ΣΧΟΛΗ Ε.Μ.Φ.Ε 5^{o} ΕΞΑΜΗΝΟ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ
ΛΥΣΗ $2^{ης}$ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Θεωρούμε το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Πρόβλημα 0)

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) - 5e^{-t}\sin(5t), & t \in [t_0, t_{\text{final}}] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με πραγματική λύση την $y(t) = \cos(5t)e^{-t}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1.

Θα επιλυθεί το Πρόβλημα 0 αριθμητικά με την άμεση μέθοδο Euler (euler.m), την Improved Euler (impeuler.m) και την άμεση πολυβηματική μέθοδο Runge-Kutta τεσσάρων σταδίων τετάρτης τάξης (rk4.m), στο διάστημα [0,3] με σταθερό βήμα $h = 0.1$.

Βήμα 1:

Δημιουργώ στο Matlab τα «function-αρχεία» του Προβλήματος 0:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Η διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού  f0.m, που θα επιλύσει η μέθοδος %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function yprime = f0(t,y);
yprime=-y-5*exp(-t)*sin(5*t);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Η πραγματική λύση  f0true.m του Προβλήματος 0            %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function ytrue = f0true(t);
ytrue =cos(5*t).*exp(-t);
```

Βήμα 2:

Δημιουργώ στο Matlab το «script-αρχείο» για το Πρόβλημα 0:

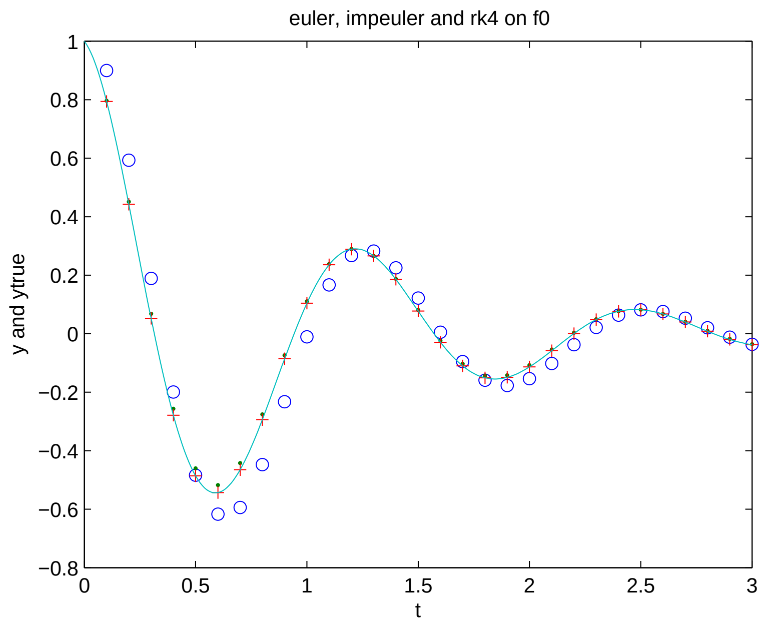
```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Driver program run21p0.m                    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
clear all
format long
hold off
clf
% Αρχικοποίηση του προβλήματος
t0 = 0; tfinal = 3; y0 = 1; h=0.1;
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 0 με τις 3 μεθόδους
[tout1, yout1] = euler('f0', t0, tfinal, h, y0)
[tout2, yout2] = impeuler('f0', t0, tfinal, h, y0)
[tout3, yout3] = rk4('f0', t0, tfinal, h, y0)
% Δημιουργία πυκνής διαμέρισης με βήμα 0.01 για την f0true
tout4=t0:0.01:tfinal;
% Γραφική παράσταση των προσεγγιστικών λύσεων και της πραγματικής λύσης
plot(tout1, yout1, 'o', tout2, yout2, '.', tout3, yout3,'+',tout4,f0true(tout4), '-')
title('euler, impeuler and rk4 on f0'); xlabel('t'); ylabel('y and ytrue');
```

Σημείωση: Οι επεξηγήσεις που δίνονται μετά από το σύμβολο % αποτελούν σχόλια και δίνονται για διευκρίνηση προς τον αναγνώστη.

Γραφική Παράσταση:

Εμφανίζεται η παρακάτω γραφική παράσταση:



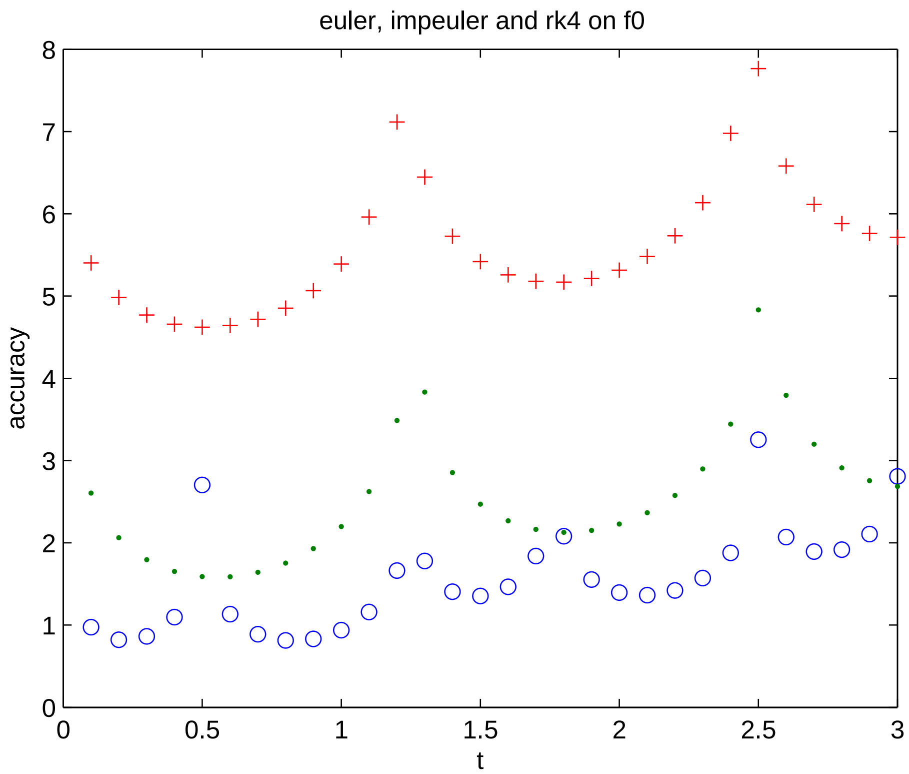
ΕΡΩΤΗΜΑ 2.

Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα του ερωτήματος 1.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Driver program run22p0.m               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
format long
hold off
clf
% Αρχικοποίηση του προβλήματος
t0 = 0; tfinal = 3; y0 = 1; h=0.1;
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 0 με τις 3 μεθόδους
[tout1, yout1] = euler('f0', t0, tfinal, h, y0);
[tout2, yout2] = impeuler('f0', t0, tfinal, h, y0);
[tout3, yout3] = rk4('f0', t0, tfinal, h, y0);
% Απόλυτο σφάλμα σε κάθε σημείο της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
err1=abs(yout1-f0true(tout1))
err2=abs(yout2-f0true(tout2))
err3=abs(yout3-f0true(tout3))
% Ακρίβεια σε κάθε σημείο της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
acc1=-log10(err1);
acc2=-log10(err2);
acc3=-log10(err3);
% Γραφική παράσταση του πλήθους των σημαντικών δεκαδικών ψηφίων σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης για τις 3 μεθόδους
plot(tout1, acc1, 'o', tout2, acc2, '.', tout3, acc3, '+')
title('euler, impeuler and rk4 on f0'); xlabel('t'); ylabel('accuracy');
```

Γραφική Παράσταση:

Θα πρέπει να εμφανιστεί το παράκατω γράφημα. Παρατηρείστε οτι η μέθοδος που λύνει το Πρόβλημα 0 με τη μεγαλύτερη ακρίβεια είναι η μέθοδος rk4.m. Γιατί συμβαίνει αυτό;



ΕΡΩΤΗΜΑ 3.

Θα επιλυθεί το Πρόβλημα 0 με το ζεύγος μεθόδων Runge-Kutta έξι σταδίων τάξεων 5(4) (frk45.m) μεταβλητού βήματος, στο διάστημα [0,8] με τιμές παραμέτρου ανοχής $10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Driver program run23p0.m                  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
format long
hold off
clf
% Αρχικοποίηση του προβλήματος
t0 = 0; tfinal = 8; y0 = 1;
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 0 με tol=10^-4
tol = 1e-4;
[tout1, yout1] = frk45('f0', t0, tfinal, y0, tol)
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 0 με tol=10^-5
tol = 1e-5;
[tout2, yout2] = frk45('f0', t0, tfinal, y0, tol)
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 0 με tol=10^-6
tol = 1e-6;
[tout3, yout3] = frk45('f0', t0, tfinal, y0, tol)
```

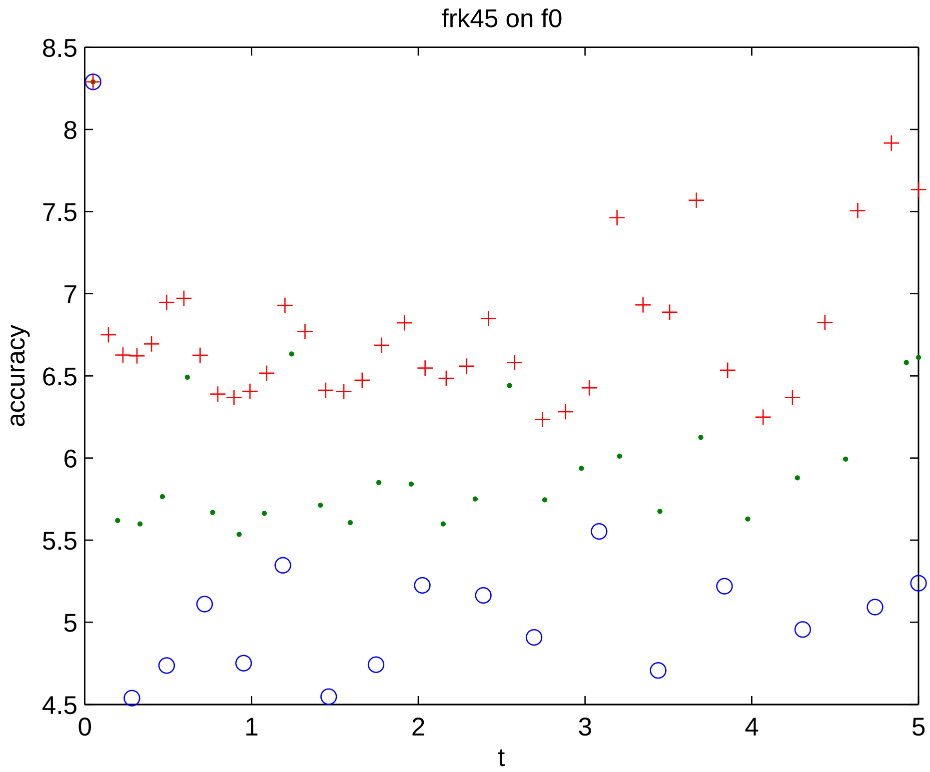
ΕΡΩΤΗΜΑ 4.

Θα επιλυθεί το Πρόβλημα 0, όπως και πριν, με την μέθοδο frk45.m στο διάστημα [0,5] με τιμές παραμέτρου ανοχής $10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Driver program run24p0.m %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
format long
hold off
clf
% Αρχικοποίηση του προβλήματος
t0 = 0; tfinal = 5; y0 = 1;
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 0, απόλυτο σφάλμα και ακρίβεια σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης για tol=10^-4
tol = 1e-4;
[tout1, yout1] = frk45('f0', t0, tfinal, y0, tol);
err1=abs(yout1-f0true(tout1))
acc1=-log10(err1);
% Όμοια για tol=10^-5
tol = 1e-5;
[tout2, yout2] = frk45('f0', t0, tfinal, y0, tol);
err2=abs(yout2-f0true(tout2))
acc2=-log10(err2);
% Όμοια για tol=10^-6
tol = 1e-6;
[tout3, yout3] = frk45('f0', t0, tfinal, y0, tol);
err3=abs(yout3-f0true(tout3))
acc3=-log10(err3);
% Γραφική παράσταση του πλήθους των σημαντικών δεκαδικών ψηφίων σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης για τις 3 μεθόδους
plot(tout1, acc1, 'o', tout2, acc2, '.', tout3, acc3, '+')
title('frk4 on f0'); xlabel('t'); ylabel('accuracy');
```

Γραφική Παράσταση:

Θα πρέπει να εμφανιστεί το παράκατω γράφημα. Παρατηρείστε οτι με παράμετρο ανοχής $tol = 10^{-6}$, η μέθοδος frk45.m λύνει το Πρόβλημα 0 πετυχαίνοντας πιο ακριβείς προσεγγίσεις της λύσης.



Πρόβλημα 1

Έστω το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Πρόβλημα 1)

$$y'(t) = \begin{cases} y(t)(-2t + \frac{1}{t}), & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_{\text{final}}]$$
$$y(0) = 0$$

με πραγματική λύση την $y(t) = te^{-t^2}$. Τότε τα προηγούμενα ερωτήματα 1 μέχρι και 4 απαντώνται με τον ίδιο τρόπο. Η μόνη διαφορά είναι στην αλλαγή της αρχικής συνθήκης $y_0 = 0$ του Προβλήματος 1 και στην δημιουργία των νέων αρχείων συναρτήσεων f1.m και f1true.m.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Η διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού  f1.m με δύο κλάδους      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function yprime = f1(t,y);
if t==0,
      yprime=1;
else
      yprime=y*(-2*t+1/t);
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Η πραγματική λύση  f1true.m του Προβλήματος 1           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function ytrue = f1true(t);
ytrue =t.*exp(-t.^2);
```

Πρόβλημα 2

Έστω το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Πρόβλημα 2)

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_{\text{final}}] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με πραγματική λύση την $y(t) = \cos(t)$. Η διαφορική εξίσωση είναι δεύτερης τάξης ως προς y και για την αριθμητική επίλυσή της θα πρέπει να μετασχηματιστεί σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Τότε εργαζόμαστε ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y'(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1'(t) = y'(t) \\ y_2'(t) = y''(t) = -y(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -y_1(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow Y'(t) = AY(t) \tag{1}$$

Οπότε η διαφορική εξίσωση του Προβλήματος 2 δεύτερης τάξης μετατρέπεται στο ισοδύναμο σύστημα (1) πρώτης τάξης με πραγματική λύση και αρχική συνθήκη

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \text{ και } Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

αντίστοιχα. Ακολούθως, δίνονται τα αρχεία συναρτήσεων του Προβλήματος 2, τα οποία βασίζονται στην ανάλυση αυτή.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Το διαφορικό σύστημα πρώτου βαθμού  f2.m     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function yprime = f2(t,y);
yprime=[0,1;-1,0]*y;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Η πραγματική λύση  f2true.m του Προβλήματος 2          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function ytrue = f2true(t);
ytrue =[cos(t);-sin(t)];
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Driver program run21p2.m                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
format long
hold off
clf
% Αρχικοποίηση του προβλήματος
t0 = 0; tfinal = 2*pi; y0 = [1;0]; h=0.2;
% Αριθμητική επίλυση του προβλήματος 2 με τις 3 μεθόδους
[tout1, yout1] = euler('f2', t0, tfinal, h, y0);
[tout2, yout2] = impeuler('f2', t0, tfinal, h, y0);
[tout3, yout3] = rk4('f2', t0, tfinal, h, y0);
% Προσοχή στις διαστάσεις των διανυσμάτων yout(:,1) και f2true, χρειάζεται
% αναστροφή!!!
ytrue1=f2true(tout1)';
ytrue2=f2true(tout2)';
ytrue3=f2true(tout3)';
% Απόλυτο σφάλμα για την πρώτη συνιστώσα της προσέγγισης της λύσης σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
err11=abs(yout1(:,1)-ytrue1(:,1));
err21=abs(yout2(:,1)-ytrue2(:,1));
err31=abs(yout3(:,1)-ytrue3(:,1));
% Απόλυτο σφάλμα για την δεύτερη συνιστώσα της προσέγγισης της λύσης σε
% κάθε σημείο της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
err12=abs(yout1(:,2)-ytrue1(:,2));
err22=abs(yout2(:,2)-ytrue2(:,2));
err32=abs(yout3(:,2)-ytrue3(:,2));
% Ακρίβεια για την πρώτη συνιστώσα της προσέγγισης της λύσης σε κάθε σημείο
% της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
acc11=-log10(err11);
acc21=-log10(err21);
acc31=-log10(err21);
```

```
% Ακρίβεια για την δεύτερη συνιστώσα της προσέγγισης της λύσης σε κάθε σημείο
% της διαμέρισης για καθεμία μέθοδο
acc12=-log10(err12);
acc22=-log10(err22);
acc32=-log10(err22);
% Δημιουργία πυκνής διαμέρισης με βήμα 0.01 για την f2true
tout4=t0:0.01:tfinal;
ytrue4=f2true(tout4)';
% Γραφική παράσταση της πρώτης συνιστώσας της προσέγγισης της λύσης και
% της πραγματικής λύσης
subplot(2,2,1);
plot(tout1, yout1(:,1), '*', tout2, yout2(:,1), '+', tout3, yout3(:,1), 'o',
tout4, ytrue4(:,1), '-')
% Γραφική παράσταση της δεύτερης συνιστώσας της προσέγγισης της λύσης και
% της πραγματικής λύσης
subplot(2,2,2);
plot(tout1, yout1(:,2), '*', tout2, yout2(:,2), '+', tout3, yout3(:,2), 'o',
tout4, ytrue4(:,2), '-')
% Γραφική παράσταση του πλήθους των σημαντικών δεκαδικών ψηφίων σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης της πρώτης συνιστώσας της προσέγγισης της λύσης
subplot(2,2,3);
plot(tout1, acc11, '*', tout2, acc21, '+', tout3, acc31, 'o')
% Γραφική παράσταση του πλήθους των σημαντικών δεκαδικών ψηφίων σε κάθε
% σημείο της διαμέρισης της δεύτερης συνιστώσας της προσέγγισης της λύσης
subplot(2,2,3);
plot(tout1, acc12, '*', tout2, acc22, '+', tout3, acc32, 'o')
```

Σημείωση: Οι διαμερίσεις tout1, tout2 και tout3 είναι ίδιες, εφόσον το βήμα παραμένει ίδιο ($h = 0.2$) και στις τρεις μεθόδους. Παρόλα αυτά σημειώνονται διαφορετικά, προκειμένου να μην υπάρξει σύγχυση. Επιπλέον, τα ορίσματα της εντολής plot θα πρέπει να βρίσκονται στην ίδια γραμμή (εδώ δεν υπήρχε αρκετός χώρος).

Γραφική Παράσταση.

Εμφανίζονται τα παρακάτω γραφήματα: