

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

« ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΙΣ »

7ο ΕΞ. ΠΟΛ-ΜΗΧ. ΕΜΠ - Ακαδ. Έτος 2005 - 06

ΔΙΑΛΕΞΗ 7

Πεδιλοδοκοί και Κοιτοστρώσεις

20.12.2006

Πεδιλοδοκοί και Κοιτοστρώσεις

Η θεμελίωση μπορεί να γίνει με πεδιλοδοκούς ή κοιτόστρωση στις περιπτώσεις όπου είναι επιθυμητή :

1. Η μείωση των διαφορικών καθιζήσεων μεταξύ γειτονικών πεδίων, είτε λόγω πολύ διαφορετικών φορτίων είτε λόγω διαφορετικών (ή αβέβαιων) εδαφικών συνθηκών
2. Η μείωση της ακραίας πίεσης έδρασης των πεδίων στο έδαφος (π.χ. σε περιπτώσεις φορτίων μεγάλης εκκεντρότητας ή μεγάλων ροπών, όπως στην περίπτωση μεγάλων σεισμικών φορτίων)
3. Η μείωση της οριζόντιας δύναμης που κάποιο πέδιλο μεταφέρει στο έδαφος (π.χ. για την αποτροπή ολισθήσεως του πεδίου)
4. Γενικότερα, όπου είναι επιθυμητή η βελτίωση της συνεργασίας μεταξύ των πεδίων

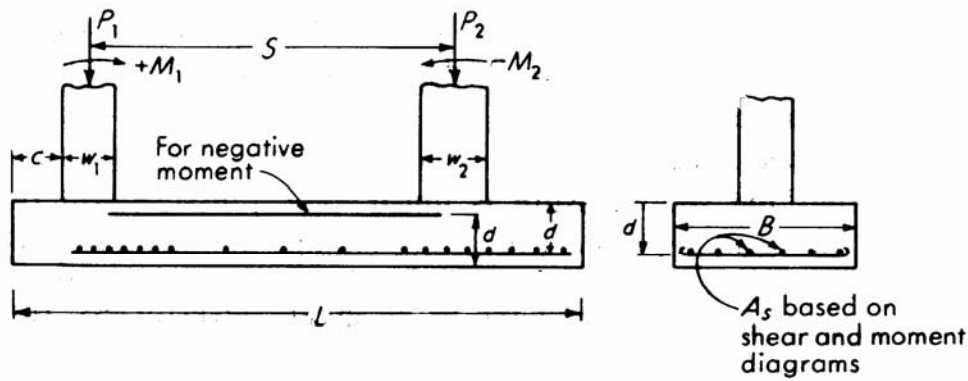
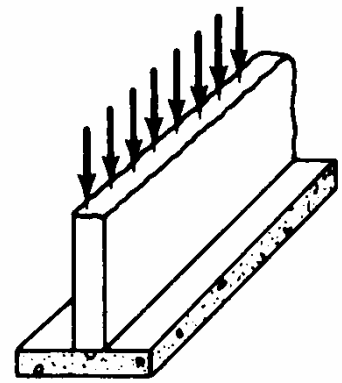
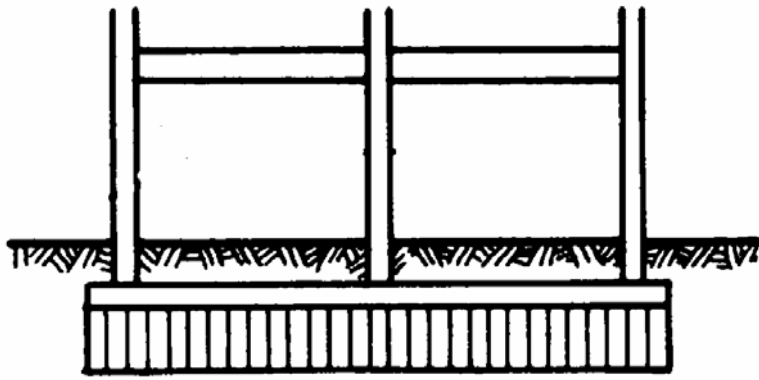
ή όταν :

- το ποσοστό κάλυψης των πεδίων είναι σημαντικό ποσοστό της επιφάνειας βάσης της κατασκευής (π.χ. > 50%),
- η αναμενόμενη συνολική καθίζηση των πεδίων είναι αρκετά μεγάλη (οπότε και η διαφορική καθίζηση μπορεί να είναι υψηλή)
- η κατασκευή είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη σε διαφορικές καθιζήσεις ή μεταφέρει σημαντικές ροπές στη θεμελίωση

Βεβαίως, η βαθιά θεμελίωση – με πασσάλους – αποτελεί μια άλλη εναλλακτική λύση

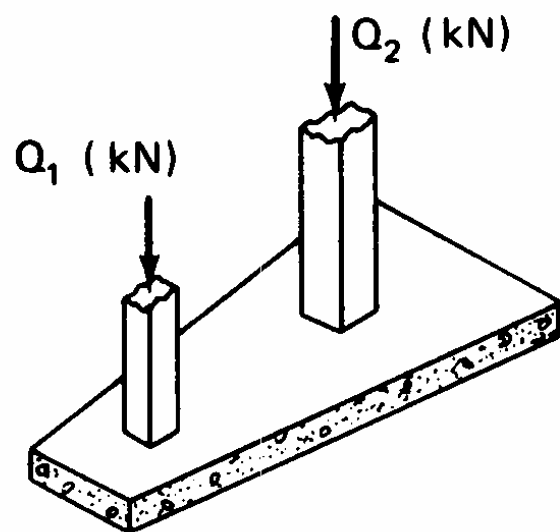
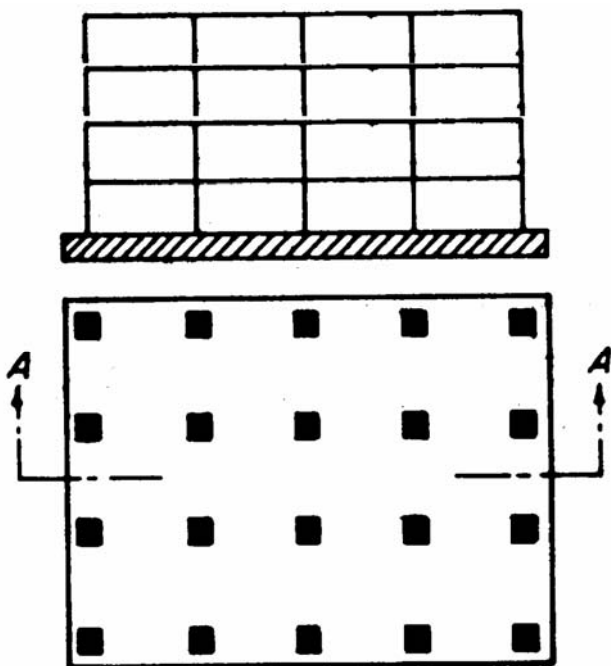
Πεδιλοδοκοί

Q (kN per m of length)



Σημαντικά μειωμένες τάσεις έδρασης και σημαντικά μειωμένες διαφορικές καθιζήσεις μεταξύ των στύλων σε σύγκριση με τα μεμονωμένα πέλδια

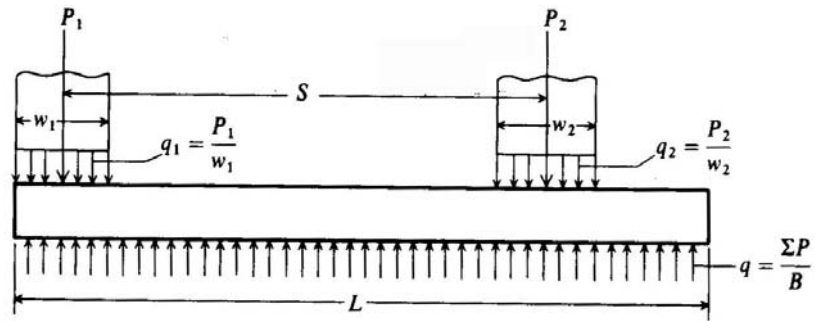
Κοιποστρώσεις



Σημαντικά μειωμένες τάσεις έδρασης και σημαντικά μειωμένες διαφορικές καθιζήσεις μεταξύ των στύλων, σε σύγκριση με τα μεμονωμένα πέλδια και τις πεδιλοδοκούς

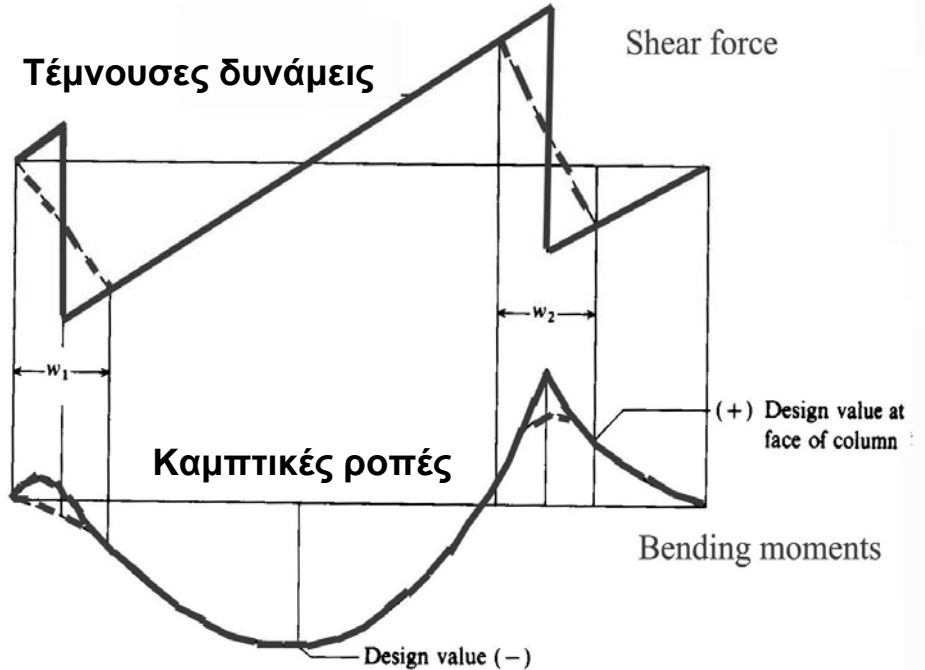
1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδילוδοκούς

Σχηματικό διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών κατά μήκος της πεδילוδοκού



Παραδοχές για την κατανομή της εδαφικής πίεσης (q) κατά το μήκος της πεδילוδοκού :

- Άκαμπτες πεδילוδοκοί : Γραμμική κατανομή
- Σχετικώς εύκαμπτες : Κατανομή που ακολουθεί τη μορφή της παραμόρφωσης της πεδילוδοκού



1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδילוδοκούς

1.1 Παραδοχή γραμμικής κατανομής των εδαφικών πιέσεων στη βάση

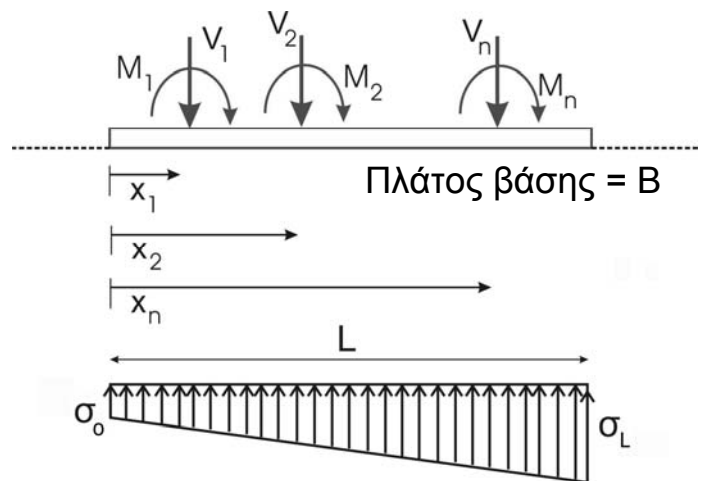
Ισχύει σε άκαμπτες πεδילוδοκούς

Συνιστάμενη κατακόρυφη δύναμη :

$$V = \sum_i V_i + \int_0^L q(x) dx$$

Συνιστάμενη ροπή ως προς την αρχή (x=0) :

$$M_o = \sum_i M_i + \sum_i V_i x_i + \int_0^L q(x) x dx$$

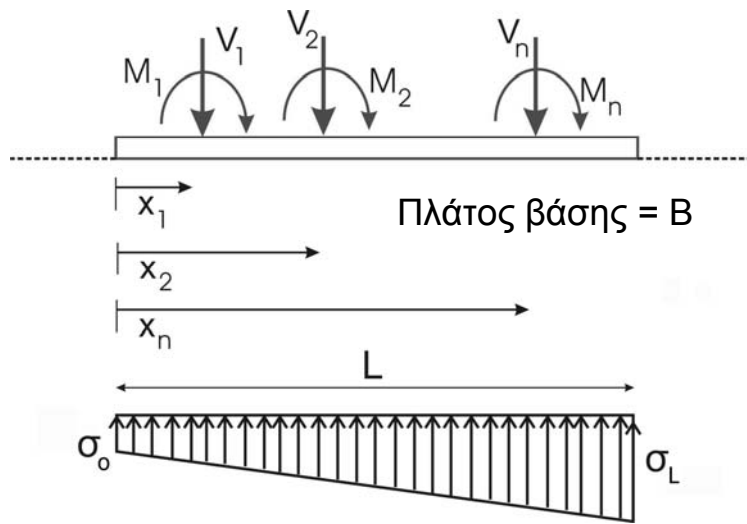


1. Ισοροπία κατακόρυφων δυνάμεων και ροπών :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_o + \sigma_L)BL &= V \\ \sigma_o BL \frac{L}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_L - \sigma_o)BL \left(\frac{2}{3}L\right) &= M_o \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sigma_L &= \frac{2}{BL} \left(\frac{3M_o}{L} - V \right) \\ \sigma_o &= \frac{2}{BL} \left(2V - \frac{3M_o}{L} \right) \end{aligned}$$

1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδילוδοκούς

1.1 Με παραδοχή γραμμικής κατανομής των εδαφικών πιέσεων στη βάση



$$\sigma_L = \frac{2}{BL} \left(\frac{3M_o}{L} - V \right)$$

$$\sigma_o = \frac{2}{BL} \left(2V - \frac{3M_o}{L} \right)$$

2. Υπολογισμός διαγράμματος καμπτικών ροπών κατά μήκος της δοκού

Μπορεί να γίνει με επίλυση της δοκού υπό τα (γνωστά) επιβεβλημένα φορτία και τις ανωτέρω εδαφικές αντιδράσεις (σ_L, σ_o)

Παρατήρηση : Η παραδοχή γραμμικής κατανομής των εδαφικών πιέσεων αντιστοιχεί στην παραδοχή τελείως άκαμπτης πεδילוδοκού. Συνεπώς, η ακρίβεια της παραδοχής αυξάνει για πλέον άκαμπτες πεδילוδοκούς.

Ακαμψία πεδילוδοκού : Μεγάλη ροπή αδρανείας (I), μικρό μήκος (L), μαλακό έδαφος

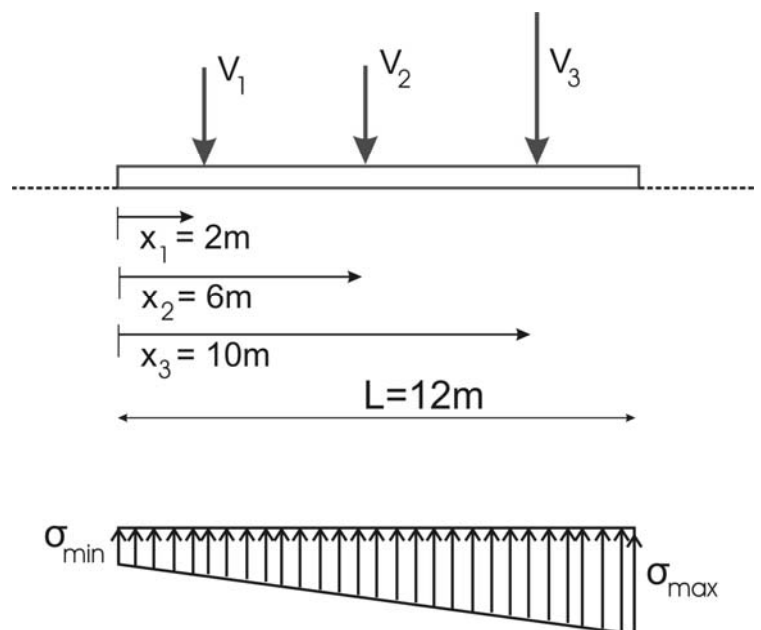
Παράδειγμα εφαρμογής :

Επίλυση πεδילוδοκού με παραδοχή γραμμικής κατανομής των τάσεων στο έδαφος

Πεδילוδοκός :
πλάτος : $B = 1.20\text{m}$
μήκος : $L = 12\text{m}$

Έδαφος :
δεν ενδιαφέρει στην επίλυση αυτή

Φορτία : $V_1 = V_2 = 400\text{ kN}$, $V_3 = 640\text{ kN}$



Γραμμική κατανομή των τάσεων στο έδαφος

Παράδειγμα εφαρμογής :

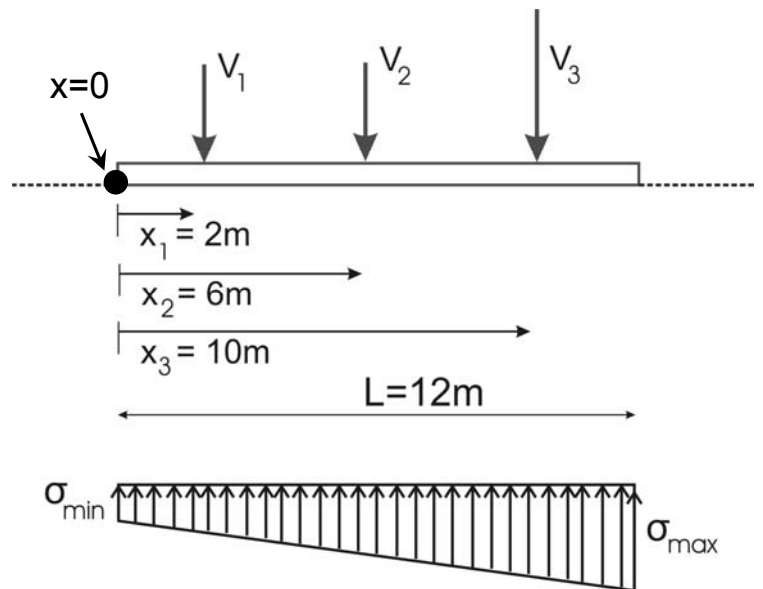
Επίλυση πεδλιοδοκού με παραδοχή γραμμικής κατνομής των τάσεων στο έδαφος

Συνιστάμενη κατακόρυφη δύναμη : $V = \sum_i V_i = 1440 \text{ kN}$

Συνιστάμενη ροπή ως προς $x=0$: $M_o = \sum_i V_i x_i = 9600 \text{ kNm}$

$$\sigma_{\max} = \frac{2}{BL} \left(\frac{3M_o}{L} - V \right) = 133 \text{ kN/m}^2$$

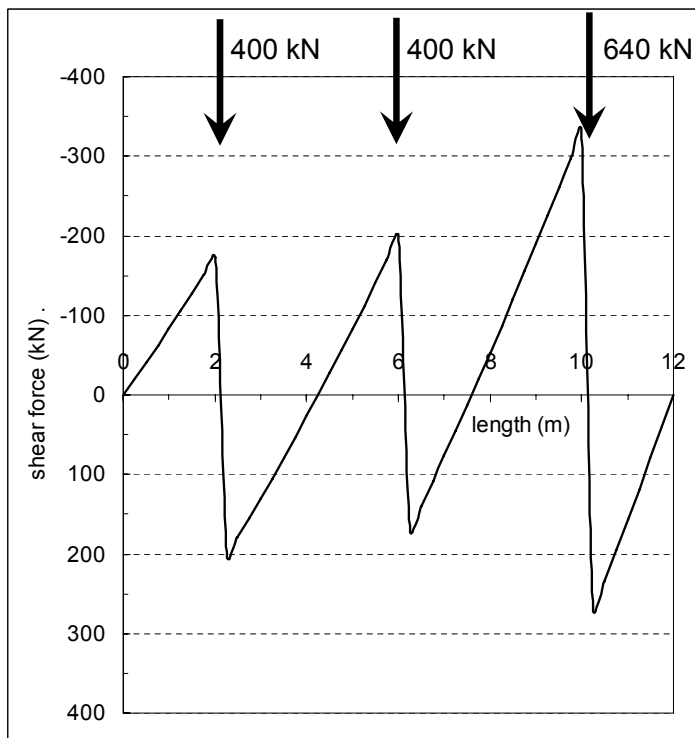
$$\sigma_{\min} = \frac{2}{BL} \left(2V - \frac{3M_o}{L} \right) = 67 \text{ kN/m}^2$$



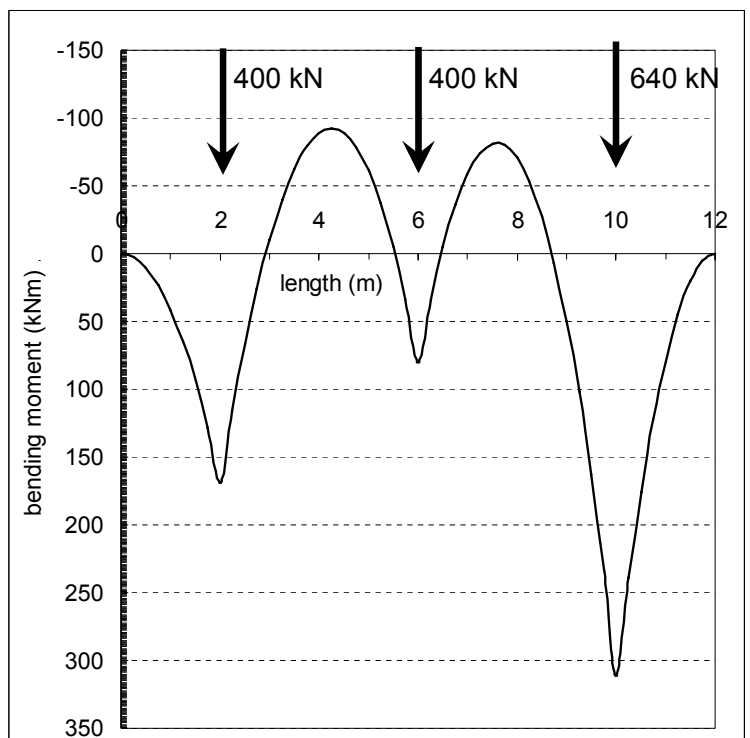
Παράδειγμα εφαρμογής :

Επίλυση πεδλιοδοκού με παραδοχή γραμμικής κατνομής των τάσεων στο έδαφος

Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων



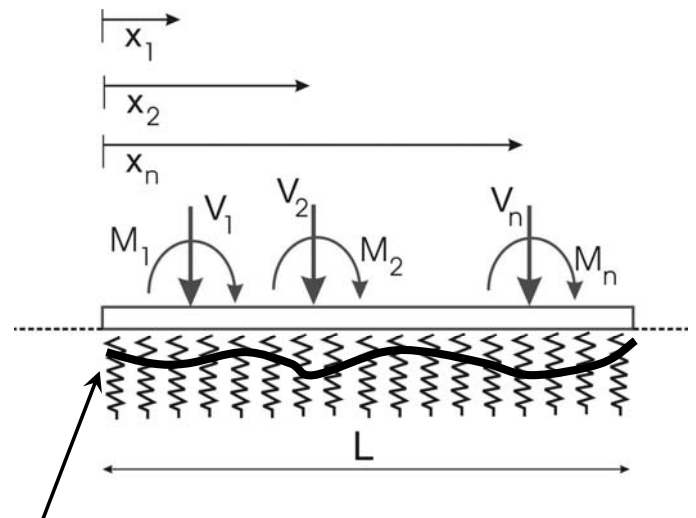
Διάγραμμα καμπτικών ροπών



1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδילוδοκούς

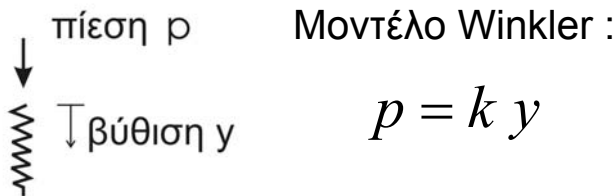
1.2 Με παραδοχή ανάπτυξης εδαφικών πιέσεων κατά το μοντέλο Winkler

Σε σχετικώς εύκαμπτες πεδילוδοκούς, η παραδοχή γραμμικής κατανομής των τάσεων στη βάση της δοκού δεν είναι επαρκώς ακριβής. Στις περιπτώσεις αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατανομή τάσεων συμβατή με το μοντέλο Winkler



Διάγραμμα βυθίσεων (y) και εδαφικών πιέσεων (p) κάτω από την πεδילוδοκό

Το διάγραμμα των εδαφικών αντιδράσεων (p) είναι ανάλογο των βυθίσεων (y), επειδή : $p = k y$



p = εδαφική αντίδραση (kPa)

y = βύθιση της δοκού (m)

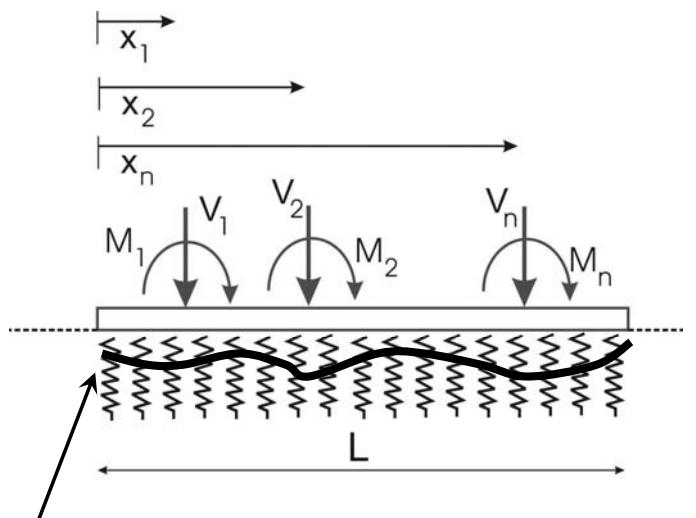
k = σταθερά ελατηρίου Winkler (kN/m^3)
ή Δείκτης Εδάφους

1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδילוδοκούς

1.2 Με παραδοχή ανάπτυξης εδαφικών πιέσεων κατά το μοντέλο Winkler

Μοντέλο Winkler : $p = k y$

ΠΡΟΣΟΧΗ : Ο δείκτης εδάφους “ k ” ΔΕΝ είναι ιδιότητα του εδάφους. Εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του εδάφους (μέτρο ελαστικότητας E , λόγος Poisson ν) και της πεδילוδοκού (μήκος και δυσκαμψία) ή του πεδίλου (πλάτος και μήκος)



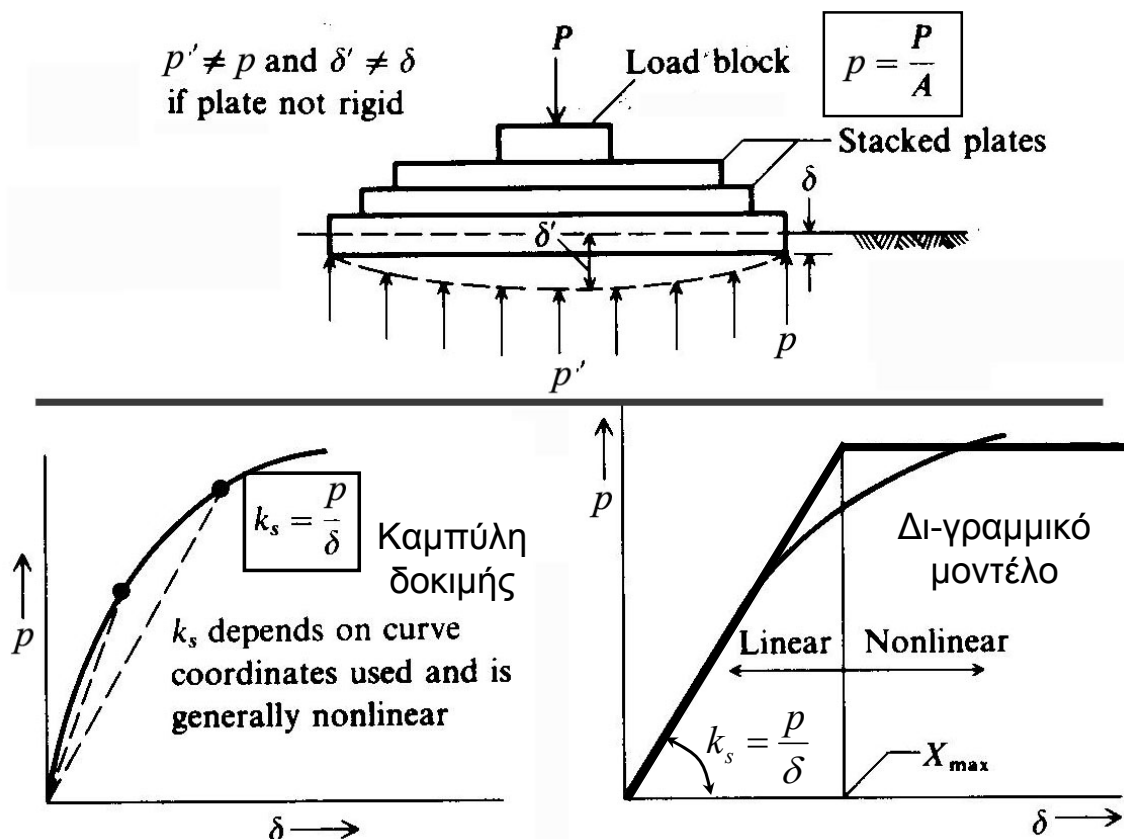
Διάγραμμα βυθίσεων (y) και εδαφικών πιέσεων (p) κάτω από την πεδילוδοκό

Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k ή k_s (δείκτης Winkler)

1. Μέτρηση του (k_s) από δοκιμή φόρτισης πλάκας :

$$k_s = \frac{p}{\delta} = \frac{P}{A\delta}$$

k_s = δείκτης εδάφους για τη συγκεκριμένη πλάκα της δοκιμής



Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k (δείκτης Winkler)

2. Εκτίμηση του k μέσω εμπειρικών σχέσεων :

2.1 Μή-συνεκτικά (αμμώδη) εδάφη :

Προτεινόμενες τιμές του δείκτη εδάφους k (σε MN/m^3) κατά Terzaghi (για τετραγωνική ή κυκλική πλάκα εύρους $B_0 = 0.305\text{m}$) :

Σχετική πυκνότητα άμμου :	Χαλαρή	Μέσης πυκνότητας	Πυκνή
Τιμές της σχετικής πυκνότητας (D_r)	< 50 %	50-75%	> 75%
Εύρος τιμών k (MN/m^3) ξηρής ή υγρής άμμου	6.4 – 19.2	19.2 - 96	96 - 320
Προτεινόμενες τιμές k ξηρής ή υγρής άμμου	13 MN/m^3	42 MN/m^3	160 MN/m^3
Προτεινόμενες τιμές k άμμου κάτω από τον υδροφόρο ορίζοντα	8 MN/m^3	26 MN/m^3	96 MN/m^3

Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k ή k_s (δείκτης Winkler)

2.2 Συνεκτικά εδάφη (αργίλοι) : Αξιοποίηση των σχέσεων «ελαστικής μορφής»

για άκαμπτα πέδιλα στην επιφάνεια του εδάφους ($D=0 \Rightarrow I_D=1$)

$$\rho_i = q B \frac{1-\nu^2}{E} I_s$$

Οπότε :

$$k_s = \frac{q}{\rho_i} = \frac{1}{(1-\nu^2) I_s} \frac{E}{B}$$

Σχέσεις Steinbrenner :

Για κυκλικό πέδιλο : $I_s = 0.79$

Για τετραγωνικό πέδιλο : $I_s \approx 1$

Για λωρίδα ($L/B=\infty$) : $I_s \approx 2$

k_s = δείκτης εδάφους για το συγκεκριμένο πέδιλο εύρους (B)

Οι ελαστικές σχέσεις έχουν καλύτερη εφαρμογή στις περιπτώσεις αστράγγιστης φόρτισης συνεκτικών (αργιλικών) εδαφών ($\nu=0.5$, $E = E_u$), οπότε για κυκλική πλάκα διαμέτρου $B_o = 0.305\text{m}$ (1 πόδι), ο δείκτης εδάφους k_s είναι :

Είδος Αργίλου	c_u (kPa)	E_u / c_u	E_u (MPa)	k_s (MN/m ³)
Πολύ μαλακή	< 12.5	400	< 5	< 25
Μαλακή	12.5 – 25	400	5 – 10	25 – 50
Συνεκτική	25 – 50	350	10 – 17.5	50 – 100
Στιφρή	50 -100	300	17.5 – 30	100 - 165
Πολύ στιφρή	100 – 200	200	30 – 40	165 – 220
Σκληρή	> 200	150	> 35	> 200

Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k ή k_s (δείκτης Winkler)

3. Εκτίμηση του “ k ” για πέδιλα διαφόρων διαστάσεων, με βάση τη μετρηθείσα τιμή k_o :

3.1 Συνεκτικά (αργιλικά) εδάφη :

Από τις σχέσεις «ελαστικής μορφής» προκύπτει ότι εάν στη δοκιμή φόρτισης πλάκας (με πλάκα διαστάσεως B_o) μετρηθεί δείκτης εδάφους $k_s = k_o = q_o / \rho_o$ (όπου q_o = πίεση πλάκας, ρ_o = καθίζηση πλάκας) τότε, ο δείκτης εδάφους για τετραγωνικό πέδιλο εύρους « B » είναι :

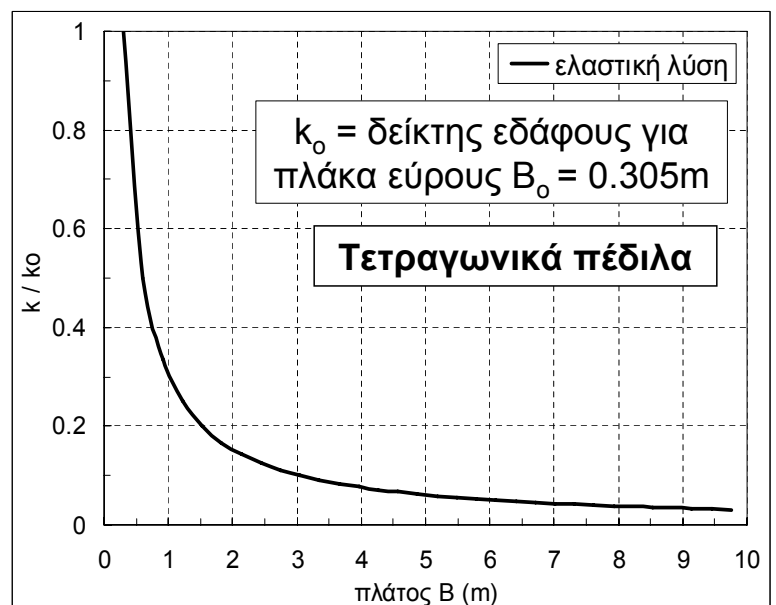
$$k = k_o \frac{B_o}{B}$$

Παρατήρηση : Ο δείκτης εδάφους δεν είναι σταθερή παράμετρος του εδάφους αλλά εξαρτάται από τις διαστάσεις του πεδίου (με την παραδοχή γραμμικής ελαστικότητας). Συγκεκριμένα, ο δείκτης k μειώνεται σημαντικά με την αύξηση του B .

Για ορθογωνικά πέδιλα ($L=\text{μήκος} > B$):

$$k = k_o \frac{B_o}{B} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{B}{L} \right)$$

Για λωρίδα ($L=\infty$) : $k = \frac{2}{3} k_o \frac{B_o}{B}$



Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k (δείκτης Winkler)

3.2 Μή-συνεκτικά (αμμώδη) εδάφη :

Με αξιοποίηση των σχέσεων υπολογισμού της καθίζησης άκαμπτων πεδίων :

Δείκτης εδάφους : $k_s = q / \rho_i$

2.1 Μέθοδος υπολογισμού της καθίζησης πεδίου εύρους B κατά Alpan :

$$\rho_i = 0.0254 \alpha_o \left(\frac{L}{B} \right)^{0.39} \left(\frac{2B}{0.305 + B} \right)^2 q$$

$$\text{οπότε : } k = \frac{9.84}{\alpha_o \left(L/B \right)^{0.39}} \left(\frac{B + 0.305m}{B} \right)^2$$

2.2 Μέθοδος υπολογισμού της καθίζησης τετραγωνικού πεδίου εύρους B κατά Terzaghi & Peck :

$$\rho_i = 0.3 \frac{q}{N} \left(\frac{B}{B + 0.305} \right)^2$$

$$\text{οπότε : } k = \frac{N}{0.3} \left(\frac{B + 0.305m}{B} \right)^2$$

Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k (δείκτης Winkler)

3.2 Μή-συνεκτικά (αμμώδη) εδάφη (συνέχεια) :

Αναγωγή σε πέδιλα διαφόρων διαστάσεων :

Εκτίμηση του k για τετραγωνικά πέδιλα εύρους B :

Εάν κατά την δοκιμή φόρτισης πλάκας (διαστάσεως $B_o = 0.305m$) μετρηθεί δείκτης εδάφους $k_o = q_o / \rho_o$ ($q_o =$ πίεση πλάκας, $\rho_o =$ καθίζηση πλάκας) τότε, ο δείκτης εδάφους για τετραγωνικό πέδιλο εύρους $B > B_o$ είναι :

$$k = k_o \left(\frac{B_o}{B} \right)^2 \left(\frac{B + 0.305m}{B_o + 0.305m} \right)^2 = \frac{k_o}{4} \left(1 + \frac{0.305m}{B} \right)^2 \quad \text{όπου : } B, B_o \text{ σε μέτρα}$$

Εκτίμηση του k για ορθογωνικά πέδιλα εύρους B και μήκους $L > B$:

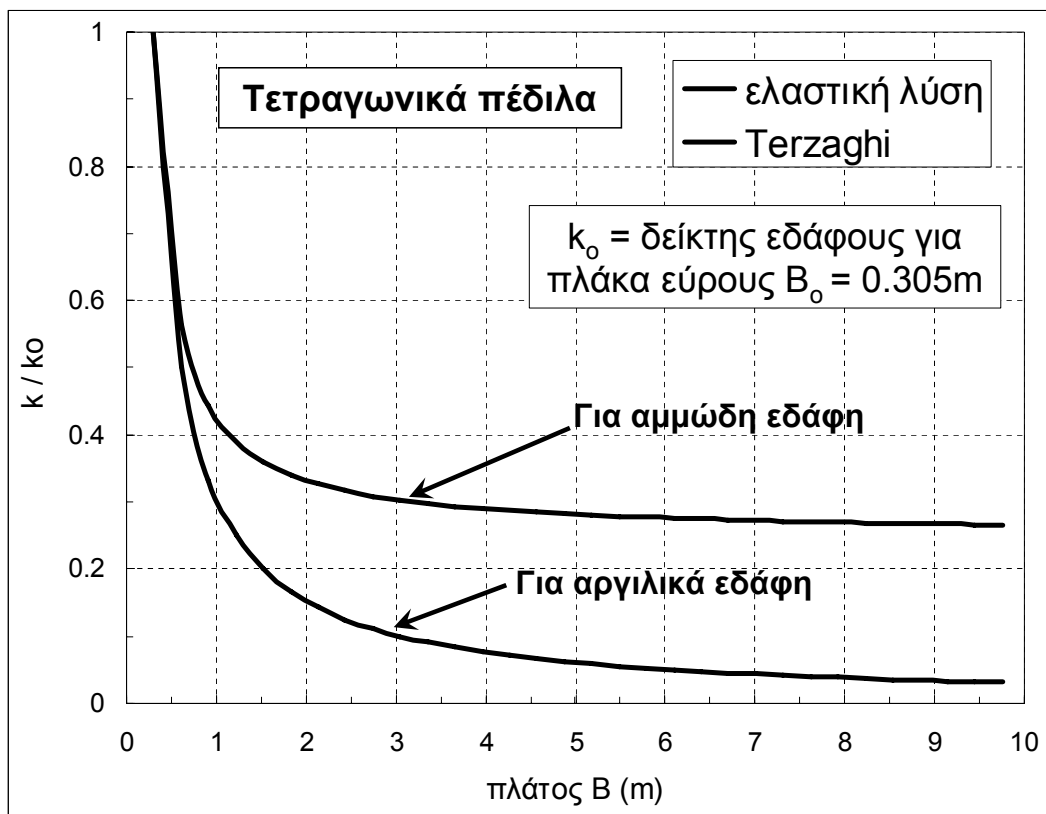
$$k = k_o \left(\frac{B_o}{B} \right)^2 \left(\frac{B + 0.305m}{B_o + 0.305m} \right)^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{B}{L} \right) = \frac{k_o}{4} \left(1 + \frac{0.305m}{B} \right)^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{B}{L} \right)$$

Εκτίμηση του k για πεδילוδοκούς εύρους B ($L = \infty$):

$$k = \frac{2}{3} k_o \left(\frac{B_o}{B} \right)^2 \left(\frac{B + 0.305m}{B_o + 0.305m} \right)^2 = \frac{k_o}{6} \left(1 + \frac{0.305m}{B} \right)^2$$

Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k (δείκτης Winkler)

Σύγκριση των μεθόδων υπολογισμού του δείκτη εδάφους (k) για τετραγωνικά πέδιλα :



Αμμώδη εδάφη : $k = k_0 \left(\frac{B_0}{B} \right)^2 \left(\frac{B + 0.305m}{B_0 + 0.305m} \right)^2$

Αργιλικά εδάφη :

$$k = k_0 \frac{B_0}{B}$$

Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k (δείκτης Winkler)

4. Με συνεκτίμηση της σχετικής δυσκαμψίας πεδιλοδοκού - εδάφους :

Μέθοδος Vesic για θεμελιολωρίδες :

$$k = \frac{0.65}{1 - \nu^2} \left(\frac{E_s B^4}{E_b I} \right)^{1/12} \frac{E_s}{B}$$

E_s , ν = μέτρο ελαστικότητας και λόγος Poisson του εδάφους

E_b , B , I = μέτρο ελαστικότητας, πλάτος και ροπή αδρανείας της πεδιλοδοκού

Παράδειγμα εφαρμογής :

Πεδιλοδοκός : $B = 1.20m$, $H = 0.60m$, $E_b = 25 \text{ GPa}$

Εδαφος : Συνεκτική άργιλος με $E_u = 15 \text{ MPa}$ ($\nu_u = 0.5$)

$I = B H^3 / 12 = 0.0216 \text{ m}^4$

$$k = \frac{0.65}{1 - 0.5^2} \left(\frac{15 \times 1.2^4}{25000 \times 0.0216} \right)^{1/12} \frac{15}{1.2} \text{ MN/m}^3 = 8.5 \text{ MN/m}^3$$

Παρατήρηση : Από τις σχέσεις ελαστικής μορφής για λωρίδα ($L/B = \infty \Rightarrow I_s \approx 2$) προκύπτει :

$$k = \frac{q}{\rho_i} = \frac{1}{(1 - \nu^2) I_s} \frac{E}{B} = \frac{1}{(1 - 0.5^2) \times 2} \times \frac{15}{1.2} = 8.3 \text{ MN/m}^3$$

Εκτίμηση του δείκτη εδάφους k (δείκτης Winkler)

Προτεινόμενες τιμές του δείκτη εδάφους (k) για «συνήθεις» πεδילוδοκούς σε διάφορους τύπους εδαφών (κατά Bowles) :

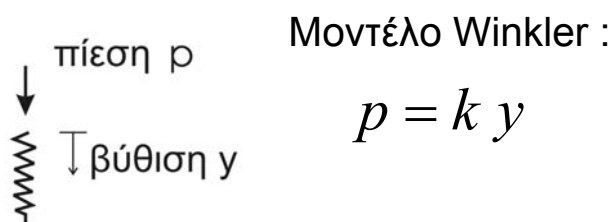
Είδος εδάφους	k (MN/m ³)
Άμμοι :	
Χαλαρές ($D_r < 50\%$)	4.8 – 16
Μέσης πυκνότητας ($D_r = 50-75\%$)	9.6 – 80
Πυκνές ($D_r > 75\%$)	64 – 128
Αργιλώδεις άμμοι μέσης πυκνότητας	32 – 80
Ιλυώδεις άμμοι μέσης πυκνότητας	24 – 48
Αργίλοι :	
Μαλακές ($q_u = 25-50$ kPa)	5 – 12
Συνεκτικές ($q_u = 50-100$ kPa)	12 – 18
Στιφρές ($q_u = 100-200$ kPa)	18 – 24
Πολύ στιφρές ($q_u = 200-400$ kPa)	24 – 48
Πολύ σκληρές ($q_u > 800$ kPa)	> 48

ΠΡΟΣΟΧΗ : Ο δείκτης εδάφους (k) εξαρτάται και από τα χαρακτηριστικά της πεδילוδοκού (L, B, I, E_b). Συνεπώς, οι ανωτέρω τιμές είναι ενδεικτικές.

Σημείωση : $10 \text{ MN/m}^3 = 1 \text{ kg/cm}^3$

1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδילוδοκούς

1.2 Με παραδοχή ανάπτυξης εδαφικών πιέσεων κατά το μοντέλο Winkler



p = εδαφική αντίδραση (kPa)

y = βύθιση της δοκού (m)

k = σταθερά ελατηρίου Winkler (kN/m³)

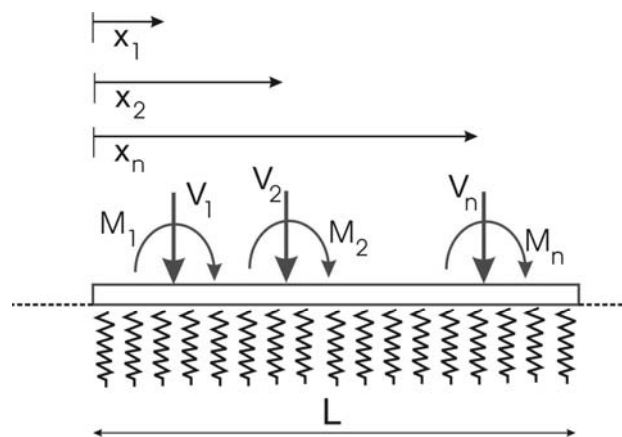
Διαφορική εξίσωση της δοκού :

$$E_b I \frac{d^4 y}{dx^4} = q - p B \quad \Rightarrow \quad E_b I \frac{d^4 y}{dx^4} + k B y = q$$

q = καταμεμημένη φόρτιση επί της δοκού (kN/m)

B = πλάτος της δοκού (m)

E_b , I = μέτρο ελαστικότητας (kN/m²) και ροπή αδρανείας (m⁴) της δοκού



Η επίλυση της ανωτέρω διαφορικής εξίσωσης για τυχόντα επιβεβλημένα φορτία (V , M , q), χαρακτηριστικά της δοκού (E_b , I , B , L) και χαρακτηριστικά του εδάφους (δείκτης k) μπορεί να γίνει με αναλυτικές ή αριθμητικές μεθόδους (π.χ. με πεπερασμένα στοιχεία)

1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδילוδοκούς

1.2 Με παραδοχή ανάπτυξης εδαφικών πιέσεων κατά το μοντέλο Winkler

Διαφορική εξίσωση της δοκού :

$$E_b I \frac{d^4 y}{dx^4} + k B y = q$$

E_b = μέτρο ελαστικότητας της πεδילוδοκού

I = ροπή αδρανείας της διατομής της πεδילוδοκού.

Για ορθογωνική διατομή πλάτους B και ύψους H :

$$I = \frac{B H^3}{12}$$

y = βύθιση της δοκού (m)

k = σταθερά ελατηρίου Winkler για την δοκό (kN/m^3)

B = πλάτος της δοκού (m)

q = κατανεμημένη φόρτιση επί της δοκού (kN/m)

p = πίεση εδαφικής αντίδρασης (kPa) : $p = k y$

Κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (σε απλές περιπτώσεις φόρτισης) προκύπτει η αδιάστατη παράμετρος :

$$\lambda = \left(\frac{k B}{4 E_b I} \right)^{1/4} L$$

Για απλές φορτίσεις, η δοκός μπορεί να θεωρηθεί (Hetenyi, 1946) :

Πολύ άκαμπτη : $\lambda < (\pi/2) \Rightarrow$ μπορεί να εφαρμοσθεί «γραμμική κατανομή τάσεων»

Ενδιάμεσης ακαμψίας : $(\pi/2) < \lambda < \pi \Rightarrow$ ανάλυση με «μοντέλο Winkler»

Πολύ εύκαμπτη : $\lambda > \pi \Rightarrow$ μπορεί να θεωρηθεί και ως «απείρου μήκους»

1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδילוδοκούς

1.2 Με παραδοχή ανάπτυξης εδαφικών πιέσεων κατά το μοντέλο Winkler

Εναλλακτικά, η σχετική ακαμψία της πεδילוδοκού ως προς το έδαφος μπορεί να εκτιμηθεί κατά Meyerhof μέσω της αδιάστατης παραμέτρου :

$$\xi = \frac{E_b I}{E_s B^3 L}$$

E_b = μέτρο ελαστικότητας της πεδילוδοκού

I = ροπή αδρανείας της διατομής της πεδילוδοκού

E_s = μέτρο ελαστικότητας του εδάφους

B = πλάτος της πεδילוδοκού (m)

L = μήκος της μήκος δοκού (m)

Η πεδילוδοκός μπορεί να θεωρηθεί ως άκαμπτη εάν : $\xi > 0.5$

Στην περίπτωση αυτή ($\xi > 0.5$), μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραδοχή γραμμικής κατανομής των τάσεων στη βάση της πεδילוδοκού. Εάν $\xi < 0.5$, απαιτείται ανάλυση με μοντέλο Winkler

Παράδειγμα εφαρμογής :

Επίλυση πεδילוδοκού με παραδοχή εδαφικών πιέσεων μέσω ελατηρίων τύπου Winkler - αριθμητική επίλυση (πεπερασμένα στοιχεία)

Πεδילוδοκός :

$$B = 1.20\text{m}, H=0.60\text{m}, L = 12\text{m}$$

$$\text{Σκυρόδεμα : } E_b = 25 \text{ GPa}$$

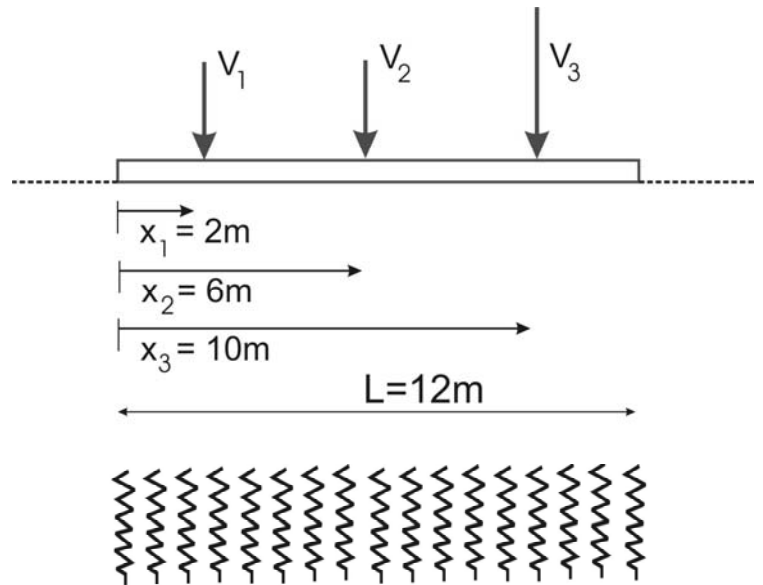
$$\text{Αρα : } I = B H^3 / 12 = 0.0216 \text{ m}^4$$

Εδαφος :

Συνεκτική άργιλος, $E_u = 15 \text{ MPa}$ ($\nu_u = 0.5$)

Φορτία : $V_1 = V_2 = 400 \text{ kN}$, $V_3 = 640 \text{ kN}$

Εδαφικές πιέσεις μέσω
ελατηρίων τύπου Winkler



Παράδειγμα εφαρμογής :

Επίλυση πεδילוδοκού με παραδοχή εδαφικών πιέσεων μέσω ελατηρίων τύπου Winkler (αριθμητική επίλυση)

Δείκτης εδάφους κατά Vesic :

$$k = \frac{0.65}{1 - \nu^2} \left(\frac{E B^4}{E_b I} \right)^{1/12} \frac{E}{B}$$

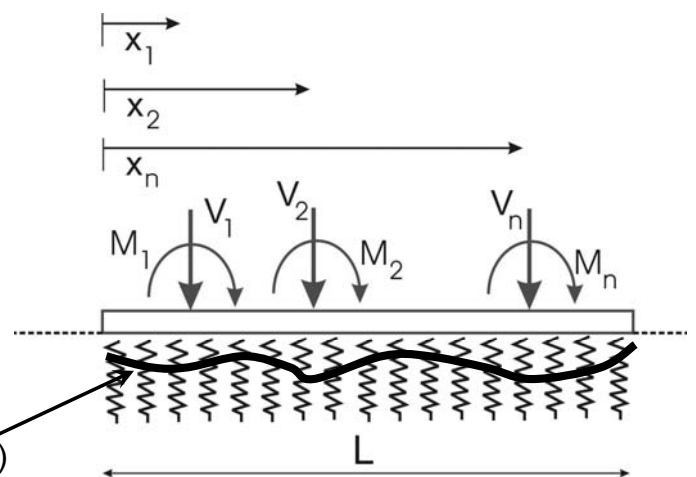
$$k = \frac{0.65}{1 - 0.5^2} \left(\frac{15 \times 1.2^4}{25000 \times 0.0216} \right)^{1/12} \frac{15}{1.2} \text{ MN} / \text{m}^3 = 8.5 \text{ MN/m}^3$$

Αδιάστατη παράμετρος σχετικής
δυσκαμψίας δοκού – εδάφους :

$$\lambda = \left(\frac{k B}{4 E_b I} \right)^{1/4} L = 3.146 \approx \pi$$

Αρα η δοκός είναι σχετικώς «εύκαμπτη»

Διάγραμμα βυθίσεων (y)
της πεδילוδοκού



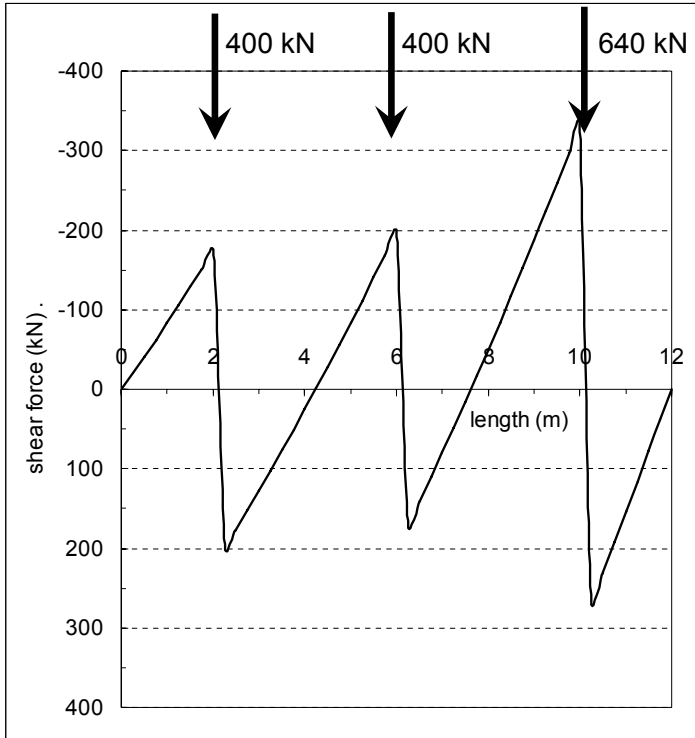
Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της πεδילוδοκού που φορτίζεται με τα (γνωστά) επιβεβλημένα φορτία και εδράζεται σε συνεχώς κατανομημένα ελατήρια Winkler έγινε με αριθμητική μέθοδο (πεπερασμένα στοιχεία)

Παράδειγμα εφαρμογής :

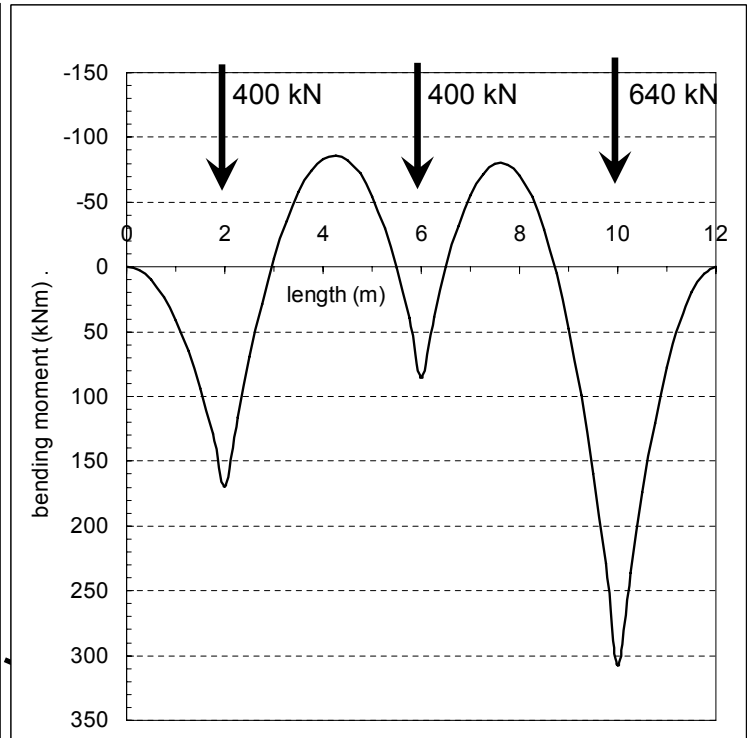
Επίλυση πεδילוδοκού με παραδοχή εδαφικών πιέσεων μέσω ελατηρίων τύπου Winkler - αριθμητική επίλυση (πεπερασμένα στοιχεία)

Σύγκριση με τα αποτελέσματα της επίλυσης με θεώρηση γραμμικής κατανομής των εδαφικών αντιδράσεων δείχνει πολύ μικρές διαφορές (αν και η πεδילוδοκός είναι σχετικά εύκαμπτη)

Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων



Διάγραμμα καμπτικών ροπών

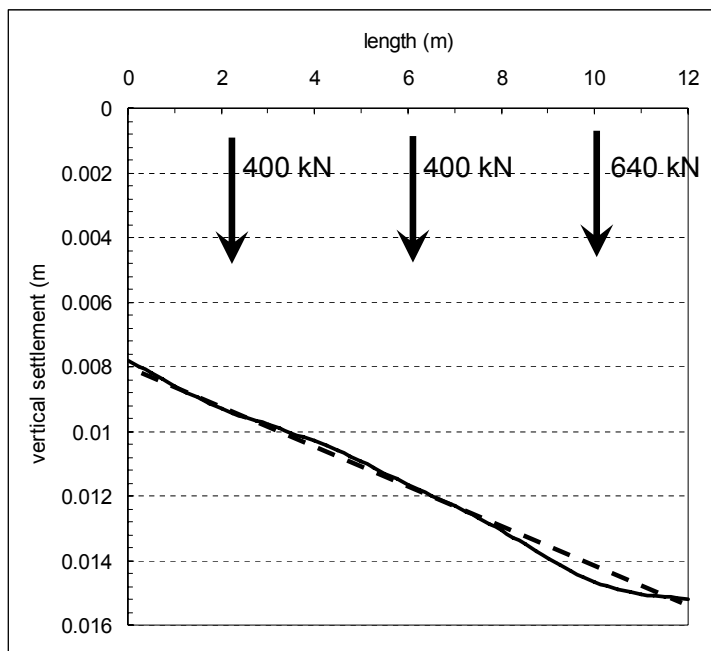


Παράδειγμα εφαρμογής :

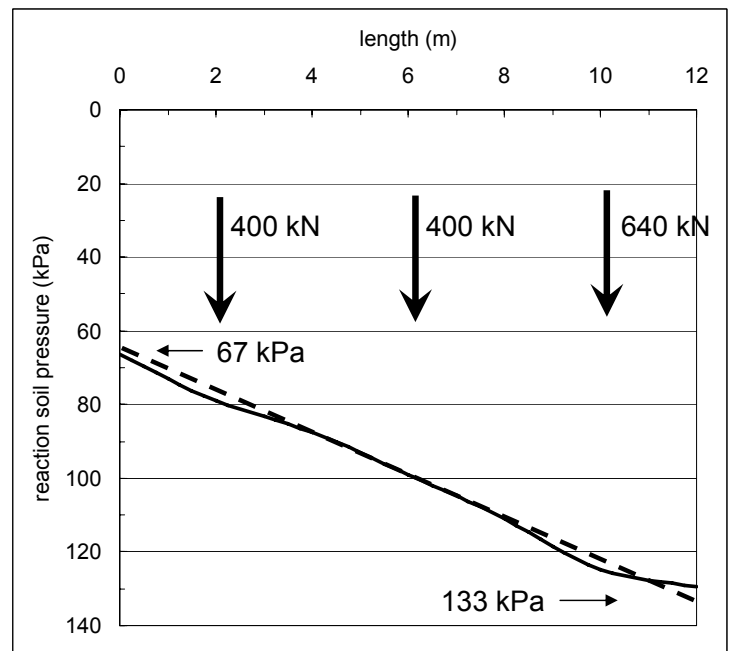
Επίλυση πεδילוδοκού με παραδοχή εδαφικών πιέσεων μέσω ελατηρίων τύπου Winkler - αριθμητική επίλυση (πεπερασμένα στοιχεία)

Σύγκριση με τα αποτελέσματα της επίλυσης με θεώρηση γραμμικής κατανομής των εδαφικών αντιδράσεων δείχνει πολύ μικρές διαφορές (αν και η πεδילוδοκός είναι σχετικά εύκαμπτη)

Διάγραμμα εδαφικών βυθίσεων



Διάγραμμα εδαφικών αντιδράσεων



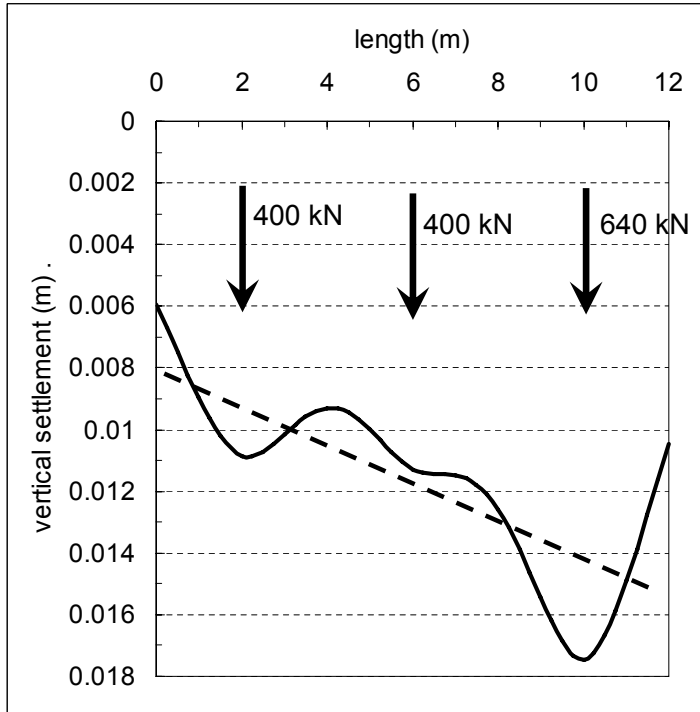
Παράδειγμα εφαρμογής :

Επίλυση της πεδιλοδοκού με παραδοχή εδαφικών αντιδράσεων μέσω ελατηρίων Winkler – Πολύ εύκαμπτη πεδιλοδοκός

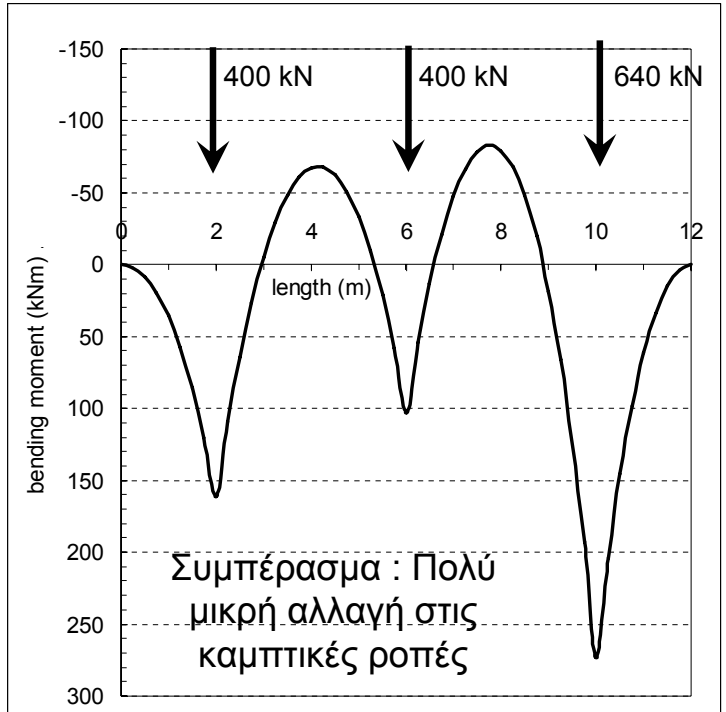
Πεδιλοδοκός ύψους $H=0.25\text{m}$ (αντί $H=0.60\text{m}$)
(λοιπές παράμετροι ως άνω)

$$\lambda = \left(\frac{k B}{4 E_b I} \right)^{1/4} L = 6.066 \approx 2 \pi \quad (\text{πολύ εύκαμπτη})$$

Διάγραμμα εδαφικών βυθίσεων



Διάγραμμα καμπτικών ροπών



1. Ανάλυση θεμελιώσεων με πεδιλοδοκούς

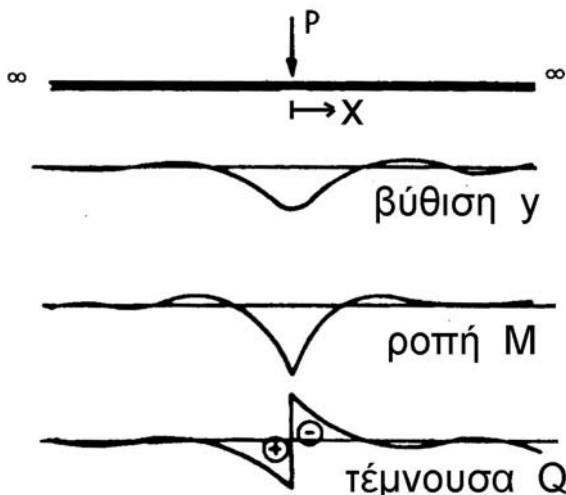
1.2 Με παραδοχή ανάπτυξης εδαφικών πιέσεων κατά το μοντέλο Winkler

Αναλυτικές σχέσεις για πολύ εύκαμπτες πεδιλοδοκούς (απειρομήκειες : $L \approx \infty$)

Αδιάστατη παράμετρος σχετικής δυσκαμψίας δοκού – εδάφους :

$$\lambda = \left(\frac{k B}{4 E_b I} \right)^{1/4} L > \pi \quad (\text{Hetenyi, 1946})$$

1. Φόρτιση με συγκεντρωμένο φορτίο P στο σημείο $x=0$:



Βύθιση : $y = \frac{\lambda P}{2 B L k} \zeta_1$

Καμπτική ροπή : $M = \frac{P L}{4 \lambda} \zeta_2$

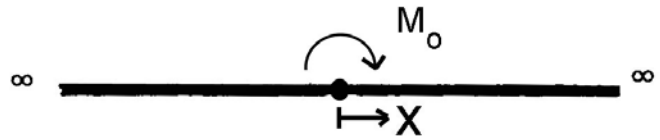
Τέμνουσα δύναμη : $Q = -\frac{P}{2} \zeta_3$

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 =$ συντελεστές επιρροής (βλέπε επόμενη σελίδα)

Αναλυτικές σχέσεις για πολύ εύκαμπτες πεδιλοδοκούς (απειρομήκεις)

2. Φόρτιση με συγκεντρωμένη ροπή M_o στο σημείο $x=0$:

Βύθιση : $y = \frac{M_o (\lambda/L)^3}{Bk} \zeta_4$



Καμπτική ροπή : $M = -\frac{M_o}{2} \zeta_3$

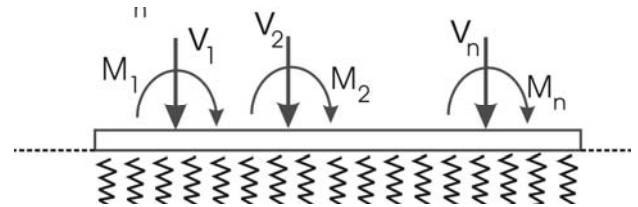
$$\lambda/L = \left(\frac{kB}{4E_b I} \right)^{1/4}$$

Τέμνουσα δύναμη : $Q = -\frac{M_o}{2} (\lambda/L) \zeta_1$

$\zeta_1, \zeta_3, \zeta_4$ = συντελεστές επιρροής (βλέπε επόμενη σελίδα)

3. Φόρτιση με φορτία και συγκεντρωμένες ροπές σε διάφορες θέσεις :

Μπορεί να εφαρμοσθεί η αρχή της επαλληλίας, θέτοντας ως $x=0$ το μέσον της πεδιλοδοκού



Αναλυτικές σχέσεις για πολύ εύκαμπτες πεδιλοδοκούς (απειρομήκεις)

Τιμές των συντελεστών επιρροής : $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ σε διάφορες θέσεις x της δοκού :

$\lambda \frac{x}{L}$	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	$\lambda \frac{x}{L}$	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.00000	3.6	-0.03659	-0.01241	-0.0245	-0.01209
0.1	0.9907	0.8100	0.9004	0.0903	3.7	-0.03407	-0.00787	-0.0210	-0.01310
0.2	0.9651	0.6398	0.8024	0.1627	3.8	-0.03138	-0.00401	-0.0177	-0.01369
0.3	0.9267	0.4888	0.7078	0.2189	3.9	-0.02862	-0.00077	-0.0147	-0.01392
0.4	0.8784	0.3564	0.6174	0.2610	4.0	-0.02583	-0.00189	-0.1197	-0.01386
0.5	0.8231	0.2415	0.5323	0.2908	4.1	-0.02309	-0.00403	-0.00955	-0.01356
0.6	0.7628	0.1431	0.4530	0.3099	4.2	-0.02042	-0.00572	-0.00735	-0.01307
0.7	0.6997	-0.0599	0.3798	0.3199	4.3	-0.01787	-0.00699	-0.00545	-0.01243
0.8	0.6354	-0.0093	0.3130	0.3223	4.4	-0.01546	-0.00791	-0.00380	-0.01168
0.9	0.5712	-0.0657	0.2528	0.3185	4.5	-0.01320	-0.00852	-0.00235	-0.01086
1.0	0.5083	-0.1108	0.1988	0.3096	4.6	-0.01112	-0.00886	-0.00110	-0.00999
1.1	0.4476	-0.1457	0.1510	0.2967	4.7	-0.00921	-0.00898	-0.0002	-0.00909
1.2	0.3899	-0.1716	0.1092	0.2807	4.8	-0.00748	-0.00892	-0.0007	-0.00820
1.3	0.3355	-0.1897	0.0729	0.2626	4.9	-0.00593	-0.00870	-0.0009	-0.00732
1.4	0.2849	-0.2011	0.0419	0.2430	5.0	-0.00455	-0.00837	-0.0020	-0.00646
1.5	0.2384	-0.2068	0.0158	0.2226	5.1	-0.00334	-0.00795	-0.00235	-0.00564
1.6	0.1959	-0.2077	-0.0059	0.2018	5.2	-0.00229	-0.00746	-0.00260	-0.00487
1.7	0.1575	-0.2047	-0.0236	0.1812	5.3	-0.00139	-0.00692	-0.00275	-0.00415
1.8	0.1234	-0.1985	-0.0376	0.1010	5.4	-0.00063	-0.00636	-0.0029	-0.00349
1.9	0.0932	-0.1899	-0.0484	0.1415	5.5	-0.00001	-0.00578	-0.0029	-0.00288
2.0	0.0667	-0.1794	-0.0564	0.1231	5.6	-0.00053	0.00520	-0.0029	-0.00233
2.1	0.0439	-0.1675	-0.0618	0.1057	5.7	-0.00095	0.00464	-0.0028	-0.00184
2.2	0.0244	-0.1548	-0.0652	0.0896	5.8	-0.00127	0.00409	0.0027	-0.00141
2.3	0.0080	-0.1416	-0.0668	0.0748	5.9	0.00152	0.00356	0.00255	-0.00102
2.4	-0.0056	-0.1282	-0.0669	0.0613	6.0	0.00169	0.00307	0.0024	-0.00069
2.5	-0.0166	-0.1149	-0.0658	0.0491	6.1	0.00180	0.00261	0.0022	-0.00041
2.6	-0.0254	-0.1019	-0.0636	0.0382	6.2	0.00185	0.00219	0.0020	-0.00017
2.7	-0.0320	-0.0895	-0.0608	0.0287	6.3	0.00187	0.00181	0.00185	0.00003
2.8	-0.0369	-0.0777	-0.0573	0.0204	6.4	0.00184	0.00146	0.00165	0.00019
2.9	-0.0403	-0.06666	-0.0535	0.01330	6.5	0.00179	0.00115	0.00150	0.00032
3.0	-0.04226	-0.0563	-0.0493	0.00703	6.6	0.00172	0.00087	0.0013	0.00042
3.1	-0.04314	-0.0468	-0.0450	0.00787	6.7	0.00162	0.00063	0.0012	0.00050
3.2	-0.04307	-0.03831	-0.0407	0.00238	6.8	0.00152	0.00042	0.00095	0.00055
3.3	-0.04224	-0.03060	-0.0364	0.00582	6.9	0.00141	0.00024	0.0008	0.00058
3.4	-0.04079	-0.02374	-0.0322	0.00853	7.0	0.00129	0.0009	0.0007	0.00060
3.5	-0.03887	-0.01769	-0.0283	0.01059					

$$\lambda \frac{x}{L} = \left(\frac{kB}{4E_b I} \right)^{1/4} x$$

Σύνοψη μεθόδων ανάλυσης πεδιλοδοκών

1. Κριτήρια ακαμψίας πεδιλοδοκών :

Κριτήριο	Τύπος	Εύρος τιμών	Είδος πεδιλοδοκού / Μέθοδος ανάλυσης
Hetenyi	$\lambda = \left(\frac{k B}{4 E_b I} \right)^{1/4} L$	$\lambda < (\pi/2)$ $(\pi/2) < \lambda < \pi$ $\lambda > \pi$	Άκαμπτη (γραμμική κατανομή) Εύκαμπτη (Winkler) Πολύ εύκαμπτη (Winkler ή $L=\infty$)
Meyerhof	$\xi = \frac{E_b I}{E_s B^3 L}$	$\xi > 0.5$ $\xi < 0.5$	Άκαμπτη (γραμμική κατανομή) Εύκαμπτη (Winkler)

2. Εκτίμηση του δείκτη εδάφους (k) σε εύκαμπτες πεδιλοδοκούς :

Με απευθείας μέτρηση (δοκιμή φόρτισης πλάκας) ή εκτίμηση (από πίνακες) του k_0 και στη συνέχεια εκτίμηση του (k) με αναγωγή στις διαστάσεις της πεδιλοδοκού ή με χρήση της μεθόδου Vesic

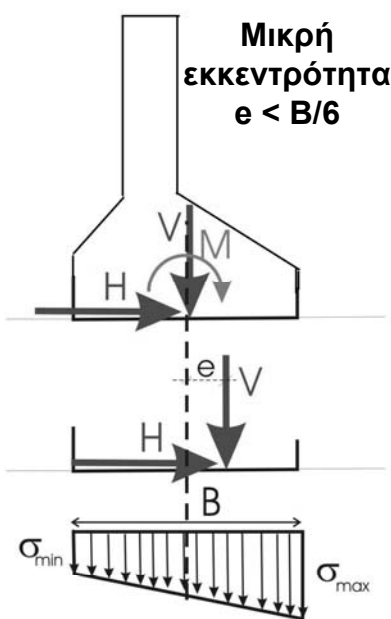
3. Μέθοδος ανάλυσης :

Άκαμπτες : με παραδοχή γραμμικής κατανομής των εδαφικών πιέσεων στη βάση
Εύκαμπτες : με χρήση μοντέλου Winkler – Πολύ εύκαμπτες : ως απειρομήκειες

Εφαρμογή του δείκτη εδάφους (k) σε άκαμπτα πέδιλα

Υπολογισμός της στροφής (θ) πεδίου ($B \times L$) με αξονική δύναμη (V) και ροπή (M) :

B = εύρος πεδίου κατά την διεύθυνση της εκκεντρότητας



Εκκεντρότητα : $e = \frac{M}{V}$ Μέση τάση : $\sigma = \frac{V}{BL}$

1. Μικρή εκκεντρότητα : $0 \leq e \leq B/6$

$$\sigma_{\max} = \sigma \left(1 + 6 \frac{e}{B} \right) \quad \sigma_{\min} = \sigma \left(1 - 6 \frac{e}{B} \right) \geq 0$$

Winkler : $y_{\max} = \sigma_{\max} / k$, $y_{\min} = \sigma_{\min} / k$

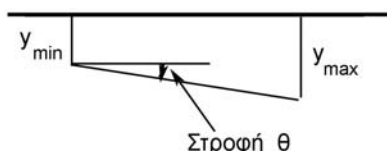
Αρα : $\theta \approx \tan \theta = \frac{(y_{\max} - y_{\min})}{B} \Rightarrow \theta = 12 \frac{M}{B^3 L k}$

Δυσκαμψία του «στροφικού ελατηρίου» στη βάση του πεδίου :

$$K_{\theta} = \frac{M}{\theta} = \frac{1}{12} B^3 L k \quad (\text{kNm / rad})$$

Δυσκαμψία του «αξονικού ελατηρίου» στη βάση του πεδίου :

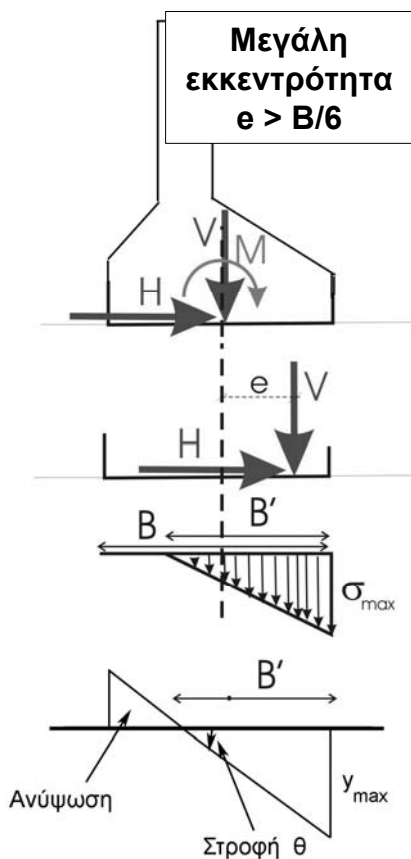
$$K_V = \frac{V}{y} = \frac{V}{\sigma/k} \Rightarrow K_V = k B L \quad (\text{kN / m})$$



Εφαρμογή του δείκτη εδάφους (k) σε άκαμπτα πέδιλα

Υπολογισμός της στροφής (θ) πεδίου ($B \times L$) με αξονική δύναμη (V) και ροπή (M) :

B = εύρος πεδίου κατά την διεύθυνση της εκκεντρότητας



Εκκεντρότητα : $e = \frac{M}{V}$ Μέση τάση : $\sigma = \frac{V}{BL}$

2. Μεγάλη εκκεντρότητα : $B/6 \leq e \leq B/2$

$$\sigma_{\max} = 2\sigma \frac{B}{B'} \quad B' = 3\left(\frac{B}{2} - e\right)$$

Winkler : $y_{\max} = \sigma_{\max} / k$

Αρα : $\theta \approx \tan \theta = \frac{y_{\max}}{B'} \Rightarrow \theta = 2 \frac{V}{(B')^2 L k}$

Δυσκαμψία του «στροφικού ελατηρίου» στη βάση του πεδίου :

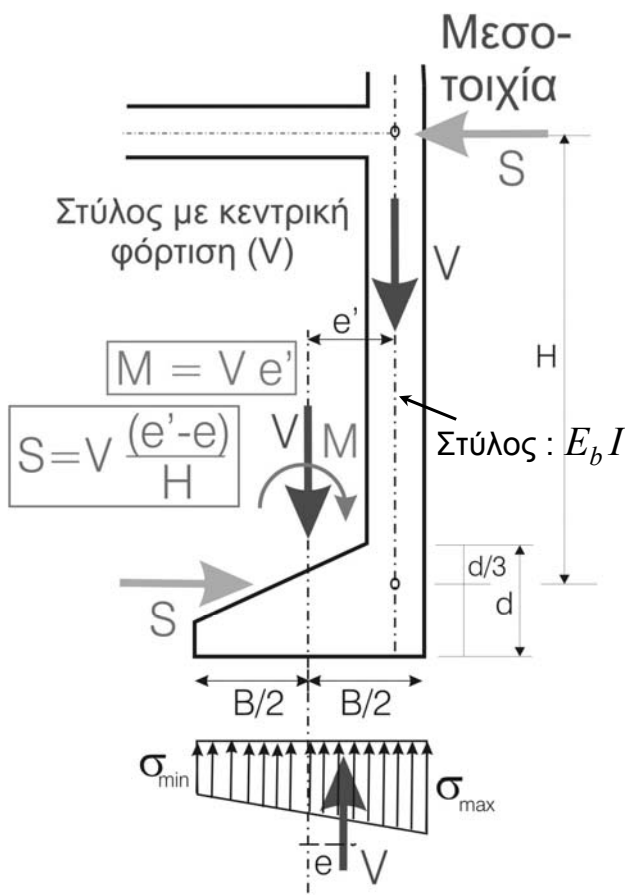
$$K_{\theta} = \frac{M}{\theta} = \frac{1}{2} (B')^2 L e k \quad (\text{kNm / rad})$$

Δυσκαμψία του «αξονικού ελατηρίου» στη βάση του πεδίου :

$$K_V = \frac{V}{y} = \frac{V}{\sigma/k} \Rightarrow K_V = k B L \quad (\text{kN / m})$$

Εφαρμογή του δείκτη εδάφους (k) σε άκαμπτα πέδιλα

Μείωση της εκκεντρότητας πεδίου μεσοτοιχίας λόγω δυσκαμψίας του στύλου



Στύλος μεσοτοιχίας (μέτρο ελαστικότητας E_b , ροπή αδρανείας I) με κεντρική φόρτιση V εδράζεται στο έδαφος με πέδιλο. Η κεφαλή του στύλου θεωρείται αρθρωτή (ελεύθερα στρεπτή).

Εάν το έδαφος είναι απαραμόρφωτο ($k = \infty$), δηλαδή το πέδιλο είναι απολύτως άστρεπτο, η αξονική δύναμη (V) του στύλου θα μεταφερθεί στο έδαφος ως ομοιόμορφη πίεση με συνισταμένη V κατά τον άξονα του πεδίου ($e=0$). Τούτο έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ζεύγους δυνάμεων S για την ανάληψη της ροπής $M = V e'$, οπότε :

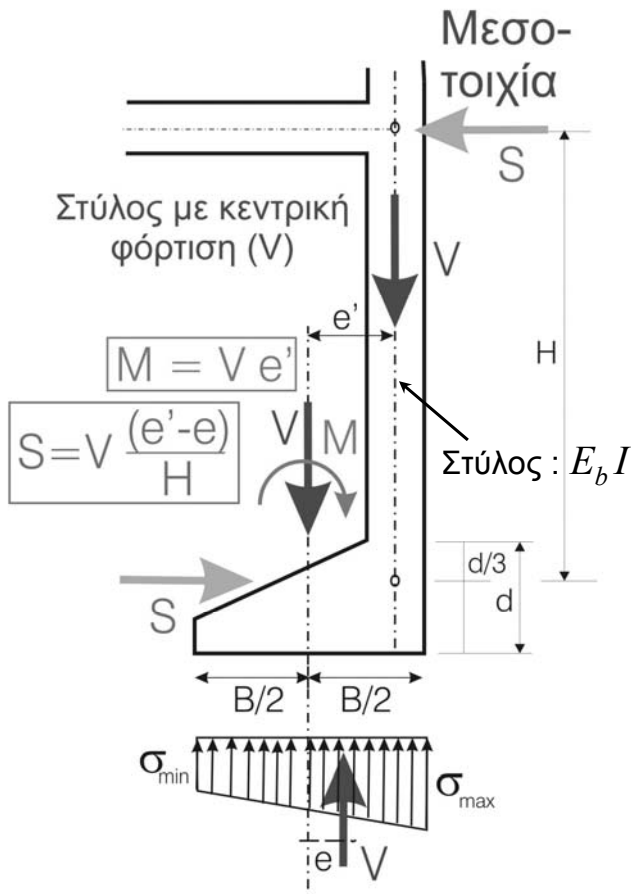
$$S = V e' / H$$

Στην συνήθη περίπτωση που το πέδιλο μπορεί να στραφεί (όσο του επιτρέπει ο δείκτης εδάφους k), η αντίδραση του εδάφους έχει συνισταμένη V με εκκεντρότητα e ($0 < e < e'$). Στην περίπτωση αυτή, το ζεύγος δυνάμεων S για την ανάληψη της απομένουσας ροπής $M = V (e' - e)$ είναι :

$$S = V (e' - e) / H$$

Εφαρμογή του δείκτη εδάφους (k) σε άκαμπτα πέδιλα

Μείωση της εκκεντρότητας πεδίου μεσοτοιχίας λόγω δυσκαμψίας του στύλου



Υπολογισμός της εκκεντρότητας (e) :

Στροφή του πεδίου (θ) λόγω δείκτη εδάφους (k) κατά την επιβολή της ροπής $M = V e$:

$$\theta = \frac{M}{K_\theta} = 12 \frac{M}{B^3 L k} = 12 \frac{V e}{B^3 L k}$$

Στροφή της βάσης του στύλου (πέδιλο) λόγω εφαρμογής της ροπής $M = V(e' - e)$ στον στύλο ύψους H, ροπής αδρανείας I με άρθρωση στην κεφαλή :

$$\theta = \frac{M H}{3 E_b I} = \frac{V(e' - e) H}{3 E_b I}$$

Εξίσωση των ανωτέρω σχέσεων (ως προς θ) και επίλυση ως προς e δίνει:

$$e = \frac{e'}{1 + \frac{36 E_b I}{k H L B^3}} \quad \text{Για άστρεπτο πέδιλο : } k = \infty \Rightarrow e = e'$$

Μείωση της εκκεντρότητας πεδίου μεσοτοιχίας λόγω δυσκαμψίας του στύλου

Εφαρμογή :

Πέδιλο : $B = 2\text{m}$ $L = 4\text{m}$

Αξονικό φορτίο : $V = 2000\text{ kN}$

Έδαφος : $k = 10\text{ MN/m}^3$

$E_b = 25\text{ GPa}$ (σκυρόδεμα)

Διαστάσεις στύλου : $b = 0.4\text{m}$ $d = 0.6\text{m}$

Ύψος στύλου : $H = 4.5\text{m}$

$I = b d^3 / 12 = 0.4 \times 0.6^3 / 12 = 0.0072\text{ m}^4$

$e' = B/2 - d/2 = 1 - 0.3 = 0.7\text{m}$

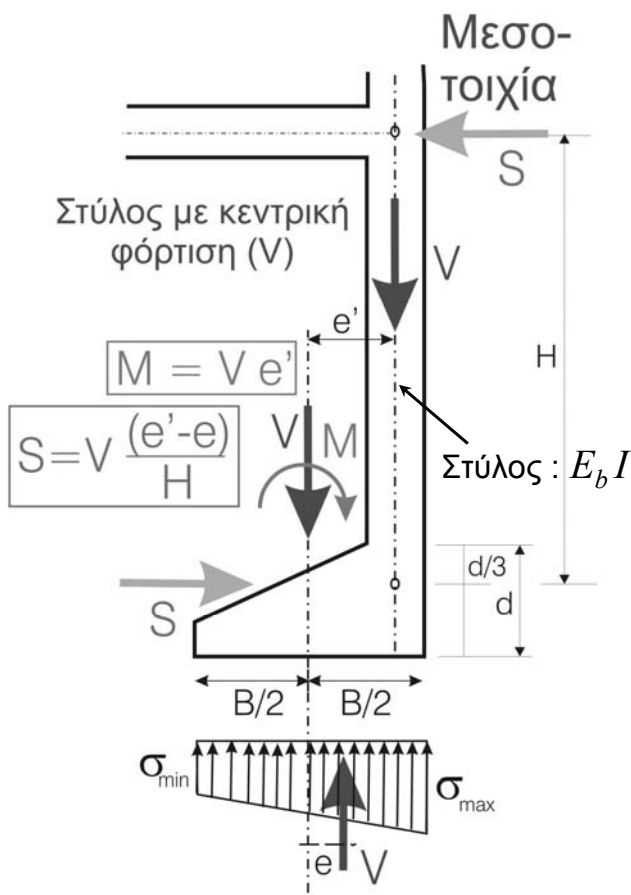
$$e = \frac{e'}{1 + \frac{36 E_b I}{k H L B^3}} \Rightarrow e = 0.13\text{m} < B/6$$

$S = V(e' - e) / H = 253.3\text{ kN}$

Μέγιστη ροπή στύλου : $M = S H = 1140\text{ kN}$

Στροφή πεδίου (και της βάσης του στύλου) :

$$\theta = \frac{M}{K_\theta} = 12 \frac{V e}{B^3 L k} = 0.00975\text{ rad} = 0.56^\circ$$



2. Ανάλυση θεμελιώσεων με κοιτοστρώσεις

Μια πλάκα κοιτόστρωσης μπορεί να θεωρηθεί ως άκαμπτη εάν οι διαστάσεις της δεν υπερβαίνουν την χαρακτηριστική διάσταση (B_c) (Westergaard, 1939) :

$$B_c = 2.5 \left[\frac{E_b t^3}{12k(1-\nu_b^2)} \right]^{1/4}$$

Σημείωση : Το B_c αντιστοιχεί σε $\lambda = \pi/2$ κατά Hetenyi (1946)

E_b , ν_b = μέτρο ελαστικότητας και λόγος Poisson του σκυροδέματος

t = πάχος πλάκας κοιτόστρωσης

k = δείκτης εδάφους που αντιστοιχεί σε τετραγωνικό πέδιλο εύρους B_c . Ο δείκτης εδάφους υπολογίζεται με τις μεθόδους που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

- Εάν η πλάκα κοιτόστρωσης μπορεί να θεωρηθεί ως άκαμπτη, τότε μπορεί να γίνει η παραδοχή γραμμικής κατανομής των εδαφικών πιέσεων στη βάση της. Ο προσδιορισμός των εδαφικών πιέσεων μπορεί να γίνει με τις εξισώσεις ισορροπίας (όπως στις πεδιλοδοκούς). Στη συνέχεια η ανάλυση της πλάκας κοιτόστρωσης γίνεται με τα γνωστά φορτία και εδαφικές αντιδράσεις.
- Εάν η πλάκα κοιτόστρωσης δεν μπορεί να θεωρηθεί ως άκαμπτη, η ανάλυση μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των ελατηρίων Winkler. Ο δείκτης εδάφους (k) υπολογίζεται για τετραγωνικό πέδιλο εύρους B_c .

2. Ανάλυση θεμελιώσεων με κοιτοστρώσεις

Παράδειγμα εφαρμογής 1 : Πλάκα κοιτόστρωσης από σκυρόδεμα ($E_b = 25 \text{ GPa}$, $\nu_b = 0.30$) πάχους $t = 0.80\text{m}$ επί αργιλικού εδάφους με δείκτη $k_o = 75 \text{ MN/m}^3$ (για πλάκα εύρους $B_o = 0.305\text{m}$)

Για αργιλικό έδαφος : $k = k_o \frac{B_o}{B}$ Συνδυασμός με την : $B_c = 2.5 \left[\frac{E_b t^3}{12k(1-\nu_b^2)} \right]^{1/4}$

δίνει : $B_c = 3.40 \left(\frac{E_b t^3}{12k_o B_o (1-\nu_b^2)} \right)^{1/3} = 3.40 \left(\frac{25000 \times (0.8)^3}{12 \times 75 \times 0.305 \times (1-0.3^2)} \right)^{1/3} = 10\text{m}$

Συνεπώς, εάν η πλάκα έχει διαστάσεις έως 10 m θεωρείται ως άκαμπτη. Διαφορετικά θεωρείται ως εύκαμπτη με δείκτη εδάφους :

$$k = k_o \frac{B_o}{B} = 75 \times \frac{0.305}{10} = 2.3 \text{ MN/m}^3 = 0.23 \text{ kg/cm}^3$$

2. Ανάλυση θεμελιώσεων με κοιτοστρώσεις

Παράδειγμα εφαρμογής 2 : Πλάκα κοιτόστρωσης από σκυρόδεμα ($E_b = 25 \text{ GPa}$, $\nu_b = 0.30$) πάχους $t = 0.80\text{m}$ επί αμμώδους εδάφους με δείκτη $k_o = 50 \text{ MN/m}^3$ (για πλάκα εύρους $B_o = 0.305\text{m}$)

$$\text{Για αμμώδες έδαφος : } k = \frac{k_o}{4} \left(1 + \frac{B_o}{B} \right)^2$$

$$\text{Συνδυασμός με την : } B = 2.5 \left(\frac{E_b t^3}{12 k (1 - \nu_b^2)} \right)^{1/4}$$

$$\text{δίνει : } B(B + B_o) = 6.25 \sqrt{\frac{E_b t^3}{3 k_o (1 - \nu_b^2)}} \Rightarrow B (B + B_o) = 60.5\text{m} \Rightarrow B = 7.63 \approx 7.6 \text{ m}$$

Συνεπώς, εάν η πλάκα έχει διαστάσεις έως 7.6 m θεωρείται ως άκαμπτη.
Διαφορετικά θεωρείται ως εύκαμπτη με δείκτη εδάφους :

$$k = \frac{k_o}{4} \left(1 + \frac{B_o}{B} \right)^2 = \frac{50}{4} \left(1 + \frac{0.305}{7.6} \right)^2 = 13.5 \text{ MN/m}^3 = 1.35 \text{ kg/cm}^3$$