Εκτίμηση του κινδύνου αστοχίας των τεχνικών έργων

9.1 Γενικά

Τα τεχνικά έργα σχεδιάζονται ώστε να αναλαμβάνουν ασφαλώς κάποια συγκεκριμένα φορτία (φορτία σχεδιασμού). Λόγω απρόβλεπτης διακύμανσης του μεγέθους των επιβαλλόμενων φορτίων κατά τη διάρκεια της ζωής του έργου, είναι πιθανόν ορισμένα από τα φορτία να υπερβούν τις τιμές για τις οποίες σχεδιάσθηκε η κατασκευή με συνέπεια την αστοχία της. Για παράδειγμα, ένα φράγμα που έχει σχεδιασθεί έναντι σεισμού μεγέθους 7.0 μπορεί να αστοχήσει εάν συμβεί σεισμός μεγέθους 8.0. Τούτο σημαίνει ότι το συγκεκριμένο φράγμα έχει κάποια πιθανότητα αστοχίας έναντι ισχυρού σεισμού (που καθορίζεται από την πιθανότητα να συμβεί σεισμός με μέγεθος $M > 7$). Η πιθανότητα να συμβεί ένας σεισμός τέτοιου μεγέθους μπορεί να είναι μικρή, όμως δεν είναι μηδενική. Η μικρή αυτή πιθανότητα αστοχίας συχνά θεωρείται ως αποδεκτή, με κύριο σκοπό τον περιορισμό του κόστους κατασκευής των τεχνικών έργων.

Με τον όρο *“κίνδυνος αστοχίας”* (risk) ορίζεται η πιθανότητα αστοχίας ενός έργου κατά το χρόνο της λειτουργίας του (δηλαδή της *χρήσιμης ζωής* του). Επίσης, ο όρος *“αποδεκτός κίνδυνος αστοχίας”* (acceptable risk) εκφράζει την πιθανότητα αστοχίας που θεωρείται αποδεκτή κατά τη χρήσιμη ζωή του έργου. Ο αποδεκτός κίνδυνος αστοχίας καθορίζεται με συνεκτίμηση ποικίλων παραγόντων αλλά κυρίως από τις συνέπειες της πιθανής αστοχίας του έργου (θάνατος ανθρώπων, υλικές ζημιές, διαφεύγοντα κέρδη, κόστος ανακατασκευής κλπ) και από το πρόσθετο κόστος κατασκευής του ίδιου του έργου ώστε να μπορεί να αναλάβει ασφαλώς τις αυξημένες φορτίσεις (δηλαδή να έχει μικρότερον αποδεκτό κίνδυνο αστοχίας). Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι φορτίσεις σχεδιασμού των έργων καθορίζονται με βάση τον αποδεκτό κίνδυνο αστοχίας.

Η αστοχία των μεγάλων τεχνικών έργων έχει συχνά ιδιαιτέρως δυσμενείς συνέπειες στο περιβάλλον, και συνεπώς είναι απαραίτητη η ορθολογική εκτίμηση του κινδύνου αστοχίας των για κάθε πιθανή φόρτιση. Επίσης, είναι απαραίτητος ο ορθολογικός καθορισμός του αποδεκτού κινδύνου αστοχίας ο οποίος, όπως αναφέρθηκε ανωτέρω, συνήθως γίνεται με συνεκτίμηση των συνεπειών της πιθανής αστοχίας και του κόστους κατασκευής του έργου.

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται στοιχεία των μεθόδων που συνήθως χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του κινδύνου αστοχίας των τεχνικών έργων.

9.2 Στοιχεία της θεωρίας πιθανοτήτων

9.2.1 Το πείραμα Bernoulli

Το *πείραμα Bernoulli* είναι ένα πείραμα με δυο δυνατά αποτελέσματα: “επιτυχία” ή “αποτυχία”. Παραδείγματα πειραμάτων Bernoulli αποτελούν:

1. Η εξέταση ενός δοκιμίου από σκυρόδεμα για να ελεγχθεί εάν η αντοχή του υπερβαίνει την απαιτούμενη αντοχή (επιτυχία) ή εάν υπολείπεται αυτής (αποτυχία).
2. Η εξέταση μιας δεξαμενής καυσίμων για να διαπιστωθεί εάν είναι στεγανή (επιτυχία) ή αν παρουσιάζει διαρροές (αποτυχία).
3. Η εξέταση ενός εδαφικού δοκιμίου για να διαπιστωθεί εάν ο βαθμός ρύπανσής του υπολείπεται των μέγιστων αποδεκτών ορίων (επιτυχία) ή υπερβαίνει τα μέγιστα αποδεκτά όρια (αποτυχία).

Κατά τα ανωτέρω, εάν (p) είναι η πιθανότητα επιτυχίας σε ένα πείραμα Bernoulli τότε η πιθανότητα αποτυχίας είναι (1-p). Σύμφωνα με τη θεωρία των πιθανοτήτων, το πείραμα Bernoulli ορίζει μια τυχαία μεταβλητή (X) με δυο δυνατές τιμές (1 = επιτυχία, 0 = αποτυχία) και συνάρτηση κατανομής:

$$p(X=1)=p, \quad p(X=0)=1-p$$

9.2.2 Η διωνυμική κατανομή

Η *διωνυμική κατανομή* αναφέρεται στην εκτέλεση (n) πειραμάτων[1] Bernoulli και στον ορισμό μιας τυχαίας μεταβλητής (X) που δίνει τον αριθμό των επιτυχιών στα ανωτέρω πειράματα. Αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα (x) επιτυχιών που αποτελεί τη συνάρτηση κατανομής της διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής ισούται με:

$$p(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \tag{9.1}$$

όπου $\binom{n}{x}=\frac{n!}{(n-x)!\,x!}$ είναι οι συνδυασμοί των (n) δοκιμών ανά (x) και:

Στη διωνυμική κατανομή, ο αριθμός των δοκιμών (n) και των επιτυχιών (x) είναι πεπερασμένος. Στα επόμενα εξετάζονται συναρτήσεις κατανομής στις οποίες ο αριθμός των πιθανών ενδεχομένων δεν είναι πεπερασμένος.

9.2.3 Η κατανομή Poisson

Ας θεωρηθεί ότι η πιθανότητα να συμβεί ένα σπάνιο[2] γεγονός μέσα σε ένα μικρό χρονικό διάστημα (Δt) είναι ίση με ($\lambda\Delta t$), δηλαδή η πιθανότητα του γεγονότος αυτού είναι (λ) ανά μονάδα χρόνου. Η *κατανομή Poisson* δίνει την πιθανότητα το παραπάνω γεγονός να συμβεί (x) φορές σε ένα χρονικό διάστημα (t), όπου $t \gg \Delta t$. Αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα αυτή είναι:

$$p\,(X=x)\equiv p\,(x)=e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda\,t)^x}{x!} \tag{9.2}$$

Η σταθερά (λ) της κατανομής Poisson εκφράζει τη μέση συχνότητα εμφάνισης του συγκεκριμένου γεγονότος ανά μονάδα χρόνου, ενώ η ποσότητα (λt) δίνει τη μέση συχνότητα εμφάνισης του συγκεκριμένου γεγονότος στο χρονικό διάστημα (t). Η ποσότητα $t_o=1/\lambda$ ονομάζεται *μέση περίοδος επαναφοράς* και εκφράζει το χρονικό διάστημα στο οποίο το συγκεκριμένο (σπάνιο) γεγονός συμβαίνει μια φορά κατά μέσον όρο. Επειδή το γεγονός θεωρείται σπάνιο, η σταθερά (λ) της κατανομής Poisson είναι πολύ μικρή ($\lambda \ll 1$) και συνεπώς η μέση περίοδος επαναφοράς είναι μεγάλη ($t_o \gg 1$).

---

[1] ανεξαρτήτων μεταξύ τους

[2] με τον όρο σπάνιο εννοείται ότι η πιθανότητα το γεγονός αυτό να συμβεί δυο ή περισσότερες φορές μέσα σε ένα μικρό χρονικό διάστημα (Δt) είναι μηδενική

Σύμφωνα με την κατανομή Poisson, η πιθανότητα το συγκεκριμένο γεγονός να μη συμβεί εντός του χρονικού διαστήματος (t) είναι:

$$p\left(X=0\right)=e^{-\lambda t} \tag{9.3α}$$

ενώ η πιθανότητα το συγκεκριμένο γεγονός να συμβεί τουλάχιστον μια φορά εντός χρόνου (t) είναι:

$$p\left(X>0\right)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-t/t_o} \tag{9.3β}$$

Στην περίπτωση που το παραπάνω γεγονός αντιστοιχεί σε φόρτιση που υπερβαίνει τη φόρτιση σχεδιασμού του έργου, το γεγονός μπορεί να προκαλέσει την αστοχία του έργου. Στην περίπτωση αυτή, η τελευταία σχέση δίνει και την *πιθανότητα αστοχίας* του έργου λόγω του συγκεκριμένου γεγονότος εντός του χρονικού διαστήματος (t).

Επίλυση της σχέσης (9.3.β) ως προς τη μέση περίοδο επαναφοράς δίνει:

$$t_o=-\frac{t}{\ln\left(1-p\right)}$$

όπου (p) είναι η πιθανότητα το γεγονός να συμβεί τουλάχιστον μια φορά εντός χρόνου (t).

Εφαρμογή:

Οι σεισμικές κινήσεις σχεδιασμού του Νέου Ελληνικού Αντισεισμικού Κανονισμού (ΝΕΑΚ) αντιστοιχούν σε σεισμικά γεγονότα με πιθανότητα υπέρβασης 10% εντός 50 ετών. Κατά συνέπεια, οι σεισμικές κινήσεις σχεδιασμού του ΝΕΑΚ έχουν μέση περίοδο επαναφοράς:

$$t_o=-\frac{50}{\ln\left(1-0.10\right)} = 475 \text{ έτη}$$

δηλαδή αντιστοιχούν σε σεισμικές κινήσεις που συμβαίνουν κατά μέσον όρο μια φορά κάθε 475 έτη.

Αν είναι επιθυμητό να αναθεωρηθούν οι σεισμικές κινήσεις σχεδιασμού του ΝΕΑΚ ώστε η πιθανότητα υπέρβασης να μειωθεί από 10% σε 5% εντός 50 ετών, τότε η μέση περίοδος επαναφοράς των σεισμικών κινήσεων σχεδιασμού των έργων θα γίνει:

$$t_o=-\frac{50}{\ln\left(1-0.05\right)} = 975 \text{ έτη}$$

Με την κατανομή Poisson υπολογίζεται η πιθανότητα αστοχίας ενός έργου λόγω κάποιου σπάνιου γεγονότος, δηλαδή ενός γεγονότος με μεγάλη περίοδο επαναφοράς (t_o >> 1). Στα επόμενα εξετάζεται η πιθανότητα αστοχίας ενός έργου από κάποιο γεγονός που μπορεί να μην είναι σπάνιο.

Έστω ότι (p) είναι η πιθανότητα να συμβεί (σε μοναδιαίο χρονικό διάστημα, π.χ. ενός έτους) κάποιο γεγονός που προκαλεί αστοχία του έργου (π.χ. ένας ισχυρός σεισμός). Συνεπώς, η πιθανότητα αστοχίας του έργου στο μοναδιαίο χρονικό διάστημα είναι (p), ενώ η πιθανότητα μή-αστοχίας του έργου στο ίδιο διάστημα είναι (1-p). Αν θεωρηθεί ότι το συγκεκριμένο γεγονός δεν έχει μνήμη (δηλαδή ότι οι διαδοχικές εμφανίσεις του είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους), τότε η πιθανότητα αστοχίας του έργου σε χρονικό διάστημα (n) χρονικών μονάδων (π.χ. ετών) θα είναι:

$$p\text{ (αστοχίας)} = 1 - p\text{ (μή-αστοχίας)} = 1 - (1 - p)^n$$

δεδομένου ότι μή-αστοχία του έργου στο διάστημα των (n) χρονικών μονάδων σημαίνει μή-αστοχία σε κάθε μια από τις παραπάνω χρονικές μονάδες (δηλαδή σε ανεξάρτητα μεταξύ τους ενδεχόμενα). Σύμφωνα με τα ανωτέρω, ο *κίνδυνος αστοχίας* του έργου είναι:

$$R\equiv 1-\left(1-p\right)^n \tag{9.4}$$

Επειδή όμως, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η μέση περίοδος επαναφοράς του γεγονότος που προκαλεί την αστοχία του έργου είναι:

$$N = \frac{1}{p}$$

η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \quad (9.5)$$

Στην ειδική περίπτωση που η μέση περίοδος επαναφοράς του συγκεκριμένου γεγονότος είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μονάδα (N >> 1), δηλαδή εάν p << 1, πράγμα που σημαίνει ότι το γεγονός είναι σπάνιο, τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να προσεγγισθεί από την:

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \approx 1 - e^{-\frac{n}{N}} = 1 - e^{-pn} \quad (9.6)$$

Η τελευταία αυτή σχέση είναι ίδια με τη σχέση 9.3β που δίνει τον κίνδυνο αστοχίας των έργων κατά την κατανομή Poisson (δηλαδή για σπάνια γεγονότα).
Σημείωση: το σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης είναι μικρότερο από 1% εάν N > 50. Συνεπώς θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι οι σχέσεις που αναφέρονται σε σπάνια γεγονότα μπορούν να χρησιμοποιούνται για γεγονότα με περίοδο επαναφοράς άνω των 50 ετών.

Παράδειγμα εφαρμογής:

Ρωγμές σε επιχρίσματα μιας τυπικής πολυκατοικίας εμφανίζονται σε περίπτωση σεισμού μεγέθους Μ > 4.5. Στην περιοχή των Αθηνών, η μέση περίοδος επαναφοράς τέτοιων σεισμών είναι N = 15 έτη. Να προσδιορισθεί η πιθανότητα ρηγμάτωσης των επιχρισμάτων μιας πολυκατοικίας από σεισμό σε χρονικό διάστημα 20 ετών.

Λύση:

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η πιθανότητα ρηγμάτωσης είναι:

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{15}\right)^{20} = 74.84\%$$

Εάν είχε εφαρμοσθεί η σχέση που ισχύει για σπάνια γεγονότα, η αντίστοιχη πιθανότητα θα είχε υπολογισθεί ως:

$$R = 1 - e^{-\frac{20}{15}} = 73.64\%$$

και το υπολογιστικό σφάλμα θα ήταν 1.6%.

9.2.4 Η εκθετική κατανομή

Μια κατανομή που σχετίζεται με την κατανομή Poisson είναι η *εκθετική κατανομή*. Κατά την εκθετική κατανομή, θεωρούνται και πάλι σπάνια γεγονότα με μέση συχνότητα εμφάνισης (λ) ανά μονάδα χρόνου και ζητείται η κατανομή του χρόνου μέχρις ότου συμβεί για πρώτη φορά το συγκεκριμένο γεγονός. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) της κατανομής αυτής είναι:

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} \quad (9.7)$$

οπότε η πιθανότητα ο χρόνος πρώτης εμφάνισης του συγκεκριμένου γεγονότος να είναι μεγαλύτερος από (t)[3] είναι:

$$p\,(T > t) = \int_t^{\infty} f(x)\, dx = e^{-\lambda t} \quad (9.8α)$$

[3] δηλαδή η πιθανότητα να μη συμβεί το συγκεκριμένο γεγονός εντός του χρονικού διαστήματος (t).

ενώ η πιθανότητα να συμβεί το συγκεκριμένο γεγονός εντός χρονικού διαστήματος (t) είναι:

$$p(T<t)=\int_0^t f(x)\,dx = 1-e^{-\lambda t} \qquad (9.8β)$$

Τέλος, ο μέσος χρόνος μεταξύ των διαδοχικών εμφανίσεων του συγκεκριμένου γεγονότος είναι:

$$\mu=\int_0^\infty x f(x)\,dx=\frac{1}{\lambda}$$

και η μέση συχνότητα εμφάνισης του γεγονότος ανά μονάδα χρόνου είναι (λ). Ο μέσος χρόνος μεταξύ των διαδοχικών εμφανίσεων του συγκεκριμένου γεγονότος ονομάζεται *μέση περίοδος επαναφοράς* του γεγονότος. Επειδή το γεγονός θεωρείται σπάνιο, η μέση συχνότητα εμφάνισής του ανά μονάδα χρόνου είναι πολύ μικρή (λ << 1), οπότε η μέση περίοδος επαναφοράς είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μονάδα.

9.3 Πιθανοτική θεώρηση της αστοχίας των τεχνικών έργων

Για τα τεχνικά έργα μπορεί να ορισθεί η “προσδοκώμενη μέση διάρκεια ζωής” (average life expectancy) ως ο μέσος χρόνος μέχρι την εμφάνιση ενός σπάνιου γεγονότος που προκαλεί την αστοχία του έργου. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, εάν (λ) είναι η μέση συχνότητα εμφάνισης του συγκεκριμένου σπάνιου γεγονότος ανά μονάδα χρόνου, τότε η προσδοκώμενη μέση διάρκεια ζωής του έργου είναι $t_o = 1/\lambda$. Είναι προφανές ότι η προσδοκώμενη μέση διάρκεια ζωής ενός έργου είναι ίση με την μέση περίοδο επαναφοράς του γεγονότος που προκαλεί την αστοχία του έργου.

Η πιθανότητα αστοχίας του έργου από κάποιο σπάνιο γεγονός κατά τη διάρκεια της προσδοκώμενης μέσης διάρκειας ζωής του είναι 63.2%. Πράγματι:

$$p(T<t_o)=1-e^{-\lambda t_o}=1-e^{-1} = 63.2\ \%$$

Τα τεχνικά έργα σχεδιάζονται να λειτουργήσουν για μια ορισμένη χρονική περίοδο που ονομάζεται “χρήσιμη διάρκεια ζωής” (useful life). Είναι προφανές ότι η πιθανότητα αστοχίας των έργων εξαρτάται και από τη χρήσιμη διάρκεια ζωής τους. Έτσι, εάν (t_o) είναι η προσδοκώμενη μέση διάρκεια ζωής του έργου και (t) η χρήσιμη διάρκεια ζωής του, τότε η πιθανότητα αστοχίας του έργου από κάποιο σπάνιο γεγονός κατά τη διάρκεια της χρήσιμης ζωής του είναι:

$$p(T<t)=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-t/t_o}$$

Συνήθως, το πρόβλημα τίθεται αντίστροφα: Με βάση τις συνέπειες εκ της πιθανής αστοχίας του έργου εκτιμάται η μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα (p) αστοχίας κατά τη διάρκεια (t) της χρήσιμης ζωής του και ζητείται να προσδιορισθεί η μέση συχνότητα (λ) εμφάνισης του γεγονότος που προκαλεί την αστοχία. Στη συνέχεια, το έργο σχεδιάζεται έναντι του γεγονότος αυτού. Για παράδειγμα, εάν η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας του έργου κατά τη χρήσιμη διάρκεια ζωής του είναι 10%, τότε από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$1-e^{-t/t_o}=0.1 \quad \Rightarrow \quad t/t_o=0.105 \quad \Rightarrow \quad t_o=9.5\,t$$

δηλαδή το έργο πρέπει να σχεδιασθεί με προσδοκώμενη μέση διάρκεια ζωής περίπου δεκαπλάσια της πραγματικής χρήσιμης ζωής του. Έτσι, εάν η χρήσιμη ζωή ενός φράγματος είναι 50 έτη, το φράγμα θα πρέπει να σχεδιασθεί με την πλημμύρα της 500-ετίας (δηλαδή την πλημμύρα με μέση περίοδο επαναφοράς 500 ετών).

Γενικότερα, εάν (p) είναι η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας του έργου κατά τη διάρκεια της χρήσιμης ζωής του, και (λ) είναι η μέση συχνότητα εμφάνισης ενός σπάνιου γεγονότος που προκαλεί αστοχία του έργου, τότε, η διάρκεια (t) της χρήσιμης ζωής του έργου για τη συγκεκριμένη αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας προκύπτει από τη σχέση:

$$p = 1 - e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)$$

ή ισοδύναμα:

$$t = -t_o \ln(1-p)$$

όπου (t_o) είναι η προσδοκώμενη μέση διάρκεια ζωής του έργου. Αντιστοίχως, εάν είναι γνωστή η διάρκεια (t) της χρήσιμης ζωής του έργου, και η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας (p), τότε το έργο θα πρέπει να σχεδιασθεί έναντι σπάνιου γεγονότος με μέση συχνότητα εμφάνισης:

$$\lambda = -\frac{1}{t}\ln(1-p)$$

ή μέση περίοδο επαναφοράς:

$$t_o = -\frac{t}{\ln(1-p)}$$

Τυπικές περιπτώσεις φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

ΜΕΣΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ (σε έτη) ΓΕΓΟΝΟΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ
(για σπάνια γεγονότα)

Αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας:	10%	5%	1%
Χρήσιμη διάρκεια ζωής του έργου (έτη)			
25	237	487	2487
50	475	975	4975
100	950	1950	9950

Δηλαδή, εάν 5% είναι η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας ενός έργου με χρήσιμη διάρκεια ζωής 50 ετών, το έργο θα πρέπει να σχεδιασθεί έναντι σπάνιων γεγονότων με μέση περίοδο επαναφοράς περίπου 1000 ετών.

Παράδειγμα εφαρμογής:

Στην Ελλάδα οι θάνατοι από τροχαία ατυχήματα είναι περί τους 2000 κατ' έτος. Να προσδιορισθεί η πιθανότητα ένας άνθρωπος να σκοτωθεί σε τροχαίο ατύχημα κατά τη διάρκεια της ζωής του (μέση διάρκεια ζωής 75 έτη). Να προσδιορισθεί η ίδια πιθανότητα για τις ΗΠΑ όπου οι ετήσιοι θάνατοι από τροχαία ατυχήματα είναι κατά μέσον όρο 35000.

Στην Ελλάδα, με πληθυσμό 10.000.000, η μέση ετήσια συχνότητα θανάτων από τροχαία ατυχήματα είναι:

$$\lambda_1 = \frac{2.000}{10.000.000} = 1/5000 = 0.0002$$

Αντίστοιχα, στις ΗΠΑ, με πληθυσμό 250.000.000, η μέση ετήσια συχνότητα θανάτων από τροχαία ατυχήματα είναι:

$$\lambda_2 = \frac{35.000}{250.000.000} = 0.00014$$

Οπότε η πιθανότητα θανάτου από τροχαίο ατύχημα κατά τη διάρκεια της ζωής του ανθρώπου (t = 75 έτη) είναι:

$$p = 1 - e^{-\lambda t}$$

που δίνει: Ελλάδα: p_1 = 1.49 % ΗΠΑ: p_2 = 1.04 %

Κατά συνέπεια, στην Ελλάδα, ένας συγκεκριμένος άνθρωπος έχει πιθανότητα να σκοτωθεί σε τροχαίο ατύχημα περίπου 1.5 %, δηλαδή 1/67 (ένας στους εξήντα επτά), ενώ στις ΗΠΑ η ίδια πιθανότητα είναι1% περίπου.

Από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι η πιθανότητα θανάτου ενός ανθρώπου από τροχαίο ατύχημα είναι πολύ μεγάλη (περίπου 1.5%). Αντίθετα, στα μεγάλα τεχνικά έργα συνήθως θεωρούνται οι ακόλουθες αποδεκτές πιθανότητες απώλειας ανθρώπινης ζωής λόγω της αστοχίας του έργου (CERCLA, 1980):

1. Κατά το σχεδιασμό νέων έργων: p = 10^{-5} έως 10^{-6}, δηλαδή μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα απώλειας ζωής ίση με 0.001% έως 0.0001%.
2. Κατά την απόφαση λήψης μέτρων επισκευής ενός ήδη λειτουργούντος έργου: p = 10^{-4}, δηλαδή μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα απώλεια ζωής ίση με 0.01%.

Οι πιθανότητες αυτές είναι 100-10000 φορές μικρότερες από την πιθανότητα απώλειας ανθρώπινης ζωής σε αυτοκινητιστικό δυστύχημα. Η θέσπιση των παραπάνω πολύ μικρών αποδεκτών πιθανοτήτων απώλειας ανθρώπινης ζωής στα τεχνικά έργα οφείλεται κυρίως στη διαφορά μεταξύ του λεγόμενου εκούσιου και ακούσιου κινδύνου, δηλαδή ότι η εκούσια επιλογή χρήσης του αυτοκινήτου δικαιολογεί κατά κάποιον τρόπο τον αυξημένο κίνδυνο από ατύχημα, ενώ αντίθετα ο κίνδυνος από τη διαρροή τοξικών αποβλήτων από μια βιομηχανία είναι ακούσιος (δεδομένου ότι οι κάτοικοι της περιοχής δεν συμμετέχουν στη λήψη της απόφασης για το βαθμό ασφάλειας του έργου).

Το παραπάνω συμπέρασμα δεν είναι απόλυτο αν υπολογίσει κανείς τους θανάτους πεζών από αυτοκινητιστικά ατυχήματα, τα οποία αποτελούν ακούσιο κίνδυνο. Στην Ελλάδα, ο μέσος ετήσιος αριθμός θανάτων πεζών σε τροχαία ατυχήματα είναι 100 και συνεπώς κατά το προηγούμενο παράδειγμα:
λ = 100/10.000.000 = 10^{-5}. Συνεπώς, η πιθανότητα θανάτου ενός πεζού από τροχαίο ατύχημα κατά τη διάρκεια της ζωής του (t = 75 έτη) είναι:

$$p = 1 - e^{-\lambda t} = 7.5 \times 10^{-4} = 0.075\ \%$$

Η πιθανότητα αυτή είναι βεβαίως πολύ μικρότερη από την πιθανότητα θανάτου ενός επιβαίνοντος σε αυτοκίνητο (p = 1.49%), όμως και πάλι είναι 7.5 φορές μεγαλύτερη από τη μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα απώλειας ανθρώπινης ζωής για τη λήψη μέτρων επισκευής ενός υφιστάμενου τεχνικού έργου και 75-750 φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα για το σχεδιασμό νέων τεχνικών έργων.

Αν το γεγονός που προκαλεί την αστοχία του έργου δεν είναι σπάνιο, δηλαδή εάν η μέση συχνότητα εμφάνισής του (λ) δεν είναι πολύ μικρή, τότε ισχύουν τα εξής:

Έστω (p_o) η πιθανότητα να συμβεί (σε μοναδιαίο χρονικό διάστημα, π.χ. ενός έτους) κάποιο γεγονός που προκαλεί την αστοχία του έργου. Τότε, η πιθανότητα αστοχίας του έργου σε χρονικό διάστημα (t) ετών είναι:

$$p = 1 - (1 - p_o)^t$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι εάν η χρήσιμη ζωή του έργου είναι (t) έτη και η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας του κατά τη διάρκεια της χρήσιμης ζωής του είναι (p), τότε το έργο θα πρέπει να σχεδιασθεί έναντι κάποιου γεγονότος που έχει πιθανότητα να συμβεί (ανά έτος):

$$p_o = 1 - \sqrt[t]{1 - p}$$

δηλαδή έναντι κάποιου γεγονότος με μέση περίοδο επαναφοράς:

$$t_o = \frac{1}{p_o} = \frac{1}{1 - \sqrt[t]{1 - p}}$$

Τυπικές περιπτώσεις φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

ΜΕΣΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ (σε έτη) ΓΕΓΟΝΟΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ
(για σπάνια και μή-σπάνια γεγονότα)

Αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας:	10%	5%	1%
Χρήσιμη διάρκεια ζωής του έργου (έτη)			
5	48	98	498
10	95	195	995
25	238	488	2488
50	475	975	4975

Δηλαδή, εάν 5% είναι η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας ενός έργου με χρήσιμη διάρκεια ζωής 10 ετών, το έργο θα πρέπει να σχεδιασθεί έναντι γεγονότων με μέση περίοδο επαναφοράς περίπου 200 ετών.

Αντίστοιχα, εάν δίνονται:

1. Η μέση πιθανότητα (p_o) να συμβεί (εντός ενός έτους) το γεγονός που προκαλεί την αστοχία του έργου και
2. Η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας του έργου (p)

τότε, η χρήσιμη ζωή του έργου (t έτη) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$t = \frac{\ln(1-p)}{\ln(1-p_o)}$$

Παράδειγμα εφαρμογής:

Η σήραγγα προσωρινής εκτροπής ενός φράγματος σχεδιάζεται με χρήσιμη διάρκεια ζωής τριών ετών. Η αποδεκτή πιθανότητα υπερπήδησης του υπό κατασκευήν φράγματος (κατά το διάστημα των τριών ετών) είναι 10%. Να υπολογισθεί το μέγεθος της πλημμύρας σχεδιασμού της σήραγγας προσωρινής εκτροπής.

Λύση:

p = 0.10 , n = 3 έτη, οπότε:

$$p_o = 1 - \sqrt[3]{1-0.10} = 3.45\%$$

δηλαδή το έργο προσωρινής εκτροπής θα πρέπει να σχεδιασθεί για πλημμύρα με πιθανότητα υπέρβασης 3.45% το έτος, δηλαδή για πλημμύρα με μέση περίοδο επαναφοράς 29 ετών.

Αν κατά την επίλυση είχε χρησιμοποιηθεί η σχέση για σπάνια γεγονότα, τότε:

$$t_o = -\frac{t}{\ln(1-p)} = -\frac{3}{\ln(1-0.10)} = 28.5 \text{ έτη}$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1:

Τα φράγματα σχεδιάζονται έναντι υπερπήδησης με τη λεγόμενη *πλημμύρα Ν-ετίας*. Το μέγεθος της πλημμύρας αυτής έχει μέση πιθανότητα υπέρβασης 1/Ν σε κάθε συγκεκριμένο έτος, δηλαδή (ισοδύναμα) η μέση συχνότητα υπέρβασης της πλημμύρας αυτής είναι μια φορά (κατά μέσον όρο) ανά Ν έτη. Συχνά η περίοδος των Ν ετών αναφέρεται και ως μέση περίοδος επαναφοράς του συγκεκριμένου γεγονότος. Όπως προκύπτει από τα ανωτέρω, η μέση περίοδος επαναφοράς ενός γεγονότος (Ν έτη) είναι ίση με το αντίστροφο της μέσης πιθανότητας υπέρβασης (p = 1/Ν) του γεγονότος αυτού στη μονάδα του χρόνου.

Αν θεωρηθεί ότι οι πλημμύρες αυτού του μεγέθους ή μεγαλύτερες συμβαίνουν χρονικά διαστήματα που ακολουθούν την κατανομή Poisson (δηλαδή είναι σπάνια γεγονότα ανεξάρτητα μεταξύ τους), τότε η σταθερά της κατανομής Poisson είναι: λ = 1/Ν.

Ας θεωρηθεί λοιπόν ότι ένα φράγμα σχεδιάσθηκε με την πλημμύρα 50-ετίας. Τότε η πιθανότητα υπερπήδησης του φράγματος εντός διαστήματος 50 ετών (δηλαδή t = 50) είναι:

$$p(X>0) = 1 - e^{-50/50} = 1 - e^{-1} = 63.2\ \%$$

Εάν το φράγμα είχε σχεδιασθεί με την πλημμύρα 100-ετίας, τότε η πιθανότητα υπερπήδησης κατά το διάστημα των 50 ετών είναι:

$$p(X>0) = 1 - e^{-50/100} = 1 - e^{-0.5} = 39.3\ \%$$

Τέλος, αν το φράγμα είχε σχεδιασθεί με την πλημμύρα 1000-ετίας, τότε η πιθανότητα υπερπήδησης σε διάστημα 50 ετών είναι:

$$p\left(X>0\right)=1-e^{-50/1000}=1-e^{-0.05} = 4.9\ \%$$

Γενικότερα, εάν (N) είναι η μέση περίοδος επαναφοράς ενός σπανίου γεγονότος που η υπέρβασή του προκαλεί αστοχία του έργου, και (n) είναι η διάρκεια της χρήσιμης ζωής του έργου, τότε η πιθανότητα αστοχίας του έργου κατά τη διάρκεια της χρήσιμης ζωής του είναι:

$$R=1-e^{-\frac{n}{N}}$$

Η πιθανότητα αυτή συχνά ονομάζεται *κίνδυνος* (risk) αστοχίας του έργου.

Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει τυπικές περιπτώσεις εκτίμησης του κινδύνου αστοχίας ενός έργου:

ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΕΝΟΣ ΕΡΓΟΥ (%)

Χρήσιμη διάρκεια ζωής (έτη)	5	10	25	50	100
Μέση περίοδος επαναφοράς του γεγονότος σχεδιασμού (έτη)					
50	9.5%	18.1%	39.3%	63.2%	86.5%
100	4.9%	9.5%	22.1%	39.3%	63.2%
250	2%	3.9%	9.5%	18.1%	32.9%
500	1%	2%	4.9%	9.5%	18.1%
1000	0.5%	1%	2.5%	4.9%	9.5%

Δηλαδή, εάν 5% είναι η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας ενός έργου με χρήσιμη διάρκεια ζωής 50 ετών, το έργου θα πρέπει να σχεδιασθεί έναντι σπάνιων γεγονότων με μέση περίοδο επαναφοράς περίπου 1000 ετών.

Ας θεωρηθεί ότι στην Ελλάδα υπάρχουν 30 φράγματα που έχουν σχεδιασθεί όλα έναντι της πλημμύρας 1000-ετίας και συνεπώς το καθένα από αυτά έχει πιθανότητα υπερπήδησης κατά τη διάρκεια μιας 50-ετίας (χρήσιμη ζωή του έργου): p = 4.9 % σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα. Στα επόμενα προσδιορίζεται η πιθανότητα να μην αστοχήσει λόγω υπερπήδησης κανένα από τα 30 φράγματα στο διάστημα της επόμενης πεντηκονταετίας.

Ο αριθμός των φραγμάτων που είναι πιθανόν να υπερπηδηθούν στην επόμενη πεντηκονταετία ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή και συνεπώς:

$$p\left(X=x\right)=\binom{n}{x}p^{x}\left(1-p\right)^{n-x}$$

όπου p = 0.049, n = 30 και (x) είναι ο αριθμός των φραγμάτων που πιθανώς υπερπηδούνται. Συνεπώς, η πιθανότητα να μην αστοχήσει δι' υπερπηδήσεως κανένα φράγμα είναι:

$$p(X=0)=\binom{30}{0}p^{0}(1-p)^{30}=(1-p)^{30} = 22.2\ \%$$

Συνεπώς, η πιθανότητα να αστοχήσει λόγω υπερπήδησης τουλάχιστον ένα από τα 30 φράγματα είναι 77.8 % (αρκετά μεγάλη πράγματι).

Πρόβλημα 2:

Το μέγεθος (σε μονάδες Richter) των σεισμών στην Ελλάδα θεωρείται ότι κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο r = 2.35, δηλαδή η πιθανότητα όταν συμβεί ένας σεισμός το μέγεθός του (M) να υπερβαίνει την τιμή (m) είναι:

$$p(M>m)=e^{-\frac{m}{r}}$$

και με τη μορφή πίνακα:

Μέγεθος (m)	Πιθανότητα υπέρβασης (%)
3	27.90
4	18.23
5	11.91
6	7.78
7	5.09
8	3.32

Επιπλέον, θεωρείται ότι οι σεισμοί μεγάλου μεγέθους είναι σπάνια γεγονότα και συμβαίνουν με χρονική συχνότητα που ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Στην περιοχή του φράγματος του Ευήνου, η μέση συχνότητα εμφάνισης σεισμών μεγέθους άνω του 3.0 είναι ένας σεισμός ανά έτος, δηλαδή η μέση περίοδος επαναφοράς των σεισμών μεγέθους M > 3.0 είναι T = 1 έτος.

Το φράγμα σχεδιάζεται για μια χρήσιμη ζωή 50 ετών και η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας του από σεισμό στη διάρκεια της ζωής του δεν πρέπει να υπερβαίνει το 10%. Ζητείται να προσδιορισθεί το μέγεθος του σεισμού σχεδιασμού του έργου.

Λύση:

Αν θεωρηθεί ότι ο σεισμός σχεδιασμού του έργου είναι σπάνιο γεγονός που ακολουθεί την κατανομή Poisson και η πιθανότητα να μην υπερβληθεί στη διάρκεια ζωής του έργου θα πρέπει να είναι 90% (αφού η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας είναι 10%), τότε:

$$p(X=0)=0.90=e^{-\lambda t_o} \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{t_o}\ln(0.90) \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{50}\ln(0.90)=2.1072\times10^{-3}$$

δηλαδή η μέση περίοδος επαναφοράς του σεισμού σχεδιασμού του έργου θα πρέπει να είναι:

$$T=\frac{1}{\lambda} = 474.6 \text{ έτη}$$

Ζητείται λοιπόν να προσδιορισθεί το μέγεθος σεισμού με περίοδο επαναφοράς 474.6 ετών όταν είναι γνωστό ότι σεισμοί μεγέθους άνω του 3.0 έχουν περίοδο επαναφοράς ενός έτους.

Κατά την κατανομή Poisson, η πιθανότητα υπέρβασης ενός σεισμού μεγέθους (m) εντός χρονικού διαστήματος (t) είναι:

$$p(M>m)=e^{-\lambda t}=1-e^{-\frac{t}{T}}$$

όπου (λ) είναι η σταθερά της κατανομής και $T = 1/\lambda$ είναι η μέση περίοδος επαναφοράς του σεισμού σχεδιασμού του έργου. Η παραπάνω σχέση ισχύει για ισχυρούς σεισμούς (σπάνια γεγονότα). Για ασθενείς σεισμούς αντίστοιχα ισχύει:

$$p(M>m)=1-\left(1-\frac{1}{T}\right)^t$$

Επιπλέον, θεωρήθηκε παραπάνω ότι τα μεγέθη των σεισμών που συμβαίνουν σε κάποιο χρονικό διάστημα κατανέμονται εκθετικά και συνεπώς:

$$\frac{p(M>m_1)}{p(M>m_2)}=\frac{e^{-m_1/r}}{e^{-m_2/r}}=\frac{1-(1-1/T_1)^t}{1-e^{-t/T_2}}$$

όπου (T_1, T_2) είναι οι μέσες περίοδοι επαναφοράς των σεισμών μεγέθους (m_1, m_2). Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει ότι:

$$e^{(m_2-m_1)/r}=\frac{1-(1-1/T_1)^t}{1-e^{-t/T_2}}$$

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω σχέση για: m_1 = 3, T_1 = 1 έτος, T_2 = 474.6 έτη, r = 2.35 και για χρονικό διάστημα t = 50 έτη, προκύπτει: m_2 = 8.4, δηλαδή ο σεισμός σχεδιασμού του έργου θα πρέπει να έχει μέγεθος 8.4.

Αν θεωρηθεί ότι ο σχεδιασμός του φράγματος για σεισμό μεγέθους 8.4 είναι αντι-οικονομικός και επιλεγεί ως σεισμός σχεδιασμού ένας σεισμός μεγέθους M = 8.0, ζητείται να προσδιορισθεί η πιθανότητα αστοχίας του φράγματος λόγω σεισμού μεγέθους M = 8.0 σε διάστημα 50 ετών.

Εφαρμογή της παραπάνω σχέσης με: m_1 = 3, T_1 = 1 έτος, t = 50 έτη, m_2 = 8, r = 2.35 δίνει T_2 = 394.2 έτη, δηλαδή ότι ο σεισμός μεγέθους M = 8.0 έχει περίοδο επαναφοράς 394.2 ετών. Συνεπώς, εάν το φράγμα σχεδιασθεί έναντι σεισμού μεγέθους M = 8.0, η πιθανότητα αστοχίας κατά τη διάρκεια της χρήσιμης ζωής του θα είναι:

$$p(M>8.0)=1-e^{-\frac{t}{T}}=1-e^{-\frac{50}{394.2}}=11.9\%$$

που προφανώς είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από τη θεωρούμενη ως αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας (10%).

Πρόβλημα 3:

Ένα διυλιστήριο πετρελαιοειδών διαθέτει n = 30 δεξαμενές αποθήκευσης καυσίμων. Οι δεξαμενές αυτές έχουν προσδοκώμενη μέση διάρκεια ζωής t_o = 30 έτη, δηλαδή η μέση περίοδος εμφάνισης διαρροών είναι 30 έτη. Η χρήσιμη ζωή των δεξαμενών (δηλαδή ο χρόνος μέχρι την αντικατάστασή τους) προσδιορίζεται από τη συνθήκη ότι η πιθανότητα εμφάνισης διαφυγών κατά τη διάρκεια της χρήσιμης ζωής τους δεν θα πρέπει να υπερβαίνει το p = 25 % (αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας). Το κόστος της επισκευής μιας δεξαμενής σε περίπτωση εμφάνισης διαφυγών είναι $C = 10^6$ δρχ. Να προσδιορισθεί το μέσο αναμενόμενο ετήσιο κόστος του διυλιστηρίου για την επισκευή των δεξαμενών από διαρροές. Να προσδιορισθεί επίσης το αντίστοιχο κόστος του διυλιστηρίου σε περίπτωση που οι δεξαμενές αντικαθίστανται σε τακτικότερα διαστήματα (π.χ. όταν p = 15%).

Λύση:

Στην περίπτωση που η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας της κάθε δεξαμενής είναι p = 25%, η διάρκεια της χρήσιμης ζωής (δηλαδή ο χρόνος μέχρι την αντικατάσταση) κάθε δεξαμενής θα πρέπει να είναι:

$$t = -t_o \ln(1-p) = -30 \times \ln(1-0.25) = 8.63 \text{ έτη}$$

Κατά τη διάρκεια της χρήσιμης ζωής των δεξαμενών του διυλιστηρίου (8.63 έτη), τα πιθανά ενδεχόμενα, οι αντίστοιχες πιθανότητες και το κόστος επισκευής για κάθε ενδεχόμενο είναι:

Ενδεχόμενο	Πιθανότητα	Κόστος επισκευής
ουδεμία δεξαμενή αστοχεί	$p(0)$	$C_0 = 0$
μια δεξαμενή αστοχεί	$p(1)$	$C_1 = C$
2 δεξαμενές αστοχούν	$p(2)$	$C_2 = 2{*}C$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
30 δεξαμενές αστοχούν	$p(30)$	$C_2 = 30{*}C$

όπου:

$$p(x) = \binom{30}{x} p^x (1-p)^{30-x}$$

Οπότε το συνολικό αναμενόμενο κόστος θα είναι:

$$\begin{aligned} C_T &= C_o p(0) + C_1 p(1) + \ldots + C_{3o} p(30) = \\ &= C \cdot \{0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + \ldots + 30 \cdot p(30)\} = \\ &= 30 \cdot C \cdot p = 30 \times 10^6 \times 0.25 = 7.500.000 \ \delta\rho\chi. \end{aligned}$$

και συνεπώς το μέσο ετήσιο αναμενόμενο κόστος θα είναι:

$$C' = 7.500.000 / 8.63 = 869.061 \text{ δρχ/έτος}$$

Αντίστοιχα, εάν p = 0.15, τότε με την παραπάνω μεθοδολογία προκύπτει ότι: t = 4.88 έτη

$$C_t = 30 \text{ x } 10^6 \text{ x } 0.15 = 4.500.000 \text{ δρχ.}$$

και:

$$C' = 4.500.000 / 4.88 = 922.131 \text{ δρχ/έτος}$$

δηλαδή η μείωση της μέσης πιθανότητας αστοχίας προκαλεί αύξηση του μέσου ετήσιου κόστους συντήρησης.

Από το ανωτέρω παράδειγμα προκύπτει το (προφανές) συμπέρασμα ότι η μείωση της αποδεκτής πιθανότητας αστοχίας των έργων συνεπάγεται αυξημένο κόστος. Επιπλέον, προέκυψε ότι, αν μοναδική συνιστώσα του “κόστους” της αστοχίας του έργου είναι το κόστος επισκευής ή αντικατάστασής του, τότε από καθαρά λογιστική άποψη συμφέρει η επισκευή ή αντικατάσταση των έργων να γίνεται στα κατά το δυνατόν μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η αύξηση του χρόνου αντικατάστασης των δεξαμενών από 4.88 έτη σε 8.63 έτη μείωσε το ετήσιο κόστος από 922131 δρχ. σε 869061 δρχ. Βεβαίως, η αντικατάσταση των δεξαμενών σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα συνεπάγεται αύξηση της πιθανότητας αστοχίας κάθε δεξαμενής (στο συγκεκριμένο παράδειγμα από 15% σε 25%). Συνήθως, η αυξημένη πιθανότητα αστοχίας περιλαμβάνει και ένα πρόσθετο κόστος λόγω της ανάγκης αποκατάστασης των ζημιών που θα προκληθούν από την ενδεχόμενη αστοχία.

Πρόβλημα 4:

Ο πυθμένας ταμιευτήρα αποθήκευσης τοξικών αποβλήτων επιφάνειας κατόψεως 30 στρεμμάτων έχει επενδυθεί με συνθετική στεγανωτική μεμβράνη PVC πάχους 2 mm. Κάτω από τη μεμβράνη έχει κατασκευασθεί συμπυκνωμένη αργιλική στρώση πάχους 1.20 m. Η αργιλική στρώση υπέρκειται καρστικών ασβεστολίθων που επικοινωνούν ελευθέρως με τον υδροφορέα της περιοχής.

Η συνθετική μεμβράνη αποτελείται από λωρίδες πλάτους 4 μέτρων και μήκους 20 μέτρων που έχουν συγκολληθεί με διπλή ραφή. Λόγω τυχαίων σφαλμάτων κατά τη συγκόλληση των φύλλων, οι ραφές δεν είναι πλήρως στεγανές αλλά κατά θέσεις έχουν οπές. Η εμπειρία δείχνει ότι η κατανομή του αριθμού των οπών ακολουθεί την κατανομή Poisson (δηλαδή είναι σπάνια γεγονότα) με μέση τιμή μια (1) οπή ανά τέσσερα στρέμματα μεμβράνης.

Συνέπεια της ύπαρξης μιας οπής στη στεγανωτική μεμβράνη του πυθμένα του ταμιευτήρα είναι η διαφυγή αποβλήτων διαμέσου της οπής προς την υποκείμενη συμπυκνωμένη αργιλική στρώση. Λόγω αλληλεπίδρασης των τοξικών αποβλήτων με τα αργιλικά πλακίδια, η άργιλος βαθμιαία αχρηστεύεται λόγω διόγκωσης και η διαπερατότητά της αυξάνει σημαντικά. Η διόγκωση της αργίλου αρχίζει από την ανώτερη επιφάνεια της στρώσης και βαθμιαία προχωρεί προς τα κάτω.

Η προβλεπόμενη διάρκεια ζωής του συγκεκριμένου ταμιευτήρα αποβλήτων είναι 20 έτη. Πειράματα έχουν δείξει ότι μετά από 20-ετή έκθεση στα τοξικά απόβλητα, το πάχος της αργιλικής στρώσης που αχρηστεύεται λόγω διόγκωσης έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή m = 20 cm, δηλαδή:

$$p(D > d) = e^{-d/m}$$

σχέση που δίνει την πιθανότητα το πάχος της ζώνης της αργίλου που έχει αχρηστευθεί (μετά από 20-ετή έκθεση σε τοξικά απόβλητα) να υπερβαίνει την τιμή d (σε cm). Η παραπάνω σχέση δίνει τις τιμές του ακόλουθου πίνακα:

d (cm)	p (D > d)
0	1.00
20	0.368
30	0.223
40	0.135
60	0.0497
80	0.0183
100	0.00674

Για παράδειγμα, μετά 20-ετή έκθεση στα τοξικά απόβλητα, υπάρχει πιθανότητα 5% να έχει αχρηστευθεί η άργιλος σε πάχος μεγαλύτερο από 60 cm.

Λόγω της τοπικής μείωσης του ενεργού πάχους της αργιλικής στεγανωτικής στρώσης, και για να αποφευχθεί το φαινόμενο της διασωλήνωσης[4] (piping) του υπολειπόμενου πάχους της αργιλικής στρώσης θα πρέπει να μειωθεί το βάθος των αποβλήτων στον ταμιευτήρα. Με τον τρόπο αυτό θα μειωθεί η υδραυλική κλίση και συνεπώς θα μειωθεί ο κίνδυνος ανάπτυξης του φαινομένου της διασωλήνωσης. Συγκεκριμένα, είναι επιθυμητό να διατηρηθεί η ίδια τιμή της υδραυλικής κλίσης (i) εντός της αργίλου πριν και μετά την αχρήστευση μέρους της αργιλικής στρώσης, ώστε να διατηρηθεί ο ίδιος βαθμός ασφάλειας έναντι διασωλήνωσης. Έστω:

- H_o = αρχικό επιτρεπόμενο βάθος αποβλήτων στον ταμιευτήρα = 12 m
- L = 1.20 m = αρχικό πάχος αργιλικής στρώσης
- d = πάχος της αργίλου που έχει αχρηστευθεί λόγω διόγκωσης μέσω της έκθεσης στα απόβλητα. Αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή D.
- h = επιτρεπόμενο βάθος αποβλήτων στον ταμιευτήρα που αντιστοιχεί σε ενεργό πάχος αργίλου (L - d). Αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή H.

Συνεπώς, το βάθος (h) υπολογίζεται ως εξής:

$$i_o = \frac{H_o}{L} = \frac{h}{L-d} \quad \Rightarrow \quad h = H_o - \left(\frac{H_o}{L}\right)d$$

[4] κατά το φαινόμενο αυτό, λόγω υψηλής τιμής της υδραυλικής κλίσης, γίνεται έκπλυση της αργίλου, με συνέπεια την απότομη αύξηση των διαφυγών. Το φαινόμενο επιταχύνεται με την πάροδο του χρόνου λόγω της συνεχιζόμενης έκπλυσης της αργίλου προς τα υποκείμενα στρώματα.

Ισοδύναμα, ισχύει: $d = L - \left(\dfrac{L}{H_o}\right)h$

Με βάση τα ανωτέρω, ζητείται να προσδιορισθεί η συνάρτηση κατανομής του βάθους των αποβλήτων στον ταμιευτήρα, δηλαδή η πιθανότητα αστοχίας του πυθμένα του ταμιευτήρα λόγω διασωλήνωσης, συναρτήσει του βάθους των αποβλήτων στον ταμιευτήρα.

Λύση:

Η αστοχία του πυθμένα του ταμιευτήρα λόγω διασωλήνωσης του τμήματος της αργιλικής στρώσης που απομένει μετά την αχρήστευση μέρους της αργίλου από τα τοξικά απόβλητα είναι ένα ενδεχόμενο που εκφράζεται από τη σχέση: $i > i_o \;\; \Rightarrow \;\; H > h = H_o - (H_o/L)d$. Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο ($H < h$), δηλαδή η μή-αστοχία του πυθμένα του ταμιευτήρα μπορεί να συμβεί όταν και μόνον όταν συμβαίνει ένα από τα επόμενα:

1. Ο πυθμένας της δεξαμενής δεν έχει καμμία οπή, δηλαδή X = 0, όπου X είναι ο αριθμός των οπών.
2. Ο πυθμένας της δεξαμενής έχει μια οπή (X = 1) και ταυτόχρονα, το αχρηστευθέν πάχος της αργίλου στη θέση εκείνη είναι μικρότερο από το ελάχιστο απαιτούμενο για να μην συμβεί διασωλήνωση, δηλαδή ($D_1 < d$).
3. Ο πυθμένας έχει δυο οπές (X = 2) και στις θέσεις των δυο οπών $D_1 < d$ και $D_2 < d$.
4. Ως άνω για X = 3, $D_1 < d$, $D_2 < d$, $D_3 < d$.
5. κλπ.

Σημειώνεται ότι τα παραπάνω ενδεχόμενα είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα (ξένα μεταξύ τους). Επίσης σε κάθε περίπτωση (π.χ. X = 3, $D_1 < d$, $D_2 < d$, $D_3 < d$), οι συνθήκες αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης: $p(D_1 < d) = p(D_2 < d) = \ldots = p(D_n < d) = p(D < d) = 1 - e^{-d/m}$. Τέλος:

$$p(D < d) = p\left(D < L - \frac{L}{H_o}h\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{m}\left(L - \frac{L}{H_o}h\right)\right)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$\begin{aligned} p(H < h) &= p(X = 0) + p(X = 1)\cdot p(D < d) + \\ & p(X = 2)\cdot p(D < d)\cdot p(D < d) + \\ & p(X = 3)\cdot \{p(D < d)\}^3 + \ldots \end{aligned}$$

Αλλά κατά την κατανομή Poisson:

$$p(X = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda\, t)^n}{n!}$$

όπου λ = 0.25 οπές/στρέμμα και t = 30 στρέμματα, δηλαδή: $\lambda\, t = 7.5$. Συνδυάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει:

$$p(H < h) = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\, t)^n \cdot \{p(D < d)\}^n}{n!} = e^{-\lambda t}\cdot e^{(\lambda t)\{p(D<d)\}}$$

και τελικώς, η πιθανότητα μή-αστοχίας του πυθμένα για βάθος αποβλήτων (h) είναι ίση με:

$$p(H < h) = \exp\left\{-(\lambda\, t)\exp\left[-\frac{1}{m}\left(L - \frac{L}{H_o}h\right)\right]\right\}$$

Εφαρμογή για $\lambda\, t = 7.5$, $m = 20$ cm, L = 120 cm, H_o = 12 m δίνει:

Βάθος αποβλήτων στον ταμιευτήρα h (m)	Πιθανότητα μή-αστοχίας, δηλαδή: $p(H < h)$	Πιθανότητα αστοχίας
12	0.0006 $\approx$ 0	$\approx$ 1
10	0.063	0.937
8	0.362	0.638
6	0.688	0.312
5	0.797	0.203
4	0.872	0.128
3	0.920	0.08
2	0.951	0.049
1	0.970	0.030

Κατά συνέπεια, αναλόγως της αποδεκτής πιθανότητας αστοχίας του πυθμένα, θα πρέπει να μειωθεί το βάθος των αποβλήτων στον ταμιευτήρα. Αν για παράδειγμα η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας του πυθμένα (και συνεπώς ρύπανσης του υποκείμενου υδροφορέα) είναι 10%, τότε το βάθος των αποβλήτων στον ταμιευτήρα θα πρέπει να μειώνεται βαθμιαία από 12 m στην αρχή έως 3.50 m μετά την πάροδο εικοσαετίας.