ΣΕΜΦΕ 5^{ο} Εξάμηνο
Αριθμητική Ανάλυση ΙΙ
Εργασία

Μέρος 1^{ο} (μονάδες 4x0.15=0.6)

1. Να μετατραπεί το πρόγραμμα rk4.m ώστε να υλοποιεί τη μέθοδο Runge Kutta 4^{ης} τάξης με 5 στάδια με συντελεστές:

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/8 & 0 & 3/8 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & -3/2 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

Το πρόγραμμα να ονομασθεί nrk4.m

2. Να μετατραπεί το πρόγραμμα ab5sem.m ώστε να υλοποιεί την πολυβηματική μέθοδο τύπου Adams-Bashforth 4^{ης} με 4 στάδια:

$$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}\left(55f\left(x_{n+3}, y_{n+3}\right) - 59f\left(x_{n+2}, y_{n+2}\right) + 37f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) - 9f\left(x_n, y_n\right)\right)$$

Το πρόγραμμα να ονομασθεί ab4sem.m

3. Να μετατραπεί το πρόγραμμα pc5.m ώστε να υλοποιεί την πολυβηματική μέθοδο πρόβλεψης διόρθωσης:

$$y^{p}_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}\left(55f\left(x_{n+3}, y_{n+3}\right) - 59f\left(x_{n+2}, y_{n+2}\right) + 37f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) - 9f\left(x_n, y_n\right)\right)$$

$$y^{c}_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}\left(9f\left(x_{n+4}, y^{p}_{n+4}\right) + 19f\left(x_{n+3}, y_{n+3}\right) - 5f\left(x_{n+2}, y_{n+2}\right) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)\right)$$

Το πρόγραμμα να ονομασθεί pc4.m

Μέρος 2^{o} (Σύνολο μονάδες 1.4)

4. Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών που συναντάμε στη δυναμική πληθυσμών:
$$x'(t) = 2(x(t) - x(t)y(t))$$
$$y'(t) = -(y(t) - x(t)y(t))$$
με αρχικές τιμές $x(0) = 1$ και $y(0) = 3$. Η λύση του παραπάνω συστήματος ικανοποιεί τον ακόλουθο νόμο:
$$G(t,x,y) = e^{x+2y}/(xy^2) = \sigma\tau\alpha\theta.$$
Η θεωρία λέει ότι το G είναι σταθερό και ότι η λύση είναι περιοδική οπότε η καμπύλη $\left(x(t), y(t)\right)$ είναι κλειστή.
Ολοκληρώστε το πρόβλημα με τις nrk4.m στο διάστημα $[0,10]$ και αφού πειραματιστείτε με την επιλογή του βήματος ώστε να βρείτε την τιμή του h για την οποία η αριθμητική λύση ικανοποιεί δίνει G σχεδόν σταθερό και η καμπύλη $\left(x(t), y(t)\right)$ φαίνεται να είναι κλειστή.
Ολοκληρώστε το πρόβλημα με τις nrk45.m στο διάστημα $[0,10]$ και αφού πειραματιστείτε με την επιλογή της παραμέτρου ανοχής, ώστε να βρείτε την τιμή του TOL για την οποία η αριθμητική λύση ικανοποιεί δίνει G σχεδόν σταθερό και η καμπύλη $\left(x(t), y(t)\right)$ φαίνεται να είναι κλειστή.

(Μονάδες 0.4)

5. Είναι γνωστό ότι για μία πολυβηματική μέθοδο με τάξη p για το ολικό σφάλμα ισχύει
$$GE_{n+1} = \left\| y_{n+1} - y(x_{n+1}) \right\| = O\left(h^p\right) \le K \cdot h^p$$
Από αυτή τη σχέση βλέπουμε ότι αν υποδιπλασιάσουμε το βήμα h αναμένουμε το νέο ολικό σφάλμα να έχει ένα πηλίκο με το παλαιό περίπου ίσο με 2^{-p}. Με βάση αυτήν την παρατήρηση μπορούμε από τη συμπεριφορά του ολικού σφάλματος να βρούμε εμπειρικά την τάξη μιας μεθόδου.
Στο ερώτημα αυτό θα λύσετε το πρόβλημα, από τον πίνακα που ακολουθεί, και αντιστοιχεί σε αύξοντα αριθμό ίσο με το τελευταίο ψηφίο του αριθμού φοιτητικού μητρώου σας. Γράψτε οδηγό πρόγραμμα Matlab (script) το οποίο να λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών, που σας αντιστοιχεί, με τη ab4sem.m για εννέα διαφορετικά βήματα ($h=2^{(-k)}$, k=2..10). Το πρόγραμμα να καταχωρεί σε ένα διάνυσμα το μέγιστο απόλυτο σφάλμα για τις διάφορες επιλογές του βήματος h. Στη συνέχεια να υπολογίζει και να καταχωρεί σε ένα άλλο διάνυσμα το πηλίκο των δύο διαδοχικών μέγιστων απόλυτων σφαλμάτων. Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε παραπάνω, που θα πρέπει να τείνουν οι όροι του τελευταίου αυτού διανύσματος και γιατί; Το πρόγραμμα να χρησιμοποιεί τη for και να είναι δυνατό με μία αλλαγή τιμής μεταβλητής να μπορεί να αλλάξει ο αριθμός των φορών που λύνει το πρόβλημα μειώνοντας το βήμα στη μέση. Επαναλάβατε το ίδιο και για την pc4.m.

(Μονάδες 0.4)

ΑΑ	Πρόβλημα	Αρχική Τιμή	Διάστημα λύσης	Πραγματική Λύση
0	$y' = y/t - (y/t)^2$	$y(1) = 1$	$[1,4]$	$y(t) = t/\left(1+\ln(t)\right)$
1	$y' = 1 + y/t + (y/t)^2$	$y(1) = 0$	$[1,4]$	$y(t) = t \cdot \tan\left(\ln(t)\right)$
2	$y' = -(y+1)(y+3)$	$y(0) = -2$	$[0,5]$	$y(t) = -3 + 2/\left(1+e^{-2t}\right)$
3	$y' = (t+2t^3)y^3 - ty$	$y(0) = 1/3$	$[0,5]$	$y(t) = 1/\sqrt{(3+2t^2+6e^{t^2})}$

ΣΕΜΦΕ 5° Εξάμηνο
Αριθμητική Ανάλυση ΙΙ
1η Εργαστηριακή Άσκηση

Μία άμεση μέθοδος Runge Kutta λύνει αριθμητικά το πρόβλημα αρχικών τιμών :

$$y' = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0$$
$$f : R \times R^n \to R^n$$

με βάση τον ακόλουθο τύπο:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$
$$k_i = f\left(x_n + c_i h_n, y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right), \qquad \text{i=1,2,…,s}$$

Ο αριθμός s αποτελεί τον αριθμό σταδίων της μεθόδου και το βήμα της μεθόδου h_n μπορεί να είναι σταθερό ή να αλλάζει σε κάθε βήμα σύμφωνα με κάποιον μηχανισμό ελέγχου του σφάλματος της μεθόδου. Για λόγους οικονομίας οι συντελεστές της μεθόδου μπορούν να παρουσιαστούν με ένα butcher tableau:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

όπου στην περίπτωση των άμεσων μεθόδων ο πίνακας Α είναι αυστηρά κάτω τριγωνικός. Για μία τέτοια μέθοδο ορίζουμε το ολικό σφάλμα αποκοπής σε ένα σημείο της διαμέρισης της λύσης της μεθόδου ως την ποσότητα που αποτυγχάνει η μέθοδος ικανοποιήσει την πραγματική λύση του προβλήματος στο σημείο αυτό:

$$GE_{n+1} = \left\| y(x_{n+1}) - y_{n+1} \right\|.$$

Και το τοπικό σφάλμα αποκοπής σε ένα σημείο της διαμέρισης της λύσης της μεθόδου ως την ποσότητα που αποτυγχάνει ικανοποιήσει την πραγματική λύση του προβλήματος στο σημείο αυτό όταν θεωρηθεί ότι η προσέγγιση στο προηγούμενο βήμα της διαμέρισης ικανοποιεί τη λύση ακριβώς:

$$LTE_{n+1} = \left\| y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1} \right\|$$

όπου:

$$\tilde{y}_{n+1} = y(x_n) + h_n \sum_{i=1}^{s} b_i k_i,\ \ k_i = f\left(x_n + c_i h_n, y(x_n) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right), \qquad \text{i=1,2,…,s}$$

Μία μέθοδος RK λέμε ότι έχει τάξη p όταν για το τοπικό σφάλμα αποκοπής ισχύει $LTE_{n+1} = O(h^{p+1})$ όπου όταν η μέθοδος εφαρμόζεται με μεταβλητό βήμα $h = \max_n (h_n)$. Αυτό σημαίνει ότι για μία μέθοδο τάξης p ισχύει $\left| LTE_{n+1} \right| \le K \cdot h^{p-1}$, όπου το Κ είναι σταθερά ανεξάρτητη του s. Όταν η μέθοδος είναι τάξης p τότε για το ολικό σφάλμα αποκοπής ισχύει $GE_{n-1} = O(h^p)$.

Στην πρώτη άσκηση καλείστε να διερευνήσετε την τελευταία αυτή έκφραση όταν χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο τετάρτης τάξης σταθερού βήματος (rk4.m) και το ζεύγος μεθόδων τάξεων 5(4) (rkf45.m) που σας δόθηκαν στο εργαστήριο. Καλείστε

1. Να δημιουργήσετε ένα πρόγραμμα οδηγό (script) το οποίο να καλεί τη rk4.m για να λύσει ένα πρόβλημα αρχικών τιμών δέκα φορές για βήμα h=2 στην αρχή και βήμα h/2 σε καθεμία από τις επόμενες φορές. Για την τελευταία κλήση της rk4 να γίνει γράφημα που να παρουσιάζει την πραγματική και την προσεγγιστική λύση. Το πρόγραμμα οδηγός θα πρέπει να καταχωρεί σε ένα διάνυσμα το ολικό σφάλμα στο τελευταίο σημείο της διαμέρισης. Στη συνέχεια να υπολογίζει και να καταχωρεί σε ένα άλλο διάνυσμα το πηλίκο των δύο διαδοχικών τελικών σφαλμάτων. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, που θα πρέπει να τείνουν οι όροι του τελευταίου αυτού διανύσματος και γιατί; Το πρόγραμμα να χρησιμοποιεί τη for και να είναι δυνατό με μία αλλαγή τιμής μεταβλητής να μπορεί να αλλάξει ο αριθμός των φορών που λύνει το πρόβλημα μειώνοντας το βήμα στη μέση.

II. Να δημιουργήσετε ένα πρόγραμμα οδηγό (script) το οποίο να καλεί τη frk45.m για να λύσει ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με μεταβλητό βήμα. Το πρόγραμμα να υπολογίζει το ολικό σφάλμα και να παρουσιάζει γραφικά την πραγματική και την προσεγγιστική λύση. Το πρόγραμμα επίσης θα πρέπει να θα πρέπει να καταχωρεί σε ένα διάνυσμα το ολικό σφάλμα σε κάθε σημείο της διαμέρισης (εκτός το τελευταίο σημείο) διαιρεμένο με το h_n^p, όπου το p είναι η τάξη της μεθόδου που προωθεί τη λύση (εδώ p=5) και h_n το βήμα που χρησιμοποίησε η μέθοδος για να υπολογίσει την προσέγγιση σε αυτό το σημείο (θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση του MATLAB diff). Να κάνετε το γράφημα του διανύσματος αυτού. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, τι αναμένεται να σας δείξει αυτό το γράφημα και γιατί; Τα δύο γραφήματα να εμφανίζονται σε ένα παράθυρο. Το πρόβλημα να λυθεί για τρεις τιμές της παραμέτρου ανοχής $TOL=10^{-4}$, 10^{-5}, 10^{-6}. (Θα πρέπει να εκτελέσετε το πρόγραμμα οδηγό τρεις φορές μία για κάθε τιμή της παραμέτρου TOL.)

Τα προβλήματα αρχικών τιμών που θα λύσετε θα επιλεγούν από τα παρακάτω σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράφεται στις οδηγίες:

ΑΑ	Πρόβλημα	Αρχική Τιμή	Διάστημα λύσης	Πραγματική Λύση
0	$y' = y/t - (y/t)^2$	$y(1) = 1$	$[1,4]$	$y(t) = t/(1+\ln(t))$
1	$y' = 1 + y/t + (y/t)^2$	$y(1) = 0$	$[1,4]$	$y(t) = t \cdot \tan(\ln(t))$
2	$y' = -(y+1)(y+3)$	$y(0) = -2$	$[0,5]$	$y(t) = -3 + 2/(1+e^{-2t})$
3	$y' = (t+2t^3)y^3 - ty$	$y(0) = 1/3$	$[0,5]$	$y(t) = 1/\sqrt{(3+2t^2+6e^{t^2})}$
4	$y' = \cos(2t) + \sin(3t)$	$y(0) = 1$	$[0,10]$	$y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{4}{3}$
5	$y' = 1 + (t-y)^2$	$y(2) = 1$	$[2,5]$	$y(t) = t + 1/(1-t)$
6	$y' = y - t^2 + 1$	$y(0) = 1/2$	$[0,3]$	$y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$
7	$y' = 2t - y$	$y(0) = -1$	$[0,5]$	$y(t) = e^{-t} + 2t - 2$
8	$y' = -y - 2t$	$y(0) = -1$	$[0,5]$	$y(t) = -3e^{-t} - 2t + 2$
9	$y' = 1/t^2 - y/t - y^2$	$y(1) = -1$	$[1,20]$	$y(t) = -1/t$

Οδηγίες.

- Ο καταληκτικός χρόνος παράδοσης θα οριστεί μετά από συνεννόηση με τον διδάσκοντα.
- Τα προβλήματα που θα λύσετε θα είναι αυτά του πίνακα με ΑΑ το ams και το ams+4 για το πρώτο υποερώτημα και το ams και το |ams-4| για το δεύτερο ερώτημα. Το ams ισούται με τον αριθμό που ορίζει το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Αν το ams+4 είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 10 αφαιρέστε 10 για να δείτε πιο πρόβλημα θα λύσετε, ενώ αν το |ams-4| ισο με το ams αφαιρέστε 1 για να δείτε πιο πρόβλημα θα λύσετε.
- Θα πρέπει να παραδοθεί εργασία συρραμμένη (απλά) έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να την ξεφυλλίσει. Η εργασία θα πρέπει να έχει εξώφυλλο στο οποίο να αναφέρεται ο αύξων αριθμός της, το όνομα του φοιτητή, τα στοιχεία της σχολής και του μαθήματος, η ημερομηνία παράδοσης, η ώρα που παρακολουθεί εργαστήριο και ο αριθμός μητρώου του. Σε παράρτημα θα πρέπει να υπάρχουν εκτυπωμένοι οι κώδικες (τα προγράμματα, scripts και .m αρχεία). Στο κύριο μέρος της εργασίας θα πρέπει να αναπτύσσεται η διαδικασία, τα σχόλια, τα γραφήματα και μόνο όσα από τα αποτελέσματα είναι απαραίτητα για τα συμπεράσματα. Εκτός από τις όποιες εκτυπώσεις θα πρέπει να παραδοθούν τα προγράμματα και τα αποτελέσματα τους σε ηλεκτρονική μορφή (δισκέτα). Τα αποτελέσματα μπορείτε να τα αποθηκεύσετε με τη χρήση της diary.
- Τόσο η πληρότητα, τα σχόλια το αν ακολουθήθηκαν οι οδηγίες και ο τρόπος της παρουσίασης των αποτελεσμάτων της εργασίας που θα παραδοθεί θα ληφθούν υπ' όψιν κατά την αξιολόγηση.

Αριθμητική Ανάλυση ΙΙ
Εργασία

Μέρος 3^0 (Σύνολο 0.6 μονάδες): Προβλήματα συνοριακών τιμών.

Χρησιμοποιώντας τις κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης να γράψετε ένα πρόγραμμα Matlab (σε μορφή script) το οποίο να κατασκευάζει προσεγγίσεις για προβλήματα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u''(x) + g(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x), \qquad a < x < b$$
$$u(a) = A, \qquad u(b) = B.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις g(x)>0,r(x)>0, και f(x) είναι ομαλές και ότι χρησιμοποιούμε ισαπέχοντα σημεία διαμέρισης.

(α) Να γράψετε αναλυτικά το γραμμικό σύστημα που προκύπτει, και να μελετήσετε την επιλυσιμότητα του.
(β) Να χρησιμοποιήσετε το πρόγραμμα σας για να λύσετε το πρόβλημα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u''(x) = 10^{-5}u(x) + 10^{-7}x(x-10), \qquad a < x < b$$
$$u(0) = 0, \qquad u(10) = 0.$$

Συγκεκριμένα, να τρέξετε το πρόγραμμα σας χρησιμοποιώντας διαμερίσεις μήκους h=0.5, h=0.1 αντιστοίχως και να τυπώσετε τις τελευταίες 5 τιμές που υπολόγισε ο κώδικας σας. Να παρουσιάσετε τις υπόλοιπες τιμές με τη βοήθεια γραφήματος.
(γ) Χρησιμοποιώντας τις οδηγίες του ζητήματος 5, να προσπαθήσετε να υπολογίσετε αριθμητικά την τάξη σύγκλισης της μεθόδου.

Οδηγίες:
1) Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες προσεγγίσεις για την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο: $u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$
2) Για τη λύση του γραμμικού συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις συναρτήσεις του Matlab που επιλύουν γραμμικά συστήματα, είτε να κατασκευάσετε μία συνάρτηση που λύνει τριδιαγώνια συστήματα.