamma} > 0$, ώστε τα σημεία $B-\Gamma$ και $Z-H$ να είναι στους επιθυμητούς ημιάξονες. Ας ληφθεί $\zeta_1 = -1$ και $\zeta_2 = +1$, με $k_1 = k_2 = 1$, που αντιστοιχούν σε εξωτερικές γωνίες ίσες με $k_{1,2}\pi = +\pi$. Με όλες αυτές τις επιλογές, η συνάρτηση $w(\zeta)$ σχηματίζεται ως:

$$w(\zeta) = K \int_{Z_0}^{\zeta} \frac{1}{(\zeta' - \zeta_1)^{k_1}} \frac{1}{(\zeta' - \zeta_2)^{k_2}} d\zeta' = K \int_0^{\zeta} \frac{1}{(\zeta' + 1)} \frac{1}{(\zeta' - 1)} d\zeta'$$

$$= -\frac{K}{2} \left[\int_0^{\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' + 1)} - \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta'}{(\zeta' - 1)} \right] = -\frac{K}{2} \left[\ln(\zeta' + 1) - \ln(\zeta' - 1) \right] \Big|_0^{\zeta},$$

και επειδή είναι $\ln(+1) = 0$ και $\ln(-1) = j\pi$, η συνάρτηση $w(\zeta)$ παίρνει τη μορφή:

$$w(\zeta) = \frac{K}{2} \left[\ln \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) - j\pi \right].$$

Ακόμα εκκρεμεί η τιμή της σταθεράς K . Επίσης, δεν έχει ικανοποιηθεί η απαίτηση να έχουν οι παράλληλες πλάκες απόσταση ίση με a . Αυτό εξασφαλίζεται θέτοντας $w(\zeta = \pm\infty + j0) = ja$, λαμβάνοντας υπ' όψιν την απαιτούμενη θέση του διπλού σημείου Δ - E στο $u = 0, v = ja$. Προκύπτει $w_{\Delta,E} = (K/2)[\ln 1 - j\pi]$, προσδιορίζοντας έτσι τη σταθερά K , ως $(K/2) = -a/\pi$. Αντικαθιστώντας επίσης $j\pi = \ln(-1)$, η συνάρτηση για το μετασχηματισμό *Schwarz-Christoffel* είναι τελικά:

$$w(\zeta) = \frac{a}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

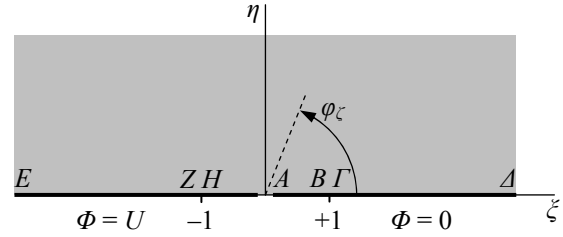
Η αντίστροφη συνάρτηση σχηματίζεται εύκολα, από την επίλυση ως προς ζ της γραμμικής σχέσης $(1 + \zeta) = (1 - \zeta)\exp(\pi w/a)$, που δίνει την έκφραση $\zeta = \tanh(\pi w/2a)$. Με κάπως μεγαλύτερη προσπάθεια προκύπτει ότι $\varphi_\zeta = \text{Arg}\{\tanh(\pi w/2a)\} = \arctan[\sin(\pi v/a)/\sinh(\pi u/a)]$, και μεταγράφοντας $u \rightarrow x$ και $v \rightarrow y$, η έκφραση $\Phi(\varphi_\zeta) = (U/\pi)\varphi_\zeta$, που έχει ήδη διατυπωθεί εκ των προτέρων, γράφεται στις συντεταγμένες της αρχικής διάταξης, ως:

$$\Phi(x, y) = \frac{U}{\pi} \arctan \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi x}{a}\right)} \right],$$

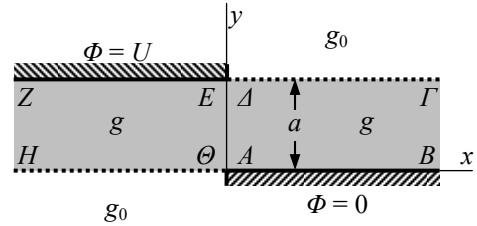
με τη συνάρτηση \arctan να επιστρέφει τιμές στο διάστημα $0 \leq \varphi_\zeta \leq 2\pi$.

Σχόλια:

- Ας ελεγχθεί για επιβεβαίωση ότι πράγματι ο μετασχηματισμός απεικονίζει σωστά κάποια χαρακτηριστικά σημεία. Για παράδειγμα, είναι $w_{A,\theta} = w(\zeta = 0^\pm) = (a/\pi)\ln 1^\pm = \pm 0$, όπως έχει επιλεγεί με την παράμετρο $Z_0 = 0$. Επίσης, $w_{B,\Gamma} = w(\zeta = 1^\pm) = (a/\pi)\ln(\pm\infty)$, δηλαδή $w_B = \infty$, αλλά $w_\Gamma = (a/\pi)(\infty + j\pi) = \infty + ja$, όπως αναμένεται, κλπ.
- Χρήσιμο είναι, να ελεγχθεί ότι η τελική έκφραση $\Phi(x, y)$ έχει την αναμενόμενη συμπεριφορά. Για $y = 0^+$, αλλά και για $y = a^-$, είναι $\sin(\pi y/a) = 0^+$, ενώ $\text{sgn}[\sinh(\pi x/a)] = \text{sgn}(x)$, οπότε στο διάστημα $0 \leq \varphi_\zeta \leq 2\pi$ το τόξο εφαπτομένης επιστρέφει την τιμή $\varphi_\zeta = 0$, όταν $x > 0$ ($\Rightarrow \Phi = 0$), και $\varphi_\zeta = \pi$, όταν $x < 0$ ($\Rightarrow \Phi = U$). Επίσης, είναι $\sin(\pi y/a) \geq 0$ στο διάστημα $0 \leq x \leq a$, άρα όταν $x = 0^\pm$ είναι $\arctan[\dots] = \arctan[\pm\infty] = \pi/2$, που δίνει $\Phi = U/2$, όπως αναμένεται από την αντισυμμετρία. Τέλος, για $x \gg a$ είναι $\sinh(\pi x/a) = \infty$, συνεπώς (με $\sin(\pi y/a) \geq 0$) είναι $\arctan[\dots] = \arctan[0^+] = 0$, δηλαδή $\Phi = 0$, όπως αναμένεται στο εσωτερικό πρακτικά ισοδυναμικού χώρου. Αντίστοιχα παρατηρούνται, όταν $x = -\infty$.



Παράδειγμα 6.4-12: Μία αγωγίμη πλάκα, με σταθερή τιμή g της ειδικής αγωγιμότητας, έχει πάχος a και μεγάλες τις άλλες δύο διαστάσεις. Στο μισό πλάτος της, η πλάκα έχει τη μία όψη της σε επαφή με γειωμένο ιδανικό αγωγό, ενώ στο άλλο μισό του μήκους της η άλλη όψη είναι σε επαφή με ιδανικό αγωγό σε δυναμικό $\Phi = U$. Ο υπόλοιπος χώρος είναι μονωτής (με $g_0 = 0$).



Ζητείται η αγωγιμότητα G που εκδηλώνει η διάταξη σε μήκος h στην τρίτη διάσταση.

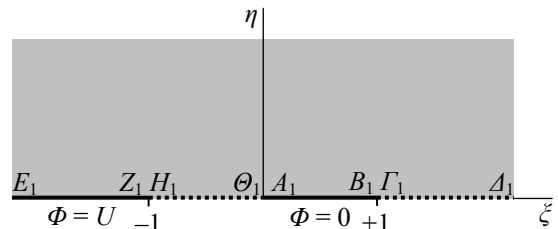
Επίλυση: Στο μέρος του ορίου σε επαφή με το μονωτή η οριακή συνθήκη είναι $\partial\Phi/\partial n = 0$. Για την επίλυση τέτοιας διάταξης, στις οποιασδήποτε όριο είναι εναλλάξ $\Phi = \text{σταθ.}$ και $\partial\Phi/\partial n = 0$, επιθυμητός είναι ο μετασχηματισμός σε ορθογώνιο, με αντιμέτωπες τις πλευρές με $\Phi = \text{σταθ.}$, επειδή τότε το δυναμικό εκφράζεται ως απλή γραμμική σχέση της απόστασης.

Η διάταξη μπορεί, βέβαια, να θεωρηθεί ως εκφυλισμένο τετράπλευρο, με δύο κορυφές στο άπειρο με εξωτερική γωνία ίση με π , όπως στο προηγούμενο παράδ. 6.4-11, και άλλες δύο κορυφές στα διπλά σημεία $\Theta'-A'$ και $\Delta'-E'$, όπου αλλάζει η μορφή της οριακής συνθήκης. Όμως, στα διπλά αυτά σημεία η εξωτερική γωνία είναι ίση με μηδέν, δηλαδή για τους αντίστοιχους εκθέτες είναι $k_n = 0$, και ο μετασχηματισμός των Schwarz-Christoffel δεν μπορεί να χειρισθεί τέτοιες τιμές, επειδή $(\zeta - \zeta_n)^0 = 1$ και η σχετική πληροφορία εξαλείφεται.

Ήδη, διαφαίνεται ότι η κατάλληλη πορεία είναι, πρώτα να μετασχηματισθεί η περιοχή με το αγωγίμο υλικό στο άνω ημιεπίπεδο, με έναν αντίστροφο μετασχηματισμό Schwarz-Christoffel, και ακολούθως να μετατραπεί το άνω ημιεπίπεδο στο εσωτερικό ορθογώνιο, εφαρμόζοντας τον ευθύ μετασχηματισμό. Μάλιστα, για τον πρώτο μετασχηματισμό η κατάλληλη συνάρτηση έχει, ήδη, προσδιορισθεί στο προηγούμενο παράδ. 6.4-11. Είναι η συνάρτηση:

$$z(\zeta) = \frac{a}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \quad \Leftrightarrow \quad \zeta(z) = \tanh \frac{\pi z}{2a},$$

όπου $z = x + jy$ αναφέρεται στο επίπεδο της αρχικής διάταξης, ενώ στο προηγούμενο παράδειγμα είχαν χρησιμοποιηθεί οι συμβολισμοί $u \leftrightarrow x$ και $v \leftrightarrow y$.



Για το δεύτερο βήμα, την απεικόνιση του άξονα $\eta = 0$ σε ένα ορθογώνιο, η διαδικασία είναι απλή. Τα σημεία που είναι επιθυμητό να μετατραπούν σε κορυφές ορθογωνίου είναι αυτά με την αλλαγή στον τύπο της οριακής συνθήκης, τα διπλά σημεία Δ_1-E_1 , Z_1-H_1 , Θ_1-A_1 και $B_1-\Gamma_1$,

που βρίσκονται στις θέσεις $\zeta_0 = \pm\infty$, $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 0$ και $\zeta_3 = +1$. Για να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο, όλοι οι εκθέτες θα ληφθούν με την τιμή $k_n = 1/2$. Το σημείο ζ_0 είναι στο άπειρο, οπότε ο μετασχηματισμός θα χρησιμοποιηθεί με βάση τη μορφή (6.4-31). Εισάγοντας αυτά τα δεδομένα, η συνάρτηση $w(\zeta)$ συγκεκριμενοποιείται σε:

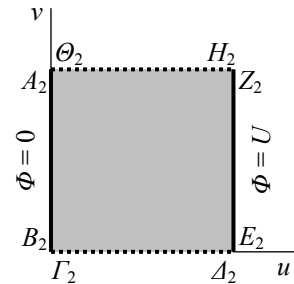
$$w(\zeta) = \int_1^{\zeta} \frac{d\zeta'}{\sqrt{\zeta'(\zeta'^2 - 1)}}.$$

Ως κάτω όριο έχει επιλεγεί η τιμή $Z_0 = 1$, ώστε να είναι $w(\zeta=1) = 0$ και να τοποθετηθεί μία κορυφή του ορθογωνίου, η απεικόνιση $B_2\text{-}\Gamma_2$ του διπλού σημείου $B_1\text{-}\Gamma_1$, στην αρχή των αξόνων. Ο απειρισμός λόγω του όρου $(\zeta - 1)^{-1/2}$ είναι ολοκληρώσιμος και δεν προκαλεί ανησυχία. Η σταθερά K δεν εμφανίζεται, καθώς έχει τεθεί ίση με τη μονάδα, επειδή δεν υπάρχει κάποια ιδιαίτερη προτίμηση για το μέγεθος του ορθογωνίου, ενώ ο προσανατολισμός του αναμένεται με τις πλευρές παράλληλες και κάθετες στους άξονες. Αυτό συμβαίνει, επειδή το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma_1\Delta_1$ βρίσκεται στα δεξιά όλων των σημείων Σ_n και σύμφωνα με τη σχέση (6.4-27) η απεικόνισή του $\Gamma_2\Delta_2$ έχει μηδενική κλίση, καθορίζοντας με διαδοχικές στροφές κατά $\pi/2$ και την κλίση των υπόλοιπων πλευρών της απεικόνισης.

Οι διαστάσεις του ορθογωνίου μπορούν να προσδιορισθούν από τις συντεταγμένες των σημείων Δ_2 και A_2 . Προκύπτει:

$$\Delta u = u_A = \int_1^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta^2 - 1)}},$$

$$\Delta v = v_A = -j \int_1^0 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta^2 - 1)}} = -j \int_1^0 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1 - \zeta^2)}} = \int_1^{\infty} \frac{d\chi}{\sqrt{\chi(\chi^2 - 1)}} = \Delta u.$$



Και τα δύο ολοκληρώματα εκτελούνται κατά μήκος του πραγματικού άξονα, με $d\zeta' = d\zeta$ (και $d\eta = 0$). Το πρώτο ολοκλήρωμα έχει προφανώς θετική τιμή. Αυτό σημαίνει, πως το σημείο Δ_2 βρίσκεται στα δεξιά του Γ_2 και το τμήμα $\Gamma_2\Delta_2$ έχει μηδενική κλίση, όπως αναμένεται, και όχι ίση με π , όπως θα συνέβαινε αν ήταν $u_A < 0$. Στο δεύτερο ολοκλήρωμα έχει γίνει η αλλαγή μεταβλητής $\zeta = 1/\chi$, $d\zeta = -d\chi/\chi^2$, $(1 - \zeta^2) = (\chi^2 - 1)/\chi^2$, με αποτέλεσμα να είναι $\Delta v = \Delta u$ και το ορθογώνιο να είναι τετράγωνο. Το συμπέρασμα ότι η απεικόνιση πρέπει να έχει σχήμα τετραγώνου μπορεί να συναχθεί και από το σχήμα της αρχικής διάταξης: εναλλάσσοντας τα όρια με $\Phi = \text{σταθ.}$ με εκείνα με $\partial\Phi/\partial\eta = 0$ δεν τροποποιείται η διάταξη.

Συνεπώς, η αγωγιμότητα της δεύτερης απεικόνισης, άρα και της αρχικής διάταξης, είναι ίση με $G = g(h\Delta v/\Delta u) = gh$, χωρίς να χρειάζεται να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα.

