ΣΧΟΛΗ Ε.Μ.Φ.Ε 5^o ΕΞΑΜΗΝΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

ΛΥΣΗ $3^{ης}$ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΜΑ 1.

Θεωρούμε το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Πρόβλημα 0)

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) - 5e^{-t}\sin(5t), & t \in [0,3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με πραγματική λύση την $y(t) = \cos(5t)e^{-t}$. Θα επιλυθεί αριθμητικά με την άμεση πολυβηματική μέθοδο Runge-Kutta τεσσάρων σταδίων τετάρτης τάξης (rk4.m) και με την έμμεση μονοβηματική μέθοδο του Τραπεζίου (trap.m), η οποία έχει τάξη ακρίβειας 2. Το βήμα είναι σταθερό με τιμή $h = 0.1$.

Βήμα 1:

Δημιουργώ στο Matlab τα «function-αρχεία» του Προβλήματος:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% H διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού  f0.m, που θα επιλύσει η μέθοδος %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function yprime = f0(t,y);
yprime=-y-5*exp(-t)*sin(5*t);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% H πραγματική λύση  f0true.m του Προβλήματος 0          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function ytrue = f0true(t);
ytrue =cos(5*t).*exp(-t);
```

Βήμα 2:

Δημιουργώ στο Matlab το «script-αρχείο» για το Πρόβλημα 0:

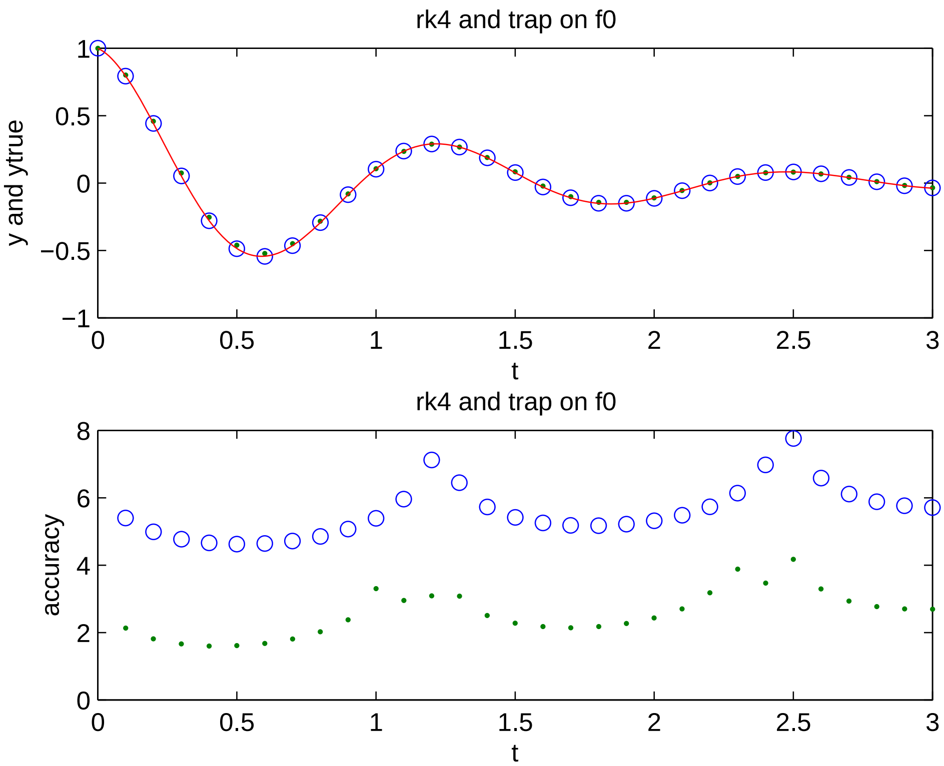
```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Driver program run31p0.m                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
clear all
format long
hold off
clf
% Αρχικοποίηση του προβλήματος
t0 = 0; tfinal = 3; y0 = 1; h=0.1;
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 0 με τις 2 μεθόδους
[tout1, yout1] = rk4('f0', t0, tfinal, h, y0);
[tout2, yout2] = trap('f0', t0, tfinal, h, y0);
% Απόλυτο σφάλμα σε κάθε σημείο της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
err1=abs(yout1-f0true(tout1));
err2=abs(yout2-f0true(tout2));
% Ακρίβεια σε κάθε σημείο της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
acc1=-log10(err1);
acc2=-log10(err2);
% Δημιουργία πυκνής διαμέρισης με βήμα 0.01 για την f0true
tout3=t0:0.01:tfinal;
% Γραφική παράσταση των προσεγγιστικών λύσεων και της πραγματικής λύσης
subplot(2,1,1); plot(tout1, yout1, 'o', tout2, yout2, '.', tout3, f0true(tout3), '-')
title('rk4 and trap on f0'); xlabel('t'); ylabel('y and ytrue');
% Γραφική παράσταση του πλήθους των σημαντικών δεκαδικών ψηφίων σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης για τις 2 μεθόδους
subplot(2,1,2); plot(tout1, acc1, 'o', tout2, acc2, '.')
title('rk4 and trap on f0'); xlabel('t'); ylabel('accuracy');
```

Σημείωση: Οι επεξηγήσεις που δίνονται μετά από το σύμβολο % αποτελούν σχόλια και δίνονται για διευκρίνηση προς τον αναγνώστη, οπότε η εμφάνιση τους είναι προαιρετική.

Γραφήματα:

Έχουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις. Παρατηρείστε οτι η μέθοδος που λύνει το Πρόβλημα 0 με τη μεγαλύτερη ακρίβεια είναι η μέθοδος rk4.m. Γιατί συμβαίνει αυτό;



ΕΡΩΤΗΜΑ 2.

Θεωρούμε το άκαμπτο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Πρόβλημα 3)

$$\begin{cases} y'(t) = 5e^{5t}(y(t) - t)^2 + 1, \quad t \in [0, 1.5] \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

με πραγματική λύση την $y(t) = t - e^{-5t}$. Θα επιλυθεί αριθμητικά με τις μεθόδους rk4.m και trap.m, για τα βήματα $h = 0.2$ και $h = 0.25$.

Βήμα 1:

Δημιουργώ στο Matlab τα «function-αρχεία» του νέου Προβλήματος 3:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Η διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού  f3.m για το Πρόβλημα 3    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function yprime = f3(t,y);
% stiff
yprime=5*exp(5*t).*(y-t).^2+1;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Η πραγματική λύση  f3true.m του Προβλήματος 3          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function ytrue = f3true(t);
% stiff
ytrue =t-exp(-5*t);
```

Βήμα 2:

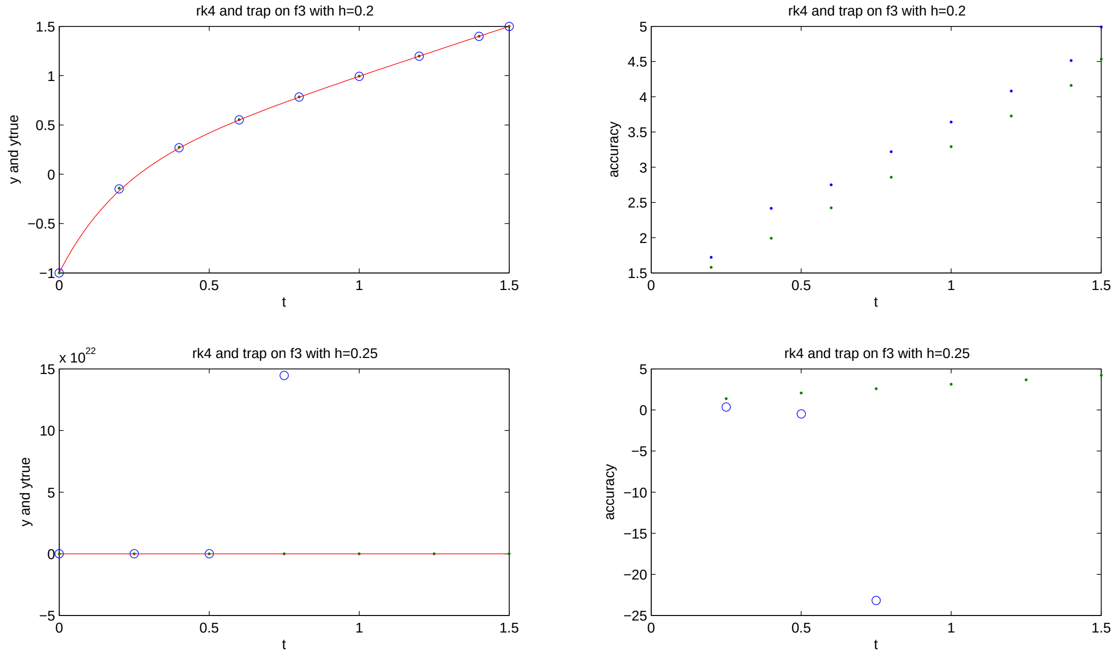
Δημιουργώ στο Matlab το «script-αρχείο» για το Πρόβλημα 3 :

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Driver program run32p3.m                    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
format long
hold off
```

```
clf
% Αρχικοποίηση του προβλήματος
t0 = 0; tfinal = 1.5; y0 = -1; h=0.2;
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 3 με βήμα h=0.2
[tout1, yout1] = rk4('f3', t0, tfinal, h, y0);
[tout2, yout2] = trap('f3', t0, tfinal, h, y0);
% Απόλυτο σφάλμα σε κάθε σημείο της διαμέρισης
err1=abs(yout1-f3true(tout1));
err2=abs(yout2-f3true(tout2));
% Ακρίβεια σε κάθε σημείο της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
acc1=-log10(err1);
acc2=-log10(err2);
% Δημιουργία πυκνής διαμέρισης με βήμα 0.01 για την f3true
tout=t0:0.01:tfinal;
% Γραφική παράσταση των προσεγγιστικών λύσεων και της πραγματικής λύσης
% Για την σύνταξη και χρήση της εντολής subplot ανατρέχουμε στη θεωρία ή
% στη βοήθεια του Matlab
subplot(2,2,1); plot(tout1, yout1, 'o', tout2, yout2, '.', tout, f3true(tout), '-')
title('rk4 and trap on f3 with h=0.2'); xlabel('t'); ylabel('y and ytrue');
% Γραφική παράσταση του πλήθους των σημαντικών δεκαδικών ψηφίων σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης
subplot(2,2,2); plot(tout1, acc1, 'o', tout2, acc2, '.')
title('rk4 and trap on f3 with h=0.2'); xlabel('t'); ylabel('accuracy');
% Όμοια με τα παραπάνω για βήμα h=0.25
h=0.25;
[tout3, yout3] = rk4('f3', t0, tfinal, h, y0);
[tout4, yout4] = trap('f3', t0, tfinal, h, y0);
err3=abs(yout3-f3true(tout3)); acc3=-log10(err3);
err4=abs(yout4-f3true(tout4)); acc4=-log10(err4);
subplot(2,2,3); plot(tout3, yout3, 'o', tout4, yout4, '.', tout, f3true(tout), '-')
title('rk4 and trap on f3 with h=0.25'); xlabel('t'); ylabel('y and ytrue');
subplot(2,2,4); plot(tout3, acc3, 'o', tout4, acc4, '.')
title('rk4 and trap on f3 with h=0.25'); xlabel('t'); ylabel('accuracy');
```

Γραφικές Παραστάσεις

Παρατηρείστε οτι μόνο η μέθοδος του Τραπεζίου (trap.m) καταφέρνει να λύσει το Πρόβλημα 3.



ΕΡΩΤΗΜΑ 3.

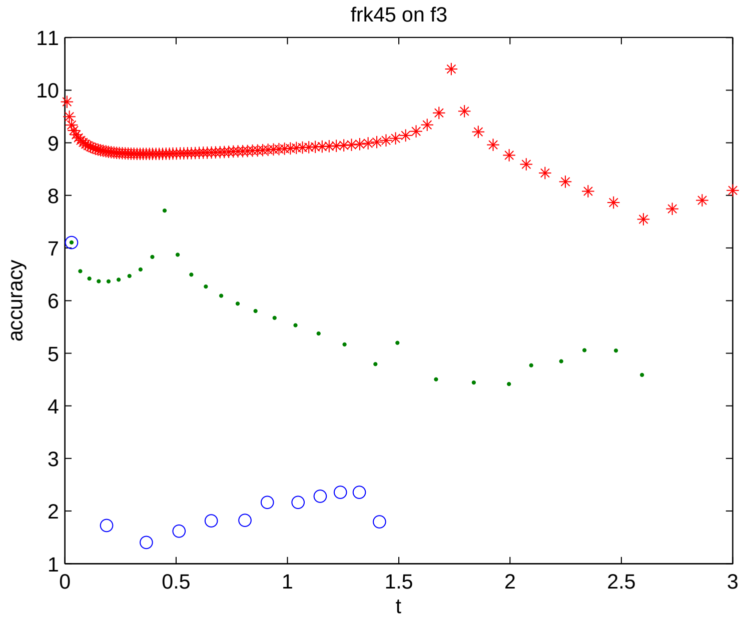
Θα επιλυθεί το Πρόβλημα 3 του προηγούμενου ερωτήματος με το ζεύγος μεθόδων Runge-Kutta έξι σταδίων τάξεων 5(4) (frk45.m) μεταβλητού βήματος, στο διάστημα [0,3] με τιμές παραμέτρου ανοχής $10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-8}$.

Δημιουργώ στο Matlab το «script-αρχείο» για το Πρόβλημα 3 :

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Driver program run33p3.m %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
format long
hold off
clf
% Αρχικοποίηση του προβλήματος
t0 = 0; tfinal = 3; y0 = -1;
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 3 και ακρίβεια σε κάθε σημείο της
% διαμέρισης, με ανοχή tol=1e-2
tol=1e-2;
[tout1, yout1] = frk45('f3', t0, tfinal, y0, tol)
err1=abs(yout1-f3true(tout1)), acc1=-log10(err1);
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 3 και ακρίβεια σε κάθε σημείο της
% διαμέρισης, με ανοχή tol=1e-5
tol=1e-5;
[tout2, yout2] = frk45('f3', t0, tfinal, y0, tol)
err2=abs(yout2-f3true(tout2)), acc2=-log10(err2);
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 3 και ακρίβεια σε κάθε σημείο της
% διαμέρισης, με ανοχή tol=1e-2
tol=1e-8;
[tout3, yout3] = frk45('f3', t0, tfinal, y0, tol)
err3=abs(yout3-f3true(tout3)), acc3=-log10(err3);
% Γραφική παράσταση του πλήθους των σημαντικών δεκαδικών ψηφίων σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης για κάθε τιμή ανοχής
plot(tout1, acc1, 'o', tout2, acc2, '.', tout3, acc3, '*')
title('frk45 on f3'); xlabel('t'); ylabel('accuracy');
```

Γράφημα:

Έχουμε το ακόλουθο γράφημα.



ΕΡΩΤΗΜΑ 4.

Θα επιλυθεί το Πρόβλημα 0 του ερωτήματος 1 με τη μέθοδο rk4.m και την άμεση πολυβηματική μέθοδο Adams-Bashforth 5 σταδίων (ab5sem.m), σε μια διαμέριση του [0,3] με σταθερό βήμα $h = 0.1$.

Βήμα 1:

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Στο ήδη υπάρχον «function-αρχείο» f0.m του Προβλήματος 0 θα πρέπει να κάνω την παρακάτω αλλαγή:

$$\text{yprime} = -y - 5 * \exp(-t) \boldsymbol{.} * \sin(5 * t);$$

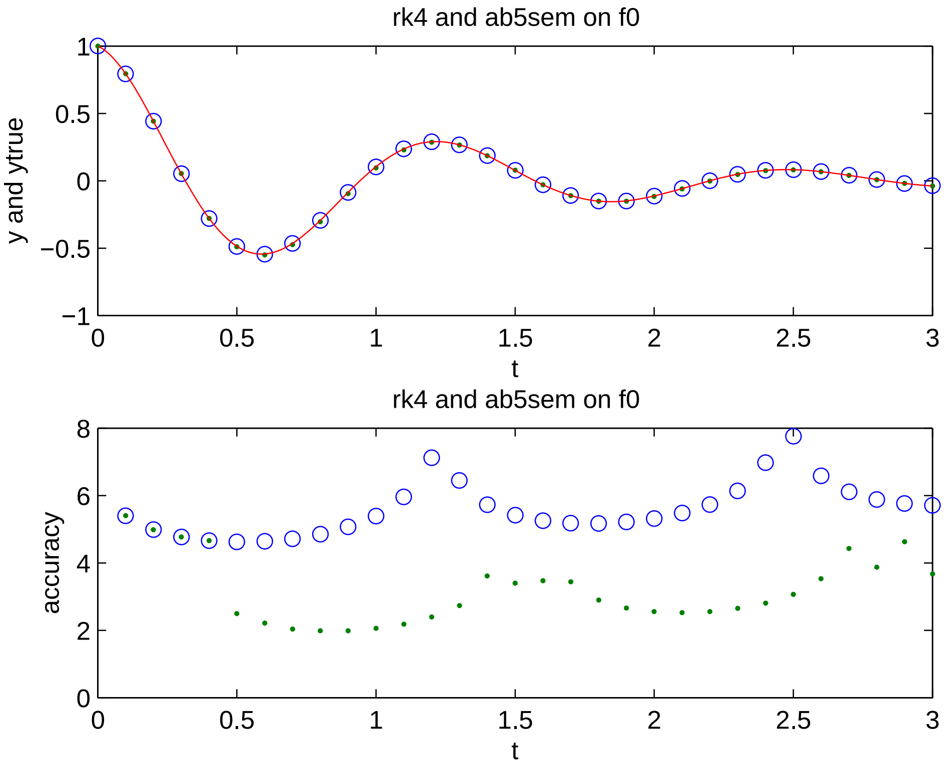
Δηλαδή θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός «**.***» μεταξύ των διανυσμάτων $\exp(-t)$ και $\sin(5 * t)$, για να γίνει η πράξη του πολλαπλασιασμού στοιχείο προς στοιχείο.

Βήμα 2:

«script-αρχείο» για το Πρόβλημα 0 (τα σχόλια παραλείπονται):

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Driver program run34p0.m                    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
format long
hold off
clf
t0 = 0; tfinal = 3; y0 = 1; h=0.1;
[tout1, yout1] = rk4('f0', t0, tfinal, h, y0);
[tout2, yout2] = ab5sem('f0', t0, tfinal, h, y0);
err1=abs(yout1-f0true(tout1)); err2=abs(yout2-f0true(tout2));
acc1=-log10(err1); acc2=-log10(err2);
tout=t0:0.01:tfinal;
subplot(2,1,1); plot(tout1, yout1, 'o', tout2, yout2, '.', tout, f0true(tout), '-')
title('rk4 and ab5sem on f0'); xlabel('t'); ylabel('y and ytrue');
subplot(2,1,2); plot(tout1, acc1, 'o', tout2, acc2, '.')
title('rk4 and ab5sem on f0'); xlabel('t'); ylabel('accuracy');
```

Γράφημα:



rk4 and ab5sem on f0
y and ytrue
1
0.5
0
−0.5
−1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t
rk4 and ab5sem on f0
accuracy
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t