ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ

3.1 Εισαγωγή

Η λεπτομερής περιγραφή της μετάδοσης τάσεων στο εσωτερικό των εδαφικών μαζών είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη λόγω της ασυνεχούς φύσης του εδάφους. Στα επόμενα συνοψίζονται κατ' αρχήν οι βασικές έννοιες ορισμού των τάσεων σε συνεχή μέσα (γνωστές ήδη από τη Μηχανική) και στη συνέχεια γενικεύονται και επεκτείνονται οι έννοιες αυτές, για να περιγραφεί η μετάδοση τάσεων στις εδαφικές μάζες.

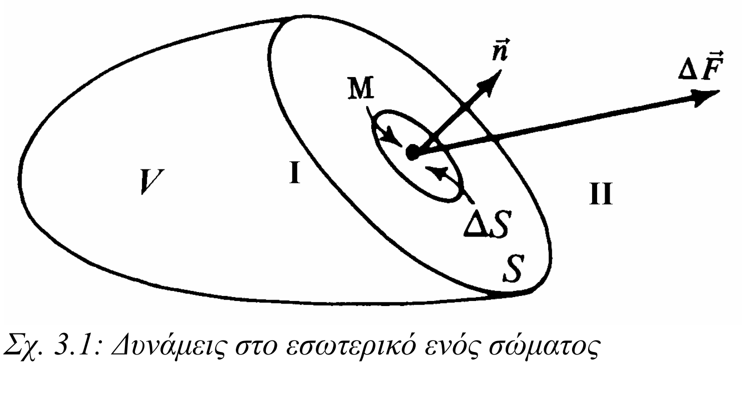
3.2 Τάση σε Σημείο Συνεχούς Μέσου

Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει μια στοιχειώδη επίπεδη επιφάνεια ΔS, που διέρχεται από τυχόν σημείο Μ στο εσωτερικό του όγκου (V) που καταλαμβάνεται από ένα συνεχές μέσον. Η επιφάνεια αυτή, που ορίζεται από το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$, αποτελεί τμήμα της διεπιφάνειας που χωρίζει ιδεατά το σώμα σε δύο τεμάχη. Κατά την επαφή μεταξύ των δύο τεμαχών καθένα από αυτά ασκεί δυνάμεις στο άλλο, οι οποίες σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα (δράση = αντίδραση) είναι ίσες και αντίθετες. Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει και τη στοιχειώδη δύναμη $\Delta\vec{F}$, που το τέμαχος I ασκεί στο τέμαχος II μέσω της επιφάνειας ΔS.

Ορίζεται στη συνέχεια η ***ανηγμένη δύναμη*** $\vec{f}$ που ασκείται σε μια **μοναδιαία** επίπεδη επιφάνεια (με κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$) που διέρχεται από το σημείο Μ:

$$\vec{f} = lim\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} \quad \text{(όταν το } \Delta S \to 0\text{)}$$

Επειδή, όμως, από το σημείο Μ διέρχονται άπειρες επίπεδες επιφάνειες, είναι απαραίτητο να προσδιορισθούν οι ελάχιστες πληροφορίες που απαιτούνται, για να υπολογισθεί η ανηγμένη δύναμη σε **τυχούσα** επίπεδη επιφάνεια δια του σημείου Μ. Αποδεικνύεται ότι αρκεί να είναι γνωστές οι ανηγμένες δυνάμεις $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ σε τρία επίπεδα δια του σημείου Μ ανεξάρτητα μεταξύ τους (που δεν διέρχονται από την ίδια ευθεία). Ειδικότερα, σαν τέτοια επίπεδα μπορούν να θεωρηθούν τα τρία επίπεδα που ορίζονται από τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$ κατά τις διευθύνσεις των καρτεσιανών αξόνων x, y, z αντίστοιχα. Οι ανηγμένες δυνάμεις επί των επιπέδων αυτών είναι:



Σχ. 3.1: Δυνάμεις στο εσωτερικό ενός σώματος

$$\vec{f}_x = (\sigma_{xx},\ \sigma_{xy},\ \sigma_{xz}),$$
$$\vec{f}_y = (\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}),$$
$$\vec{f}_z = (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}),$$

όπου στην παρένθεση

φαίνονται οι συνιστώσες των ανηγμένων δυνάμεων κατά μήκος των καρτεσιανών αξόνων. Οι συνιστώσες των τριών αυτών ανηγμένων δυνάμεων μπορούν να γραφούν συνοπτικά με τη μορφή:

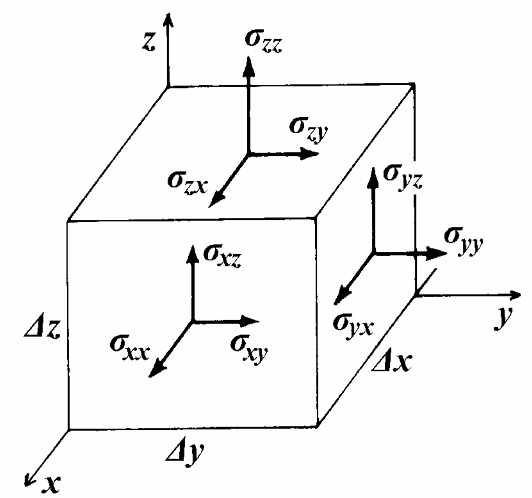
$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

που ορίζει τον ***τανυστή των τάσεων*** ($\boldsymbol{\sigma}$) στο σημείο Μ. Όπως είναι γνωστό από τη Μηχανική, ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός και κατά συνέπεια:

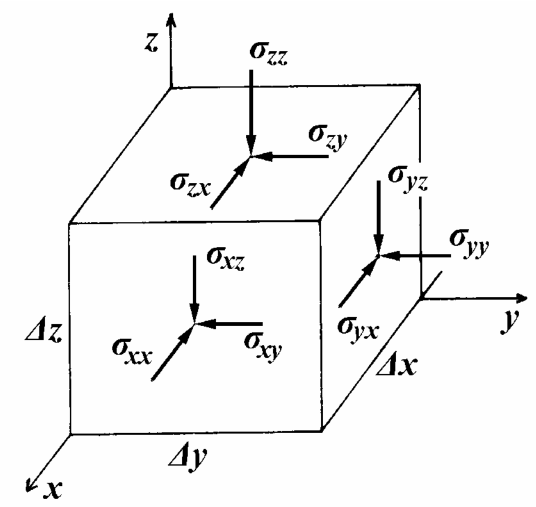
$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ji} \qquad (i,\ j = x,\ y,\ z)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο τανυστής των τάσεων στο σημείο Μ αρκεί για τον προσδιορισμό της ανηγμένης δύναμης σε τυχόν επίπεδο δια του Μ. Ειδικότερα, ο τανυστής των τάσεων στο σημείο Μ συσχετίζει τη διεύθυνση $\vec{n}$ ενός τυχόντος επιπέδου δια του Μ και τη μοναδιαία δύναμη $\vec{f}$ επί του επιπέδου αυτού με τη σχέση: $\vec{f} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \vec{n}$, όπου $\boldsymbol{\sigma}^T$ είναι ο ανάστροφος τανυστής τάσεων (που προκύπτει από τον τανυστή $\boldsymbol{\sigma}$ με εναλλαγή γραμμών και στηλών).

Το Σχήμα 3.2 παρουσιάζει τις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων στα τρια επίπεδα που είναι κάθετα στους καρτεσιανούς άξονες: οι ***ορθές*** συνιστώσες είναι κάθετες στα επίπεδα, ενώ οι ***διατμητικές*** συνιστώσες κείνται επί των επιπέδων. Στο σχήμα είναι σημειωμένες οι θετικές διευθύνσεις των συνιστωσών των τάσεων κατά τη σύμβαση που χρησιμοποιείται στη Μηχανική και θεωρεί σαν θετικές τις ορθές εφελκυστικές τάσεις. Στην Εδαφομηχανική οι συνήθεις ορθές τάσεις είναι οι θλιπτικές, επειδή τα εδάφη, σαν ασυνεχή μέσα, δεν μπορούν γενικά να αναλάβουν εφελκυστικές ορθές τάσεις. Για το λόγο αυτό είναι πρακτικό στην Εδαφομηχανική να θεωρούνται θετικές ορθές τάσεις οι θλιπτικές. Εάν όμως αναστραφούν τα πρόσημα των ορθών τάσεων μόνον, πολλές από τις (γνωστές) εξισώσεις της Μηχανικής θα αλλάξουν μορφή, επειδή μερικοί όροι τους θα αλλάξουν πρόσημο. Για να μη μεταβληθεί η μορφή των εξισώσεων αυτών και ταυτόχρονα να θεωρούνται θετικές οι θλιπτικές ορθές τάσεις, αρκεί να αναστραφεί η σήμανση όλων των συνιστωσών των τάσεων (ορθές και διατμητικές). Έτσι, στο Σχήμα 3.3 παρουσιάζονται οι θετικές τάσεις σύμφωνα με την ***τανυστική σύμβαση της Εδαφομηχανικής***. Κατά τη σύμβαση αυτή οι θετικές τιμές των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων ορίζονται ως εξής:



Σχ. 3.2: Θετικές συνιστώσες τάσεων (σύμβαση Μηχανικής)



Σχ. 3.3: Θετικές συνιστώσες τάσεων (σύμβαση Εδαφομηχανικής)

1. Επί των "θετικών" επιπέδων (δηλαδή των επιπέδων στα οποία το κάθετο διάνυσμα είναι ομόρροπο πρός τη θετική διεύθυνση των αξόνων) θετικές τάσεις είναι οι τάσεις με διεύθυνση αντίρροπη προς τις διευθύνσεις των αξόνων. Στο Σχήμα 3.3 είναι σημειωμένες οι θετικές διευθύνσεις των τάσεων επί των "θετικών" επιπέδων.
2. Επί των "αρνητικών" επιπέδων (δηλαδή των επιπέδων στα οποία το κάθετο διάνυσμα είναι αντίρροπο προς τη θετική διεύθυνση των αξόνων) θετικές τάσεις είναι οι τάσεις με διεύθυνση ομόρροπη προς τις διευθύνσεις των αξόνων. Στο Σχήμα 3.3 τα τρία αρνητικά επίπεδα είναι οι τρεις έδρες του κύβου στις οποίες δεν είναι σημειωμένες τάσεις. Οι θετικές διευθύνσεις των τάσεων αυτών θα ήταν αντίθετες από τις σημειωμένες επί των "θετικών" επιπέδων.

3.3 Επίπεδη Παραμόρφωση - Κύκλος του Mohr

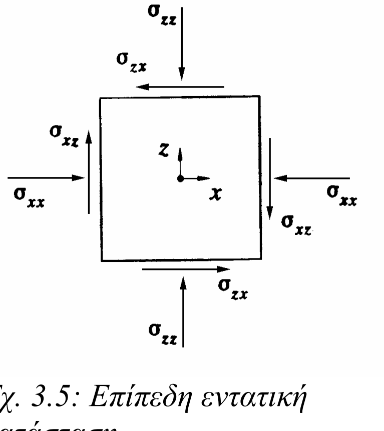
Η κατάσταση της επίπεδης παραμόρφωσης είναι αρκετά συνήθης στην Εδαφομηχανική και αναφέρεται σε περιπτώσεις, κατά τις οποίες οι συνιστώσες των τάσεων δεν μεταβάλλονται κατά τη διεύθυνση ενός άξονα (π.χ. του y), όπως φράγματα, επιχώματα και άλλες επιμήκεις κατασκευές. Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\sigma_{yz}=\sigma_{zy}=0$ και επιπλέον, η τάση σ_{yy} προσδιορίζεται από τους κινηματικούς περιορισμούς του προβλήματος. Συνεπώς, οι τάσεις που ενδιαφέρουν είναι πλέον μόνον οι σ_{xx}, σ_{zz} και $\sigma_{xz}=\sigma_{zx}$, που μπορούν να γραφούν συνοπτικά με την απλούστερη μορφή:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

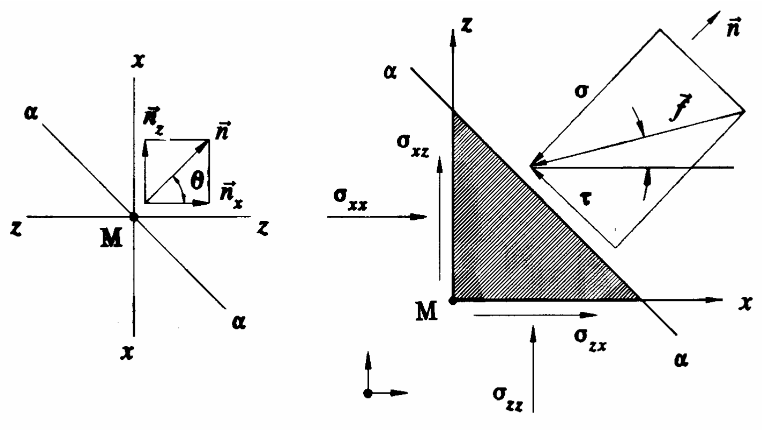
Στο Σχήμα 3.4 είναι σημειωμένες οι θετικές διευθύνσεις των τάσεων αυτών επί των "θετικών" και "αρνητικών" επιπέδων κατά την τανυστική σύμβαση της Εδαφομηχανικής. Στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, η ανηγμένη δύναμη $\vec{f}$ σε τυχόν επίπεδο (αα), παράλληλο προς τον άξονα y, με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}=\vec{n}_x+\vec{n}_z=(\cos\theta, \sin\theta)$ (βλέπε Σχήμα 3.5), έχει ορθή (κάθετη στο επίπεδο) συνιστώσα (σ) και διατμητική (επί του επιπέδου) συνιστώσα (τ), που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{zz}\sin^2\theta + 2\sigma_{xz}\sin\theta\cos\theta \\ \tau &= (\sigma_{xx}-\sigma_{zz})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{xz}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \end{aligned} \tag{3.1}$$

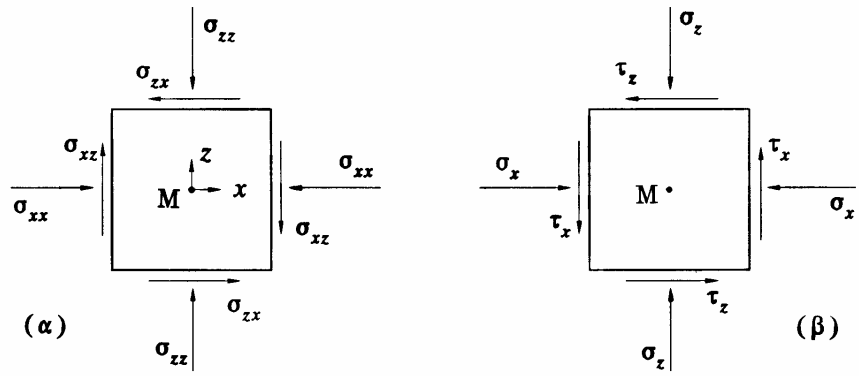
Θα πρέπει να δοθεί προσοχή στα θετικά πρόσημα της ορθής και διατμητικής τάσης επί τυχόντος επιπέδου: θετική ορθή τάση είναι η θλιπτική και θετική διατμητική



Σχ. 3.5: Επίπεδη εντατική κατάσταση



Σχ. 3.4: Τάσεις σε τυχόν κεκλιμένο επίπεδο (αα)



Σχ. 3.6: Θετικές διευθύνσεις των συνιστωσών των τάσεων

τάση είναι αυτή που δημιουργεί ανθωρολογιακή ροπή ως προς το σημείο Μ. Οι προσημάνσεις αυτές είναι διαφορετικές από την τανυστική σύμβαση των τάσεων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6, που παρουσιάζει τις **θετικές** διευθύνσεις των συνιστωσών των τάσεων επί των επιπέδων x και z, (α) κατά την τανυστική σύμβαση της Εδαφομηχανικής και (β) κατά τη σύμβαση των ορθών και διατμητικών τάσεων επί επιπέδου.

Αποδεικνύεται ότι, στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, υπάρχουν δύο επίπεδα δια του σημείου Μ κάθετα μεταξύ τους στα οποία η διατμητική συνιστώσα μηδενίζεται, οπότε η ανηγμένη δύναμη είναι ορθή $(\vec{f}=-\sigma\,\vec{n})$. Τα επίπεδα αυτά ονομάζονται ***κύρια επίπεδα*** και οι διευθύνσεις των καθέτων τους ***κύριες διευθύνσεις***. Αποδεικνύεται επίσης ότι, εάν είναι γνωστές οι συνιστώσες των τάσεων, τότε οι διευθύνσεις των κύριων επιπέδων σχηματίζουν γωνία θ με τον άξονα x, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}} \tag{3.2}$$

Οι ορθές τάσεις επί των κύριων επιπέδων (***κύριες τάσεις***) συμβολίζονται συνήθως με σ_1, σ_3. Γενικότερα, σε τυχούσα **τριδιάστατη** εντατική κατάσταση, υπάρχουν ***τρία*** κύρια επίπεδα κάθετα μεταξύ τους. Στην επίπεδη παραμόρφωση, το τρίτο κύριο επίπεδο (σ_2) είναι το επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα y.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η ορθή και η διατμητική τάση σε τυχόν επίπεδο μπορούν να υπολογισθούν από τις σχέσεις (3.1). Στην ειδική περίπτωση που οι άξονες x, z ταυτίζονται με τους κύριους άξονες, ισχύει: $\sigma_{xx}=\sigma_1$, $\sigma_{zz}=\sigma_3$ και $\sigma_{xz}=\sigma_{zx}=0$, οπότε οι σχέσεις (3.1) δίνουν:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1\cos^2\theta+\sigma_3\sin^2\theta \\ \tau &= (\sigma_1-\sigma_3)\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{3.3}$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\theta \\ \tau &= \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\theta \end{aligned} \tag{3.4}$$

Οι σχέσεις (3.4) παριστάνονται γραφικά στο Σχήμα 3.7, όπου έχουν σημειωθεί οι κύριες τάσεις (σ_1,σ_3) και κύκλος με διάμετρο $(\sigma_1-\sigma_3)$ σε σύστημα με καρτεσιανές συντεταγμένες (σ,τ). Το σημείο P του κύκλου, που ορίζεται από την ακτίνα που σχηματίζει γωνία 2θ ως προς τον οριζόντιο άξονα, έχει τετμημένη (σ) και τεταγμένη

(τ), που δίνονται από τις σχέσεις (3.4), μπορεί δηλαδή να θεωρηθεί ότι παριστάνει τις τάσεις επί του επιπέδου pp, του οποίου η κάθετος $\vec{n}$ σχηματίζει γωνία θ με την κάθετο στο επίπεδο της σ_1. Έτσι, για κάθε επίπεδο pp δια του σημείου Μ παράλληλο με τον άξονα y, ορίζεται ένα σημείο P επί του κύκλου, τέτοιο ώστε οι συντεταγμένες του να είναι ίσες με την ορθή και διατμητική τάση επί του επιπέδου pp. Ορίζεται, κατ' αυτόν τον τρόπο, μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της απλής απειρίας επιπέδων διά του σημείου Μ (παράλληλων προς τον άξονα y) και των σημείων επί του κύκλου, κατά τρόπο ώστε οι συντεταγμένες ενός τυχόντος σημείου του κύκλου να είναι ίσες με την ορθή και διατμητική τάση επί του αντίστοιχου επιπέδου. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***κύκλος του Mohr*** και έχει και άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Μια από αυτές αφορά τον ***πόλο του κύκλου***, που ορίζεται ως εξής: αν από **τυχόν** σημείο του κύκλου φέρουμε ευθεία παράλληλη με το αντίστοιχο επίπεδο, η ευθεία αυτή ξανατέμνει τον κύκλο σε ένα **σταθερό** σημείο που ονομάζεται πόλος του κύκλου Mohr (σημείο Ο στο Σχήμα 3.7).

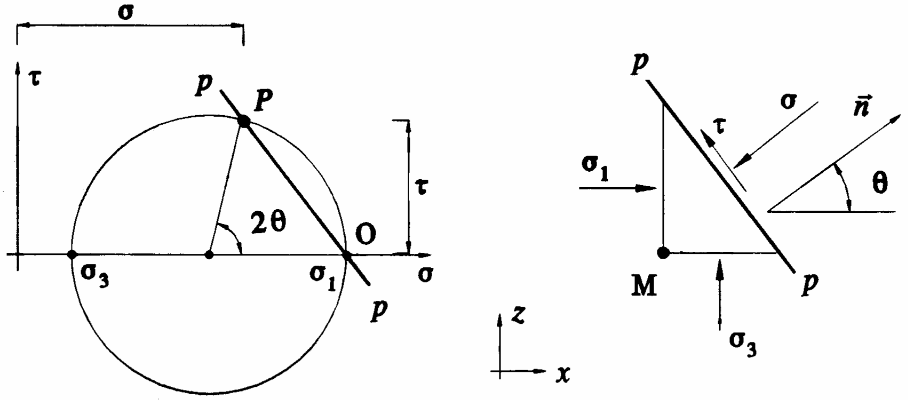
Ο προσδιορισμός του κυκλου Mohr και του πόλου του διευκολύνει σημαντικά τον υπολογισμό της ορθής και διατμητικής τάσης σε κάποιο επίπεδο: αρκεί, απλά, να φέρουμε από τον πόλο ευθεία παράλληλη προς το επίπεδο στο οποίο ζητούνται οι τάσεις, οπότε το σημείο που η ευθεία ξανατέμνει τον κύκλο έχει συντεταγμένες ίσες με την ορθή και διατμητική τάση στο επίπεδο αυτό. Τέλος, οι διευθύνσεις των κύριων επιπέδων είναι οι ευθείες που συνδέουν τον πόλο με τα άκρα της οριζόντιας διαμέτρου (δηλαδή με τα σημεία που αντιστοιχούν στα κύρια επίπεδα).

Ο κύκλος Mohr χρησιμοποιείται και σε άλλες εντατικές καταστάσεις εκτός της επίπεδης παραμόρφωσης (π.χ. επίπεδη ένταση, αξονοσυμμετρική ένταση κλπ).

3.4 Τάσεις στο Εσωτερικό Ασυνεχούς Μέσου

Το έδαφος είναι ένα ασυνεχές μέσον, που ως γνωστόν αποτελείται από ασύνδετους ή ελαφρά συνδεδεμένους κόκκους. Οι δυνάμεις που επιβάλλονται στο έδαφος μεταδίδονται στο εσωτερικό του με τους εξής μηχανισμούς:

1. Με τη μηχανική επαφή μεταξύ των κόκκων. Η επαφή μεταξύ δύο κόκκων μπορεί να μεταδόσει μία ορθή (θλιπτική) και μία διατμητική δύναμη, με σημείο εφαρμογής το σημείο επαφής των κόκκων. Η μηχανική επαφή αποτελεί τον κύριο τρόπο μετάδοσης δυνάμεων στο εσωτερικό των κοκκωδών (μή-συνεκτικών) εδαφών.
2. Στα συνεκτικά εδαφικά υλικά, δυνάμεις μεταδίδονται και με τους εξής τρόπους:
   (α) Με την ηλεκτρική άπωση των διπλών στρώσεων.
   (β) Με την ηλεκτρική έλξη μεταξύ ετερωνύμως φορτισμένων σημείων των αργιλικών πλακιδίων (αρνητικά φορτισμένη πλευρική επιφάνεια προς θετικά



Σχ. 3.7: Ο κύκλος του Mohr

φορτισμένο σύνορο).

(γ) Με τις ηλεκτροχημικές δυνάμεις Van der Waals καθώς και άλλες δυνάμεις (έλξη κατά Bohr κλπ.).

Το σύνολο των ανωτέρω διακριτών (ασυνεχώς κατανεμημένων) δυνάμεων, παρά την πρόσθετη πολυπλοκότητα, μπορεί να καταλήξει στον ορισμό τάσεων ανάλογων με τις τάσεις στο εσωτερικό των συνεχών μέσων με το εξής σκεπτικό:

Ας θεωρηθεί στο εσωτερικό του εδάφους ένα σημείο Μ και μία "μικρή" επίπεδη επιφάνεια ΔS, που διέρχεται απ' αυτό. Η επιφάνεια αυτή θα πρέπει να είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την τυπική διάσταση της γεωμετρίας του προβλήματος (π.χ. το πλάτος του θεμελίου, το βάθος του σημείου από την επιφάνεια κλπ.) αλλά και ταυτόχρονα αρκετά μεγάλη ως προς το τυπικό μέγεθος του κόκκου του εδάφους. Κατά συνέπεια, η επιφάνεια αυτή θα τέμνει ικανό αριθμό κόκκων, θα διέρχεται από τα σημεία επαφής ικανού αριθμού κόκκων, καθώς επίσης θα περιέχει και σημαντική επιφάνεια κενού χώρου (πληρωμένου με νερό ή/και αέρα). Ας θεωρηθούν τώρα τα δύο τμήματα στα οποία η επιφάνεια ΔS χωρίζει το έδαφος και οι δυνάμεις (ορθές και διατμητικές) που το ένα τμήμα ασκεί στο άλλο. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών είναι ένα διάνυσμα $\Delta\vec{F}$. Μπορεί να θεωρηθεί ότι, επειδή η επιφάνεια ΔS είναι αρκετά μεγάλη ως προς το μέγεθος του κόκκου, η συνάρτηση $\Delta\vec{F}$ είναι συνεχής ως προς τις συντεταγμένες x, y, z. Κατά συνέπεια, ορίζεται και το όριο:

$$\vec{f} = \lim \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} \qquad (\Delta S \to 0)$$

που δίνει την ανηγμένη δύναμη $\vec{f}$ κατά τρόπο ανάλογο με τα συνεχή μέσα, με την παρατήρηση ότι το ανωτέρω όριο υπολογίζεται για τιμές της επιφάνειας ΔS αρκετά μεγάλες ως προς το μέγεθος των κόκκων του εδάφους. Στη συνέχεια, ο ορισμός του τανυστή της τάσης σ, καθώς και των ορθών και διατμητικών τάσεων σε οποιοδήποτε επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Μ, μπορεί να γίνει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που αναφέρθηκε στο εδάφιο 3.2 (για τα συνεχή υλικά). Ετσι, στα εδαφικά υλικά, όταν λέμε *τάση*, εννοούμε τη μακροσκοπική τάση, δηλαδή τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας αρκετά μεγάλης σε σχέση με το μέγεθος του κόκκου. Είναι προφανές ότι οι πραγματικές τάσεις που ασκούνται στα σημεία επαφής μεταξύ των κόκκων είναι πολύ μεγαλύτερες από τις μακροσκοπικές τάσεις που υπολογίζουμε στην Εδαφομηχανική, δεδομένου ότι οι πραγματικές τάσεις είναι δυνάμεις ανηγμένες στην πραγματική επιφάνεια επαφής μεταξύ των κόκκων, ενώ οι μακροσκοπικές τάσεις είναι δυνάμεις ανηγμένες στο σύνολο της επιφάνειας. Το πλεονέκτημα στη χρήση των μακροσκοπικών τάσεων οφείλεται στο γεγονός ότι η πραγματική επιφάνεια επαφής μεταξύ των κόκκων δεν είναι γνωστή και, έτσι, δεν είναι δυνατός ο ακριβής υπολογισμός των πραγματικών τάσεων.

3.5 Η Έννοια της Ενεργού Τάσης

Στο προηγούμενο εδάφιο ορίσθηκε η δύναμη $\Delta\vec{F}$ που ασκείται σε μία "μικρή" επιφάνεια ΔS, η οποία διέρχεται από τα σημεία επαφής μεταξύ των κόκκων και από κενό χώρο (πόρους). Η δύναμη αυτή μπορεί να γραφεί σαν:

$$\Delta\vec{F} = \Delta F_n \cdot \vec{n} + \Delta T \cdot \vec{t}$$

όπου $\vec{n}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια και $\vec{t}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στην επιφάνεια, οπότε ΔF_n είναι η ορθή συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στην επιφάνεια ΔS και ΔT είναι η αντίστοιχη διατμητική συνιστώσα. Οι δυνάμεις αυτές μεταδίδονται αφενός μέσω των επαφών των κόκκων και αφετέρου με δυνάμεις που ασκούνται στο χώρο που καταλαμβάνεται από τους πόρους. Είναι γνωστό, όμως, ότι η μόνη δύναμη που μπορεί να ασκηθεί στο χώρο που καταλαμβάνεται από τους πόρους είναι η πίεση του νερού των πόρων, επειδή:

1. η ατμοσφαιρική πίεση του αέρα των πόρων θεωρείται σαν η πίεση αναφοράς (δηλαδή μηδέν) και
2. τα υγρά σε ηρεμία δεν αναλαμβάνουν διατμητικές τάσεις.

Έτσι, αν τεθεί:

$$\Delta S = \Delta S_s + \Delta S_v$$

όπου ΔS_s είναι το τμήμα της επιφάνειας ΔS που καταλαμβάνεται από τους κόκκους και ΔS_v το υπόλοιπο τμήμα που καταλαμβάνεται από τα κενά, τότε:

$$\sigma \cdot \Delta S = \Delta F_n = \sigma_s \cdot \Delta S_s + u \cdot \Delta S_v \tag{3.5α}$$

$$\tau \cdot \Delta S = \Delta T = \tau_s \cdot \Delta S_s \tag{3.5β}$$

όπου σ_s είναι η πραγματική ορθή τάση στην επαφή μεταξύ των κόκκων, u η πίεση του νερού των πόρων, σ η μακροσκοπική ορθή τάση, τ η μακροσκοπική διατμητική τάση και τ_s η πραγματική διατμητική τάση στην επαφή μεταξύ των κόκκων.

Οι σχέσεις (3.5) δίνουν:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_s \cdot \left(\frac{\Delta S_s}{\Delta S}\right) + u \cdot \left(1 - \frac{\Delta S_s}{\Delta S}\right) \\ \tau &= \tau_s \cdot \left(\frac{\Delta S_s}{\Delta S}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ο λόγος $\Delta S_s / \Delta S$ είναι γενικά πολύ μικρός, επειδή μικρό μόνο ποσοστό του συνολικού χώρου των πόρων καταλαμβάνεται από τις επαφές των κόκκων. Αντίθετα, οι τάσεις σ_s, τ_s είναι πολύ μεγάλες, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Έτσι, μπορεί να θεωρηθεί ότι:

$$\frac{\Delta S_s}{\Delta S} \approx 0 \qquad \sigma_s \cdot \left(\frac{\Delta S_s}{\Delta S}\right) \equiv \sigma' \qquad \tau_s \cdot \left(\frac{\Delta S_s}{\Delta S}\right) \equiv \tau'$$

οπότε οι σχέσεις (3.6) δίνουν:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma' + u \\ \tau &= \tau' \end{aligned} \tag{3.7}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις δηλώνει ότι η ολική μακροσκοπική ορθή τάση ισούται με το άθροισμα της πίεσης του νερού των πόρων (u) και ενός άλλου όρου (σ'), ο οποίος καλείται ***ενεργός τάση*** και εκφράζει την ορθή δύναμη που μεταφέρεται μεταξύ των επαφών των κόκκων ($\sigma_s \cdot \Delta S_s$), ανηγμένη στη συνολική επιφάνεια του εδάφους (ΔS). Η δεύτερη σχέση δείχνει ότι η μακροσκοπική διατμητική τάση ισούται με τη διατμητική τάση που μεταφέρεται μεταξύ των επαφών των κόκκων, δηλαδή ότι η ολική διατμητική τάση ισούται με την ενεργό (επειδή το νερό των πόρων δεν μπορεί να αναλάβει διατμητικές τάσεις).

Η σχέση $\sigma = \sigma' + u$ διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον K. Terzaghi περί το 1920 και αποτέλεσε την αρχή της εξέλιξης της μοντέρνας Εδαφομηχανικής. Η ενεργός τάση (σ'), όπως αναφέρθηκε παραπάνω, έχει κάποιο φυσικό νόημα (είναι η ορθή δύναμη που μεταφέρεται μεταξύ των επαφών των κόκκων, ανηγμένη στη συνολική επιφάνεια του εδάφους), κυρίως όμως, είναι ένα παράγωγο μέγεθος που προκύπτει από τη διαφορά μεταξύ δύο εύκολα μετρήσιμων μεγεθών: της ολικής τάσης (σ) και της πίεσης των πόρων (u). Στο επόμενο εδάφιο δίνονται μερικά παραδείγματα υπολογισμού των ολικών και ενεργών τάσεων σε εδαφικούς σχηματισμούς.

3.6 Γεωστατικές Τάσεις

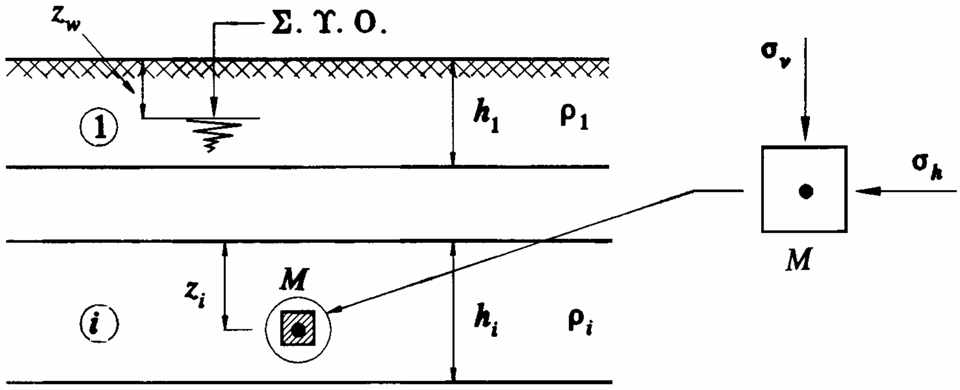
Ένα εδαφικό στοιχείο (σημείο) σε κάποιο βάθος κάτω από την επιφάνεια του εδάφους υπόκειται σε ένταση από τα γειτονικά του στοιχεία. Σε μια τυχούσα επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο αναπτύσσονται γενικά ορθές και διατμητικές τάσεις, τα μεγέθη των οποίων στις περισσότερες περιπτώσεις είναι δύσκολο να προσδιορισθούν χωρίς απλοποιητικές παραδοχές και αναλυτικούς υπολογισμούς. Σε μερικές όμως περιπτώσεις, ορισμένες συνιστώσες των τάσεων που αναπτύσσονται στο έδαφος μπορούν να υπολογισθούν με τη θεώρηση **μόνο** της στερεοστατικής ισορροπίας. Μια τέτοια περίπτωση είναι η ***γεωστατική*** κατάσταση που αναφέρεται σε έδαφος με οριζόντια επιφάνεια μεγάλης έκτασης και μια ή περισσότερες οριζόντιες στρώσεις (Σχήμα 3.8). Η περίπτωση αυτή είναι αρκετά συνήθης, λόγω της ιζηματογενούς φύσης των εδαφικών σχηματισμών που τείνει να δημιουργεί οριζόντια και ισοπαχή στρώματα (ενώ κεκλιμένα στρώματα και πρανή δημιουργούνται εκ των υστέρων λόγω των ισχυρών τεκτονικών κινήσεων του φλοιού της γης και της διάβρωσης). Αν, επιπλέον, σημειωθεί ότι οι οριζόντιες εδαφικές στρώσεις, σαν οι γεωλογικά πιο πρόσφατες, είναι ιδιαίτερα συμπιεστές, συνήθως έχουν τις μικρότερες αντοχές και συνεπώς παρουσιάζουν τα περισσότερα γεωτεχνικά προβλήματα, τότε καθίσταται σαφής η ιδιαίτερη σημασία του υπολογισμού των τάσεων στη γεωστατική κατάσταση.

Στη γεωστατική κατάσταση, λόγω συμμετρίας, δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις σε οριζόντια και κατακόρυφα επίπεδα, και κατά συνέπεια τα επίπεδα αυτά είναι κύρια επίπεδα. Επιπλέον, η ολική ορθή (κατακόρυφη) τάση που ασκείται στο οριζόντιο επίπεδο ισούται με το ανηγμένο βάρος των υπερκείμενων γαιών (λόγω της στερεοστατικής ισορροπίας στην κατακόρυφη διεύθυνση), δηλαδή:

$$\sigma_v = \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j g h_j + \rho_i g z_i \tag{3.8}$$

ή γενικά: $\sigma_v = \sum \rho g h$, οπότε μπορεί εύκολα να προσδιορισθεί, αν είναι γνωστή η γεωμετρία και οι πυκνότητες των υπερκείμενων εδαφικών στρώσεων.

Στα περισσότερα εδάφη, σε κάποιο βάθος κάτω από την επιφάνεια απαντάται ο υπόγειος φρεάτιος ορίζοντας. Τούτο σημαίνει ότι, αν εκσκαφεί ένα φρέαρ, στο εσωτερικό του θα συγκεντρωθεί νερό και θα δημουργηθεί μια στάθμη ηρεμίας, που λέγεται "Στάθμη του Υπόγειου Ορίζοντα" (Σ.Υ.Ο.). Τις περισσότερες φορές το υπόγειο νερό βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας (δηλαδή δεν υπάρχει κίνηση-ροή), αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις (π.χ. αρτεσιανές συνθήκες) υπάρχει μόνιμη ή ακόμα και μή-μόνιμη ροή. Στις περιπτώσεις που ο φρεάτιος ορίζοντας βρίσκεται σε ηρεμία, οι υδατικές πιέσεις και κατά συνέπεια οι πιέσεις του ύδατος των πόρων είναι



Σχ. 3.8: Γεωστατικές συνθήκες

υδροστατικές. Έτσι, η υδατική πίεση στο σημείο Μ (βλέπε Σχήμα 3.8) είναι:

$$u = \rho_w g \left(\sum_{j=1}^{i-1} h_j + z_i - z_w \right) \qquad (3.9)$$

Στη συνέχεια, η ενεργός κατακόρυφη τάση (σ'_v) μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση:

$$\sigma'_v = \sigma_v - u$$

και είναι:

$$\sigma'_v = \sum_{j=1}^{i-1} (\rho_j - \rho_w) g\, h_j + (\rho_i - \rho_w) g\, z_i + \rho_w g\, z_w$$

ή:

$$\sigma'_v = \sum_{j=1}^{k} \rho_j g\, h_j + \sum_{j=k+1}^{i} (\rho_j - \rho_w) g\, h_j \qquad (3.10)$$

όπου οι εδαφικές στρώσεις *1, 2, ..., k* βρίσκονται πάνω από τη Σ.Υ.Ο. και οι στρώσεις $(k+1), ..., i$ κάτω από τη Σ.Υ.Ο. Από τη σχέση 3.10 φαίνεται ότι η ενεργός τάση μπορεί να υπολογισθεί από ένα τύπο παρόμοιο με τον τύπο υπολογισμού της ολικής τάσης (σχέση 3.8), με μόνη διαφορά ότι για τα στρώματα που βρίσκονται κάτω από τη στάθμη του υπόγειου ορίζοντα χρησιμοποιείται η **υπό άνωση πυκνότητα** $(\rho - \rho_w)$ αντί της ολικής πυκνότητας (ρ).

Τέλος, αξίζει να τονισθεί ότι η (οριζόντια) ορθή τάση σε κατακόρυφο επίπεδο (σ_h) **δεν** μπορεί να υπολογισθεί μόνον από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας. Για τον υπολογισμό της θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι κινηματικοί περιορισμοί της φόρτισης (δηλαδή η μηδενική παραμόρφωση στην οριζόντια διεύθυνση) και ο καταστατικός νόμος συμπεριφοράς του εδάφους (σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων), όπως αναπτύσσεται λεπτομερώς σε επόμενο Κεφάλαιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 3.1

Στο εδαφικό προφίλ του Σχήματος 3.1-1, να υπολογισθούν οι κατανομές ως προς το βάθος της:

(α) Κατακόρυφης ολικής τάσης: σ_v

(β) Πίεσης πόρων (υδροστατική κατανομή): u

(γ) Κατακόρυφης ενεργού τάσης: σ'_v

(δ) Οριζόντιας ενεργού τάσης: σ'_h

(ε) Οριζόντιας ολικής τάσης: σ_h

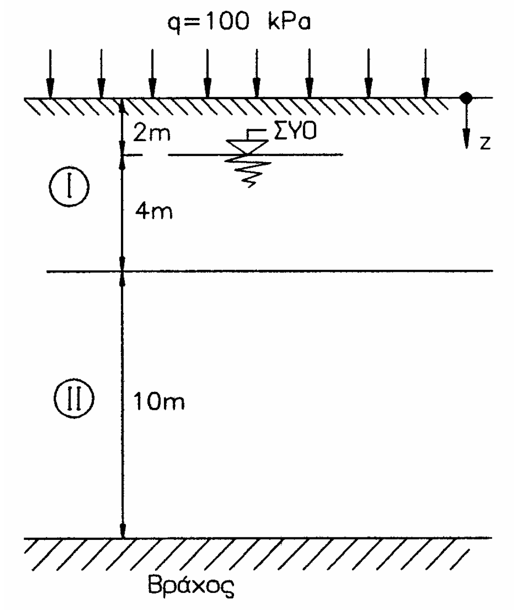
Δίδονται: Στρώμα Ι: $\rho = 1.8$ Mg/m^3

$\rho_{κορ} = 2.0$ Mg/m^3

$K_o = 0.40$.

Στρώμα ΙΙ: $\rho_{κορ} = 1.7$ Mg/m^3

$K_o = 0.50$.



Σχήμα 3.1-1: Παράδειγμα 3.1

Λύση:

Βάθος $z = 0$:

$\sigma_v = q = 100$ kPa

$u = 0$

$\sigma'_v = \sigma_v - u = 100$ kPa

$\sigma'_h = K_o\, \sigma'_v = 0.40 \times 100 = 40$ kPa

$\sigma_h = \sigma'_h + u = 40$ kPa

Βάθος $z = 2$ m:

$\sigma_v = 100 + 1.8 \times 10 \times 2 = 136$ kPa

$u = 0$

$\sigma'_v = 136$ kPa

$\sigma'_h = 0.40 \times 136 = 68$ kPa

$\sigma_h = 68$ kPa

Βάθος $z = 6^-$ m:

$\sigma_v = 136 + 2 \times 10 \times 4 = 216$ kPa

$u = 1 \times 10 \times 4 = 40$ kPa

$\sigma'_v = 216 - 40 = 176$ kPa

$\sigma'_h = 0.40 \times 176 = 70.4$ kPa

$\sigma_h = 70.4 + 40 = 110.4$ kPa

Βάθος $z = 6^+$ m:

$\sigma_v = 216$ kPa

$u = 40$ kPa

$\sigma'_v = 176$ kPa

$\sigma'_h = 0.50 \times 176 = 88$ kPa

$\sigma_h = 88 + 40 = 128$ kPa

Βάθος $z = 16$ m:

$\sigma_v = 216 + 1.7 \times 10 \times 10 = 386$ kPa

$u = 40 + 1 \times 10 \times 10 = 140$ kPa

$\sigma'_v = 386 - 140 = 246$ kPa

$\sigma'_h = 0.50 \times 246 = 123$ kPa

$\sigma_h = 123 + 140 = 263$ kPa

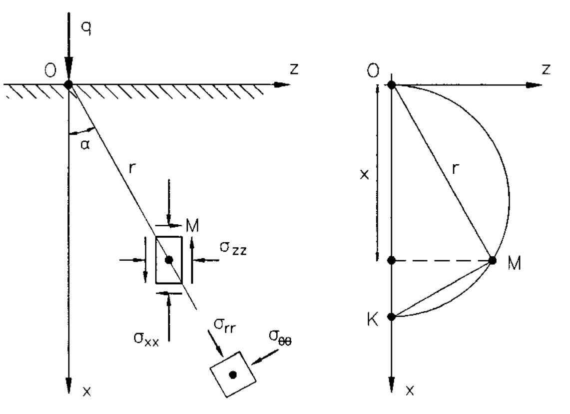
Από τις παραπάνω τιμές των εντατικών μεγεθών μπορούν να σχεδιασθούν οι κατανομές τους ως προς το βάθος.

Παράδειγμα 3.2

Κατά την επιβολή κατακόρυφης φόρτισης q (kN/m) σε απειρομήκη γραμμή κατά μήκος του άξονα y στην επιφάνεια γραμμικώς ελαστικού ημιχώρου, ισχύουν οι προϋποθέσεις της επίπεδης παραμόρφωσης. Οι αναπτυσσόμενες τάσεις σε κάποια θέση (x, z) δίνονται από τις σχέσεις (βλέπε και Σχήμα 3.2-1):

$$\sigma_{xx} = \frac{2q}{\pi}\frac{x^3}{r^4} \quad , \quad \sigma_{zz} = \frac{2q}{\pi}\frac{x\,z^2}{r^4} \quad , \quad \sigma_{xz} = \frac{2q}{\pi}\frac{x^2\,z}{r^4}$$

όπου: $r^2 = x^2 + z^2$.



Σχήμα 3.2-1: Παράδειγμα 3.2

Να προσδιορισθούν οι κύριες τάσεις κατά μέγεθος και διεύθυνση.

Λύση:

Οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων στο σημείο Μ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\tan 2\theta \;\; \frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} = \frac{2xz}{x^2 - z^2}$$

που δίνει τη γωνία θ μεταξύ του επιπέδου της μέγιστης κύριας τάσης (σ_1) και του επιπέδου στο οποίο ασκείται η σ_{xx} (οριζόντιο επίπεδο).

Από τη γεωμετρία όμως ισχύει: $\cos\alpha = x/r$, $\sin\alpha = z/r$. Συνεπώς:

$$\tan 2\theta = \frac{2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha$$

δηλαδή $\theta = \alpha$, που σημαίνει ότι οι κύριες διευθύνσεις ακολουθούν τη διεύθυνση της ακτίνας ΟΜ και την κάθετη σ' αυτήν.

Η μέγιστη κύρια τάση ($\sigma_{rr} = \sigma_1$) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{zz}\sin^2\theta + 2\sigma_{xz}\sin\theta\cos\theta \qquad (3.2\text{-}1)$$

όπου $\theta = \alpha$, οπότε:

$$\sigma_1 = \sigma_{rr} = \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{x^3}{r^4}\cdot\frac{x^2}{r^2} + \frac{x\,z^2}{r^4}\cdot\frac{z^2}{r^2} + 2\frac{x^2 z}{r^4}\cdot\frac{x}{r}\cdot\frac{z}{r}\right\}$$

δηλαδή:

$$\sigma_{rr} = \frac{2q}{\pi}\frac{x}{r^2} \qquad (3.2\text{-}2)$$

Η ελάχιστη κύρια τάση ($\sigma_{\theta\theta}$) δίνεται επίσης από τη σχέση (3.2-1) για $\theta = \alpha + \pi/2$, οπότε προκύπτει ότι $\sigma_3 = \sigma_{\theta\theta} = 0$.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με σταθερή τιμή της $\sigma_{rr} = \sigma_o$ είναι κύκλος με διάμετρο (ΟΚ) = $2q$ / (π σ_o). Πράγματι, από τα όμοια τρίγωνα: (ΟΚ) = r^2 / x, και συνεπώς, η σχέση (3.2-2) δίνει:

$$\sigma_{rr} = \frac{2q}{\pi}\frac{1}{(OK)} = \sigma_o$$