Απλός Νόμος του Ohm

Στατική περίπτωση: $\vec{J}_u(\vec{r}) = \overleftrightarrow{\gamma}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$ όπου $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{pmatrix}$ και $\vec{J}_u = \begin{pmatrix} J_{ux} \\ J_{uy} \\ J_{uz} \end{pmatrix}$ και $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$. Το $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec{r})$ καλείται πίνακας (τανυστής) ειδικής αγωγιμότητας. Σε άμορφα ισοτροπικά γραμμικά υλικά, το $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec{r})$ υποβιβάζεται σε βαθμωτή συνάρτηση, δηλαδή $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec{r}) = \gamma(\vec{r})\overleftrightarrow{I}$ όπου $\overleftrightarrow{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας. Σε ομογενή μέσα $\overleftrightarrow{\gamma}(\vec{r}) = \overleftrightarrow{\gamma}$ (ανεξάρτητο του $\vec{r}$, δηλαδή).

Χρονομεταβλητή περίπτωση: $\vec{J}_u(\omega,\vec{r}) = \overleftrightarrow{\gamma}(\omega,\vec{r}) \cdot \vec{E}(\omega,\vec{r})$ όπου $\vec{J}_u(\omega,\vec{r})$ και $\vec{E}(\omega,\vec{r})$ είναι η φασματική συνιστώσα συχνότητας ω (μιγαδικό διάνυσμα-συνάρτηση του χώρου εν γένει) των μεγεθών $\vec{E}(\vec{r},t)$ και $\vec{J}_u(\vec{r},t)$. Ο τανυστής $\overleftrightarrow{\gamma}(\omega,\vec{r})$ είναι εν γένει μιγαδικός.

Στοιχειώδης υπολογισμός του γ σε στατική περίπτωση: Απουσία μαγνητικού πεδίου η δύναμη Lorentz δρα για χρονικά διαστήματα μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων και μεταβάλλει την ταχύτητα των φορτισμένων σωματίων κατά: $\Delta\vec{v}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{E}\Delta t$. Όμως $\langle \Delta t \rangle = \nu_\alpha^{-1}$, όπου ν_α: συχνότητα συγκρούσεων και έτσι, κατά μέσο όρο ($\langle\,\rangle$): $\langle \Delta\vec{v}_\alpha \rangle \simeq \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{E}\nu_\alpha^{-1}$. Το ρεύμα που αντιπροσωπεύει αυτή οι κινητική αλλαγή κατά μέσο όρο είναι $\vec{J}_\alpha = n_\alpha q_\alpha \langle \Delta\vec{v}_\alpha \rangle = \frac{q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}\vec{E}$ και για πλήθος διαφορετικών ειδών σωματίων: $\vec{J} = \sum_\alpha \vec{J}_\alpha = \left(\sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}\right)\vec{E}$. Είναι λοιπόν $\gamma = \sum_\alpha \gamma_\alpha$ με $\gamma_\alpha = \frac{q_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}$ (το αντίστοιχο στη γ_α καλείται ειδική αγωγιμότητα ανάλογα με το είδος "α"). Εδώ βλέπουμε ότι η συνολική ειδική αγωγιμότητα είναι άθροισμα ειδικών αγωγιμοτήτων. Το n_e (α = ηλεκτρόνια) στους αγωγούς μπορεί να βρεθεί από την σχέση $n_e = N_u N_A \rho_m / M$ όπου N_u ο αριθμός ελευθέρων ηλεκτρονίων ανά μόριο (ή άτομο ή μονάδα), N_A ο αριθμός Avogadro (6.0225×10^{23} μόρια/mol), ρ_m η πυκνότητα του μέσου και M μοριακή μάζα του (kg/mol). Π.χ. για τον χαλκό $N_u = 1$, $\rho_m = 8.89 \times 10^3\ kg/m^3$, M (χαλκού) $= 63.54$ kg/mol, οπότε $n_e = 8.43 \times 10^{28}$ ηλεκτρόνια/m^3. Έτσι λοιπόν, για $J = 4A/mm^2$ έχουμε, $\langle \Delta v_e \rangle = J/n_e e = 1\ m/h$!!! Αντίθετα, οι συγκρούσεις γίνονται συχνότερες όταν η θερμοκρασία του μέσου αυξάνεται. Έτσι λοιπόν $\nu \nearrow T$ (T: θερμοκρασία). Η δε θερμοκρασία συνδέεται με την θερμική ταχύτητα μέσω της σχέσης $\frac{1}{2}m_e v_{th}^2 = \frac{3}{2}k_B T$ (k_B: σταθερά Stefan Boltzmann), δηλαδή $v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$, η οποία για $T \approx 300°K$ (θερμοκρασία $27°C$) δίνει περίπου 100 Km/sec. Για τον χαλκό, ενδεικτικά, $\gamma \simeq 58 \times 10^6 \frac{1}{\Omega m}$ (συμ.: $\frac{1}{\Omega} = S$: Siemens). Έτσι, προκύπτει $\nu^{-1} \simeq 5.2 \times 10^{-14}$ sec και έτσι $\frac{\nu}{2\pi} \simeq 3\times10^{12}\,Hz = 3\,THz$. ---

Νόμος του Ohm και εξίσωση Laplace:

(Μαγνητοστατική / Ηλεκτροστατική): $\nabla\times\vec{H} \simeq \vec{J}_u$ και $\nabla\times\vec{E}\simeq 0$ δηλαδή στην ειδική αυτή περίπτωση θα έχουμε $\vec{E}=-\nabla\phi$ και $\nabla\cdot\vec{J}_u=0$. Επίσης $\vec{J}_u=\gamma\vec{E}$. Άρα:

$\nabla^2\phi = -\nabla\gamma\cdot\nabla\phi/\gamma$. Αν $\nabla\gamma\perp\nabla\phi$ τότε $\nabla^2\phi=0$ (Laplace).

Επίσης, $\nabla^2\phi=0$ όταν $\gamma=$ σταθερό. Επίσης $\rho_u=\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\left(\frac{\vec{J}_u\varepsilon}{\gamma}\right)$ $=\vec{J}_u\cdot\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$. και έτσι $\rho_u=0$ όταν $\vec{J}_u\perp\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$ ή όταν $\varepsilon/\gamma=$ σταθερό.

Νόμος του Ohm και χρονομεταβλητή κατάσταση σε αγώγιμα υλικά με αμετάβλητα γ και ε:

$\nabla\cdot\vec{J}_u+\partial\rho_u/\partial t=0$ και $\vec{J}_u=\gamma\vec{E}$, $\vec{E}=\vec{D}/\varepsilon$. Άρα: $\nabla\cdot\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\vec{D}\right)+\partial\rho_u/\partial t=0$

$\frac{\gamma}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec{D}+\partial\rho_u/\partial t=0$ ή $\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho_u+\partial\rho_u/\partial t=0$ (Το ίδιο παίρνουμε και αν $\nabla(\gamma/\varepsilon)\perp\vec{D}$). Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι $\rho_u(t)=\rho_u(t=0)e^{-t/\tau_x}$ με $\rho_u(t)$ και $\rho_u(t=0)$ συναρτήσεις της χώρας $(\vec{r})$ και $\tau_x\equiv\varepsilon/\gamma$: Χρόνος χαλάρωσης

Ο χρόνος χαλάρωσης χαρακτηρίζει τα μέσα για τα υλικά και κυμαίνεται από 10^{-19} s (χαλκός) μέχρι 10^5 s (στη μίκα που είναι πολύ καλό μονωτικό υλικό). Ενδιάμεσες τιμές είναι αυτές του διοξειδίου (1 sec για το αποσταγμένο). Ο χρόνος χαλάρωσης ουσιαστικά μετρά τον χαρακτηριστικό χρόνο "διάχυσης" (διασποράς) λόγω έλξεων συμμετρικών ελεύθερων φορτίων.

Νόμος του Ohm και διαχωριστική επιφάνεια σε οριακά προβλήματα:

Από τον νόμο διατήρησης φορτίου προκύπτει ότι $\vec{i}_n\cdot(\gamma_1\vec{E}_1-\gamma_2\vec{E}_2)=0$ ② $\uparrow\vec{i}_n$ ①

$\gamma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\gamma_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}$ $\left(\frac{\partial}{\partial n}\equiv\vec{i}_n\cdot\nabla\right)$ ενώ επίσης $\phi_1=\phi_2$.

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΕ ΜΟΝΩΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ: $\uparrow\vec{i}_n$ ② ① με $\gamma_2\ll\gamma_1$ (το 2 πολύ λιγότερο αγώγιμο από το 1).

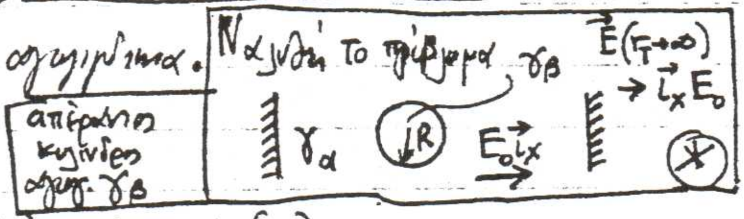
Έχουμε (από την $\vec{i}_n\cdot(\gamma_1\vec{E}_1-\gamma_2\vec{E}_2)=0$) ότι $E_{2n}\gg E_{1n}$ και επίσης $J_{1n}=0$ (όταν $\gamma_2\to0$). Επίσης $\vec{i}_n\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \Rightarrow E_{1t}=E_{2t}$. Άρα η γενική διάταξη είναι: ② $\uparrow\vec{E}$ ΜΟΝΩΤΗΣ ① ΑΓΩΓΟΣ. Όταν μάλιστα $\gamma_1\to\infty$ και $\gamma_2\to0$ ισχύει μόνο $\vec{E}_2\perp$ επιφάνεια.

Νόμος Gauss σε διαχωριστική επιφάνεια δύο αγώγιμων υλικών

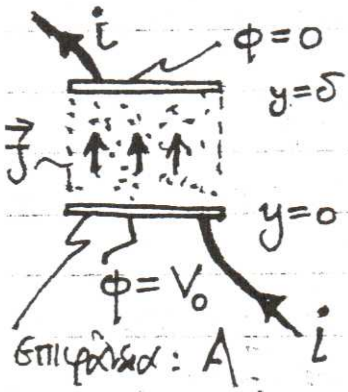
$\vec{i}_n\cdot(\varepsilon_2\vec{E}_2-\varepsilon_1\vec{E}_1)=\sigma_u$ και εφόσον $\vec{i}_n\cdot(\gamma_2\vec{E}_2-\gamma_1\vec{E}_1)=0$ έχουμε τελικά:

$\boxed{\sigma_u=\varepsilon_2E_{2n}\left(1-\frac{\tau_{x1}}{\tau_{x2}}\right)}$. Αν τα υλικά χαρακτηρίζονται από τον ίδιο χρόνο χαλάρωσης δεν υπάρχουν σ.ε. στην επιφάνεια.

Επίσης: ισχύει $\vec{i}_n\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\frac{\sigma_{ολ}}{\varepsilon_0}$ $\left(\sigma_{ολ}=\sigma_{ε}+\sigma_p,\ \sigma_p\equiv-\vec{i}_n\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)\right)$ και $\vec{i}_n\cdot(\gamma_2\vec{E}_2-\gamma_1\vec{E}_1)=0$ έχουμε τελικά: $\boxed{\sigma_{ολ}=\varepsilon_0 E_{2n}\left(1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)}$. Άρα το συνολικό επιφανειακό φορτίο μηδενίζεται όταν τα δύο υλικά χαρακτηρίζονται από την ίδια αγωγιμότητα.



ΑΠΛΟΣ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΑΝΤΙΣΤΑΤΗΣ



Υπόθεση $\gamma=\gamma(y)$, $\phi=\phi(y)$.

$$\nabla\cdot\vec{J}=0\Rightarrow\frac{d}{dy}\left(\gamma\frac{d\phi}{dy}\right)=0\Longrightarrow\gamma\frac{d\phi}{dy}=-J=J_0:\text{σταθερό}$$

οπότε: $\phi-V_0=-\int_0^y\frac{J_0}{\gamma(y')}dy'$ και επίσης

$0-V_0=-J_0\int_0^\delta\frac{dy'}{\gamma(y')}$. Έτσι, τελικά $\phi=V_0\left[1-\frac{\int_0^y dy'/\gamma(y')}{\int_0^\delta dy'/\gamma(y')}\right]$

Αγωγιμότητα (Siemens) αντιστάτη $G\equiv\frac{i}{V_0}=\frac{A\cdot J_0}{V_0}=A\Big/\int_0^\delta dy'/\gamma(y')$

όταν γ=σταθερά $G=A\gamma/\delta$, ενώ για, π.χ., $\gamma=\gamma_0 e^{-y/\delta}$ προκύπτει $G=\frac{A\gamma_0}{\delta(e-1)}$.