ΘΕΩΡΙΑ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

Γ. Σ. Τριανταφύλλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

2018

1 Εισαγωγή

Ενα από τα βασικά θέματα της ναυτικής υδροδυναμικής είναι τα θαλάσσια κύματα. Τα θαλάσσια κύματα που ενδιαφέρουν την ναυτική υδροδυναμική μεταδίδονται λόγω της δύναμης της βαρύτητας, γι' αυτό λέγονται και κύματα βαρύτητας. Τα κύματα βαρύτητας δημιουργούνται από την πνοή του ανέμου πάνω από την θάλασσα, και από την κίνηση των πλοίων επιφανείας, ή άλλων σωμάτων που κινούνται σε μικρό βάθος. Ο άνεμος είναι βέβαια η κυριότερη αιτία δημιουργίας κυματισμών στη θάλασσα. Η διαταραχή της θάλασσας είναι ανάλογη με την ένταση που έχει άνεμος, και αναφέρεται σαν "κατάσταση της θάλασσας" (sea state). Τα κύματα δεν σταματούν να υπάρχουν αμέσως μόλις σταματήσει ο άνεμος, αλλά συνεχίζουν να μεταδίδονται για αρκετό χρονικό διάστημα, μέχρι που να αποσβεσθούν. Η κατάσταση αυτή της θάλασσας αναφέρεται διεθνώς σαν swell.

Υπάρχουν και άλλες κατηγορίες θαλασσίων κυμάτων πολύ μεγαλύτερης κλίμακας, των οποίων η μετάδοση οφείλεται στην δράση της επιτάχυνσης Corriolis λόγω περιστροφής της γης, ή, κύματα ακόμα μεγαλύτερης κλίμακας, που επηρεάζονται από την έλξη άλλων ουρανίων σωμάτων (της σελήνης συγκεκριμένα). Από την άλλη πλευρά η μετάδοση θαλασσίων κυμάτων πολύ μικρότερης κλίμακας από τα κύματα βαρύτητας κυριαρχείται από τις δυνάμεις επιφανειακής τάσης. Στην συνέχεια του μαθήματος, όταν λέμε "θαλάσσια κύματα" θα εννοούμε τα κύματα βαρύτητας μόνο.

Τα θαλάσσια κύματα υπάγονται στα λεγόμενα επιφανειακά κύματα (interfacial waves), τα οποία δημιουργούνται στην διαχωριστική επιφάνεια δύο ρευστών, εν προκειμένω του νερού και του αέρα. Εχουμε δηλαδή να επιλύσουμε το συζευγμένο πρόβλημα κίνησης νερού και αέρα. Το πρόβλημα απαιτεί την παράλληλη επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes στο νερό και στον αέρα, και η σύζευξη γίνεται με την επιβολή των οριακών συνθηκών (κινηματική και δυναμική) στην διαχωριστική επιφάνεια.

Από δυναμικής πλευράς στην διαχωριστική επιφάνεια πρέπει η τάση του νερού, s_w, να είναι ίση με την τάση του αέρα, s_a. Εστω $\boldsymbol{\sigma}_w$ ο τανυστής τάσεων του νερού και $\boldsymbol{\sigma}_a$ ο τανυστής τάσεων του αέρα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy που εκφράζει την τάση πάνω σε επιφάνεια συναρτήσει του τανυστή των τάσεων, η δυναμική συνθήκη γράφεται ως εξής:

$$(\boldsymbol{\sigma}_w - \boldsymbol{\sigma}_a)\boldsymbol{n} = 0 \tag{1}$$

Οπου $\boldsymbol{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια.

Ως γνωστόν, ο τανυστής των τάσεων μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau} \tag{2}$$

όπου p είναι η πίεση του ρευστού, που ορίζεται σαν ο μέσος όρος των τριών συνιστωσών του τανυστή που είναι πάνω στη διαγώνιο, $\boldsymbol{\tau}$ ο τανυστής τάσεων τριβής, και $\boldsymbol{I}$ ο μοναδιαίος τανυστής. Αντικαθιστώντας την (2) η εξίσωση (1) γράφεται ως εξης:

$$(\boldsymbol{\tau}_w - \boldsymbol{\tau}_a)\boldsymbol{n} - (p_w - p_a)\boldsymbol{n} = 0 \tag{3}$$

Εάν δεν υπάρχει ροή ανέμου, λόγω της μεγάλης διαφοράς πυκνότητας και συνεκτικότητας ανάμεσα στο νερό και στον αέρα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι τάσεις τριβής του αέρα είναι πολύ μικρότερες από τις τάσεις τριβής του νερού, και ότι οι μεταβολές της πίεσης του αέρα είναι αμελητέες. Υποθέτουμε δηλαδή ότι ο αέρας συμεριφέρεται σαν ένα ακίνητο στρώμα ρευστού με σταθερή πίεση (την ατμοσφαιρική πίεση). Η ατμοσφαιρική πίεση θεωρείται σαν η πίεση αναφοράς, οπότε η τάση στην επιφάνεια του νερού είναι μηδενική και η επιφάνεια του νερού λέγεται ελεύθερη. Το νερό επομένως ικανοποιεί τις εξισώσεις συνεχείας και ορμής, την οριακή συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον βυθό της θάλασσας. Επομένως η εξίσωση (3) απλοποείται ως εξής:

$$\boldsymbol{\tau}_w \boldsymbol{n} - (p_w - p_{at})\boldsymbol{n} = 0 \tag{4}$$

Από κινηματικής πλευράς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια είναι μιά υλική επιφάνεια (αν εξαιρέσουμε το σημαντικό αλλά εξαιρετικά δύσκολο να περιγραφεί φαινόμενο της θραύσης κυμάτων), Η κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια επομένως μπορεί να παραχθεί από το γεγονός ότι η υλική παράγωγος της εξίσωσης της επιφάνειας είναι ίση με μηδέν.

Θεωρούμε σύστημα αξόνων x, y, z, όπου οι άξονες x, y είναι οριζόντιοι και ο z κατακόρυφος με φορά αντίθετη από την βαρύτητα. Το επίπεδο $z = 0$ συμπίπτει με την θέση ισορροπίας της επιφάνειας της θάλασσας. Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας έχει την μορφή $\eta\,(x, y, t) - z = 0$, όπου η είναι η συνάρτηση που περιγράφει την μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας από την θέση ισορροπίας της. Γιά την κινηματική συθήκη λοιπόν θέτουμε:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\,(\,\eta\,(x, y, t) - z) = 0 \tag{5}$$

Αυτό μας δίνει την ακόλουθη κινηματική οριακή συνθήκη:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad z = \eta \tag{6}$$

Οι εξισώσεις κίνησης με την οριακή συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον βυθό της θάλασσας και τις δύο συθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια (εξισώσεις (6) και (4)) συνιστούν την πλήρη διατύπωση του προβλήματος.

Η εμπειρία έχει δείξει ότι η κίνηση της θάλασσας γιά τις πολλές από τις συνήθεις εφαρμογές ναυτικής υδροδυναμικής μπορεί να περιγραφεί αγνοώντας τις δυνάμεις συνεκτκότητας, και υποθέτοντας ότι η ροή της θάλασσας είναι αστρόβιλη ροή με δυναμικό ϕ: $\nabla\phi = \boldsymbol{u}$. Τότε το πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά καθώς, επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη, το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{7}$$

Στον πυθμένα $z = -h(x, y)$ (οπου h είναι συνάρτηση των συντεταγμένων x και y), αφού αγνοήσαμε το ιξώδες του νερού, έχουμε μόνο την συνθήκη μη διείσδυσης, δηλαδή ότι η συνιστώσα της ταχύτητας του νερού κάθετη προς τον πυθμένα είναι μηδενική. Αυτό δίνει την ακόλουθη συνθήκη Neumann για το δυναμικό ϕ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \mid_{z=-h} = \nabla \phi \cdot \boldsymbol{n} \mid_{z=-h} = 0 \tag{8}$$

Οπου $\boldsymbol{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στον πυθμένα.

Η κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (6) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του δυναμικού της ροής ως εξής:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad z = \eta \tag{9}$$

Τέλος, αφού αγνοούμε τις τάσεις τριβής, η δυναμική συνθήκη (4) απλοποιείται σε $p = p_{at}$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Bernoulli γιά μη μόνιμη ροή, και το γεγονός ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι πίεση αναφοράς, η δυναμική οριακή συνθήκη παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mid \nabla \phi \mid^2 + gz = 0, \qquad z = \eta \tag{10}$$

Ή ισοδύναμα

$$\eta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mid \nabla \phi \mid^2\right) \mid_{z=\eta} \tag{11}$$

2 Γραμμική θεωρία

2.1 Γενικά

Λόγω της μη γραμμικότητας των οριακών συνθηκών (9) και (11), λύση του προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί μόνο αριθμητικά. Χρήσιμα αποτελέσματα γιά πρακτικές εφαρμογές μπορούν να αποκτηθούν χρησιμοποιώντας την πολύ απλούστερη γραμμική θεωρία κυματισμών. Η γραμμική θεωρία, παρά τις απλουστεύσεις της, δίνει αποτελέσματα σε πολύ καλη συμφωνία με πειράματα.

Η γραμμική θεωρία στηρίζεται σε δύο βασικές απλοποιητικές παραδοχές: (α) Το κύμα και το αντίστοιχο δυναμικό θεωρούνται μικρά, και γι αυτό στις οριακές συνθήκες κρατάμε μόνο όρους που είναι γραμμικοί ως προς η και ϕ (β) Λόγω της μικρής ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας οι οριακές συνθήκες εφαρμόζονται στην μέση στάθμη θαλάσσης $z = 0$, αντί γιά την πραγματική θέση $z = \eta$.

Με βάση τις δυο παραδοχές οι γραμμικοποιημένες συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια είναι:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} |_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{12}$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} |_{z=0} \tag{13}$$

Αντικαθιστώντας την (13) στην (12) παίρνουμε μιά συνθήκη που περιλαμβάνει μόνο το δυναμικό:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad\qquad z = 0 \tag{14}$$

Η οριακή συνθήκη στον βυθό (8) παραμένει όπως έχει.

Γιά την επίλυση του γραμμικοποιημένου προβλήματος χρειάζεται να επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace συν την οριακή συνθήκη στον βυθό, τις οριακές συνθήκες στην θέση ισορροπίας της επιφάνειας της θάλασσας, και τις οριακές συνθήκες πάνω σε άλλα αντικείμενα που τυχόν υπάρχουν (π.χ. το πλοίο).

2.2 Απλοί αρμονικοί κυματισμοί

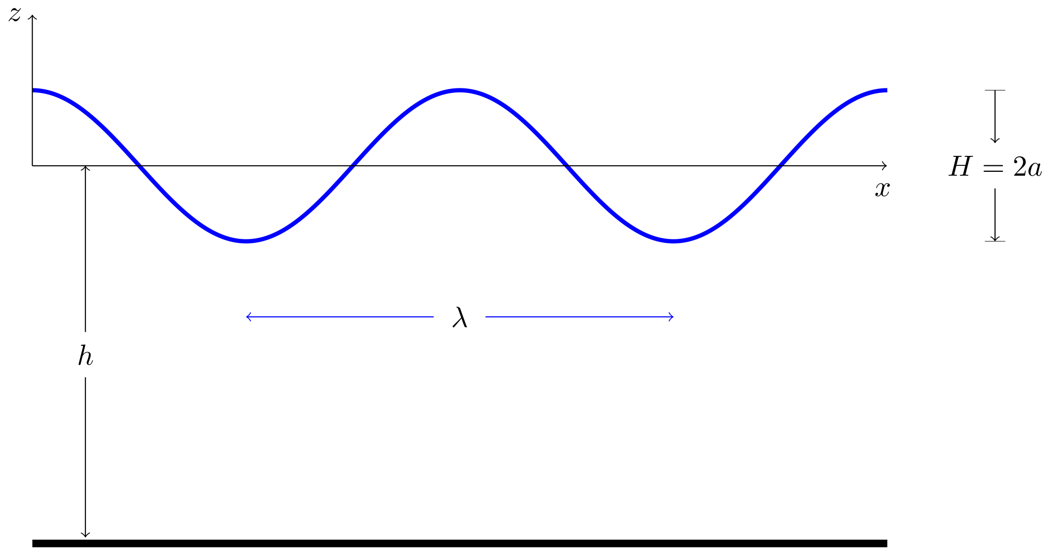
2.2.1 Εξίσωση διασποράς

Θεωρούμε απλό αρμονικό κυματισμό με περίοδο T και μήκος κύματος λ, που μεταδίδεται σε θαλάσσιο νερό σταθερού βάθους h. Η κατεύθυνση μετάδοσης είναι παράλληλη με τον άξονα x. Η κυκλική συχνότητα ω και ο κυματαριθμός του κυματισμού k ορίζονται από τις σχέσεις $\omega = 2\pi/T$, και $k = 2\pi/\lambda$. Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας έχει την μορφή:

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) \tag{15}$$

Οπου a είναι το πλάτος ταλάντωσης του κύματος. Το ύψος του κύματος H ορίζεται σαν η κατακόρυφη απόσταση ανάμεσα σε μιά κορυφή και μιά κοιλάδα του κύματος. Γιά κυματισμούς του τύπου που περιγράφει η εξίσωση (15) $H = 2a$. Επειδή το βάθος είναι σταθερό, η οριακή συνθήκη (8) στον πυθμένα γνεται:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \mid_{z=-h} = 0 \tag{16}$$



Σχήμα 1: Σχήμα ορισμού για απλό αρμονικό κυματισμό

Λόγω της οριακής συνθήκης (12) το δυναμικό της ροής έχει την μορφή

$$\phi = \sin(kx - \omega t) F(z) \tag{17}$$

Οπου F είναι κάποια συνάρτηση που θα προσδιορίσουμε τώρα.

Αντικαθιστώντας την (17) στην εξίσωση του Laplace βρίσκουμε ότι η συνάρτηση F είναι λύση της ακόλουθης κοινής διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^2 F}{d z^2} - k^2 F = 0 \tag{18}$$

Η κινηματική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (12) και η οριακή συνθήκη στον πυθμένα (16) γίνονται αντίστοιχα:

$$\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,z}\mid_{z=0}= a\,\omega \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,z}\mid_{z=-h}= 0 \tag{20}$$

Η διαφορική εξίσωση (18) ικανοποιείται από οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $\exp(\pm kz)$. Επιλέγουμε τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό, ο οποίος ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στον πυθμένα (20):

$$F(z) = A\cosh\left(k(z+h)\right) \tag{21}$$

Οπου A σταθερά. Η κινηματική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (19) δίνει την ακόλουθη έκφραση γιά τη σταθερά A:

$$A = \frac{a\,\omega}{k\,\sinh\left(kh\right)} \tag{22}$$

Κατά συνέπεια το δυναμικό της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\phi = \frac{a\,\omega}{k\,\sinh\left(kh\right)}\,\cosh\left(k(z+h)\right)\,\sin\left(kx-\omega t\right) \tag{23}$$

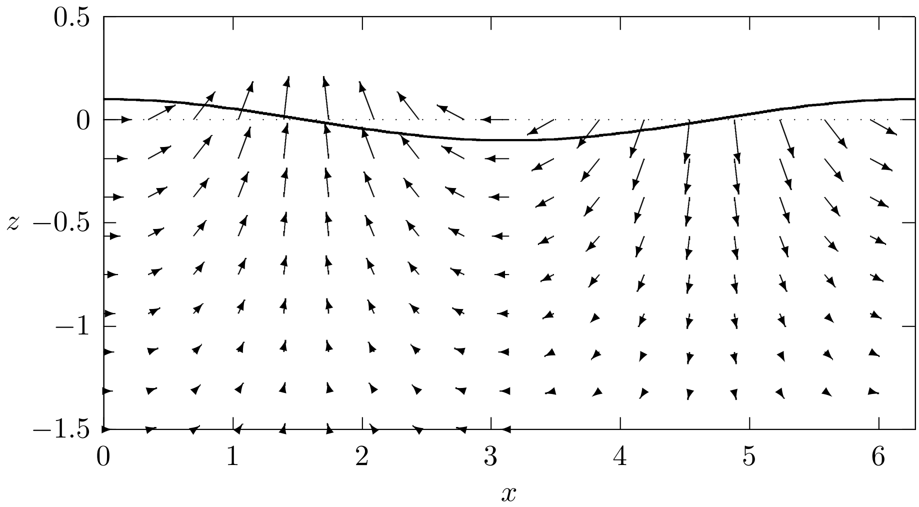
Οι ταχύτητες που προκαλεί το κύμα είναι περιοδικές χρονικά, όπως φαίνεται με παραγώγιση του δυναμικού στην εξίσωση (23):

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{a\,\omega}{\sinh\left(kh\right)}\,\cosh\left(k(z+h)\right)\,\cos\left(kx-\omega t\right) \tag{24}$$

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{a\,\omega}{\sinh\left(kh\right)}\,\sinh\left(k(z+h)\right)\,\sin\left(kx-\omega t\right) \tag{25}$$

Οπως φαίνεται από τις (24), (25) η συνιστώσα u είναι σε φάση με την μετατόπιση της επιφάνειας της θάλασσας, ενώ η συνιστώσα w έχει διαφορά φάσης 90^o με την επιφάνεια της θάλασσας. Αυτό επαληθεύεται στο Σχήμα 2, όπου φαίνονται τα διανύσματα της ταχύτητας σε διάφορα σημεία κάτω από το κύμα.

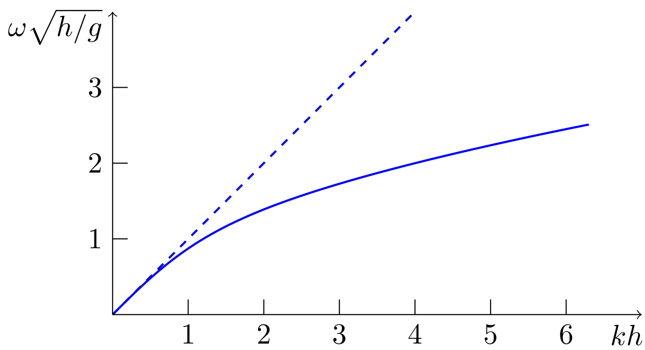
Μέχρι τώρα δεν μεταχειριστήκαμε την δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (εξίσωση (13), ή ισοδύναμα την εξίσωση (14)). Αντικαθιστώντας την εξίσωση (23) στην εξίσωση (13) (ή, ισοδύναμα, στην (14)) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:



Σχήμα 2: Διανύσματα της ταχύτητας σε διάφορα σημεία κάτω από κύμα με πλάτος ταλάντωσης $a = 0.07$ και αριθμό κύματος $k = 1$, σε θάλασσα βάθους $h = 2$. Η μετατόπιση της επιφάνειας της θάλασσας καθώς και η μέση θέση της επιφάνειας σημειώνονται επίσης

$$\omega^2 = g\,k\,\tanh{(k\,h)} \tag{26}$$

Η εξίσωση (26) συνδέει την συχνότητα και τον αριθμό κύματος και είναι **η εξίσωση διασποράς** (dispersion relation) των θαλασσίων κυμάτων. Η εξίωση διασποράς είναι η φυσική συνθήκη γιά την μετάδοση ενός κυματισμού στην επιφάνεια του νερού.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της εξίσωσης διασποράς. Συνεχής γραμμή: Εξίσωση (26), διακεκομένη γραμμή: Εξίσωση διασποράς ρηχού νερού (29).

Ο λόγος $c = \omega/k$ λέγεται ταχύτητα μετάδοσης ή ταχύτητα φάσης του κυματισμού, επειδή περιγράφει την ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται η φάση του κύματος $kx - \omega t = k(x - c\,t)$:

$$c = \frac{\omega}{k} = \pm\sqrt{\frac{g}{k}\,\tanh{(k\,h)}} \tag{27}$$

Γιά μεγάλα βάθη εν σχέσει με το μήκος του κύματος ($kh >> 1$) έχουμε ότι $\tanh{(k\,h)} \approx 1$, οπότε η (26) παίρνει την μορφή:

$$\omega^2 = g\,k \tag{28}$$

Αντίθετα γιά μικρά βάθη εν σχέσει με το μήκος του κύματος ($kh << 1$) έχουμε ότι $\tanh{(k\,h)} \approx k\,h$, οπότε η (26) παίρνει την μορφή:

$$\omega^2 = g\,h\,k^2 \tag{29}$$

Η εξίσωση (28) ισχύει με καλή προσέγγιση γιά $k\,h > 3.14$, δηλαδή γιά $h/\lambda > 0.5$, ενώ η εξίσωση (29) ισχύει γιά $k\,h < 0.1$, δηλαδή $\lambda/h > 62$.

Γιά μεγάλα μήκη κύματος (εξίσωση (29)) παρατηρούμε ότι η ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού είναι ίση με $\pm\sqrt{g\,h}$, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του κυματαριθμού. Γιά μικρά μήκη κύματος (εξ. (28)) η ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού είναι ίση με $\pm\sqrt{g/k}$, δηλαδή η ταχύτητα μετάδοσης είναι ανάλογη με την ρίζα του μήκους κύματος. Στην γενική περίπτωση (εξ. (26)), λόγω της ανισότητας $\tanh x < x$, έχουμε την ακόλουθη σχέση γιά την ταχύτητα μετάδοσης:

$$\frac{\omega}{k} < \sqrt{g\,h} \tag{30}$$

Τα κύματα που ικανοποιούν την (28) λέγονται κύματα σε βαθύ νερό, ενώ αυτά που ικανοποιούν την (29) λέγονται κύματα σε ρηχό νερό. Φυσικά οι όροι «βαθύ» ή «ρηχό» νερό είναι σχετικοί και έχουν να κάνουν με το πως συγκρίνεται το μήκος του κύματος με το βάθος της θάλασσας. Ετσι ακόμα και στο βαθύτερο σημείο της θάλασσας το νερό φαίνεται ρηχό γιά τα σεισμικά κύματα που έχουν πολύ μεγάλο μήκος κύματος, ενώ στα κύματα που δημιουργεί ένα μοντέλο σε δεξαμενή το νερό της δεξαμενής φαίνεται βαθύ.

Αντίστοιχα, σε βαθύ νερό η έκφραση γιά το δυναμικό παίρνει την ακόλουθη κάπως απλούστερη μορφή:

$$\phi = \frac{a\,\omega}{k}\,e^{k\,z}\,\sin{(kx - \omega t)} \tag{31}$$

Σε ρηχό νερό $k\,h \to 0$ έχουμε ότι $\cosh{(k(z+h))} \approx 1$, $\sinh{(kh)} \approx kh$, οπότε μεταχειριζόμενοι ότι γιά ρηχό νερό $\omega/k = \sqrt{g\,h}$, βρίσκουμε ότι η ροή τείνει σε μιά μονοδιάστατη ροή παράλληλη με τον άξονα των x:

$$\phi = \frac{a\,g}{\omega}\,\sin{(kx - \omega t)} \tag{32}$$

Η προσέγγιση του δυναμικού για ρηχό νερό (32) δεν εξαρτάται από το z, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace μόνο προσεγγιστικά, με την έννοια ότι, επειδή το μήκος κύματος είναι μεγάλο, ο αριθμός κύματος είναι μικρός, οπότε $\nabla^2\phi = \partial^2\phi/\partial x^2 = -k^2\phi \approx 0$. Το δυναμικό (32) δεν χρησιμοποιείται γιά τα κύματα του ρηχού νερού, αλλά μεταχειριζόμαστε κατ'ευθείαν τις εξισώσεις του Euler.

2.2.2 Τροχιές σωματιδίων

Σύμφωνα με την γραμμική θεωρία κυματισμών η μέση ταχύτητα της ροής είναι παντού ίση με μηδέν, και κατά συνέπεια τα σωματίδια του νερού εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από την θέση ισορροπίας τους.

Εστω (x, z) η θέση του σωματιδίου όταν δεν υπάρχει κύμα ($a = 0$), και $(x + \xi, z + \zeta)$ η στιγμιαία θέση του σωματιδίου όταν υπάρχει κύμα. Εξ ορισμού τα (ξ, ζ) ικανοποιούν τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{a\,\omega}{\sinh(kh)} \cosh\left(k(z+\zeta+h)\right) \cos\left(k(x+\xi)-\omega t\right) \tag{33}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{a\,\omega}{\sinh(kh)} \sinh\left(k(z+\zeta+h)\right) \sin\left(k(x+\xi)-\omega t\right) \tag{34}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές ως προς ξ και ζ, και κατά συνέπεια η επίλυση τους είναι δυσχερής. Σε συνέπεια με τις παραδοχές της γραμμικής θεωρίας όμως μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μετατοπίσεις των σωματιδίων είναι μικρές, και κατά συνέπεια μπορούμε να αγνοήσουμε τα (ξ, ζ) όπου εμφανίζονται στο δεξιό μέλος. Οι εξισώσεις τότε ολοκληρώνονται άμεσα ως προς χρόνο και έχουμε ότι:

$$\xi = -a\,\frac{\cosh\left(k(z+h)\right)}{\sinh(kh)} \sin\left(kx-\omega t\right) \tag{35}$$

$$\zeta = a\,\frac{\sinh\left(k(z+h)\right)}{\sinh(kh)} \cos\left(kx-\omega t\right) \tag{36}$$

Βλέπουμε επομένως ότι τα σωματίδια διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές με μεγάλο ημιάξονα παράλληλο με τον άξονα x και ίσο με $a \cosh\left(k(z+h)\right)/\sinh(kh)$, και μικρό ημιάξονα παράλληλο με τον άξονα z και ίσο με $a \sinh\left(k(z+h)\right)/\sinh(kh)$.

Είναι διδακτικό να θεωρήσουμε την μορφή των τροχιών στις δυο οριακές περιπτώσεις του βαθιού και του ρηχού νερού. Στο βαθύ νερό $kh \to \infty$ και οι δύο ημιάξονες γίνονται ίσοι με $a \exp(kz)$, δηλαδή οι τροχιές γίνονται κύκλοι με ακτίνα που μειώνεται εκθετικά με το βάθος. Σε βάθος μεγαλύτερο από το μισό μήκος κύματος τα σωματίδια του νερού κινούνται ελάχιστα και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παραμένουν ακίνητα. Στο ρηχό νερό, όπου $kh \to 0$, ο μεγάλος ημιάξονας τείνει στην τιμή $agk/\omega^2 = a/kh$, ενώ ο μικρός άξονας τείνει στο μηδέν. Το πέρασμα δηλαδή ενός κύματος μεγάλου μήκους προκαλεί μιά γραμμική ταλάντωση των σωματιδίων του ρευστού στην x κατεύθυνση με το ίδιο πλάτος ταλάντωσης σε όλο το βάθος του ρευστού.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτά ισχύουν με βάση την γραμμική θεωρία των κυματισμών. Στην πραγματικότητα, λόγω των μη γραμμικών όρων στις οριακές συνθήκες, η μέση ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού στην κατεύθυνση x (περιγραφή Lagrange) έχει μη μηδενική τιμή. Αποδεικνύεται ότι η μέση ταχύτητα είναι ανάλογη με a^2, είναι επομένως πολύ μικρότερη από την στιγμιαία ταχύτητα, και δικαιολογημένα αγνοείται στην γραμμική θεωρία. Η μέση ταχύτητα των σωματιδών του ρευστού είναι όμως πολύ σημαντική γιά γεωφυσικά φαινόμενα, επειδή προκαλεί μιά μέση μεταφορά μάζας νερού παράλληλα με την κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος. Η κίνηση αυτή είναι γνωστή σαν μετατόπιση του Stokes (Stokes drift).

2.2.3 Γραμμές ροής κάτω από απλό αρμονικό κυματισμό

Η ροή κάτω από απλό αρμονικό κυματισμό δεν είναι μόνιμη, οπότε οι γραμμές ροής είναι τελείως διαφορετικές από τις τροχιές των σωματιδίων. Για να προσδιορίσουμε τις γραμμές ροής χρειάζεται να προσδιορίσουμε την ροική συνάρτηση ψ. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Cauchy-Riemmann που συνδέουν τη ροική συνάρτηση με το δυναμικό της ροής:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το δυναμικό (εξίσωση (23)) εύκολα προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για τη ροική συνάρτηση:

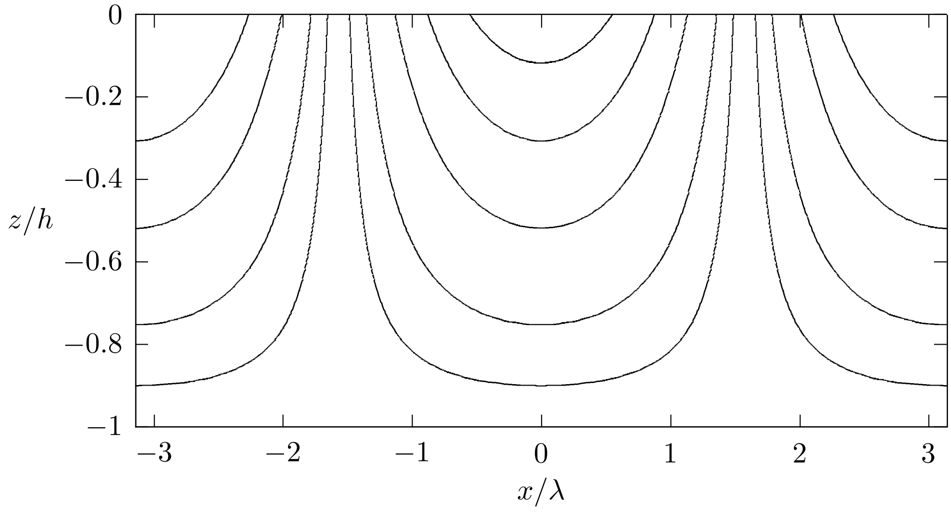
$$\psi = -\frac{a\,\omega}{k\,\sinh(kh)} \sinh(k(z+h)) \cos(kx - \omega t) \tag{37}$$

Επομένως οι γραμμές ροής περιγράφονται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\cos(kx - \omega t) \sinh(k(z+h)) = C \tag{38}$$

Οπου C μια αυθαίρετη σταθερά. Για διάφορες τιμές της σταθεράς C προκύπτει η οικογένεια των γραμμών ροής.

Οι γραμμές ροής για $t = 0$ φαίνονται στο σχήμα 4. Η ομοιότητα του σχήματος αυτού με το σχήμα 2 που δείχνει το διάνυσμα της ταχύτητας κάτω από το κύμα είναι εμφανής. Σημειώνουμε ότι οι γραμμές ροής μεταβάλλονται χρονικά, αλλά η μεταβοή γίνεται με περιοδικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, μετά από χρόνο t η φάση του κύματος θα είναι ίση με $kx - \omega t = k(x - x_t)$, όπου $x_t = t\,\omega/k$. Αν μετατοπίσουμε επομένως την αρχή των αξόνων κατά x_t, αναγόμαστε στο σχήμα 4. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι σε χρόνο t οι γραμμές ροής του σχήματος 4 θα έχουν απλά υποστεί μια παράλληλη μετατόπιση κατά το μήκος



Σχήμα 4: Γραμμές ροής κάτω από απλό αρμονικό κυματισμό για $t = 0$.

x_t. Επειδή στο σχήμα 4 η συντεταγμένη x είναι αδιαστατοποιημένη ως προς το μήκος κύματος λ, θα έχουμε μια μετατόπιση $x_t/\lambda = t/T$, όπου T είναι η περίοδος του κύματος.

2.2.4 Ενέργεια απλών αρμονικών κυματισμών

Η ενέργεια ανά μονάδα πλάτους της ροής, E_T, είναι ίση με το ολοκλήρωμα της μηχανικής ενέργειας (κινητική συν δυναμική) από τον πυθμένα μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια:

$$E_T = \int_{-h}^{\eta} \rho \left(\frac{1}{2} \mid \boldsymbol{u} \mid^2 + gz \right) \mathrm{d}\, z \tag{39}$$

Ορίζουμε τώρα την ενέργεια ανά μονάδα πλάτους λόγω του κυματισμού, και θα την συμβολίζουμε με E, την ποσότητα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από την E_T την δυναμική ενέργεια που έχει η ακίνητη θάλασσα, γιατί η τελευταία υπάρχει πάντοτε και δεν οφείλεται στην παρουσία του κύματος:

$$E = \int_{-h}^{\eta} \rho \left(\frac{1}{2} \mid \boldsymbol{u} \mid^2 + gz \right) \mathrm{d}\, z - \int_{-h}^{\eta} \rho\, g z \, \mathrm{d}\, z \tag{40}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα ως προς z στην (40) και βρίσκουμε ότι αυτή απλοποιείται ως εξής:

$$E = \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{1}{2} \mid \boldsymbol{u} \mid^2 \mathrm{d}\, z + \frac{1}{2} \rho\, g\, \eta^2 \tag{41}$$

Η ποσότητα E λέγεται πυκνότητα ενεργείας του κυματισμού (αν και γιά συντομία την αναφέρουμε συχνά απλώς σαν ενέργεια).

Αντίστοιχα, η ροή ενεργείας διά μέσου επιφανείας κάθετης προς την κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος δίνεται, όπως είδαμε στο προηγούμενο εξάμηνο όταν κάναμε τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο, από την ακόλουθη σχέση:

$$S = \int_{-h}^{\eta} (p + \rho \frac{1}{2} \mid \boldsymbol{u} \mid^2 + \rho g z)\, u \, \mathrm{d}\, z \tag{42}$$

Οι ορισμοί (41) και (42) ισχύουν γιά οποιαδήποτε μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Θα υπολογίσουμε τώρα τις εκφράσεις (41) και (42) γιά απλό αρμονικό κύμα. Μας ενδιαφέρουν η μέση τιμή της ενέργειας και η μέση τιμή της ροής ενεργείας, δηλαδή ο μέσος όρος σε μιά περίοδο ταλάντωσης. Θα συμβολίζουμε την μέση τιμή μιας ποσότητας με μιά παύλα πάνω από το σύμβολο της ποσότητας. Δηλαδή η μέση τιμή μιάς ποσότητας A, συμβολίζεται με $\overline{A}$, και ορίζεται ως εξής:

$$\overline{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A \, \mathrm{d}\, t \tag{43}$$

Γιά τον υπολογισμό των μέσων τιμών μεγεθών που συνδέονται με κυματικά φαινόμενα θα χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες γνωστές σχέσεις, τις οποίες απλά υπενθυμίζουμε:

$$\overline{\cos\theta} = \overline{\sin\theta} = 0, \qquad \overline{\cos^2\theta} = \overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2} \tag{44}$$

Η μεταβλητή $\theta = kx - \omega t$ είναι η φάση του κύματος.

Ξεκινάμε με την δυναμική ενέργεια E_p (δεύτερος όρος στην εξίσωση (41)):

$$E_p = \frac{1}{2} \rho\, g\, a^2 \cos^2\theta \tag{45}$$

Η μέση δυναμική ενέργεια είναι επομένως ίση με

$$\overline{E}_p = \frac{1}{4} \rho\, g\, a^2 \tag{46}$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας E_k (πρώτος όρος στην εξίσωση (41)). Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άνω όριο ολοκλήρωσης από η σε μηδέν, γιατί η διαφορά που θα προκύψει μετά την ολοκλήρωση θα είναι ανάλογη με a^3. Επομένως έχουμε:

$$E_k = \frac{1}{2}\, \rho \int_{-h}^{0} ((\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial y})^2)\, \mathrm{d}\, z = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^{0} (F^2 k^2 \cos^2\theta + F'^2 \sin^2\theta)\, \mathrm{d}\, z \tag{47}$$

Στην ανωτέρω εξίσωση ένας τόνος υποδηλώνει παραγώγιση ως προς z. Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες τον τελευταίο όρο ως προς z και έχουμε ότι:

$$E_k = \frac{1}{2}\,\rho\,(FF'\,|_{-h}^{0}\ \sin^2\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\int_{-h}^{0} k^2F^2\,\mathrm{d}\,z) \tag{48}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (22) και (26) βρίσκουμε ότι η μέση κινητική ενέργεια κυματισμού δίνεται από την σχέση:

$$\overline{E}_k = \frac{1}{4}\rho\,(FF'\,|_{-h}^{0} = \frac{1}{4}\,\rho\,a^2\omega^2\frac{\cos{(kh)}}{k\sinh{(kh)}} = \frac{1}{4}\,\rho\,g\,a^2 \tag{49}$$

Συγκρίνοντας την (49) με την (46) βλέπουμε ότι η μέση κινητική ενέργεια είναι ίση με την μέση δυναμική ενέργεια. Σημειώνουμε ότι αυτή η ισότητα ισχύει πάντοτε γιά μικρές ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων γύρω από τη θέση ισορροπίας τους.

Η συνολική μέση ενέργεια του κυματισμού είναι τελικά ίση με:

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\,\rho\,g\,a^2 \tag{50}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε την μέση ροή ενεργείας για απλό αρμονικό κυμετισμό. Χρησιμοποιώντας την αρχή του Bernoulli για μη μόνιμη ροή, η εξίσωση (42) γιά αστρόβιλη ροή γράφεται ως εξής:

$$S = -\int_{-h}^{\eta}\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathrm{d}\,z \tag{51}$$

Με τις παραδοχές της γραμμικής θεωρίας, η εξίσωση ροής ενεργείας γιά αστρόβιλη ροή (51) γράφεται ως εξής:

$$S = -\int_{-h}^{0}\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathrm{d}\,z \tag{52}$$

Αντικαθιστούμε τώρα την έκφραση γιά το δυναμικό και ολοκληρώνουμε όπως και γιά την ενέργεια από τον πυθμένα μέχρι την μέση στάθμη:

$$S = \rho\,\omega\,k\,\sin^2\theta\int_{-h}^{0}F^{\,2}(z)\,\mathrm{d}\,z \tag{53}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (53) την έκφραση (21) γιά το F και καταλήγουμε μετά την ολοκλήρωση ότι:

$$S = \frac{1}{2}\rho\,a^2\,\frac{\omega^3}{k\sinh^2(kh)}\,\sin^2\theta\,(h + \frac{1}{k}\cosh{(kh)}\sinh{(kh)}) \tag{54}$$

Γιά την απόδειξη της (54) μεταχειριστήκαμε την ακόλουθη σχέση:

$$\int_{-h}^{0} \cosh^2(kh)\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2}(h + \frac{1}{k}\cosh(kh)\sinh(kh))$$

Επομένως η μέση ροή ενεργείας δίνεται από την σχέση:

$$\overline{S} = \frac{1}{4}\rho\, a^2\, \frac{\omega^3}{k^2 \sinh^2(kh)}\,(kh + \cosh(kh)\sinh(kh)) \tag{55}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση διασποράς (26) ξαναγράφουμε την (55) ως εξής:

$$\overline{S} = \frac{1}{4}\rho\, a^2 \frac{\omega g}{k\sinh(kh)\cosh(kh)}\,(kh + \cosh(kh)\sinh(kh)) =$$

$$= \overline{E}\frac{\omega}{2\,k\sinh(kh)\cosh(kh)}\,(kh + \cosh(kh)\sinh(kh)) \tag{56}$$

Αν και μπορεί να μη φαίνεται με την πρώτη ματιά, ο όρος που πολλαπλασιάζει τη μέση ενέργεια είναι ίσος με την παράγωγο της συχνότητας ως προς τον αριθμό κύματος $\mathrm{d}\,\omega/\,\mathrm{d}\,k$. Αυτό μπορύμε να το δούμε παραγωγίζοντας την εξίσωση διασποράς (26) ως προς k, οπότε έχουμε ότι:

$$2\omega\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,k} = g(\tanh(kh) + kh\,\frac{1}{\cosh^2(kh)}) =$$

$$= \frac{g}{\cosh^2(kh)}\,(kh + \cosh(kh)\sinh(kh)) =$$

$$= \frac{\omega^2}{k\cosh(kh)\sinh(kh)}\,(kh + \cosh(kh)\sinh(kh))$$

Απ' όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο:

$$\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,k} = \frac{\omega}{2\,k\sinh(kh)\cosh(kh)}\,(kh + \cosh(kh)\sinh(kh)) = c_g \tag{57}$$

Η ποσότητα $c_g = \mathrm{d}\,\omega/\,\mathrm{d}\,k$ έχει διαστάσεις ταχύτητας, και λέγεται “ομαδική ταχύτητα” (group velocity).

Κατά συνέπεια η εξίσωση (56) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\overline{S} = \overline{E}\,\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,k} \tag{58}$$

Από φυσικής πλευράς η εξίσωση (58) δείχνει ότι η ομαδική ταχύτητα μπορεί να οριστεί σαν η ταχύτητα ροής της ενεργείας του κυματισμού.

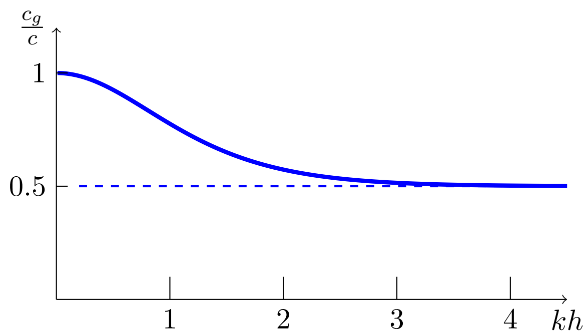
Στο όριο του ρηχού νερού ($kh \to 0$), η εξίσωση (57) γίνεται:

$$c_g = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \tag{59}$$

Στο όριο του βαθειού νερού ($kh \to \infty$), η εξίσωση (57) γίνεται:

$$c_g = \frac{\omega}{2k} \tag{60}$$

Δηλαδή στο ρηχό νερό η ομαδική ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα μεράδοσης του κυματισμού, ενώ στο βαθύ νερό είναι ίση με το μισό της ταχύτητας μετάδοσης. Η μεταβολή του λόγου της ομαδικής ταχύτητας διά της ταχύτητας μετάδοσης συναρτήσει του αριθμού κύματος φαίνεται στο σχήμα 5. Γιά $kh > 3$ ο λόγος c_g/c πλησιάζει την τιμή 0.5 που αντιστοιχεί σε νερό με άπειρο βάθος.



Σχήμα 5: Μεταβολή του λόγου c_g/c συναρτήσει της μεταβλητής kh

Σημειώνουμε ότι όπως φαίνεται από το σχήμα, και μπορεί να επαληθευθεί αναλυτικά από την (57), η ομαδική ταχύτητα είναι μικρότερη ή ίση από την ταχύτητα μετάδοσης (το ίσον ισχύει στο όριο του ρηχού νερού) και μεγαλύτερη η ίση από το μισό της ταχύτητας μετάδοσης (το ίσον ισχύει στο όριο του βαθειού νερού)

2.2.5 Στάσιμοι κυματισμοί

Στάσιμοι κυματισμοί προκύπτουν από την υπέρθεση δύο κυματισμών με τον ίδιο αριθμό κύματος και το ίδιο πλάτος ταλάντωσης αλλά με αντίθετη φορά μετάδοσης. Αυτό μπορεί να συμβεί, για παράδειγμα, από την ανάκλαση κύματος σε κατακόρυφο λείο τοίχο.

Ας θεωρήσουμε επομένως την υπέρθεση δύο κυματισμών με αριθμό κύματος k, συχνότητα ω και πλάτος ταλάντωσης a, αλλά με αντίθετη φορά μετάδοσης. Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\eta = a\,\cos(kx-\omega t) + a\,\cos(kx+\omega t) = 2a\,\cos(kx)\,\cos(\omega t) \tag{61}$$

Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας έχει τη μορφή μιάς ταλάντωσης επάνω-κάτω, χωρίς οριζόντια μετάδοση. Το δυναμικό της ροής προκύπτει από την υπέρθεση των δυναμικών των δύο κυματισμών:

$$\phi = a\frac{\omega}{k}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\sin(kx-\omega t) - a\frac{\omega}{k}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\sin(kx+\omega t) =$$

$$= -2a\frac{\omega}{k}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\cos(kx)\sin(\omega t) \tag{62}$$

Σημειώνουμε ότι το αρνητικό πρόσημο στην πρώτη γραμμή της (62) προκύπτει από το γεγονός ότι ο δεύτερος κυματισμός έχει αρνητική συχνότητα επειδή μεταδίδεται παράλληλα με την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (62) ως προς x και z βρίσκουμε ότι οι ταχύτητες του ρευστού λόγω του στάσιμου κυματισμού δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$u = 2\,a\,\omega\,\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\sin(kx)\sin(\omega t) \tag{63}$$

$$w = 2a\,\omega\,\frac{\sinh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\cos(kx)\sin(\omega t) \tag{64}$$

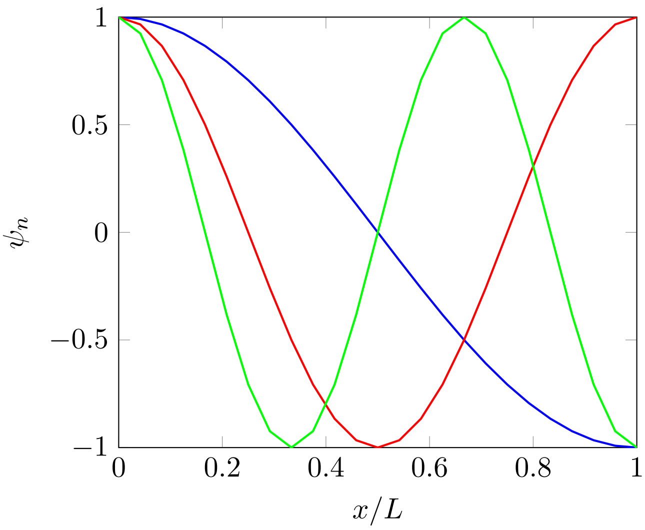
Παρατηρούμε ότι για τις τιμές του x για τις οποίες $sin(kx)=0$ (δηλαδή για $kx=n\pi$, όπου n ακέραιος), η συνιστώσα u μηδενίζεται σε όλο το βάθος της ροής γιά οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αρα το δυναμικό (62) παριστάνει την ανάκλαση κυματισμού σε κατακόρυφο τοίχο που βρίσκεται σε μιά από αυτές τις τιμές.

Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε δύο κατακόρυφους τοίχους σε απόσταση L μεταξύ τους, όπου μπορούμε χωρίς απώλεια γενικότητας να θεωρήσουμε ότι ο ένας τοίχος καταλαμβάνει τη θέση $x=0$, το δυναμικό (62) περιγράφει τη ροή που αντιστοιχεί σε στάσιμο κυματισμό αρκεί $\sin(kL)=0$. Αυτό σημαίνει ότι οι ακόλουθες τιμές του αριθμού κύματος k είναι δυνατές:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{65}$$

Οι εξίσωση (65) ορίζει τις ιδιομορφές του συστήματος $\psi_n(x)$, οι οποίες έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\psi_n(x) = \cos(n\pi x) \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{66}$$



Σχήμα 6: Πρώτες τρεις ιδιομορφές για δεξαμενή μήκους L: $n = 1$ (μπλε γραμμή), $n = 2$ (κόκκινη γραμμή), $n = 3$ (πράσινη γραμμή)

Οι ιδιοσυχνότητες, δηλαδή οι συχνότητες των ιδιομορφών, ω_n, μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από την εξίσωση διασποράς. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιομορφές και τις ιδιοσυχνότητες μιας δεξαμενής με βάθος h και μήκος L.

Η ταλάντωση της επιφάνειας του νερού με την ιδιομορφή τάξης n δίνεται από τη σχέση:

$$\eta_n(x,t) = A_n \cos\frac{n\pi x}{L}\cos(\omega_n t) \tag{67}$$

Οπου A_n σταθερά. Γενικώτερες ταλαντώσεις της επιφάνειας του νερού μπορούν να περιγραφούν με υπέρθεση πολλών ιδιομορφών.

2.3 Κύματα πάνω από ομοιόμορφη ροή

Συχνά σε πρακτικές εφαρμογές χρειάζεται να θεωρήσουμε μετάδοση κυματισμών πάνω από ρευστό που κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα. Αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε επειδή υπάρχει κάποιο θαλάσσιο ρεύμα με σταθερή ταχύτητα (μάλλον σπάνια περίπτωση), ή, συνηθέστερα, γιατί εργαζόμαστε σε σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα, π.χ. το σύστημα αναφοράς πάνω στο πλοίο, οπότε στο δικό μας σύστημα αναφοράς η θάλασσα φαίνεται να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Το πρόβλημα της μετάδοσης κυματισμών πάνω από ομοιόμορφη ροή επιλύεται με αλλαγή του συστήματος αναφοράς, που το ανάγει στο πρόβλημα μετάδοσης κυματισμών πάνω από ακίνητο νερό.

Συμβολίζουμε με x', y', z' το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η θάλασσα φαίνεται να κινείται με ταχύτητα U παράλληλη με τον άξονα x'. Θα ονομάζουμε το σύστημα αυτό «κινούμενο». Εστω x, y, z το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η θάλασσα έχει μηδενική μέση ταχύτητα, το οποίο θα ονομάζουμε "ακίνητο". Υποθέτοντας ότι το πλοίο κινείται με θετική ταχύτητα, τα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x' = x + Ut, \qquad y' = y, \qquad z' = z \qquad t' = t \tag{68}$$

Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς ισχύουν προφανώς οι εξισώσεις (15), (23) και (26) για απλούς αρμονικούς κυματισμούς.

Επανερχόμαστε στο κινούμενο σύστημα αναφοράς αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (68) οπότε η εξίσωση (15) γράφεται ως εξής:

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) = a \cos(kx' - (\omega + k\,U)t') = a \cos(kx' - \omega'\,t') \tag{69}$$

Οπου ω' είναι συχνότητα του κυματισμού στο κινούμενο σύστημα αναφοράς που δίνεται από την σχέση:

$$\omega' = \omega + k\,U \tag{70}$$

Τα ω και k συνέονται με την εξίσωση διασποράς στο ακίνητο σύστημα αναφοράς(26). Κατά συνέπεια η εξίσωση διασποράς στο κινούμενο σύστημα αναφοράς έχει την εξής μορφή:

$$(\omega' - k\,U)^2 = gk \tanh(kh) \tag{71}$$

Σημειώνουμε ότι αν η θάλασσα στο κινούμενο σύστημα αναφοράς φαίνεται να κινείται με ταχύτητα U, αυτό συμβαίνει επειδή ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα $-U$. Γιά παράδειγμα, αν η θάλασσα κινείται προς την θετική κατεύθυνση, ο παρατηρητής κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, και η ταχύτητα του θα είναι αντίρροπη με την ταχύτητα κυμάτων που έχουν θετικό ω, και ομόρροπη με την ταχύτητα κυμάτων που έχουν αρνητικό ω.

Επομένως η εξίσωση (70) μπορεί να ερμηνευτεί και ως εξής: Παρατηρητής κιμούμενος με ταχύτητα U βλέπει συχνότητα κύματος μεγαλύτερη από τον ακίνητο παρατηρητή (μεγαλύτερη κατά το ποσό $k\,U$), εάν η ταχύτητα του είναι αντίρροπη με την ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού. Ο παρατηρητής βλέπει μικρότερη συχνότητα (πάλι κατά $k\,U$), αν η ταχύτητα του είναι ομόρροπη με την ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού. Αν η ταχύτητα του είναι ίση την ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού ο παρατηρητής βλέπει μόνιμη ροή. Η μεταβολή αυτή της συχνότητας συναρτήσει της ταχύτητας του παρατηρητή εμφανίζεται σε όλα τα κυματικα φαινόμενα και λέγεται **φαινόμενο Doppler ή μετατόπιση Doppler** (Doppler shift).

Το δυναμικό της ροής στο κινούμενο σύστημα, $\phi'(x', z', t')$, προκύπτει από τη σχέση:

$$\phi' = U\,x' + \frac{a\,(\omega' - kU)}{k \sinh(kh)} \cosh(k(z' + h)) \sin(kx' - \omega'\,t') \tag{72}$$

Ο πρώτος όρος στην (72) είναι το δυναμικό της ομοιόμορφης ροής με ταχύτητα U, και ο δεύτερος όρος το δυναμικό λόγω της παρουσίας του κύματος στην επιφάνεια.

Γιά γενικότερες κινήσεις της θάλασσας (δηλαδή όχι κατ' ανάγκην απλή αρμονική) μπορούμε να μετασχηματίσουμε όλο το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο κινούμενο σύστημα αναφοράς. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης έχουμε ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \tag{73}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + U\frac{\partial}{\partial x'} \tag{74}$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν τον μετασχηματισμό (73) στην εξίσωση του Laplace και στις οριακές συνθήκες του προβλήματος βρίσκουμε ότι η εξίσωση Laplace και η οριακή συνθήκη στον πυθμένα παραμένουν αμετάβλητες. Οι δύο οριακές συνθήκες (12) και (14) στην ελεύθερη επιφάνεια, όμως, που περιέχουν παραγώγιση ως προς χρόνο, παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z'} \mid_{z'=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t'} + U\frac{\partial \eta}{\partial x'} \tag{75}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t'} + U\,\frac{\partial}{\partial x'})^2\phi' + g\,\frac{\partial \phi'}{\partial z'} = 0 \qquad\qquad z = 0 \tag{76}$$

Σημειώνουμε ότι τα ίδια αποτελέσματα μπορούν να παραχθούν με κατ' ευθείαν γραμμικοποίηση του προβλήματος γύρω από την ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα U.

3 Γενική κίνηση της θάλασσας

3.1 Υπέρθεση απλών αρμονικών κυματισμών σε νερό σταθερού βάθους

Γενικά η κίνηση της θάλασσας δεν είναι μιά απλή αρμονική ταλάντωση χρονικά , ούτε διδιάστατη όπως στην εξιδανικευμένη περίπτωση του απλού αρμονικού κυματισμού. Περίπλοκες κινήσεις όμως μπορούν να περιγραφούν με υπέρθεση πολλών αρμονικών κυματισμών, όπως θα εξηγήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Επειδή τα κύματα που θα υπερθέσουμε θα μεταδίδονται σε πολλές διαφορετικές κατευθύνσεις και θα έχουν διαφορετικές φάσεις, ξεκινάμε με μιά γενίκευση του απλού αρμονικού κυματισμού που είδαμε στο κεφάλαιο 2.2, επιτρέποντας στον κυματισμό να μεταδίδεται υπό γωνία θ ως προς τον άξονα x, και να έχει μιά διαφορά φάσης β από το συνημίτονο. Γιά να περιγράψουμε μαθηματικά ένα τέτοιο κυματισμό θεωρούμε σύστημα αξόνων ξ, υ, ζ όπου ο άξονας ζ συμπίπτει με τον άξονα z, ο άξονας ξ έχει γωνία κλίσης θ ως προς τον άξονα x, και ο άξονας υ είναι κάθετος στους ξ, ζ.

Ως προς το νέο σύστημα ισχύει η έκφραση (15) με την προσθήκη της διαφοράς φάσης ως προς το συνημίτονο:

$$\eta = a \cos(k\xi - \omega t + \beta) \tag{77}$$

Εξ ορισμού η μεταβλητή ξ συνδέεται με τις συντεταγμένες x, y με την ακόλουθη σχέση:

$$\xi = x \cos\theta + y \sin\theta \tag{78}$$

Οπότε στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας γράφεται ως εξής:

$$\eta = a \cos(k(x\cos\theta + y\sin\theta) - \omega t + \beta) \tag{79}$$

Στην άθροιση πολλών αρμονικών κυματισμών με διαφορετική φάση διευκολύνει η χρήση μιγαδικών μεταβλητών. Γι αυτό τον λόγο ξαναγράφουμε την (79) στην ακόλουθη μορφή:

$$\eta = \mathrm{Re}[\, A \exp(\imath\, k(x\cos\theta + y\sin\theta) - \omega t)\,] \tag{80}$$

Οπου $\imath = \sqrt{-1}$, $A = a \exp(\imath\beta)$, και $Re[f]$ συμβολίζει το πραγματικό μέρος της μιγαδικής μεταβλητής f.

Το δυναμικό της ροής που αντιστοιχεί στην (80) είναι:

$$\phi = -\,\mathrm{Re}[\,\imath\, A\, \frac{\omega}{k} \frac{\cos(k(z+h))}{\sinh(kh)} \exp(\imath\, k(x\cos\theta + y\sin\theta) - \omega t)\,] \tag{81}$$

Το δυναμικό (81) περιέχει και τις τρεις συντεταγμένες x, y, z, επομένως και οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας u, v, w είναι μη μηδενικές. Η ροή είναι βέβαια ψευδο-τρισδιάστατη, επειδή μια απλή περιστροφή των αξόνων την κάνει δισδιάστατη. Υπέρθεση όμως δύο, ή και περισοτέρων κυματισμών που μεταδίδονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις δημιουργεί τρισδιάστατη ροή.

Θεωρούμε τώρα N κύματα που μεταδίδονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Το υπ' αριθμόν j κύμα μεταδίδεται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ_j με τον άξονα x, έχει κυματαριθμό k_j, συχνότητα ω_j, τα οποία φυσικά συνδέονται με την εξίσωση διασποράς, πλάτος ταλάντωσης a_j και διαφορά φάσης β_j. Οπότε θέτοντας $A_j = a_j \exp(\imath\beta_j)$, η κίνηση της επιφάνειας της θάλασσας εξ αιτίας της ταυτόχρονης παρουσίας αυτών των N κυματισμών δίνεται από την σχέση:

$$\eta = \mathrm{Re}[\sum_{j=1}^{N} A_j \exp\left(\imath\, k_j(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j) - \omega_j t\right)] \tag{82}$$

Μιά παρόμοια άθροιση των δυναμικών των κυμάτων δίνει το συνολικό δυναμικό της ροής.

$$\phi = -\,\mathrm{Re}[\imath \sum_{j=1}^{N} A_j\, \frac{\omega}{k_j} \frac{\cosh\left(k_j(z+h)\right)}{\sinh\left(kh\right)} \exp\left(\imath\, k_j(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j) - \omega_j t\right)] \tag{83}$$

Σημειώνουμε ότι η κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας που περιγράφεται από την (82) δεν είναι περιοδική, εκτός από την πολύ ειδική περίπτωση που οι N συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια της ίδιας θεμελιώδους συχνότητας. Επίσης η ροή στην θάλασσα δεν είναι διδιάστατη εκτός αν όλες οι γωνίες θ_j είναι ίσες μεταξύ τους, ή αν διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του π.

Η πιό γενική κίνηση της θάλασσας μπορεί να περιγραφεί θεωρώντας άπειρα κύματα. Ο αριθμός κύματος είναι συνάρτηση της συχνότητας μέσω της εξίσωσης διασποράς, ενώ το πλάτος ταλάντωσης, και η διαφορά φάσης είναι συναρτήσεις της συχνότητας και της κατεύθυνσης μετάδοσης του κυματισμού. Το άθροισμα στην εξίσωση (82) αντικαθίσταται από διπλή ολοκλήρωση ως προς ω και θ:

$$\eta = \mathrm{Re}[\int_0^\infty \mathrm{d}\,\omega \int_0^\pi A(\omega,\theta) \exp\left(\imath\, k(\omega)(x\cos\theta + y\sin\theta) - \omega t\right) \mathrm{d}\,\theta] \tag{84}$$

Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί εναλλακτικά να γραφτεί σαν διπλό ολοκλήρωμα ως προς k και θ, έχοντας την συχνότητα σαν συνάρτηση του k μέσω της εξίσωσης διασποράς, και το πλάτος ταλάντωσης (που θα το συμβολίσουμε με $B(k,\theta)$ προς αποφυγή σύγχυσης με την (84)) συνάρτηση των k και θ. Τότε αντί γιά την εξίσωση (84) έχουμε ότι:

$$\eta = \mathrm{Re}[\int_0^\infty \mathrm{d}\,k \int_0^\pi B(k,\theta) \exp\left(\imath\, k(x\cos\theta + y\sin\theta) - \omega(k)t\right) \mathrm{d}\,\theta] \tag{85}$$

Οι δύο εκφράσεις (84) και (85) είναι τελείως ισοδύναμες. Βασική προυπόθεση γιά να υπάρχουν τα ολοκληρώματα είναι ότι η συνάρτηση A στην (84) (ή αντίστοιχα η συνάρτηση B στην (85)) πρέπει να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη ως προς ω και θ (η αντίστοιχα ως προς k και θ).

Η κίνηση της θάλασσας λόγω ανεμογενών κυματισμών είναι τόσο περίπλοκη που η συνάρτηση στην εξίσωση (84) (ή στην (85)) είναι γνωστή μόνο στοχαστικά. Τότε και η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να υπολογιστεί μόνο στοχαστικά, και μιλάμε πλέον γιά τυχαίους κυματισμούς.

3.2 Ομάδες κυμάτων

Ενα απλό αρμονικό κύμα που να εκτείνεται επ' άπειρον δεν συναντάται ποτέ στην πραγματικότητα. Αυτό που συναντάται όμως συχνά και που μοιάζει με αρμονικό κύμα είναι μιά ομάδα κυμάτων των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά λίγο μόνο (το ίδιο φυσικά ισχύει και γιά τους αριθμούς κύματος).

Μαθηματικά μιά ομάδα κυμάτων μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση (84), με τη συνάρτηση A στο ολοκλήρωμα θα έχει μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα $(\omega_0-\epsilon, \omega_0+\epsilon)$, όπου ω_0 είναι η βασική συχνότητα και $\epsilon << \omega_0$. Ας θεωρήσουμε μιά τέτοια ομάδα, και γιά απλότητα θα υποθέσουμε ότι τα κύματα μεταδίδονται όλα στην ίδια διεύθυνση, οπότε έχουμε μόνο ολοκλήρωση ως προς ω:

$$\eta = \mathrm{Re}[\int_{\omega_0-\epsilon}^{\omega_0+\epsilon} A(\omega) \exp\left(\imath(k(\omega)x - \omega t)\right) \mathrm{d}\,\omega\,] \tag{86}$$

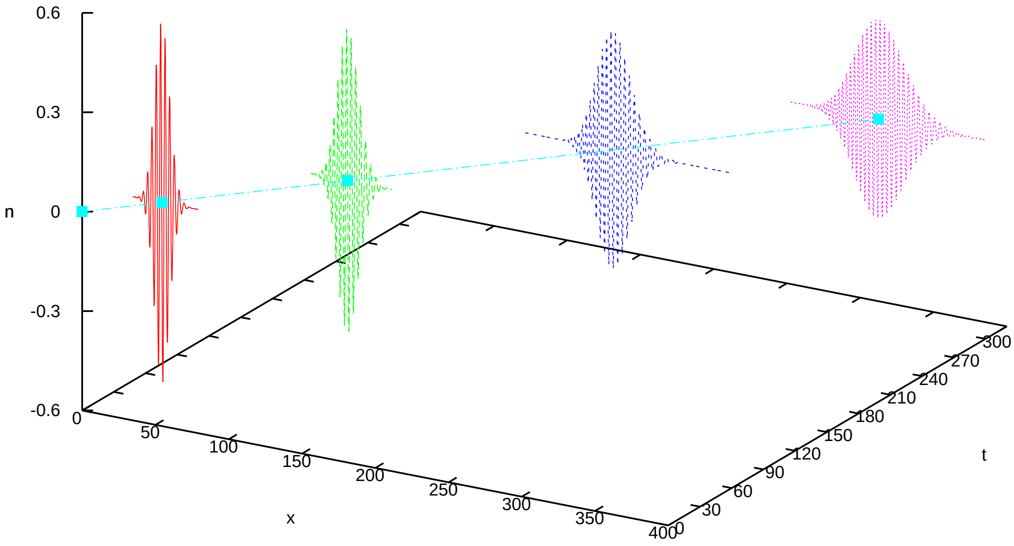
Η (86) γράφεται τώρα ως εξής:

$$\eta = \mathrm{Re}[\exp\left(\imath(k(\omega_0)x - \omega_0 t)\right) \int_{\omega_0-\epsilon}^{\omega_0+\epsilon} A(\omega) \exp\left(\imath((k(\omega)x - k(\omega_0)) - (\omega-\omega_0)t)\right) \mathrm{d}\,\omega\,] \tag{87}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει ένα βασικό κύμα με συχνότητα ω_0 και κυματαριθμό $k(\omega_0)$, το οποίο όμως πολλαπλασιάζεται με μιά συνάρτηση (το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος), έχει δηλαδή όπως λέμε μιά «διαμόρφωση». Επειδή το εύρος διακύμανσης συχνοτήτων και κυματαριθμών είναι μικρό βλέπουμε ότι η συνάρτηση διαμόρφωσης στην (87) μεταβάλλεται αργά όταν:

$$\frac{x}{t} \approx \frac{\omega-\omega_0}{k(\omega)-k(\omega_0)} \approx c_g \tag{88}$$

Συμπεραίνουμε ότι η ομάδα κυματισμών μεταδίδεται με την ομαδική ταχύτητα, και όχι με την ταχύτητα φάσης του βασικού κύματος. Αυτό απεικονίζεται στην εικόνα 7, όπου μιά δισδιάστατη ομάδα κυματισμών σε βαθύ νερό απεικονίζεται γιά διάφορες χρονικές στιγμές. Η εικόνα έχει προκύψει με αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος στην εξίσωση (86) με $f(\omega) = \exp\left(-(\omega-\omega_0)^2/0.1\right)$, όπου $\omega_0 = 4.5$ είναι η συχνότητα του βασικού κύματος. Με την πάροδο του χρόνου η έκταση της ομάδας αυξάνει και το ύψος μειώνεται. Η έκταση της ομάδας αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο, ενώ γιά $t \to \infty$ το ύψος μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Ενας παρατηρητής με ταχύτητα ίση με την ομαδική ταχύτητα του βασικού κύματος με αριθμό κύματος βλέπει σε κάθε στιγμή το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.



Σχήμα 7: Διαδοχικά στιγμιότυπα (για $t = 60, 90, 120, 180$) μιάς ομάδας κυματισμών σε βαθύ νερό με βασικό κύμα που έχει συχνότητα $\omega_0 = 4.5$. Η ευθεία γραμμή που ξεκινά από την αρχή των αξόνων δείχνει την τροχιά παρατηρητή που κινείται με ταχύτητα ίση με την ομαδική ταχύτητα του βασικού κύματος. Ο παρατηρητής αυτός βλέπει σε κάθε στιγμή το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.

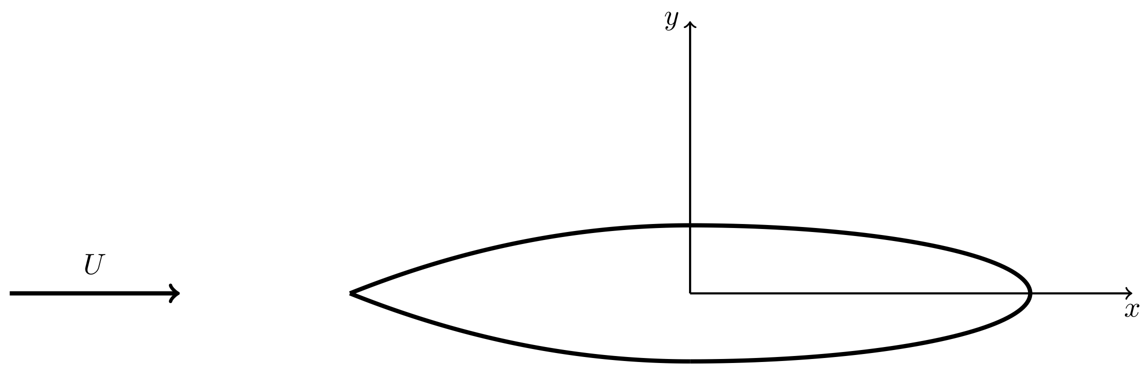
4 Κύματα πλοίου σε βαθύ νερό

4.1 Γενικά

Τα πλοία που κινούνται με σταθερή ταχύτητα δημιουργούν ένα πολύ χαρακτηριστικό σύστημα κυμάτων, που αποτελείται από δύο οικογένειες κυμάτων: Τα αποκλίνοντα κύματα (diverging waves) που μεταδίδονται υπό γωνία προς την πορεία του πλοίου, και τα εγκάρσια (transverse waves) που μεταδίδονται παράλληλα με την πορεία του πλοίου. Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που δημιουργεί το πλοίο με βάση την γραμμική θεωρία κυματισμών. Θα υποθέσουμε ότι το βάθος της θάλασσας είναι αρκετό ώστε να ισχύει η εξίσωση διασποράς γιά βαθύ νερό.

4.2 Γραμμική θεωρία κυμάτων πλοίου

Θεωρούμε πλοίο που κινείται με σταθερή ταχύτητα U. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων με άξονες x, y οριζόντιους και τον άξονα z κατακόρυφο με φορά αντίθετη προς τη φορά της βαρύτητας. Θεωρούμε ότι το πλοίο κινείται κατά μήκος του άξονα x προς την αρνητική κατεύθυνση. Στο σύστημα αναφοράς του πλοίου, που παριστάνουμε με x', y', z', η θάλασσα κινείται παράλληλα με τον θετικό άξονα x με σταθερή ταχύτητα U (Σχήμα 8)



Σχήμα 8: Σχήμα ορισμού του συστήματος αναφοράς του πλοίου

Μακριά από το πλοίο, όπου το πλοίο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα “σημείο”, η παραμόρφωση της επιφάνειας της θάλασσας μπορεί να παρασταθεί σαν ένα άθροισμα απλών αρμονικών κυμάτων διαφόρων συχνοτήτων, κατευθύνσεων και πλατών ταλάντωσης. Στο σύστημα αναφοράς (x', y', z') που κινείται με το πλοίο τα κύματα έχουν την εξής μορφή:

$$\eta = \text{Re}[\, A \, \exp\left(\imath \, k(\omega)(x' \cos\theta + y' \sin\theta) - (\omega - k\,U \, \cos\theta\,)\, t)\,\right] \tag{89}$$

Οπου $(\omega, \, k)$ συνδέονται με την εξίσωση διασποράς ακίνητου παρατηρητή.

Γιά ένα πλοίο που κινείται γιά πολλή ώρα με σταθερή ταχύτητα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα κύματα εμφανίζονται αμετάβλητα χρονικά, επειδή τα πιό γρήγορα ή τα πιό αργά κύματα θα έχουν προσπεράσει το πλοίο, ή θα έχουν μείνει πολύ πίσω του, αντίστοιχα. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται με το ότι η μετατόπιση της επιφάνειας του νερού (εξίσωση (89)) δεν θα εξαρτάται από τον χρόνο. Αυτό συμβαίνει μόνο γιά τα κύματα που ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\omega = k U \cos\theta \tag{90}$$

Η εξίσωση διασποράς γιά κύματα σε βαθύ νερό δίνει $\omega^2 = k g$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (90) και βρίσκουμε ότι:

$$\omega = \frac{g}{U \cos\theta} \tag{91}$$

$$k = \frac{g}{U^2 \cos^2\theta} \tag{92}$$

Τα κύματα με μέγιστο μήκος κύματος επομένως είναι τα κύματα που ακολουθούν την πορεία του πλοίου: $\theta = 0$. Αυτά λέγονται εγκάρσια κύματα επειδή οι κορυφές τους είναι κάθετες προς την πορεία του πλοίου, και έχουν μήκος $2\pi U^2/g$. Καθώς η γωνία μετάδοσης μεταβάλλεται από 0 σε $\pi/2$ το μήκος κύματος μειώνεται και τείνει στο μηδέν.

Επομένως το σύστημα κυμάτων που δημιουργεί το πλοίο αποτελείται από άθροισμα κυμάτων που ικανοποιούν τις (91), (92). Αθροίζουμε κυματισμούς προς όλες τις κατευθύνσεις πίσω από το πλοίο, η γωνία μετάδοσης των κυματισμών μεταβάλλεται από $-\pi/2$ σε $3\pi/2$, οπότε στο σύστημα αναφοράς που κινείται με το πλοίο έχουμε ότι:

$$\eta = \mathrm{Re}[\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} A(\theta) \exp\left(\imath k(\theta)(x' \cos\theta + y' \sin\theta)\right) \mathrm{d}\,\theta] \tag{93}$$

Ως προς ακίνητο παρατηρητή με σύστημα αναφοράς (x, y, z) η εξίσωση (93) παίρνει την μορφή:

$$\eta(x, y, t) = \mathrm{Re}[\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} A(\theta) \exp\left(\imath k(\theta)\xi - \omega(\theta)\,)\, t\right) \mathrm{d}\,\theta] \tag{94}$$

Οπου $\xi = (x \cos\theta + y \sin\theta)$, ο αριθμός κύματος k δίνεται από την (92) και η συχνότητα ω από την εξίσωση διασποράς. Οπως είπαμε όταν συζητούσαμε γιά τις ομάδες κυματισμών οι κορυφές των κυματισμών βρίσκονται στην θέση $\xi/t = \mathrm{d}\,\omega/\mathrm{d}\,k$, ή ισοδύναμα $\mathrm{d}(k\xi - \omega\, t)/\mathrm{d}\,k = 0$. Στο σύστημα αναφοράς του πλοίου αυτή η σχέση μετασχηματίζεται ως εξής:

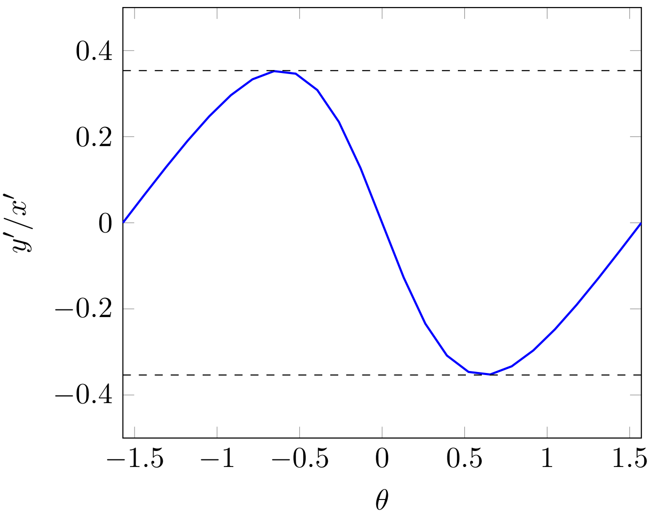
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k}(\,k(x' \cos\theta + y' \sin\theta)) = 0 \tag{95}$$

Επειδή ο αριθμός κύματος k είναι συνάρτηση της γωνίας θ λόγω της (92), η εξίσωση (95) ισοδυναμεί με:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\theta}(\,k(x'\cos\theta + y'\sin\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\theta}(\frac{g}{U^2\cos^2\theta}(x'\cos\theta + y'\sin\theta)) = 0 \tag{96}$$

Η ισοδυναμία της (96) με την (95) ισχύει γιά όλες τις τιμές της γωνίας θ, εκτός από τα σημεία όπου ισχύει ότι $\mathrm{d}\,k/\,\mathrm{d}\,\theta = 0$. Τέτοια σημεία είναι όμως μεμονωμένα, και μπορούν να αγνοηθούν. Από την (96), αφού κάνουμε τις παραγωγίσεις ως προς θ, βρίσκουμε ότι:

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin^2\theta} \tag{97}$$



Σχήμα 9: Γραφικη παράσταση της εξίσωσης (97) στο διάστημα $\pi/\,2 < \theta < 3\,\pi/\,2$. Οι δύο διακεκομένες γραμμές αντιστοιχούν στις τιμές $y'/x' = \pm\,1/2^{3/2}$.

Στο σχήμα 9 έχει γίνει γραφικη παράσταση της (97). Οπως βλέπουμε, γιά θ μεταξύ $-\pi/2$ και $\pi/2$ το δεξιό μέλος της (97) μεταβάλλεται μεταξύ $-(1/2^{3/2})$ και $(1/2^{3/2})$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι κορυφές των κυμάτων βρίσκονται μέσα στον τομέα του επιπέδου που ορίζεται από τις δύο ευθείες $y/x = \pm(1/2^{3/2})$. Οι δύο αυτές ευθείες περνούν από την αρχή των αξόνων και έχουν κλίση $-(1/2^{3/2})$, σχηματίζουν δηλαδή γωνίες $\tan\alpha = \pm(1/2^{3/2})$ με τον άξονα των x. (Αρα $\alpha = \pm 19^o 28'$). Το σύστημα κυμάτων που ακολουθεί το πλοίο, αποτελούμενο από εγκάρσια και αποκλίνοντα κύματα, λέγεται **σύστημα κυμάτων Kelvin**. Το σύστημα κυμάτων Kelvin βρίσκεται μέσα σε μιά “σφήνα” γωνίας $2\alpha = 38^o 56'$. Η γωνία $2\,\alpha$ λέγεται γωνία του Kelvin.

Χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες η εξίσωση (97) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\sin 2\theta}{3-\cos 2\theta} \tag{98}$$

Κατά συνέπεια έχουμε την ακόλουθη σχέση ανάμεσα στις γωνίες θ και β:

$$\sin(2\theta - \beta) = 3\sin\beta \qquad (99)$$

Οπου η γωνία β ορίζεται από την σχέση $\tan\beta = y'/x'$. Η εξίσωση (99) έχει λύση ως προς θ μόνο για $|\sin\beta| \leq 1/3$, δηλαδή για x', y' που βρίσκονται μέσα στην γωνία Kelvin. Οταν αυτό ικανοποιείται προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το θ:

$$\theta = \frac{1}{2}(\arcsin(3\sin\beta) + \beta) \qquad (100)$$

Οταν το σημείο (x', y') βρίσκεται πάνω στα όρια της γωνίας Kelvin, όταν δηλαδή $\sin\beta = 1/3$, η εξίσωση (100) μας δίνει την ακόλουθη τιμή για τη γωνία γωνία μετάδοσης των κυματισμών θ:

$$\theta = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \beta) \qquad (101)$$

Σημειώνουμε ότι, όταν $\sin\beta = 1/3$, $\beta = \alpha$. Επομένως, εκφράζοντας τις γωνίες σε μοίρες, η γωνία μετάδοσης των αποκλινόντων κυματισμών είναι $\theta = 0.955$ rad $(54^o43')$. Οταν $\sin\beta = -1/3$, λόγω συμμετρίας έχουμε ότι $\theta = -0.955$ rad. Τέλος, γιά τα σημεία πάνω στον άξονα των x' ($\beta = 0$) έχουμε ότι $\theta = 0$ (εγκάρσια κύματα).

Η εξίσωση των κορυφών των κυμάτων στο σύστημα αναφοράς του πλοίου προκύπτει από το ότι η φάση πάνω στις κορυφές είναι σταθερά, οπότε από την εξίσωση (96) έχουμε:

$$\frac{1}{\cos^2\theta}(x'\cos\theta + y'\sin\theta) = C \qquad (102)$$

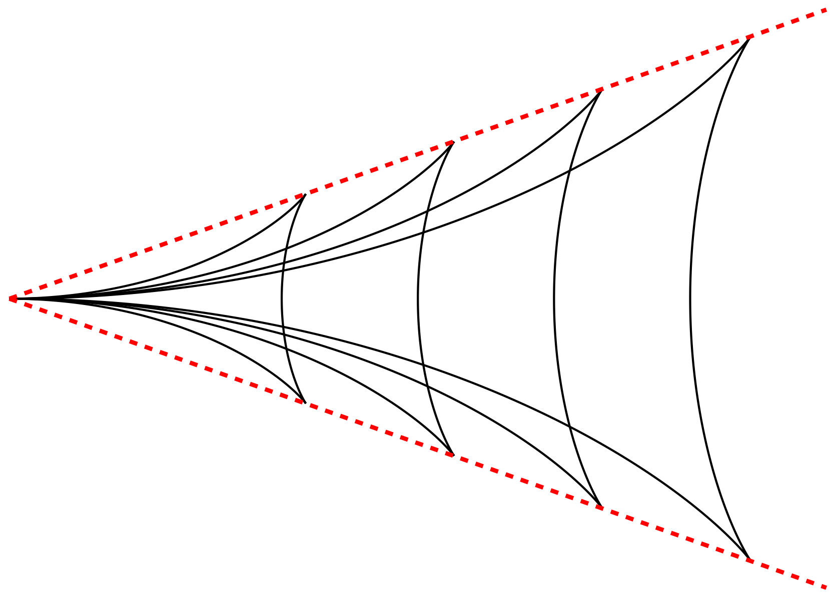
Οπου C σταθερά. Συνδυάζοντας την εξίσωση (102) με την (98) παίρνουμε την ακόλουθη παραμετρική έκφραση για τις κορυφές των κυμάτων:

$$x' = C\,(3 - \cos(2\,\theta))\,\cos\theta \qquad (103)$$

$$y' = -C\,\sin(2\,\theta)\,\cos\theta \qquad (104)$$

Γιά διάφορες τιμές της C, μεταβάλλοντας την γωνία θ από $-\pi/2$ έως $\pi/2$, παίρνουμε απο τις εξισώσεις (103) και (104) μιά απεικόνιση των κορυφών των σημαντικών κυμάτων. Οπως φαίνεται αμέσως από τις εξισώσεις (103) και (104) οι καμπύλες των κορυφών των κυμάτων είναι γεωμετρικά όμοιες μεταξύ τους.

Γραφική παράσταση των (103) και (104) για διάφορες τιμές της σταθεράς C γίνεται στο Σχήμα 10. Τα κύματα βρίσκονται πράγματι μέσα στην νοητή "σφήνα" που σχηματίζουν οι δύο ευθείες με κλίση $\alpha = \pm 19^o 28'$ ως προς τον άξονα των x (Οι κόκκινες διακεκομένες γραμμές στο Σχήμα 10).



Σχήμα 10: Κορυφές των εγκαρσίων και των διαμήκων κυμάτων πίσω από σημειακή διαταραχή που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (εξισώσεις (103) και (104)). Οι κόκκινες διακεκομένες γραμμές σχηματίζουν την γωνία Kelvin

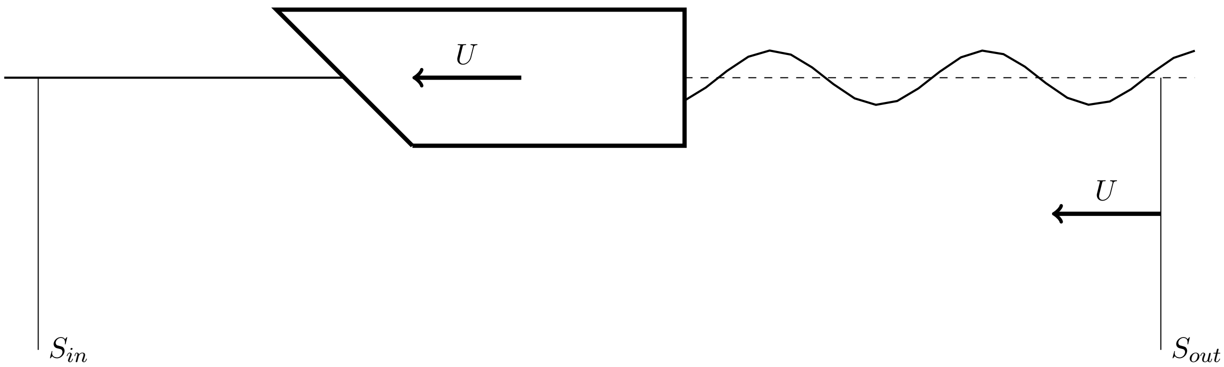
Φωτογραφίες των κυμάτων πλοίων σε βαθύ νερό (σε κάποια απόσταση πίσω από το πλοίο) επιβεβαιώνουν αρκετά ικανοποιητικά τις προβλέψεις της γραμμικής θεωρίας. Βέβαια οι ίδιες φωτογραφίες δείχνουν κοντά στο πλοίο σημαντική παρουσία αφρού, που είναι μείγμα αέρα-νερού. Η δημιουργία αφρού δεν μπορεί να προβλέφθεί από την γραμική θεωρία κυματισμών, αλλά ούτε και από οποιαδήποτε άλλη θεωρία που υποθέτει ότι η ελεύθερη επιφάνεια είναι υλική επιφάνεια.

4.3 Αντίσταση πλοίου λόγω κυματισμών

Οι κυματισμοί που δημιουργεί το πλοίο δημιουργούν μιά επί πλέον συνιστώσα της αντίστασης του πλοίου, επί πλέον δηλαδή από την αντίσταση τριβής και μορφής, που λέγεται αντίσταση λόγω κυματισμών. Γιά χαμηλές τιμές του αριθμού Froude του πλοίου η αντίσταση λόγω κυματισμών είναι η λογότερο σημαντική συνιστώσα. Καθώς ο αριθμός Froude αυξάνεται η σημασία της αντίστασης λόγω κυματισμών αυξάνεται. Γιά ταχύπλοα σκάφη η αντίσταση λόγω κυματισμών είναι η πιό σημαντική συνιστώσα της αντίστασης του πλοίου.

Η αντίσταση λόγω κυματισμών μπορεί να υπολογισθεί με ολοκλήρωση των δυνάμεων λόγω πιέσεων πάνω στην βυθισμένη επιφάνεια του πλοίου. Η κατανομή πιέσεων πάνω στο πλοίο βρίσκεται από την εξίσωση Bernoulli, αφού πρώτα επιλυθεί το πρόβλημα προσδιορισμού του δυναμικού της ροής γύρω από το πλοίο. Εναλλακτικά η αντίσταση λόγω κυματισμών μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει του ύψους και της κατεύθυνσης μετάδοσης των κυματισμών μακριά από το πλοίο. Αυτή η έκφραση προκύπτει με εφαρμόζοντας τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο σε κατάλληλο όγκο ελέγχου, όπως θα εξηγήσουμε τώρα.

Θεωρούμε ένα όγκο ελέγχου που περικλείεται από δύο επίπεδα κάθετα προς τον άξονα των $x =$, ένα ακίνητο πολύ μπροστά από το πλοίο, και ένα πολύ πίσω από το πλοίο που



Σχήμα 11: Σχήμα ορισμού του όγκου ελέγχου γιά την εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου. Η επιφάνεια πολύ μπροστά από το πλοίο είναι ακίνητη, ενώ η επιφάνεια πολύ πίσω από το πλοίο κινείται με την ταχύτητα του πλοίου

να κινείται με ταχύτητα U. Στην y κατεύθυνση ο όγκος εκτείνεται από το πλην άπειρο έως το συν άπειρο, και στην z κατεύθυνση ο όγκος εκτείνεται από το πλην άπειρο έως το $z = 0$.

Εφαρμόζουμε τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο σε αυτό τον όγκο ελέγχου και έχουμε ότι:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - S_{in} + S_{out} = -F_w U \tag{105}$$

Οπου E είναι η ενέργεια του ρευστού μέσα στον όγκο, S_{in} η εισροή ενεργείας διά μέσου της επιφανείας μπροστά από το πλοίο, S_{out} η εκροή ενεργείας διά μέσου της επιφανείας πίσω από το πλοίο, και F_w είναι η αντίσταση λόγω κυματισμών. Οι υπόλοιπες πλευρές του όγκου (δηλαδή τα δύο επίπεδα στο $y \to \pm\infty$, και το επίπεδο στο $z \to -\infty$) έχουν μηδέν εκροή, επειδή εκεί το ρευστό είναι ακίνητο.

Η ενέργεια του ρευστού στον όγκο που επιλέξαμε είναι σταθερή, και η εισροή ενεργείας μηδενική αφού το ρευστό μπροστά από το πλοίο δεν κινείται. Γιά την εκροή ενεργείας μέσα από την κινούμενη επιφάνεια ελέγχου πίσω από το πλοίο σκεφτόμαστε ως εξής: Ο κυματισμός που μεταδίδεται υπό γωνία θ έχει πυκνότητα ενεργείας $(1/2)\rho g \mid A \mid^2$, όπου A είναι συνάρτηση της γωνίας θ. Η ομαδική ταχύτητα c_g του κυματισμού σχηματίζει γωνία θ με την πορεία του πλοίου. Αρα η συνιστώσα της ομαδικής ταχύτητας κατά τον άξονα είναι ίση με $c_g \cos\theta$, και επομένως η εκροή ενεργείας ανά μονάδα πλάτους μέσα από την κινούμενη επιφάνεια ελέγχου είναι ίση με $(1/2)\rho g \mid A \mid^2 (c_g \cos\theta - U)$. Η συνολική εκροή ενεργείας προκύπτει με άθροιση (ολοκλήρωση) των εκροών σε όλο το πλάτος:

$$S_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \rho g \mid A \mid^2 (c_g \cos\theta - U) \, \mathrm{d}\, y \tag{106}$$

Επειδή έχουμε βαθύ νερό η ομαδική ταχύτητα είναι ίση με το μισό της ταχύτητας φάσης, δηλαδή $c_g = (1/2) U \cos\theta$.

Αντικαθιστούμε την (106) στην (105) και προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2} \rho g \int_{-\infty}^{\infty} \mid A \mid^2 \left(\frac{U}{2} \cos\theta - U\right) \mathrm{d}\, y = -F_w U \tag{107}$$

Κατά συνέπεια έχουμε την ακόλουθη έκφραση γιά την αντίσταση του πλοίου λόγω κυματισμών:

$$F_w = \frac{1}{2}\,\rho\,g \int_{-\infty}^{\infty} \mid A \mid^2 \; (1 - \frac{1}{2}\,\cos\theta)\,\mathrm{d}\,y \tag{108}$$

Η συνάρτηση $\mid A \mid$ τείνει στο μηδέν έξω από τη γωνία Kelvin, $y = \pm 1/(2\sqrt{2})x$, οπότε το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (108) συγκλίνει.

Γιά να προσδιοριστεί θεωρητικά η αντίσταση λόγω κυματισμών απαιτείται να επιλυθεί πρώτα το πρόβλημα αστρόβιλης ροής γύρω από το πλοίο, να υπολογιστεί στην συνέχεια η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας που προκαλεί (δηλαδή η συνάρτηση $\mid A \mid$ αλλά και η γωνία μετάδοσης θ), ώστε να υπολογιστεί τελικά το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (108).