

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΛΟΓΩ ΕΠΙΒΟΛΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

8.1 Εισαγωγή

Ένα σύννηθες αποτέλεσμα των έργων Πολιτικού Μηχανικού είναι η επιβολή φορτίων στο έδαφος (π.χ. κατασκευή κτιρίων, φραγμάτων) ή η μείωση των ήδη επιβεβλημένων φορτίων (π.χ. εκσκαφές). Τα φορτία αυτά αναλαμβάνονται από τις εδαφικές μάζες με την ανάπτυξη εσωτερικών τάσεων κατά τρόπον ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας σε όλα τα εδαφικά στοιχεία και συνεπώς το σύστημα κατασκευή-έδαφος να ισορροπεί. Η εκτίμηση των τάσεων που αναπτύσσονται στο έδαφος λόγω των εξωτερικώς επιβεβλημένων φορτίων είναι χρήσιμη για τους εξής λόγους:

1. Οι ανοχές των κατασκευών σε υποχωρήσεις των σημείων στήριξης είναι περιορισμένες. Για την εκτίμηση των υποχωρήσεων είναι απαραίτητη η γνώση των παραμορφώσεων που προκαλούν στο έδαφος τα επιβεβλημένα φορτία. Οι παραμορφώσεις, όμως, εξαρτώνται από τις αναπτυσσόμενες τάσεις, γεγονός που καθιστά αναγκαία την εκτίμηση των τάσεων.
2. Όλα τα υλικά αστοχούν (θραύονται), εάν η φόρτιση υπερβεί το όριο αντοχής τους. Το όριο αντοχής κάθε υλικού δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτάται από τις υπόλοιπες τάσεις, δηλαδή αντιστοιχεί σε ορισμένους κρίσιμους συνδυασμούς τάσεων, τα λεγόμενα **κριτήρια αστοχίας**. Η γνώση των τάσεων που αναπτύσσονται στο έδαφος είναι, λοιπόν, απαραίτητη για να εκτιμηθεί κατά πόσον η υφιστάμενη εντατική κατάσταση του εδάφους προσεγγίζει την κατάσταση αστοχίας.

Λόγω της **υπερστατικότητας** των εδαφικών σχηματισμών, ο υπολογισμός των τάσεων που αναπτύσσονται στο έδαφος συνήθως δεν είναι εφικτός μόνο με τη θεώρηση της στατικής ισορροπίας του εδάφους (δηλαδή των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας). Μία περίπτωση στην οποία ο υπολογισμός ορισμένων συνιστωσών των τάσεων είναι εφικτός μόνο με θεώρηση της στατικής ισορροπίας είναι η μονοδιάστατη συμπίεση (γεωστατικές τάσεις) που μελετήθηκε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις οι **τρεις** εξισώσεις ισορροπίας δεν αρκούν για τον υπολογισμό των **έξι** συνιστωσών των τάσεων, αλλά πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων (δηλαδή ο καταστατικός νόμος συμπεριφοράς του υλικού) και οι σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων ώστε οι **τρεις** εξισώσεις ισορροπίας, εκφρασμένες πλέον ως προς τις **τρεις** συνιστώσες των μετατοπίσεων, να μπορούν να επιλυθούν. Από τα παραπάνω καθίσταται σαφής η χρησιμότητα των σχέσεων τάσεων-παραμορφώσεων που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο 6. Παρά την απλότητα όμως του προηγούμενου σκεπτικού το πρόβλημα είναι σύνθετο, επειδή οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων του εδάφους είναι μή-γραμμικές και κυρίως επειδή μέχρι σήμερα δεν έχει επιτευχθεί η γενική αποδοχή κάποιας αναλυτικής έκφρασής τους. Κατά συνέπεια, πρέπει να γίνουν απλοποιητικές παραδοχές όσον αφορά τη μορφή των σχέσεων τάσεων-παραμορφώσεων, η απλούστερη από τις οποίες είναι η παραδοχή γραμμικής και

ισότροπης συμπεριφοράς του εδάφους. Στο Κεφάλαιο 6 αναφέρθηκαν οι λόγοι για τους οποίους οι τάσεις που υπολογίζονται με θεώρηση ισότροπης γραμμικής συμπεριφοράς του εδάφους σε πολλές περιπτώσεις δεν απέχουν σημαντικά από τις πραγματικές, παρόλο που η συμπεριφορά του εδάφους είναι έντονα μή-γραμμική. Στο Κεφάλαιο αυτό θα υπολογισθούν οι κατανομές των εδαφικών τάσεων για συνήθεις περιπτώσεις εξωτερικών φορτίσεων με την παραδοχή ισότροπης γραμμικής ελαστικότητας. Ειδικότερα, θα εξετασθούν οι εξής περιπτώσεις φόρτισης:

1. Συγκεντρωμένο (σημειακό) κατακόρυφο φορτίο στην επιφάνεια ομοιογενούς ημιχώρου. Η περίπτωση αυτή έχει εφαρμογές στις θεμελιώσεις με μεμονωμένα πέδιλα μικρών διαστάσεων ως προς το πάχος της συμπίεστης εδαφικής στρώσης.
2. Ομοιόμορφη κατακόρυφη πίεση κατανεμημένη στην επιφάνεια κύκλου επί ομοιογενούς ημιχώρου. Η περίπτωση αυτή έχει εφαρμογές σε εύκαμπτα θεμέλια κυκλικής κάτοψης όπως κυκλικά πέδιλα, δεξαμενές αποθήκευσης υγρών, γενικές κοιτοστρώσεις κυκλικής επιφάνειας κλπ.
3. Ομοιόμορφη κατακόρυφη πίεση στην επιφάνεια ορθογωνίου επί ομοιογενούς ημιχώρου. Η περίπτωση αυτή έχει εφαρμογές σε εύκαμπτα θεμέλια ορθογωνικής κάτοψης όπως ορθογωνικά πέδιλα, γενικές κοιτοστρώσεις ορθογωνικής επιφάνειας κλπ.
4. Ομοιόμορφη κατακόρυφη φόρτιση κατανεμημένη σε απειρομήκη γραμμή στην επιφάνεια ομοιογενούς ημιχώρου. Η περίπτωση αυτή έχει εφαρμογές σε επιμήκη θεμέλια μικρού πλάτους όπως θεμέλια τοίχων, κάτω διαβάσεων οδών κλπ.
5. Ομοιόμορφη κατακόρυφη πίεση κατανεμημένη σε απειρομήκη λωρίδα (πεπερασμένου πλάτους) στην επιφάνεια ομοιογενούς ημιχώρου. Η περίπτωση αυτή έχει εφαρμογές σε επιμήκη θεμέλια με σημαντικό πλάτος ως προς το πάχος της συμπίεστης στρώσης.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις θα δοθούν οι αναλυτικές σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες των τάσεων με την ένταση του εξωτερικώς επιβεβλημένου φορτίου και τη γεωμετρία, δηλαδή τις διαστάσεις του φορτίου και τις συντεταγμένες της θέσης του σημείου στο οποίο υπολογίζονται οι τάσεις. Οι υπολογιζόμενες τάσεις είναι, προφανώς, οι **πρόσθετες** τάσεις λόγω του εξωτερικώς επιβεβλημένου φορτίου και τα πρόσθημά τους ακολουθούν την **τανυστική σήμανση της Εδαφομηχανικής**. Επιπλέον:

1. Αν η φόρτιση του εδάφους γίνεται υπό **πλήρως στραγγιζόμενες** συνθήκες, τότε οι ελαστικές σταθερές E, ν , που υπεισέρχονται στους τύπους, είναι οι ιδιότητες του εδαφικού σκελετού και οι υπολογιζόμενες τάσεις είναι οι πρόσθετες **ενεργές** αλλά και ολικές τάσεις, επειδή $\Delta \sigma_{ij} = \Delta \sigma'_{ij}$.
2. Αν η φόρτιση θεωρηθεί ότι συμβαίνει υπό **αστράγγιστες** συνθήκες, τότε οι υπολογιζόμενες τάσεις είναι οι πρόσθετες **ολικές** τάσεις, ενώ, όπου αναφέρεται το μέτρο ελαστικότητας E , θα θεωρείται το μέτρο ελαστικότητας υπό αστράγγιστες συνθήκες (βλέπε εδάφιο 6.3):

$$E_u = \frac{3E}{2(1+\nu)}$$

και, όπου αναφέρεται ο λόγος του Poisson ν , θα θεωρείται η τιμή του υπό αστράγγιστες συνθήκες: $\nu_u = 0.50$. Οι μεταβολές των ενεργών τάσεων μπορούν να υπολογισθούν στη συνέχεια από τις σχέσεις: $\Delta \sigma'_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \Delta u \cdot \delta_{ij}$, όπου η αναπτυσσόμενη υπερπίεση πόρων δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta u = \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{xx} + \Delta \sigma_{yy} + \Delta \sigma_{zz})$$

3. Οι επιλύσεις κατανομών τάσεων που ακολουθούν **δεν** ισχύουν για ενδιάμεσες περιπτώσεις μερικής στράγγισης. Στις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει το πρόβλημα να επιλυθεί σαν πρόβλημα στερεοποίησης, δηλαδή να ληφθούν υπόψη επακριβώς οι συνθήκες στράγγισης και ο χρόνος.

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι στα επόμενα εδάφια δίνονται κατ' ευθείαν τα αποτελέσματα των κατανομών τάσεων χωρίς να περιγράφεται η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται σε άλλα εξειδικευμένα βιβλία.

8.2 Ορθή Δύναμη επί Ελαστικού Ημιχώρου

Το Σχήμα 8.1 παρουσιάζει την περίπτωση επιβολής κατακόρυφου συγκεντρωμένου φορτίου P στην επιφάνεια ελαστικού ισότροπου ημιχώρου και ορίζει τα απαραίτητα γεωμετρικά μεγέθη. Το πρόβλημα αυτό επιλύθηκε από τον Boussinesq το 1890 και ονομάζεται πρόβλημα του Boussinesq. Επειδή η φόρτιση και η γεωμετρία είναι αξονοσυμμετρικές, οι τάσεις που ορίζονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες της γωνίας θ . Κατά συνέπεια, η συνιστώσα της μετακίνησης κατά την περιφέρεια (u_θ) είναι μηδενική, όπως και τα ακόλουθα μεγέθη:

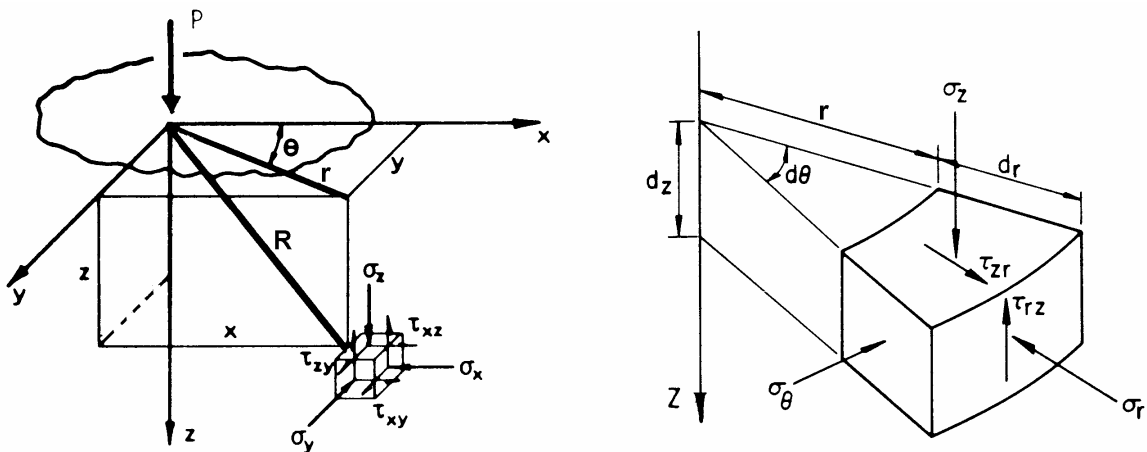
$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$$

Οι κατανομές των τάσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} \\ \sigma_{rr} &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{3r^2 z}{R^3} - \frac{(1-2\nu)R}{R+z} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \left[\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right] \\ \sigma_{rz} &= \frac{3P}{2\pi} \frac{rz^2}{R^5}\end{aligned}$$

όπου $R^2 = r^2 + z^2$. Οι μετακινήσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}u_{rr} &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[\frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\nu)r}{R+z} \right] \\ u_{zz} &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right]\end{aligned}$$



Σχ. 8.1: Συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο

Από τις παραπάνω κατανομές τάσεων συμπεραίνονται τα εξής:

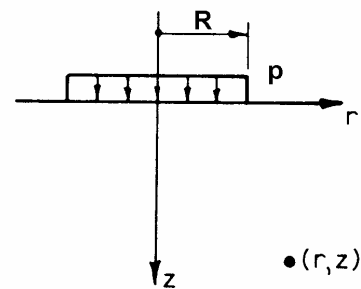
1. Η κατακόρυφη τάση σ_{zz} είναι ανεξάρτητη των ελαστικών σταθερών E, ν , ενώ οι υπόλοιπες ορθές τάσεις εξαρτώνται μόνον από το λόγο του Poisson. Αντίθετα, οι μετακινήσεις και, συνεπώς, οι παραμορφώσεις είναι αντιστρόφως ανάλογες του μέτρου ελαστικότητας.
2. Η κατακόρυφη τάση σ_{zz} (η οποία κυρίως μας ενδιαφέρει, επειδή σ' αυτήν οφείλεται το σύνολο σχεδόν της υποχώρησης του εδάφους) μειώνεται με ρυθμό αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου του βάθους ($1/z^2$).

8.3 Ορθή Πίεση σε Κυκλική Επιφάνεια

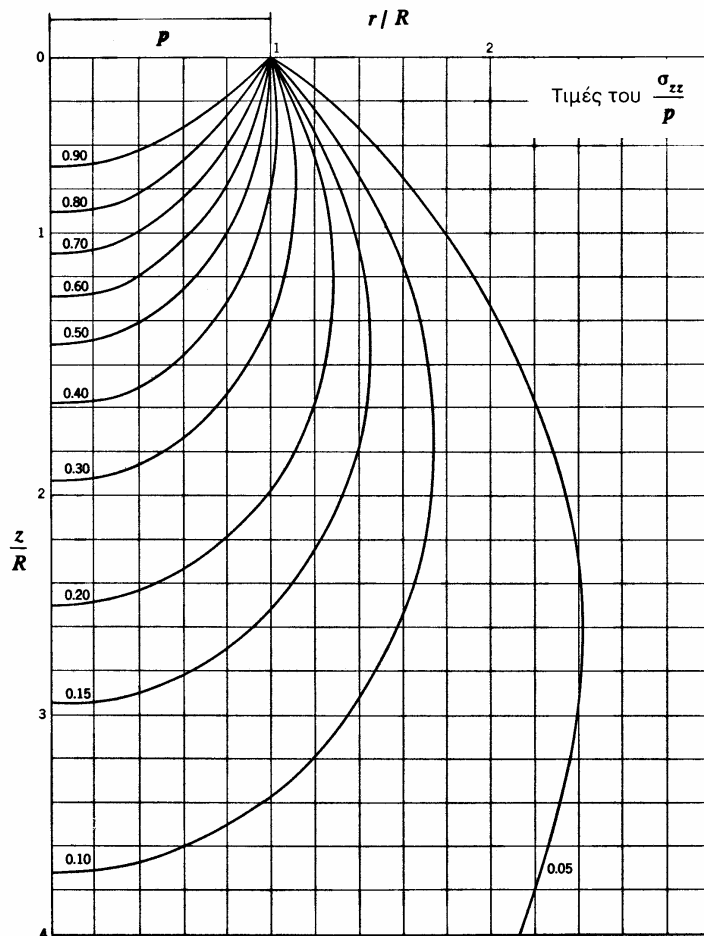
Το Σχήμα 8.2 παρουσιάζει την περίπτωση επιβολής κατακόρυφης πίεσης p , κυκλικής κάτοψης με ακτίνα R στην επιφάνεια ελαστικού ισότροπου ημιχώρου και ορίζει τα απαραίτητα γεωμετρικά μεγέθη. Και στην περίπτωση αυτή η κατάσταση είναι αξονοσυμμετρική και ισχύει:

$$u_{\theta\theta} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$$

Το πρόβλημα δεν έχει λύση με κλειστή αναλυτική μορφή, αλλά η αριθμητική επίλυσή του καταλήγει στις



Σχ. 8.2: Φόρτιση σε κυκλική επιφάνεια

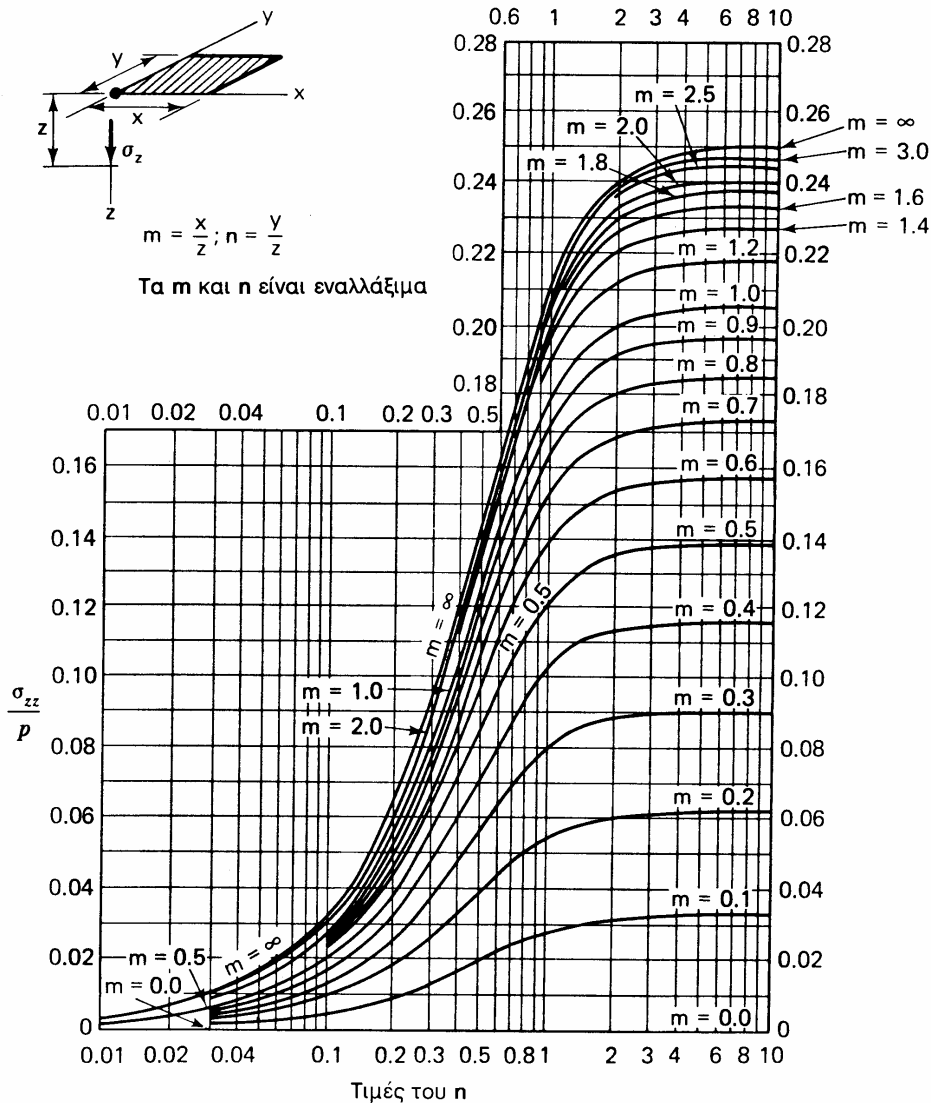


Σχ. 8.3: Κατανομή τάσεων κάτω από κυκλικό θεμέλιο

τάσης (σ_{zz}), που φαίνονται στο Σχήμα 8.3. Η κατανομή της σ_{zz} κατά μήκος του άξονα z (δηλαδή για $r = 0$) δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{zz} = p \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}$$

δηλαδή και πάλι η κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης φθίνει ραγδαία με το βάθος. Τέλος, και στην περίπτωση αυτή η κατακόρυφη τάση σ_{zz} είναι ανεξάρτητη των ελαστικών σταθερών του υλικού.



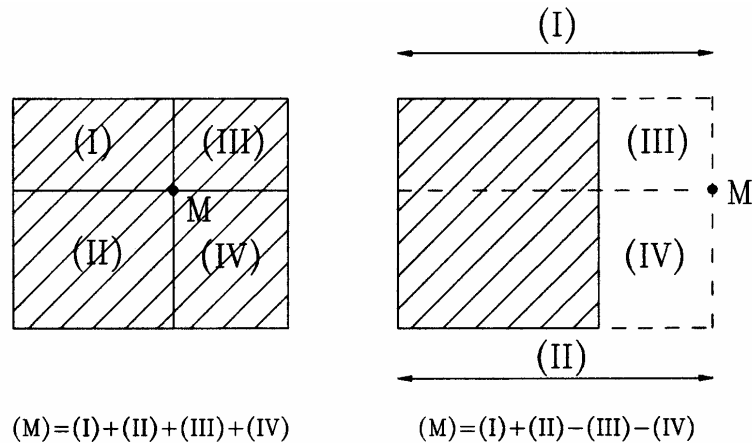
Σχ. 8.4: Τάσεις κάτω από τη γωνία ορθογωνικού φορτίου

8.4 Ορθή Πίεση σε Ορθογωνική Επιφάνεια

Το Σχήμα 8.4 παρουσιάζει την περίπτωση επιβολής κατακόρυφης πίεσης p , ορθογωνικής κάτοψης στην επιφάνεια ελαστικού ισότροπου ημιχώρου και ορίζει τα απαραίτητα γεωμετρικά μεγέθη. Το πρόβλημα δεν έχει λύση με κλειστή αναλυτική μορφή, αλλά η αριθμητική επίλυσή του καταλήγει στις κατανομές του λόγου σ_{zz}/p κάτω από τη γωνία του ορθογωνικού φορτίου ως προς τις αδιάστατες συντεταγμένες

$m = x/z$, $n = y/z$ (όπου x , y οι διαστάσεις του ορθογωνίου), που επίσης φαίνονται στο Σχήμα 8.4.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η τάση σ_{zz} σε οποιαδήποτε θέση του ημιχώρου μπορεί να υπολογισθεί με την επαλληλία τεσσάρων φορτίσεων ορθογωνικής κάτοψης, στις οποίες το σημείο (M) κάτω από το οποίο ζητούνται οι τάσεις να βρίσκεται κάτω από τη γωνία και των τεσσάρων φορτίσεων (Σχήμα 8.5).



Σχ. 8.5: Τάσεις κάτω από τυχόν σημείο M

8.5 Ορθή Φόρτιση σε Απειρομήκη Γραμμή

Κατά την επιβολή κατακόρυφης φόρτισης q (kN/m) σε απειρομήκη γραμμή κατά μήκος του άξονα x στην επιφάνεια ελαστικού ημιχώρου, λόγω του μεγάλου μήκους και της ομοιομορφίας της φόρτισης και του εδάφους, ισχύουν οι παραδοχές της επίπεδης παραμόρφωσης (κατά τον άξονα x). Έτσι:

$$u_{xx} = \varepsilon_{xx} = \sigma_{xz} = \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

και οι υπόλοιπες τάσεις δίνονται από τις σχέσεις (z είναι ο κατακόρυφος άξονας):

$$\sigma_{yy} = \frac{2q}{\pi} \frac{y^2 z}{(y^2 + z^2)^2}$$

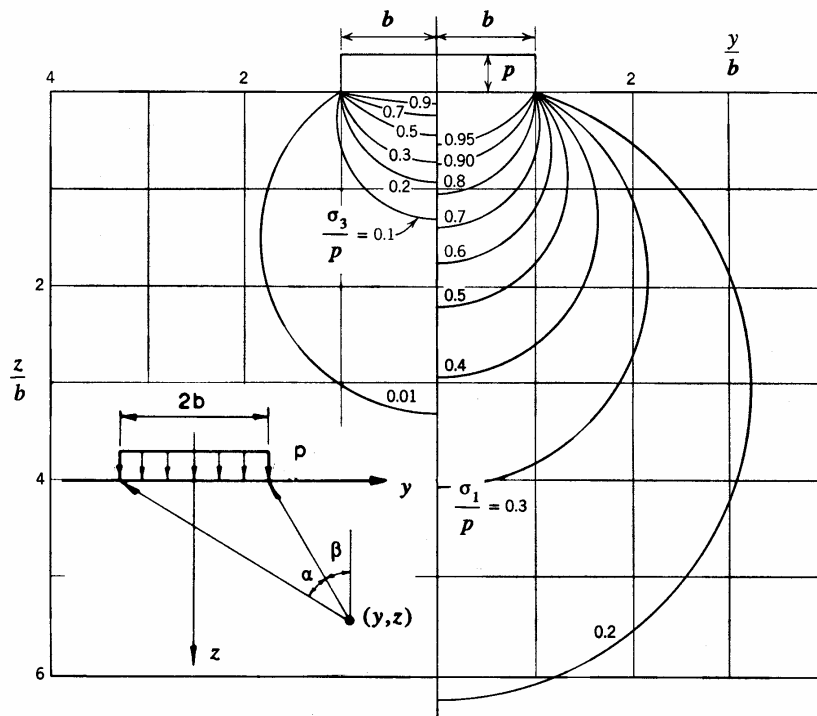
$$\sigma_{zz} = \frac{2q}{\pi} \frac{z^3}{(y^2 + z^2)^2}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{2q}{\pi} \frac{yz^2}{(y^2 + z^2)^2}$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις φαίνεται ότι όλες οι συνιστώσες των τάσεων (με εξαίρεση την σ_{xx}) είναι ανεξάρτητες των ελαστικών σταθερών του υλικού. Επιπλέον, η κατακόρυφη τάση σ_{zz} μειώνεται με το βάθος όπως η $1/z$, ενώ στην περίπτωση του συγκεντρωμένου φορτίου (εδάφιο 8.2) όπως η $1/z^2$, δηλαδή η απομείωση της κατακόρυφης τάσης με το βάθος είναι εντονότερη στην περίπτωση του συγκεντρωμένου φορτίου παρά στην περίπτωση της απειρομήκου γραμμής.

8.6 Ορθή Πίεση σε Απειρομήκη Λωρίδα

Το Σχήμα 8.6 παρουσιάζει την περίπτωση επιβολής κατακόρυφης πίεσης p σε απειρομήκη λωρίδα πλάτους $2b$ κατά μήκος του άξονα x , στην επιφάνεια ελαστικού ημιχώρου και ορίζει τα απαραίτητα γεωμετρικά μεγέθη. Και στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι παραδοχές της επίπεδης παραμόρφωσης (κατά τον άξονα x), οπότε:



Σχ. 8.6: Φόρτιση απειρομήκους λωρίδας

$$u_{xx} = \varepsilon_{xx} = \sigma_{xz} = \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

ενώ οι υπόλοιπες τάσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{zz} = p \left[\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + 2\beta) \right]$$

$$\sigma_{yy} = p \left[\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + 2\beta) \right]$$

$$\sigma_{yz} = \frac{p}{\pi} \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + 2\beta)$$

Και στην περίπτωση αυτή οι τάσεις μειώνονται με το βάθος. Ειδικότερα, η σ_{zz} μειώνεται με βραδύτερο ρυθμό απ' ότι στην περίπτωση πίεσης κατανεμημένης στην επιφάνεια κύκλου (εδάφιο 8.3). Έτσι, στην περίπτωση φόρτισης λωρίδας η σ_{zz} μειώνεται στο 10% της μέγιστης τιμής της (δηλαδή $\sigma_{zz}/p = 0.10$) σε βάθος $z \approx 12b$ κάτω από το μέσον της λωρίδας, ενώ στην περίπτωση φόρτισης κυκλικής επιφάνειας η σ_{zz} μειώνεται στο ίδιο ποσοστό σε βάθος $z \approx 4R$.

8.7 Γενικά Συμπεράσματα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, όλες σχεδόν οι κατανομές των τάσεων που υπολογίσθηκαν στα προηγούμενα εδάφια με χρήση της θεωρίας Ελαστικότητας δεν είναι "ευαίσθητες" στις μεταβολές των ελαστικών σταθερών (E, ν) του εδάφους. Κατά συνέπεια, το πιθανό σφάλμα στην εκτίμηση των υποχωρήσεων λόγω μή-γραμμικής συμπεριφοράς του εδάφους είναι μικρό. Το σφάλμα αυτό μπορεί να μειωθεί ακόμη περισσότερο, αν οι υποχωρήσεις δεν εκτιμηθούν με χρήση της θεωρίας Ελαστικότητας αλλά με την ακόλουθη **μέθοδο των τασικών διαδρομών**.

1. Σε διάφορες θέσεις κάτω από τον άξονα (ή το κέντρο) του επιβαλλόμενου φορτίου υπολογίζονται οι αρχικές (γεωστατικές) τάσεις καθώς και οι πρόσθετες τάσεις λόγω του φορτίου (με εφαρμογή των προηγούμενων σχέσεων).
2. Από τις ίδιες θέσεις λαμβάνονται εδαφικά δείγματα, κατά το δυνατόν "αδιατάρακτα", στα οποία επιβάλλονται στο εργαστήριο με κατάλληλη διαδικασία οι αρχικές τάσεις και, στη συνέχεια, οι πρόσθετες τάσεις και μετρούνται οι αντίστοιχες παραμορφώσεις των δειγμάτων.
3. Η υποχώρηση του εδάφους υπολογίζεται στη συνέχεια από τη σχέση:

$$\rho = \sum_i \Delta \varepsilon_i \cdot \Delta H_i$$

όπου $\Delta \varepsilon_i$ είναι η παραμόρφωση κάθε δείγματος στην κατακόρυφη διεύθυνση κατά την επιβολή των πρόσθετων τάσεων και ΔH_i το πάχος της εδαφικής στρώσης που αντιπροσωπεύεται από κάθε εδαφικό δείγμα.

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι το πεδίο εφαρμογής των προηγούμενων κατανομών τάσεων είναι ευρύτερο από ότι ίσως έχει γίνει αντιληπτό, λόγω της γνωστής αρχής του Saint Venant, κατά την οποία οι αναπτυσσόμενες τάσεις "μακριά" από τη θέση επιβολής του εξωτερικού φορτίου δεν εξαρτώνται από τις λεπτομέρειες του τρόπου επιβολής του φορτίου (δηλαδή αν είναι συγκεντρωμένο, κατανεμημένο σε κυκλική επιφάνεια, κατανεμημένο σε ορθογωνική επιφάνεια κλπ) αλλά μόνον από τη συνισταμένη τιμή του. Έτσι, π.χ. στην περίπτωση φόρτισης από κατανεμημένη πίεση σε τριγωνική επιφάνεια, οι αναπτυσσόμενες τάσεις **μακριά** από την περιοχή επιβολής του φορτίου μπορούν να υπολογισθούν από τις εξισώσεις που δόθηκαν για την περίπτωση φόρτισης από πίεση κατανεμημένη σε κυκλική επιφάνεια (ή ακόμη και για συγκεντρωμένο φορτίο) με την ίδια συνισταμένη **ένταση**. Ο όρος "μακριά" που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως, προφανώς, αναφέρεται σε απόσταση που είναι μεγάλη σε σχέση με τη χαρακτηριστική διάσταση της γεωμετρίας επιβολής του φορτίου (π.χ. την πλευρά του τριγώνου ή τη διάμετρο του κύκλου).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 8.1

Στην επιφάνεια ενός ομοιόμορφου, γραμμικώς ελαστικού εδαφικού σχηματισμού επιβάλλεται πίεση (p), που έχει τη μορφή απειρομήκουσ λωρίδας πλάτους ($2b$). Η φόρτιση επιβάλλεται ταχέως, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται υπό αστράγγιστες συνθήκες. Ζητούνται:

1. Η κατανομή της αναπτυσσόμενης υπερπίεσης πόρων στον άξονα του φορτίου ως προς το βάθος z .
2. Η κατανομή της αναπτυσσόμενης υπερπίεσης πόρων σε ένα οριζόντιο επίπεδο σε βάθος $z = b/2$, ως προς την τετμημένη y .
3. Σε απόσταση $2b$ από τον άξονα του φορτίου υπάρχει κατακόρυφος τοίχος ύψους $H = 3b$, που μπορεί να θεωρηθεί ως ανένδοτος στην οριζόντια διεύθυνση. Να σχεδιασθεί η κατανομή της οριζόντιας ώθησης στον τοίχο, λόγω της πίεσης (p).

Λύση:

Κατά την αστράγγιστη φόρτιση ενός γραμμικού ελαστικού εδάφους, η αναπτυσσόμενη υπερπίεση πόρων σε κάθε θέση είναι ίση με τη μέση αύξηση των ολικών ορθών τάσεων, δηλαδή:

$$\Delta u = \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{xx} + \Delta \sigma_{yy} + \Delta \sigma_{zz})$$

Στην περίπτωση που η αστράγγιστη φόρτιση επιβάλλεται υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα), ισχύει:

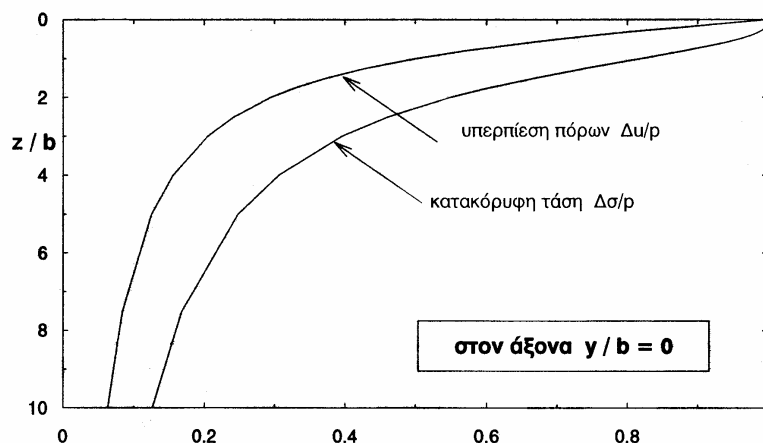
$$\Delta \sigma_{xx} = \nu_u (\Delta \sigma_{yy} + \Delta \sigma_{zz})$$

όπου $\nu_u = 0.50$ και x είναι ο άξονας της μηδενικής παραμόρφωσης. Συνδυασμός των ανωτέρω σχέσεων δίνει:

$$\Delta u = \frac{1}{2} (\Delta \sigma_{yy} + \Delta \sigma_{zz}) \quad (8.1-1)$$

από την οποία μπορούν να υπολογισθούν οι ζητούμενες υπερπίεσεις πόρων στο έδαφος.

1. Στον άξονα του φορτίου ($y = 0$) και για διάφορα βάθη z , υπολογίζονται οι τιμές των γωνιών β , α , των μεταβολών των ολικών τάσεων $\Delta \sigma_{zz}$, $\Delta \sigma_{yy}$ (διαιρεμένων με την επιβαλλόμενη φόρτιση p) και της υπερπίεσης πόρων Δu , που φαίνονται στον Πίνακα 8.1-1. Για τους υπολογισμούς των μεταβολών των ολικών τάσεων, χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις που αναφέρονται στο εδάφιο 8.6 (ορθή πίεση σε απειρομήκη λωρίδα).



Σχήμα 8.1-1: Παράδειγμα 8.1

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.1-1

z/b	β (μοίρες)	α (μοίρες)	$\Delta\sigma_{zz} / p$	$\Delta\sigma_{yy} / p$	$\Delta u / p$
0	-90	180	1.0	1.0	1.0
0.10	-84.3	168.6	1.0	0.87	0.94
0.20	-78.7	157.4	1.0	0.75	0.87
0.30	-73.3	146.6	0.99	0.64	0.81
0.40	-62.8	136.4	0.98	0.54	0.76
0.50	-63.4	126.9	0.96	0.45	0.70
0.60	-59.0	118.1	0.94	0.38	0.66
0.80	-51.3	102.7	0.88	0.26	0.57
1.00	-45.0	90	0.82	0.18	0.50
1.25	-38.7	77.3	0.74	0.12	0.43
1.50	-33.7	67.4	0.67	0.08	0.37
1.75	-29.7	59.5	0.60	0.06	0.33
2.0	-26.6	53.1	0.55	0.04	0.30
2.50	-21.8	43.6	0.46	0.02	0.24
3.0	-18.4	36.9	0.40	0.01	0.20
4.0	-14.0	28.1	0.31	0.006	0.16
5.0	-11.3	22.6	0.25	0.003	0.13
7.50	-7.6	15.2	0.17	0.001	0.08
10.0	-5.7	11.4	0.12	0.0001	0.06

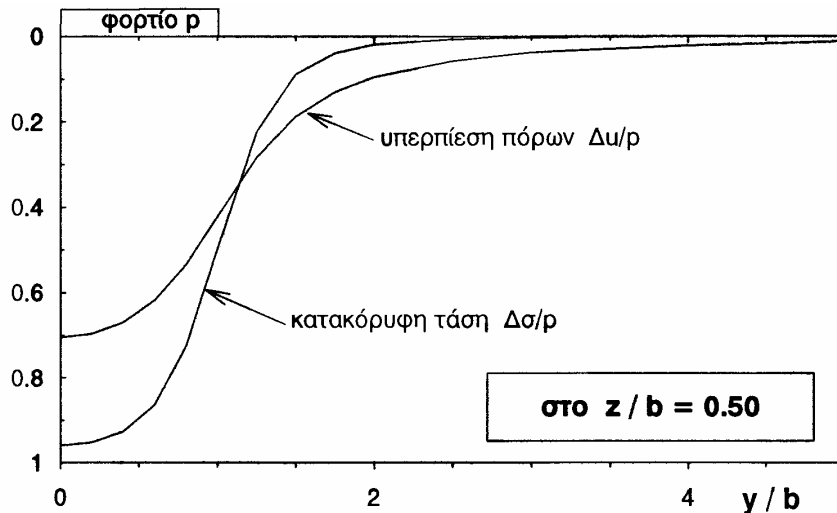
Το Σχήμα 8.1-1 παρουσιάζει τις κατανομές ως προς το βάθος της κατακόρυφης ολικής τάσης και της υπερπίεσης πόρων στον άξονα του φορτίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αναπτυσσόμενη υπερπίεση πόρων είναι μικρότερη από την αντιστοιχη κατακόρυφη τάση, δηλαδή, παρόλον ότι η φόρτιση γίνεται υπό αστράγγιστες συνθήκες, το σύνολο του φορτίου **δεν** αναλαμβάνεται από την πίεση πόρων. Πράγματι, μόνον στην περίπτωση της αστράγγιστης μονοδιάστατης συμπίεσης (π.χ. στη δοκιμή του συμπιεσομέτρου), το σύνολο του φορτίου αναλαμβάνεται από την πίεση πόρων.

2. Με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως υπολογίζονται τα σχετικά μεγέθη στο οριζόντιο επίπεδο σε βάθος $z = b/2$, που φαίνονται στον Πίνακα 8.1-2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.1-2

y/b	β (μοίρες)	α (μοίρες)	$\Delta\sigma_{zz} / p$	$\Delta\sigma_{yy} / p$	$\Delta u / p$
0	-63.4	126.9	0.96	0.45	0.71
0.20	-58.0	125.4	0.95	0.44	0.70
0.40	-50.2	120.5	0.93	0.41	0.67
0.60	-38.7	111.3	0.86	0.37	0.62
0.80	-21.8	96.3	0.73	0.34	0.54
1.00	0	76.0	0.50	0.35	0.42
1.25	26.6	50.9	0.22	0.34	0.28
1.50	45	33.7	0.09	0.29	0.19
1.75	56.3	23.4	0.04	0.22	0.13
2.0	63.4	17.1	0.02	0.17	0.10
2.50	71.6	10.3	0.006	0.11	0.06
3.0	76.0	6.9	0.003	0.07	0.04
4.0	80.5	3.8	0.001	0.04	0.02
5.0	82.9	2.3	0.0003	0.03	0.01

Το Σχήμα 8.1-2 παρουσιάζει τις κατανομές της κατακόρυφης ολικής τάσης και της υπερπίεσης πόρων σε διάφορα σημεία του οριζόντιου επιπέδου σε βάθος $z = b/2$. Και στην περίπτωση αυτή, η αναπτυσσόμενη υπερπίεση πόρων δεν είναι ίση με την αντιστοιχη κατακόρυφη τάση, και μάλιστα κοντά στον άξονα της φόρτισης $\Delta u < \Delta\sigma_{zz}$, ενώ μακριά από τον άξονα $\Delta u > \Delta\sigma_{zz}$.

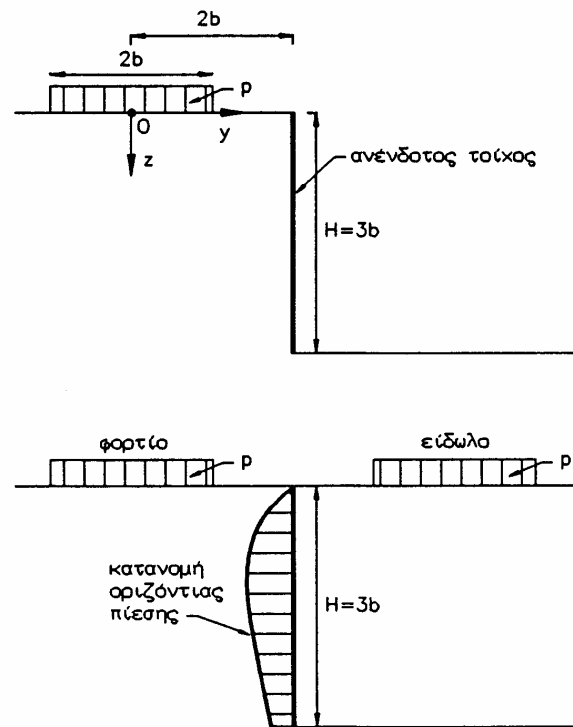


Σχήμα 8.1-2: Παράδειγμα 8.1

3. Το Σχήμα 8.1-3 παρουσιάζει τη λωριδωτή φόρτιση (έντασης p) και τον ανένδοτο τοίχο ύψους $H = 3b$. Ένας τέτοιος τοίχος μπορεί να είναι, π.χ. το πλευρικό τοίχωμα των υπογείων ενός κτιρίου, το οποίο λόγω της ακαμψίας του κτιρίου δεν ενδίδει (δηλαδή δεν επιτρέπει μετακινήσεις) στην οριζόντια διεύθυνση. Για την εκτίμηση της οριζόντιας ώθησης σε ένα ανένδοτο τοίχο δεν αρκεί ο υπολογισμός της οριζόντιας τάσης σ_{yy} , που αναπτύσσεται σε διάφορες θέσεις του τοίχου λόγω της επιφόρτισης p . Πράγματι, ένας τέτοιος υπολογισμός δίνει τις τάσεις σ_{yy} στο εσωτερικό του (εδαφικού) ημιχώρου, ο οποίος όμως έχει οριζόντιες μετακινήσεις συμβιβαστές με το μέτρο ελαστικότητάς του. Για την προσομοίωση του ανένδοτου τοίχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος που φαίνεται στο κάτω μέρος του Σχήματος 8.1-3. Συγκεκριμένα, εισάγεται ένα είδωλο της λωριδωτής φόρτισης που έχει το ίδιο πλάτος και ένταση και θεωρείται επαλληλία των δύο φορτίων. Λόγω της συμμετρίας στη θέση του τοίχου, η οριζόντια μετακίνηση θα είναι μηδενική και συνεπώς οι οριζόντιες τάσεις σ_{yy} λόγω της επαλληλίας των δυο φορτίων θα είναι ίσες με την ώθηση στον ανένδοτο τοίχο που φαίνεται στο άνω μέρος του σχήματος. Όμως, η τάση σ_{yy} λόγω της επαλληλίας των δύο φορτίων στο μέσον της μεταξύ τους απόστασης είναι διπλάσια της τάσης σ_{yy} λόγω εκάστου των φορτίων. Συνεπώς, η ώθηση στον ανένδοτο τοίχο δίνεται από τη σχέση (βλέπε και εδάφιο 8.6):

$$\sigma_{yy} = 2p \left[\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + 2\beta) \right]$$

Τιμές της ώθησης σε διάφορα βάθη καθ' ύψος του τοίχου δίνονται στον Πίνακα 8.1-3 και η κατανομή της παρουσιάζονται σχηματικά στο Σχήμα 8.1-3.



Σχήμα 8.1-3: Παράδειγμα 8.1

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.1-2

βάθος z/b	β (μοίρες)	α (μοίρες)	ώθηση σ_{yy} / p
0	90	0	0
0.50	63.4	17.1	0.34
1	45	26.6	0.42
1.50	33.7	29.7	0.37
2	26.6	29.7	0.29
2.50	21.8	28.4	0.22
3	18.4	26.6	0.17

Παράδειγμα 8.2

Στην επιφάνεια γραμμικώς ελαστικού εδάφους επιβάλλεται ορθή φόρτιση q (kN/m) σε απειρομήκη λωρίδα μικρού πλάτους (ας θεωρηθεί μηδενικού πλάτους).

1. Να προσδιορισθούν οι κύριες τάσεις στο εσωτερικό του εδάφους, λόγω της φόρτισης q , κατά μέγεθος και διεύθυνση.
2. Εάν η φόρτιση επιβάλλεται ταχέως ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται υπό αστράγγιστες συνθήκες, να προσδιορισθεί η κατανομή ως προς το βάθος της αναπτυσσόμενης υπερπίεσης πόρων στον άξονα της φόρτισης. Επιπλέον, να προσδιορισθούν οι καμπύλες σταθερής υπερπίεσης πόρων (ισοδυναμικές γραμμές).

Λύση:

1. Από τον κύκλο Mohr προκύπτει ότι οι κύριες τάσεις σ_1, σ_3 δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{yz}^2}$$

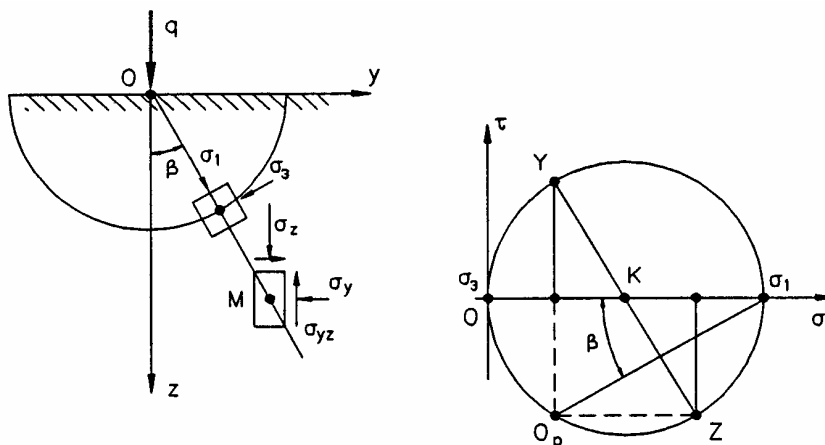
$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{yz}^2}$$

όπου: $\sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}$ είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες της τάσης. Οι καρτεσιανές συνιστώσες της τάσης λόγω της ορθής φόρτισης q σε απειρομήκη λωρίδα δίνονται στο εδάφιο 8.5. Με αντικατάσταση των σχέσεων του εδαφίου 8.5 στις ανωτέρω εξισώσεις προκύπτουν οι τιμές των κυρίων τάσεων:

$$\sigma_1 = \frac{2q}{\pi} \frac{z}{y^2 + z^2}, \quad \sigma_3 = 0$$

ενώ η γωνία που σχηματίζει η μέγιστη κύρια τάση με τον κατακόρυφο άξονα (βλέπε Σχήμα 8.2-1) είναι:

$$\tan \beta = \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{zz} - \sigma_{yy}} = \frac{y}{z}$$



Σχήμα 8.2-1: Παράδειγμα 8.2

Συνεπώς:

α) Η ελάχιστη κύρια τάση (σ_3) είναι μηδέν.

β) Η μέγιστη κύρια τάση (που η έντασή της προφανώς μειώνεται με την αύξηση της απόστασης από το σημείο επιβολής της φόρτισης) ασκείται κατά την ακτινική διεύθυνση, δηλαδή: $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_3 = \sigma_\theta = 0$.

Οι διευθύνσεις λοιπόν των κυρίων τάσεων είναι η ακτινική (ΟΜ) για τη σ_1 και η περιφερειακή για τη σ_3 .

2. Επειδή η φόρτιση επιβάλλεται υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (βλέπε και Παράδειγμα 8.1):

$$\sigma_2 = \nu_u (\sigma_1 + \sigma_3)$$

και λόγω της αστράγγιστης φόρτισης:

$$u = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις και επειδή $\nu_u = 0.50$, προκύπτει:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{q}{\pi} \frac{z}{y^2 + z^2}$$

οπότε, στον άξονα της φόρτισης ($y = 0$) ισχύει: $u = \frac{q}{\pi} \frac{1}{z}$, δηλαδή η αναπτυσσόμενη υπερπίεση πόρων έχει υπερβολική κατανομή (μείωση) ως προς το βάθος z .

Οι καμπύλες σταθερής υπερπίεσης πόρων (έστω u_o) δίνονται από τη εξίσωση:

$$\frac{q}{\pi} \frac{z}{y^2 + z^2} = u_o$$

ή ισοδύναμα:

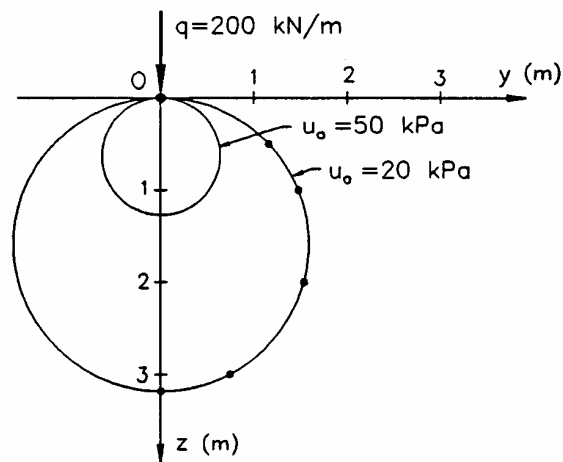
$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{\pi u_o} - z \right) z} \quad (8.2-1)$$

Εφαρμογή:

Εάν $q = 200$ kN/m, να προσδιορισθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (καμπύλη), όπου η αναπτυσσόμενη υπερπίεση πόρων είναι $u_o = 20$ kPa.

Από τη σχέση (8.2-1) προκύπτει: $y = \pm \sqrt{(3.183 - z)z}$, με τιμές που δίνονται στον Πίνακα 8.2-1 (μόνον τα θετικά y) και φαίνονται στο Σχήμα 8.2-2. Στο ίδιο Σχήμα φαίνεται και η καμπύλη υπερπίεσης πόρων 50 kPa.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.2-1	
z (m)	y (m)
0	0
0.25	0.86
0.50	1.16
0.75	1.35
1.00	1.48
1.50	1.59
2.00	1.54
2.50	1.31
3.00	0.74
3.183	0



Σχήμα 8.2-2: Παράδειγμα 8.2

Παράδειγμα 8.3

Να επαληθευθεί η Αρχή του Saint Venant για την κατακόρυφη τάση (σ_{zz}) κάτω από τον άξονα απειρομήκους λωριδωτού θεμελίου (εύρους $2b = 2 \text{ m}$) που φορτίζει το έδαφος με τάση $p = 100 \text{ kPa}$, συγκρίνοντας τις τιμές του σ_{zz} ως προς το βάθος για τη φόρτιση αυτή, με τις αντίστοιχες τιμές του σ_{zz} για την περίπτωση φόρτισης σε απειρομήκη γραμμή (μηδενικού εύρους) με ισοδύναμη ένταση $q = 2b \cdot p$.

Λύση:

Στην περίπτωση του λωριδωτού θεμελίου ($b = 1 \text{ m}$), για τα σημεία κάτω από τον άξονα ισχύει (βλέπε και εδάφιο 8.6): $\alpha = 2 \arctan(b/z)$, $\alpha + 2\beta = 0$, οπότε η κατακόρυφη τάση δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{zz} = p \left[\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sin \alpha \right]$$

Στην περίπτωση φόρτισης σε απειρομήκη γραμμή, η ισοδύναμη φόρτιση είναι:

$$q = 2b \cdot p = 2 \times 1 \times 100 = 200 \text{ kN/m}$$

Για τα σημεία κάτω από τον άξονα ($y = 0$) ισχύει (βλέπε και εδάφιο 8.5):

$$\sigma_{zz} = \frac{2q}{\pi} \frac{1}{z}$$

Τα αποτελέσματα της εφαρμογής των σχέσεων αυτών δίνονται στον Πίνακα 8.3-1. Από τα αποτελέσματα αυτά προκύπτει ότι, για βάθη μεγαλύτερα από δύο φορές το εύρος του θεμελίου ($2 \times 2 = 4 \text{ m}$), το σφάλμα της προσέγγισης του λωριδωτού φορτίου με γραμμή μηδενικού εύρους είναι αμελητέο (μικρότερο από 5%). Αντίθετα, σε πολύ μικρά βάθη (π.χ. $z = 0.5 \text{ m}$) το σφάλμα είναι σημαντικό (μεγαλύτερο από 100%).

ΠΙΝΑΚΑΣ 8.3-1

Βάθος z (m)	α (μοίρες)	σ_{zz} (kPa) για:		σφάλμα (%)
		λωρίδα	γραμμή	
0.5	126.9	95.9	254.6	165
1.0	90	81.8	127.3	56
1.5	67.4	66.8	84.9	27
2.0	53.1	55.0	63.7	16
2.5	43.6	46.2	50.9	10
3	36.9	39.6	42.4	7.1
3.5	31.9	34.5	36.4	5.5
4	28.1	30.6	31.8	3.9
5	22.6	24.8	25.5	2.8
6	18.9	20.8	21.2	1.9

