

# Τελεστής του Hamilton (ανάδελτα)

## Καρτεσιανή έκφραση

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv grad$$

## Κλίση βαθμωτού πεδίου $\varphi$

$$\hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv grad \varphi$$

## Σύγκλιση(\*) διανυσματικού πεδίου $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{a} &\equiv -\left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} a_x + \hat{y} a_y + \hat{z} a_z) = -\left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \\ &\equiv -div \mathbf{a} \end{aligned}$$

## Συγκέντρωση(\*) βαθμωτού πεδίου $\varphi$ (\*\*)

$$\begin{aligned} -\left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi &= -\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \\ &\equiv -div(grad \varphi) \equiv -\nabla^2 \varphi \equiv -\Delta \varphi, \Delta : \text{Laplacian} \end{aligned}$$

## Περιστροφή(\*) διανυσματικού πεδίου $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &\equiv \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\hat{x} a_x + \hat{y} a_y + \hat{z} a_z) \\ &= \hat{x} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\ &\equiv rota \equiv curl \mathbf{a} \end{aligned}$$

(\*) Οι ονομασίες αυτές έχουν προταθεί από τον Maxwell

(\*\*) Εάν ένα βαθμωτό πεδίο έχει τιμή  $\varphi_P$  σε ένα σημείο του χώρου  $P$ , τότε η διαφορά της τιμής αυτής από την μέση τιμή του  $\langle \varphi \rangle_\alpha$  σε πολύ μικρή σφαίρα ακτίνας  $\alpha$  με κέντρο το  $P$ , τότε:

$$\frac{\alpha^2}{10} (\nabla^2 \varphi)_P = \langle \varphi \rangle_\alpha - \varphi_P \begin{cases} < 0 : \text{συγκεντωση στο } P \\ > 0 : \text{αραιωση} \end{cases}$$