Ανισοτροπικά μέσα

Παράδειγμα 1

Ένα οπτικά ενεργό μέσο, για μονοχρωματικό επίπεδο ΗΜ κύμα, χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες καταστατικές σχέσεις σε επίπεδο φασιθετών:

$$\mathbf{D}_{\omega,\mathbf{k}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} + jp\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}, \quad \mathbf{B}_{\omega,\mathbf{k}} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}} + jq\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}}$$

όπου j είναι η φανταστική μονάδα.

(a) Ποιές είναι οι διαστάσεις των πραγματικών σταθερών p και q;

(b) Να εξαχθεί η γενική σχέση διασποράς από τις (διανυσματικές-αλγεβρικές) εξισώσεις του Maxwell που ισχύουν για τους φασιθέτες αυτούς (θέτοντας $\rho_{u,\omega,\mathbf{k}} = 0,\ \mathbf{J}_{u,\omega,\mathbf{k}} = \mathbf{0}$) και να λυθεί ως προς το δείκτη διάθλασης, $\eta=kc/\omega$, για διάδοση αποκλειστικά στη διεύθυνση x (δηλαδή $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{x}}k$) έτσι ώστε να ανακτούμε τη συνήθη περίπτωση όταν $p=q=0$.

Συνδιάζοντας τους νόμους των Ampere και Faraday παίρνουμε για τους φασιθέτες των εντάσεων του ηλεκτρικού πεδίου και του μαγνητικού πεδίου σε συνδιασμό με τις καταστατικές σχέσεις:

$$\mathbf{D}_{\omega,\mathbf{k}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} + jp\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}, \quad \mathbf{B}_{\omega,\mathbf{k}} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}} + jq\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} = \omega\left(\mu_0\mu_r\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}} + jq\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}}\right)$$

$$\mathbf{k}\times\left(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}\right) = \omega\left[\mu_0\mu_r\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}} + jq\mathbf{k}\times\left(\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}}\right)\right]$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}} = -\omega\mathbf{D}_{\omega,\mathbf{k}} = -\omega\left(\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} + jp\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(1-\omega^2 qp\right)\mathbf{k}\times\left(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}\right) + \varepsilon_r\mu_r\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} + j\omega^2\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} = 0$$

$$\Rightarrow\left\{\left[\varepsilon_r\mu_r\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\left(1-\omega^2 qp\right)\right]\mathbf{I} + \left(1-\omega^2 qp\right)\mathbf{kk}\right\}.\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} + j\omega^2\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} = 0$$

Ορίζοντας:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$$

παίρνουμε τελικα τη σχεση διασποράς:

$$\det\left|\left[\varepsilon_r\mu_r\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\left(1-\omega^2 qp\right)\right]\mathbf{I} + \left(1-\omega^2 qp\right)\mathbf{kk} + j\omega^2\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)\mathbf{K}\right| = 0$$

Οι μονάδες των p και q φαίνεται άμεσα από τις παραπάνω σχέσεις ότι είναι μονάδες ε_0 επί μήκος (Coulomb/Volt) και μονάδες $\mu 0$ επί μήκος (Weber/Ampere) αντίστοιχα. .

Για διάδοση κατα τον άξονα x παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r\mu_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r\mu_r - \eta^2\left(1-\omega^2 qp\right) & -jc\omega\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)\eta \\ 0 & jc\omega\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)\eta & \varepsilon_r\mu_r - \eta^2\left(1-\omega^2 qp\right) \end{bmatrix} = 0$$

οπότε:

$$\left[\varepsilon_r\mu_r - \eta^2\left(1-\omega^2 qp\right)\right]^2 - c^2\omega^2\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)^2\eta^2 = 0$$

λύσεις της οποίας είναι και λύσεις της:

$$\eta^2\left(1-\omega^2 qp\right) \pm c\omega\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)\eta - \varepsilon_r\mu_r = 0$$

Άρα :

$$\eta_\pm = \frac{\sqrt{4\varepsilon_r\mu_r\left(1-\omega^2 qp\right) + c^2\omega^2\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)^2} \pm c\omega\left(p\mu_0\mu_r + q\varepsilon_0\varepsilon_r\right)}{2\left(1-\omega^2 qp\right)}$$

που στη συνήθη περίπτωση (*p=q=0*) μας δίνει τη γνωστή σχέση $\eta=\mu_r\varepsilon_r$.

Παράδειγμα 2

Ειδικά οπτικά υλικά βρίσκουν στις μέρες μας εφαρμογές στα πλαίσια της ολοκληρωμένης οπτικής. Μεταξύ των υλικών αυτών είναι το $Y_3Fe_5O_{12}$ γνωστό σαν YIG (Yttrium-Iron Garnet). Έχουμε ένα YIG, απέραντης πρακτικά έκτασης στη διεύθυνση *y*, το οποίο, για μια σχετικά ευρεία περιοχή συχνοτήτων, αγνοώντας τις απώλειες ως δευτερεύουσες, χαρακτηρίζεται από τον ακόλουθο διηλεκτρικό τανυστή (αδιάστατο, κανονικοποιημένο ως προς την διηλεκτρική σταθερά του κενού ε_0) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\ddot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -j\varepsilon_X & 0 \\ j\varepsilon_X & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

όπου *j* είναι η φανταστική μονάδα και τα ε, ε_X πραγματικοί αριθμοί ($\varepsilon>>\varepsilon_X>1$). Η μαγνητική διαπερατότητα είναι αυτή του κενού και δεν υφίστανται ρεύματα ή ελεύθερα φορτία πουθενά. Στα πλαίσια των εξισώσεων Maxwell και για μονοχρωματικό (συχνότητας ω) Η/Μ οδεύον κύμα που διαδίδεται στο επίπεδο της κόλλας, δηλαδή $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{x}}k_x + \hat{\mathbf{z}}k_z$ με $k_x=k\sin\theta$, $k_z=k\cos\theta$ (*k* είναι το μέτρο του διανύσματος διάδοσης **k** και θ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα *z*)

(a) Να εξαχθεί η σχέση που διέπει το δείκτη διάθλασης $\eta=kc/\omega$ ως συναρτηση των ε, ε_X και της γωνίας διάδοσης θ καθώς και ειδικά για $\theta=0$ και $\pi/2$.

(a) Γιά $\theta=0$ να υπολογισθούν οι λόγοι $\hat{\mathbf{z}}.\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} / \hat{\mathbf{x}}.\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}$ και $\hat{\mathbf{y}}.\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} / \hat{\mathbf{x}}.\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}$

(b) Ποια είναι γενικά η διεύθυνση του φασιθέτη του μαγνητικού πεδίου;

Συνδιάζοντας τους νόμους των Ampere-Faraday (ο δεύτερος εμπεριέχει το νόμο Gauss για το μαγνητικό πεδίο, ενώ ο πρώτος, επειδή δεν υφίστανται ρεύματα και το μέσο έχει την μαγνητική διαπερατότητα του κενού, εμπεριέχει το νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο) παίρνουμε για τους φασιθέτες του ηλεκτρικού πεδίου (χρησιμοποιούμε και την διανυσματική ταυτότητα που παρέχεται):

$$\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \ddot{\varepsilon} + \mathbf{kk} - \mathbf{I}k^2\right].\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}} = 0$$

Ετσι έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon - k_z^2 & -j\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_\times & k_x k_z \\ j\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_\times & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon - k^2 & 0 \\ k_z k_x & 0 & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon - k_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x,\omega,\mathbf{k}} \\ E_{y,\omega,\mathbf{k}} \\ E_{z,\omega,\mathbf{k}} \end{bmatrix} = 0$$

Θέτοντας την ορίζουσα του πίνακα-πολλαπλασιαστή ίση με μηδέν, λαμβάνοντας υπόψη ότι το κυματοδιάνυσμα έχει μόνο x και z συνιστώσες, μας δίνει:

$$\left(\varepsilon - \eta^2\right)^2 - \frac{\varepsilon_\times^2}{\varepsilon}\left(\varepsilon - \eta^2 \sin^2 \vartheta\right) = 0$$

Η σχέση αυτή (διασποράς) είναι διτετράγωνη ως προς το η^2 και εξαρτάται από τη γωνία θ. Γιά $\theta=0$ παίρνουμε: ($\varepsilon_X>0$)

$$\eta^2 = \varepsilon \pm \varepsilon_\times$$

Ενώ γιά $\theta=\pi/2$:

$$\eta^2 = \varepsilon,\ \eta^2 = \varepsilon - \frac{\varepsilon_\times^2}{\varepsilon}$$

Από τον νόμο του Faraday έχουμε:

$$\omega\mu_0 \mathbf{H}_{\omega,\mathbf{k}} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}$$

δηλαδή ο φασιθέτης του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα διάδοσης και ο φασιθέτης του ηλεκτρικού πεδίου. Έχουμε επίσης από το ομογενές σύστημα:

$$\left(\varepsilon - \eta^2\right) E_{y,\omega,\mathbf{k}} + j\varepsilon_\times E_{x,\omega,\mathbf{k}} = 0$$

$$E_{x,\omega,\mathbf{k}} \eta^2 \cos\vartheta \sin\vartheta + \left(\varepsilon - \eta^2 \sin^2 \vartheta\right) E_{z,\omega,\mathbf{k}} = 0$$

το οποίο σε συνδιασμό με τη σχέση διασποράς γιά $\theta=0$ δίνει:

$$\frac{E_{y,\omega,\mathbf{k}}}{E_{x,\omega,\mathbf{k}}} = \pm j, \qquad \frac{E_{z,\omega,\mathbf{k}}}{E_{x,\omega,\mathbf{k}}} = 0$$