

ΘΕΩΡΙΑ ΛΕΠΤΩΝ ΥΔΡΟΤΟΜΩΝ

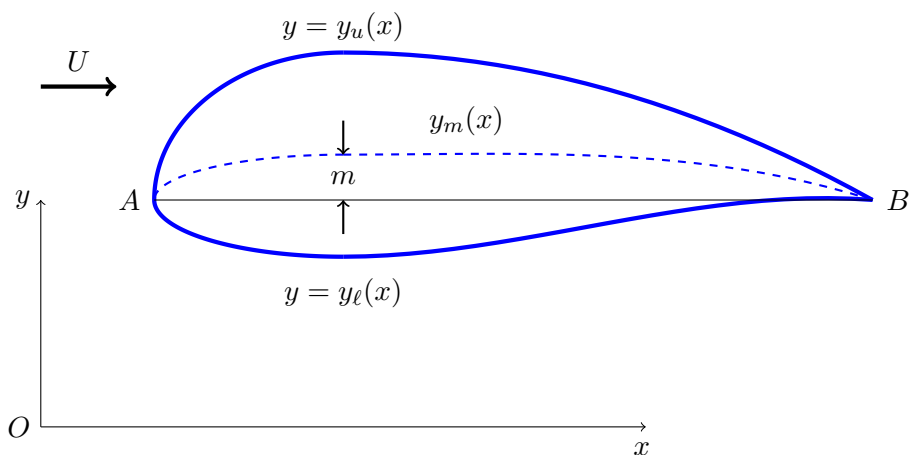
Γ. Σ. Τριανταφύλλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

2018

1 Γενικά: Ορολογία υδροτομών

Οι υδροτομές είναι αντικείμενα που αναπτύσσουν σημαντική δυναμική άνωση (lift) με μικρή αντίσταση (drag). Υδροτομές χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε αντικείμενα που κινούνται στο νερό ή στον αέρα (γι' αυτό λέγονται και αεροτομές). Για παράδειγμα, η τομή πτέρυγας του αεροπλάνου, πτερυγίου προπέλλας, πηδαλίου πλοίου έχουν σχήμα υδροτομής.

Στην εικόνα 1 βλέπουμε ένα τυπικό παράδειγμα υδροτομής σε ροή με ταχύτητα U παράλληλη προς τον άξονα των x . Η υδροτομή έχει κυρτωμένη επιφάνεια και γωνία κλίσης ως προς την εξωτερική ροή.



Σχήμα 1: Σχήμα ορισμού των χαρακτηριστικών υδροτομής. Σημείωση: Συνήθως ο άξονας x επιλέγεται να συμπίπτει με την θέση της χορδής σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Εδώ δεν ακολουθήθηκε η σύμβαση αυτή για να είναι το σχήμα πιό ευκρινές.

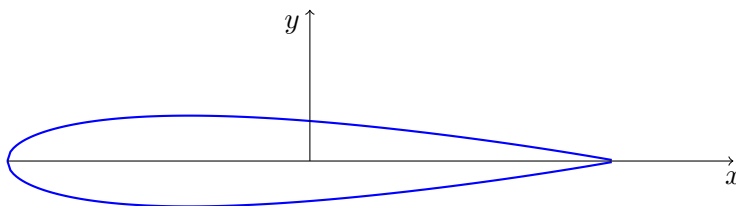
Το άκρο της υδροτομής προς την πλευρά απ' όπου έρχεται η ροή (σημείο A στο σχήμα) λέγεται *άκρο πρόσπτωσης* (leading edge). Το άκρο προς την πλευρά που πηγαίνει η ροή (σημείο B στο σχήμα) λέγεται *άκρο εκφυγής* (trailing edge). Όπως είχαμε μάθει στη θεωρία οριακών στρωμάτων, το άκρο πρόσπτωσης είναι στρογγυλεμένο, ενώ το άκρο εκφυγής είναι αιχμηρό. Η νοητή ευθεία AB που συνδέει τα δύο άκρα έγεται *χορδή* της υδροτομής (chord) και το μήκος της παριστάνεται με c . Η οξεία γωνία που σχηματίζει η χορδή με την εξωτερική ταχύτητα λέγεται *γωνία πρόσπτωσης* (angle of attack). Στο σχήμα 1 η γωνία πρόσπτωσης είναι μηδενική.

Η άνω και η κάτω επιφάνεια της υδροτομής περιγράφονται, αντίστοιχα, από εξισώσεις της μορφής $y = y_u(x)$ και $y = y_l(x)$, όπου $y_u(x)$ και $y_l(x)$ γνωστές συναρτήσεις. Η νοητή γραμμή που περιγράφεται από την εξίσωση $y = y_m(x)$, όπου $y_m(x) = (y_u(x) + y_l(x))/2$, λέγεται *μέση γραμμή κυρτότητας* (mean camber line). Η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση m ανάμεσα στην χορδή και στη μέση γραμμή κυρτότητας λέγεται *μέγιστο βέλος κυρτότητας* (maximum camber).

Η συνάρτηση $y_u(x) - y_l(x)$ λέγεται *συνάρτηση πάχους*. Η μέγιστη τιμή h της συνάρτησης πάχους λέγεται *πάχος* της υδροτομής (thickness).

Η καλή υδροδυναμική λειτουργία της υδροτομής απαιτεί οι υδροτομές να είναι λεπτές και να έχουν μικρή κυρτότητα, δηλαδή $h \ll c$ και $m \ll c$. Στο σχήμα ορισμού 1 η κατακόρυφη κλίμακα έχει είναι διαφορετική από την οριζόντια για λόγους ευκρίνειας. Επίσης η γωνία πρόσπτωσης πρέπει να είναι μικρή προς αποφυγή αποκόλλησης της ροής.

Η δυναμική άνωση οφείλεται εν μέρει στην κυρτότητα της υδροτομής και εν μέρει στη γωνία πρόσπτωσης. Μιά σημαντική υποκατηγορία υδροτομών είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μηδενική (παράδειγμα στο σχήμα 2. Οι υδροτομές αυτές λέγονται *συμμετρικές*, και η δυναμική άνωση που αναπτύσσονται οφείλεται αποκλειστικά στη γωνία πρόσπτωσης. Οι συμμετρικές υδροτομές έχουν $y_m(x) = 0$ και $m = 0$. Λόγω της συμμετρίας τους, οι συμμετρικές υδροτομές έχουν μηδενική άνωση σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Η τομή του πηδαλίου του πλοίου είναι ένα κλασσικό παράδειγμα συμμετρικής υδροτομής.



Σχήμα 2: Συμμετρική υδροτομή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης

Λόγω της ευρύτατης χρήσης υδροτομών υπάρχει και τεράστια ποικιλία υδροτομών, καθώς και συστήματα ταξινόμησης τους. Ένα από τα πιο γνωστά και απλά συστήματα ταξινόμησης είναι το τετραψήφιο της NACA (ακρώνυμο για National Advisory Committee for Aeronautics), που χρησιμοποιεί τέσσερις μονοψήφιους αριθμούς για να προσδιορίσει τη γεωμετρία μίας υδροτομής. Ο πρώτος αριθμός δηλώνει το μέγιστο βέλος κυρτότητας της υδροτομής σε επί τοις εκατό της χορδής, ο δεύτερος την απόσταση του σημεία μεγίστου βέλους από το άκρο πρόσπτωσης σε δέκατα της χορδής, και οι δύο τελευταίοι αριθμοί δηλώνουν το πάχος της υδροτομής σε επί τοις εκατό της χορδής. Για παράδειγμα, *NACA2412* σημαίνει μέγιστο βέλος κυρτότητας 2% της χορδής σε απόσταση $0.4c$ από το άκρο πρόσπτωσης και πάχος 12% της χορδής. Αντίστοιχα *NACA0012* σημαίνει μηδενικό βέλος κυρτότητας (οπότε και το δεύτερο ψηφίο είναι κατ' ανάγκην μηδενικό), άρα η υδροτομή είναι συμμετρική με πάχος 12% της χορδής.

2 Γραμμική θεωρία υδροτομών

Θεωρούμε υδροτομή στο επίπεδο $x - y$, και ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα U παράλληλη με τον θετικό άξονα των x . Το κέντρο των αξόνων συμπίπτει με το μέσο της χορδής της υδροτομής όταν αυτή έχει μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Η άνω πλευρά της υδροτομής περιγράφεται από την εξίσωση $y = y_u(x)$, ενώ η κάτω πλευρά της υδροτομής περιγράφεται από την εξίσωση $y = y_\ell(x)$.

Υποθέτουμε αστρόβιλη δισδιάστατη ροή. Εστω ϕ το δυναμικό της ροής λόγω της παρουσίας της υδροτομής, δηλαδή το ολικό δυναμικό της ροής είναι $\varphi = \phi + Ux$. Οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού είναι $U + \partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y$.

Το δυναμικό ϕ ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα οριακών τιμών:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (1)$$

Σε κάθε σημείο του περιγράμματος της υδροτομής η ταχύτητα είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της υδροτομής:

$$\frac{\partial\phi/\partial y}{U + \partial\phi/\partial x} = \frac{dy}{dx} \quad \text{για} \quad y = y_u(x), \quad y = y_\ell(x) \quad (2)$$

Μακριά από την υδροτομή η υδροδυναμική της επίδραση τείνει στο μηδέν:

$$|\nabla\phi| \rightarrow 0 \quad \text{για} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad (3)$$

Τέλος στο άκρο εκφυγής B έχουμε την συνθήκη Kutta:

$$|\nabla\phi|_B < \infty \quad (4)$$

Η άνωση ανά μονάδα πλάτους στην υδροτομή L δίνεται από την ολοκλήρωση των δυνάμεων λόγω πιέσεων γύρω από την υδροτομή:

$$L = - \int_C (p - p_\infty) n_y \, ds \quad (5)$$

Όπου p_∞ είναι η πίεση του ρευστού πολύ μακριά από την υδροτομή, και $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την επιφάνεια της υδροτομής με φορά προς το ρευστό.

Η ροπή ανά μονάδα πλάτους γύρω από την αρχή των αξόνων, M_O , προκύπτει από την ολοκλήρωση των ροπών των δυνάμεων λόγω πιέσεων γύρω από την υδροτομή:

$$M_O = - \int_C (p - p_\infty)(xn_y - yn_x) \, ds \quad (6)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή Bernoulli ανάμεσα σε τυχόν σημείο πάνω στην υδροτομή και σε σημείο στο άπειρο έχουμε:

$$p - p_{\infty} = -\rho U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \rho \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (7)$$

Θεωρούμε τώρα ότι η υδροτομή είναι λεπτή, και ότι έχει μικρή κυρτότητα. Υποθέτουμε επίσης ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι μικρή. Τότε η θέση της υδροτομής δεν διαφέρει πολύ από την προβολή της στον άξονα x , και κάνουμε τις εξής παραδοχές:

1. Οι ταχύτητες που προκαλεί η παρουσία της υδροτομής είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα U : $|\nabla \phi| \ll U$.
2. Η οριακή συνθήκη (2) μπορεί να εφαρμοστεί στην προβολή της υδροτομής στον άξονα x , δηλαδή στο $y = 0$, αντί για την πραγματική θέση της υδροτομής. Η άνω πλευρά της υδροτομής αντικαθίσταται από την άνω πλευρά του άξονα x , που θα συμβολίζουμε με $y = 0+$, και η κάτω πλευρά της υδροτομής αντικαθίσταται από την κάτω πλευρά του άξονα x , που θα συμβολίζουμε με $y = 0-$.
3. Επειδή $|dy_u/dx|, |dy_l/dx| \ll 1$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $n_x = 0, n_y = 1$ στην άνω πλευρά της υδροτομής και $n_x = 0, n_y = -1$ στην κάτω πλευρά.

Με βάση τις παραδοχές 1 και 2 η οριακή συνθήκη (2) αντικαθίσταται από τις ακόλουθες:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = U \frac{dy_u}{dx} \quad y = 0+, \quad |x| < \frac{c}{2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = U \frac{dy_l}{dx} \quad y = 0- \quad |x| < \frac{c}{2} \quad (9)$$

Η εξίσωση του Laplace και η εξίσωση (3) παραμένουν φυσικά ως έχουν (με μόνη διαφορά ότι η εξίσωση του Laplace ισχύει τώρα σε όλο το επίπεδο έξω από το ευθύγραμμο τμήμα AB). Η συνθήκη Kutta από την άλλη πλευρά γράφεται ως εξής:

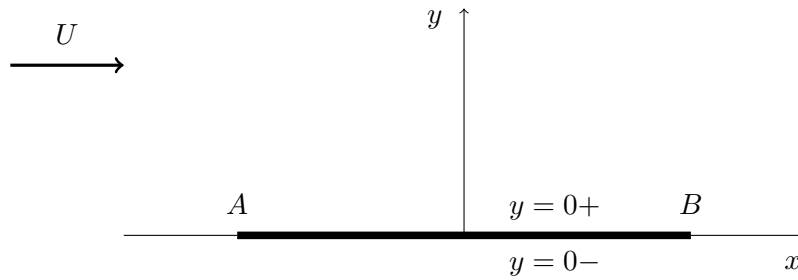
$$|\nabla \phi|_{x=c/2, y=0} < \infty \quad (10)$$

Λόγω της παραδοχής (1) η εξίσωση Bernoulli (7) απλοποιείται ως εξής:

$$p - p_{\infty} = -\rho U \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (11)$$

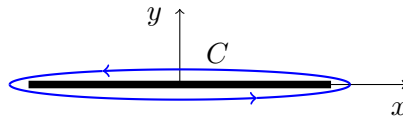
Λόγω της παραδοχής (3) και της εξίσωσης (11) για $y = 0\pm$, συμπεραίνουμε ότι:

$$(p - p_{\infty})n_y = \rho U \frac{\partial \phi}{\partial \ell} \quad (12)$$



Σχήμα 3: Το γραμμικοποιημένο πρόβλημα για το δυναμικό της υδροτομής.

όπου $\partial\phi/\partial\ell$ είναι η παράγωγος παράλληλα προς το μοναδιαίο διάνυσμα ℓ που εφάπτεται στη γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής όπως αυτό διαγράφεται αντισωρολογιακά (δες σχήμα 4): Στο $y = 0-$ έχουμε $\ell = i$ άρα $\partial\phi/\partial x = \partial\phi/\partial\ell$, και στο $y = 0+$ έχουμε $\ell = -i$ άρα $\partial\phi/\partial x = -\partial\phi/\partial\ell$.



Σχήμα 4: Επεξηγηματικό σχήμα για την εξίσωση (12).

Η έκφραση για την δυναμική άνωση ανά μονάδα πλάτους γράφεται επομένως σύμφωνα με την γραμμική θεωρία ως εξής:

$$L = -\rho U \int_C \frac{\partial\phi}{\partial\ell} ds = -\rho U \Gamma \quad (13)$$

Το ολοκλήρωμα στη εξίσωση (13) υπολογίζεται στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής και είναι συνεπώς ίσο με την κυκλοφορία Γ γύρω από το ευθύγραμμο τμήμα AB . Η εξίσωση (13) επιβεβαιώνει το γενικό αποτέλεσμα που έχουμε αποδείξει με την βοήθεια του 1ου θεωρήματος του Blasius.

Εναλλακτικά, η δυναμική άνωση ανά μονάδα πλάτους μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$L = \rho U \int_{-c/2}^{c/2} (u_+ - u_-) dx \quad (14)$$

Ομοίως η εξίσωση για την ροπή ανά μονάδα πλάτους μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$M_0 = \rho U \int_{-c/2}^{c/2} x(u_+ - u_-) dx \quad (15)$$

Η γραμμικοποίηση του προβλήματος μας παρέχει την διευκόλυνση ότι μπορούμε να γράψουμε την λύση του προβλήματος σαν το άθροισμα των λύσεων δυο επί μέρους προβλημάτων, ενός συμμετρικού ως προς τον άξονα των x , και ενός αντισυμμετρικού ως προς τον άξονα των x . Συγκεκριμένα, γράφουμε το γραμμικοποιημένο δυναμικό ως εξής:

$$\phi = \phi_e + \phi_o \quad (16)$$

Οπου ϕ_e, ϕ_o είναι λύσεις της εξίσωσης του Laplace που ικανοποιούν τις συνθήκη (3), την συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής, και τις ακόλουθες οριακές συνθήκες πάνω στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής:

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial y} |_{y=0\pm} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{dy_u}{dx} - \frac{dy_\ell}{dx} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi_o}{\partial y} |_{y=0\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{dy_u}{dx} + \frac{dy_\ell}{dx} \right) \quad (18)$$

Από τις συνθήκες (17) και (18) έπεται ότι η παράγωγος του ϕ_e ως προς y είναι περιττή συνάρτηση του y . Επομένως το ϕ_e είναι άρτια συνάρτηση του y (συμμετρικό ως προς τον άξονα των x). Ομοίως προκύπτει ότι το ϕ_o είναι περιττή συνάρτηση του y (αντισυμμετρικό ως προς τον άξονα των x).

Βλέπουμε δηλαδή ότι η γραμμικοποίηση επέτρεψε την αναγωγή του αρχικού προβλήματος σε δύο επί μέρους ανεξάρτητα προβλήματα: Το 1ο πρόβλημα (δυναμικό ϕ_e) περιγράφει την ροή γύρω από μία συμμετρική διατομή με πάχος ίσο με το πάχος της δεδομένης υδροτομής $y_u - y_\ell$, και με μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Το 2ο πρόβλημα (δυναμικό ϕ_o) περιγράφει την ροή γύρω από μία διατομή μηδενικού πάχους με σχήμα που ταυτίζεται με την μέση γραμμή κυρτότητας $(y_u + y_\ell)/2$ της δεδομένης υδροτομής.

Λογω γραμμικότητας της εξίσωσης (13) ως προς ϕ , η δύναμη πάνω στην υδροτομή είναι το άθροισμα των δυνάμεων που προκύπτουν από την λύση των δύο διαφορετικών προβλημάτων. Στο 1ο πρόβλημα η υδροτομή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα και έχει μηδενική γωνία πρόσπτωσης, οπότε αναπτύσσεται μηδενική άνωση και ροπή. Η άνωση και η ροπή προκύπτουν επομένως από την λύση του 2ου προβλήματος. Η έκφραση για την άνωση δηλαδή γράφεται:

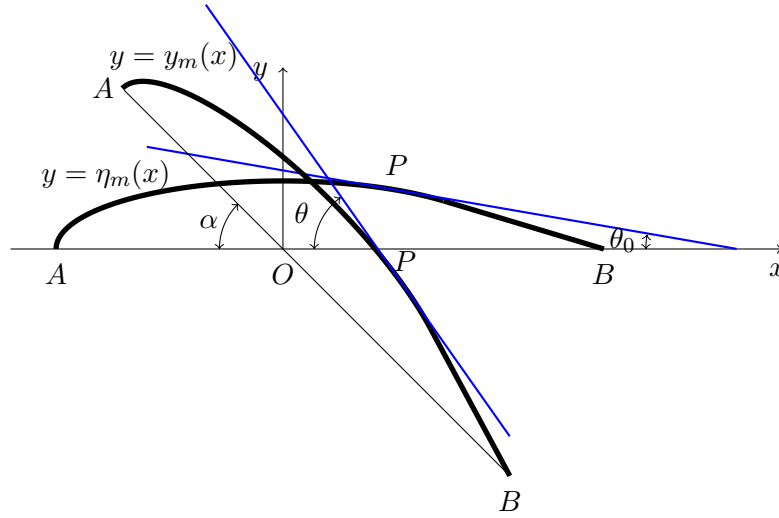
$$L = \rho U \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{\partial \phi_o}{\partial x} |_{+} - \frac{\partial \phi_o}{\partial x} |_{-} \right) dx \quad (19)$$

Και ομοίως η έκφραση για την ροπή παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$M_0 = \rho U \int_{-c/2}^{c/2} x \left(\frac{\partial \phi_o}{\partial x} |_{+} - \frac{\partial \phi_o}{\partial x} |_{-} \right) dx \quad (20)$$

Σε πρώτη προσέγγιση, που είναι η γραμμική θεωρία υδροτομών, το πάχος της υδροτομής δεν παίζει ρόλο στον προσδιορισμό άνωσης και ροπής.

Επικεντρωνόμαστε κατά συνέπεια στην λύση του αντισυμμετρικού προβλήματος. Εστω $\eta_u(x)$, και $\eta_\ell(x)$, αντίστοιχα, οι εξισώσεις της άνω και κάτω πλευράς της υδροτομής υπό γωνία μηδενικής πρόσπτωσης. Στην τωρινή της θέση η υδροτομή έχει περιστραφεί κατά γωνία ίση με την γωνία πρόσπτωσης α .



Σχήμα 5: Επεξηγηματικό σχήμα για την απόδειξη της εξίσωσης (21). Η διατομή περιστρέφεται κατά τη γωνία πρόσπτωσης α , οπότε και η εφαπτομένη σε τυχόν σημείο P της μέσης γραμμής κυρτότητας (μπλε γραμμή) περιστρέφεται κατά την ίδια γωνία. Επομένως έχουμε ότι: $\theta = \theta_0 + \alpha$

Κατά συνέπεια και οι εφαπτόμενες στην υδροτομή έχουν περιστραφεί κατά τη ίδια γωνία, δηλαδή μία τυχούσα εφαπτομένη που σχηματίζει οξεία γωνία κλίσης θ_0 ως προς τον άξονα των x , σχηματίζει τώρα γωνία $\theta = \theta_0 + \alpha$. Οπότε έχουμε τις σχέσεις:

$$\frac{d y_i}{d x} = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$\frac{d \eta_i}{d x} = \tan(\pi - \theta_0) = -\tan \theta_0$$

Αυτό συνεπάγεται την ακόλουθη σχέση ανάμεσα στα $d y_i / d x$ και στα $d \eta_i / d x$ (οπου $i = u, \ell$):

$$\frac{d y_i}{d x} = -\tan \theta = -\tan(\theta_0 + \alpha) = -\frac{\tan \theta_0 + \tan \alpha}{1 - \tan \theta_0 \tan \alpha} = -\frac{-d \eta_i / d x + \tan \alpha}{1 + (d \eta_i / d x) \tan \alpha}$$

Μεταχειριζόμαστε το γεγονός ότι $|d \eta_i / d x| \ll 1$, και το ότι η γωνία α είναι μικρή (άρα $\tan \alpha \approx \alpha$), και καταλήγουμε ότι:

$$\frac{d y_i}{d x} = \frac{d \eta_i}{d x} - \alpha \quad i = u, \ell \quad (21)$$

Επομένως στην γραμμική θεωρία μπορούμε να γράψουμε το δυναμικό ϕ_0 σαν το άθροισμα δύο δυναμικών, ϕ_0 και ϕ_α τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες στη γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial y} \Big|_{y=0^\pm} = U \frac{d \eta_m}{d x} \quad (22)$$

Οπου $\eta_m = (\eta_u + \eta_\ell)/2$ είναι η εξίσωση της μέσης γραμμής κυρτότητας υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης.

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y} \Big|_{y=0^\pm} = -U \alpha \quad (23)$$

Το δυναμικό ϕ_0 παριστάνει τη γραμμικοποιημένη λύση για ροή γύρω από την υδροτομή υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης, ενώ το δυναμικό ϕ_α παριστάνει τη γραμμικοποιημένη λύση για ροή γύρω από επίπεδη πλάκα υπό γωνία πρόσπτωσης α .

Το δυναμικό ϕ_0 είναι ιδιότητα της συγκεκριμένης υδροτομής. Το δυναμικό ϕ_α το έχουμε υπολογίσει με την θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων και η λύση είναι γνωστή: Δημιουργείται άνωση ίση με $\pi \rho U^2 c \sin \alpha$, το οποίο για μικρές γωνίες πρόσπτωσης απλοποιείται σε $\pi \rho U^2 c \alpha$.

Κατά συνέπεια αν ονομάσουμε L_0 την δυναμική άνωση ανά μονάδα πλάτους στην υδροτομή υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης, από την εξίσωση (19) και την λύση για κεκλιμένη επίπεδη πλάκα, έχουμε ότι:

$$L = L_0 + \pi \rho U^2 c \alpha \quad (24)$$

Διαιρώντας με $(1/2)\rho U^2 c$ καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για τον *συντελεστή άνωσης* C_L :

$$C_L = C_{L0} + 2\pi \alpha \quad (25)$$

Οπου $C_{L0} = 2L_0/(\rho U^2 c)$ είναι ο συντελεστής άνωσης για μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Η εξίσωση (25) είναι η πιο βασική σχέση της θεωρίας λεπτών υδροτομών.

Ο συντελεστής άνωσης μηδενίζεται για όταν η γωνία πρόσπτωσης πάρει την τιμή $\alpha_0 = -C_{L0}/(2\pi)$. Ο συντελεστής άνωσης γράφεται λοιπόν και ως εξής:

$$C_L = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \quad (26)$$

Η γωνία $\alpha_0 = -C_{L0}/(2\pi)$ λέγεται *γωνία μηδενικής άνωσης*.

Ομοίως καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για την ροπή στην λεπτή υδροτομή:

$$M_O = M_h - \pi \rho U^2 c^2 \alpha \quad (27)$$

Όπου M_h είναι η συνισταμένη ροπή των υδροδυναμικών δυνάμεων ως προς την αρχή των αξόνων υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Αντίστοιχα με την εξίσωση (25) για τον συντελεστή άνωσης μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη εξίσωση για τον *συντελεστή ροπής*:

$$C_M = C_{Mh} - \frac{1}{2} \pi \alpha \quad (28)$$

Όπου $C_{Mh} = 2M_h/(\rho U^2 c^2)$ είναι ο συντελεστής ροπής υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης.

Ενα σημείο που αξίζει να αναφέρουμε είναι το ότι, όπως βρήκαμε από την λύση για επίπεδη πλάκα υπό γωνία κλίσης, η ταχύτητα είναι άπειρη στο άκρο πρόσπτωσης. Και η ταχύτητα απειρίζεται εκεί επειδή προκύπτει από λύση προβλήματος υδροτομής με μηδενικό πάχος. Η ταχύτητα στο άκρο πρόσπτωσης δεν θα γίνει φυσικά στην πραγματικότητα άπειρη, ενδεχομένως να είναι όμως αρκετά μεγάλη για να προκαλέσει χαμηλές πιέσεις με δυσάρεστα επακόλουθα (σπηλαιώση). Είναι κατά συνέπεια επιθυμητό η φόρτιση της υδροτομής, δηλαδή η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην άνω και στην κάτω πλευρά της υδροτομής, να είναι κατά το δυνατόν ομοιόμορφη κατά το μήκος της χορδής. Αυτό είναι μία απαίτηση κατά τον σχεδιασμό των υδροτομών, δηλαδή επιλογή των χαρακτηριστικών της υδροτομής ώστε να αποφεύγονται, κατά το δυνατόν, μεγάλες ανομοιομορφίες στην φόρτιση.

Υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή της γωνίας πρόσπτωσης στην οποία η ταχύτητα στο άκρο πρόσπτωσης δεν απειρίζεται έστω και αν υποθεθεί ότι το πάχος της υδροτομής είναι μηδενικό. Αυτό γίνεται όταν το μπροστινό σημείο ανακοπής συμπίπτει με το άκρο πρόσπτωσης. Η γωνία αυτή λέγεται ιδανική γωνία πρόσπτωσης. Η ονομασία ιδανική αναφέρεται στο ότι είναι απαλλαγμένη από το πρόβλημα της δημιουργίας χαμηλών πιέσεων στην ακμή πρόσπτωσης. Για οποιαδήποτε υδροτομή συμμετρική ως προς το μέσο της χορδής, η ιδανική γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με μηδέν. Αυτό συμβαίνει επειδή, λόγω συμμετρίας της υδροτομής υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης, η συνθήκη Kutta ισχύει και στο άκρο πρόσπτωσης. Θα δούμε την εξίσωση που ορίζει την ιδανική γωνία πρόσπτωσης στο κεφάλαιο με τη λύση του προβλήματος με σειρά Fourier.

3 Λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος με χρήση διανεμημένης στροβιλότητας.

Η παρουσία υδροτομής αμελητέου πάχους προκαλεί αύξηση της ταχύτητας του ρευστού στην άνω πλευρά της υδροτομής και μείωση της ταχύτητας του ρευστού στην κάτω πλευρά. Αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία κατανομή στροβιλότητας πάνω στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής.

Θεωρούμε μία δίνη απειροστής έντασης $d\Gamma$ στην θέση $(\xi, 0)$. Ως γνωστόν το πεδίο ταχυτήτων που δημιουργεί η δίνη δίνεται από την σχέση:

$$du - v dv = -v \frac{d\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - \xi} \quad (29)$$

Οπου $z = x + iy$ και $i = \sqrt{-1}$. Θεωρούμε τώρα ότι όλο το τμήμα $(-c/2, c/2)$ καλύπτεται από τέτοιες δίνες διαφορετικής έντασης. Το συνολικό πεδίο ταχυτήτων προκύπτει από την ολοκλήρωση της (29) ως προς ξ :

$$u - iv = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi \quad (30)$$

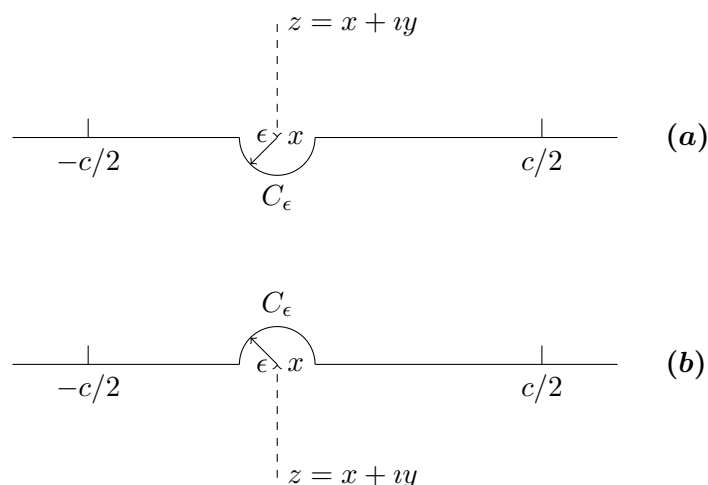
Οπου θέσαμε $d\Gamma(\xi) = \gamma(\xi) d\xi$. Η συνάρτηση $\gamma(\xi)$ λέγεται πυκνότητα στροβιλότητας, και από τον ορισμό της έχει διαστάσεις ταχύτητας. Διαχωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (30) έχουμε ότι:

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi) y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (31)$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi) (x - \xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (32)$$

Οι εξισώσεις (31) και (32) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστούν οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας σε οποιοδήποτε σημείο έξω από την υδροτομή, με την προϋπόθεση βέβαια ότι έχουμε βρει την πυκνότητα στροβιλότητας. Για να εφαρμόσουμε όμως την οριακή συνθήκη στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής, που μας είναι απαραίτητο για να λύσουμε για την πυκνότητα στροβιλότητας, πρέπει πρώτα να βρούμε το όριο των (31) και (32) για $y \rightarrow 0$. Έχει βέβαια σημασία αν $y \rightarrow 0$ από θετικές ή από αρνητικές τιμές. Χρησιμοποιούμε ένα δείκτη '+' για τιμές μεγεθών στην πλευρά $y = 0+$, και ένα δείκτη '-' για τιμές μεγεθών στην πλευρά $y = 0-$.

Το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (30) δεν συγκλίνει όταν $y = 0$ επειδή υπάρχει ανώμαλο σημείο στο $\xi = x$. Για να παρακάμψουμε αυτή τη δυσκολία θα θεωρήσουμε μία "παρामορφωμένη" γραμμή ολοκλήρωσης από το $-c/2$ στο $c/2$ (σχήμα 6), που περιλαμβάνει ένα ημικύκλιο C_ϵ , το οποίο περικλείει το ανώμαλο σημείο $\xi = x$. Οπως φαίνεται στο σχήμα,



Σχήμα 6: Σχήμα για την ολοκλήρωση όταν το σημείο βρεθεί πάνω στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής. Σχήμα (a) όταν $y \rightarrow 0$ από θετικές τιμές, και σχήμα (b) όταν $y \rightarrow 0$ από αρνητικές τιμές.

υπάρχουν δύο διαφορετικές γραμμές ολοκλήρωσης ανάλογα με το αν η μεταβλητή y τείνει στο μηδέν από θετικές ή από αρνητικές τιμές. Στην συνέχεια θα πάρουμε το όριο για $\epsilon \rightarrow 0$.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση που το y τείνει στο μηδέν από θετικές τιμές (χρησιμοποιούμε τη γραμμή ολοκλήρωσης στο σχήμα (a)). Τότε έχουμε ότι:

$$u_+ - v_+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_\epsilon \quad (33)$$

Οπου η συνάρτηση q_ϵ ορίζεται ως εξής:

$$q_\epsilon = -i \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-c/2}^{x-\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi + \int_{C_\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi + \int_{x+\epsilon}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \right) \quad (34)$$

Όταν πάρουμε το όριο για $\epsilon \rightarrow 0$ της εξίσωσης (34), το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου όρου θα μας δώσουν εξ ορισμού την κύρια τιμή του ολοκληρώματος της συνάρτησης $\gamma(\xi)/(x-\xi)$ από $-c/2$ έως $c/2$:

$$\int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-c/2}^{x-\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi + \int_{x+\epsilon}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \right) \quad (35)$$

Η οριζόντια γραμμή στο σύμβολο του ολοκληρώματος συμβολίζει την “κύρια τιμή”, όπως ορίζεται από την εξίσωση (35).

Γιά να βρούμε τώρα το όριο του δεύτερου όρου της εξίσωσης (34) για $\epsilon \rightarrow 0$, επειδή το σημείο ολοκλήρωσης ξ διαγράφει το ημικύκλιο C_ϵ που έχει ακτίνα ϵ , κάνουμε την αντικατάσταση $\xi = x + \epsilon e^{i\theta}$, με $\pi < \theta < 2\pi$, οπότε $d\xi = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$, και έχουμε ότι:

$$\int_{C_\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = -i \int_\pi^{2\pi} \gamma(x + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \quad (36)$$

Παίρνουμε τώρα το όριο της (36) για $\epsilon \rightarrow 0$ και βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = -i \int_\pi^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma(x + \epsilon e^{i\theta}) d\theta = -i\pi\gamma(x) \quad (37)$$

Αντικαθιστούμε τις (37) και (35) στην (33) και έχουμε ότι:

$$u_+ - w_+ = -i \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi - i\pi\gamma(x) \right) = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{2}\gamma(x) \quad (38)$$

Διαχωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (38) καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις για τις u_+ , v_+ :

$$u_+ = -\frac{1}{2}\gamma \quad (39)$$

$$v_+ = v(x, 0_+) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (40)$$

Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για $y \rightarrow 0$ από αρνητικές τιμές (ολοκλήρωση στην γραμμή (b)), καταλήγουμε ότι η συνιστώσα v_- δίνεται επίσης από την εξίσωση (40), ενώ η συνιστώσα u_- είναι ίση με $\gamma(x)/2$. Καταλήγουμε επομένως ότι:

$$u_\pm = \mp \frac{1}{2}\gamma(x) \quad (41)$$

$$v_\pm = v(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (42)$$

Από την γραμμικοποιημένη αρχή του Bernoulli (11) και τις εξισώσεις (41) η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην πάνω πλευρά της υδροτομής δίνεται από την σχέση:

$$p_- - p_+ = \rho U(u_+ - u_-) = -\rho U \gamma \quad (43)$$

Η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην άνω πλευρά της υδροτομής είναι κατά συνέπεια κατ' ευθείαν ανάλογη με την πυκνότητα στροβιλότητας γ , και γι' αυτό η τελευταία λέγεται και *φόρτιση* της υδροτομής.

Από τις εκφράσεις (14) και (15) αντικαθιστώντας $\gamma = u_- - u_+$ (ή ισοδύναμα ολοκληρώνοντας τη διαφορά πίεσης (43) κατά το μήκος της χορδής) έχουμε τις ακόλουθες εκφράσεις της δύναμης και της ροπής ανά μονάδα πλάτους στην υδροτομή συναρτήσει της φόρτισης γ :

$$L = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) dx \quad (44)$$

$$M_O = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} x \gamma(x) dx \quad (45)$$

Από την εξίσωση (44) και την γενική σχέση $F_y = -\rho U \Gamma$ προκύπτει ότι η κυκλοφορία γύρω από την υδροτομή Γ είναι το ολοκλήρωμα της πυκνότητας στροβιλότητας γ :

$$\Gamma = \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) dx \quad (46)$$

Εφαρμογή της οριακής συνθήκης (18) οδηγεί στην εξής σχέση:

$$U \frac{dy_m}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi = v(x, 0) \quad (47)$$

Οπου $y_m(x) = (y_u(x) + y_l(x))/2$ είναι η εξίσωση της μέσης γραμμής κυρτότητας. Η εξίσωση (47) λέγεται γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση. Ολοκληρωτική επειδή ο άγνωστος (η πυκνότητα στροβιλότητας γ) βρίσκεται δεξιά από το σύμβολο ολοκλήρωσης και γραμμική επειδή ο άγνωστος εμφανίζεται στην πρώτη δύναμη.

Η συνθήκη Kutta επιβάλλει πεπερασμένη ταχύτητα στο άκρο εκφυγής, το οποίο σημαίνει ότι η διαφορά πίεσης στο άκρο εκφυγής θα είναι μηδενική. Λόγω της εξίσωσης (43) η συνθήκη Kutta γράφεται ως εξής:

$$\gamma(x)|_{x=c/2} = 0 \quad (48)$$

Εχουμε επομένως να επιλύσουμε ως προς την συνάρτηση $\gamma(x)$ την (47) με οριακή συνθήκη την (48). Γενικά μιά ολοκληρωτική εξίσωση επιλύεται προσεγγίζοντας την ολοκλήρωση με ένα σχήμα αριθμητικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων (π.χ. κανόνας Simpson), και μετατρέποντας έτσι την ολοκληρωτική εξίσωση σε ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η ολοκληρωτική εξίσωση (47) όμως ανήκει στην (μικρή) υποκατηγορία ολοκληρωτικών εξισώσεων των οποίων η λύση μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή.

Αποδεικνύεται στην θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων ότι η λύση της (47) δίνεται από την εξής σχέση:

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi((c/2)^2 - x^2)^{1/2}} \left(\int_{-c/2}^{c/2} \frac{(((c/2)^2 - \xi^2))^{1/2}}{\xi - x} v(\xi, 0) d\xi + \frac{1}{2}\Gamma \right) \quad (49)$$

Όπου Γ είναι η κυκλοφορία γύρω από την υδροτομή (εξ. (46)), η οποία είναι άγνωστη. Όπως είχαμε κάνει και στο πρόβλημα υπολογισμού της άνωσης σε επίπεδη πλάκα υπό κλίση, για τον υπολογισμό της Γ θα επικαλεστούμε την συνθήκη του Kutta, (Η απόδειξη της (49) παραλείπεται).

Η τιμή της πυκνότητας στροβιλότητας που προκύπτει είναι άπειρη και στα δύο άκρα. Αυτό συνεπάγεται ότι και η ταχύτητα απειρίζεται στα δύο άκρα. Η απειρία στο άκρο εκφυγής μπορεί να απαλειφθεί αν, επικαλούμενοι την συνθήκη του Kutta, επιλέξουμε την κυκλοφορία έτσι ώστε η παράσταση μέσα στις παρενθέσεις στην εξίσωση (49) να μηδενίζεται στο άκρο εκφυγής. Θέτουμε $x = c/2$ στην παράσταση μέσα στις παρενθέσεις της (49) και βρίσκουμε ότι η παράσταση μηδενίζεται για την ακόλουθη τιμή της Γ :

$$\Gamma = 2 \int_{-c/2}^{c/2} \frac{((c/2)^2 - \xi^2)^{1/2}}{c/2 - \xi} v(\xi, 0) d\xi = 2U \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dy_m}{dx}(\xi) \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} d\xi \quad (50)$$

Η συνθήκη Kutta επιτρέπει, όπως και στην περίπτωση της επίπεδης πλάκας υπό κλίση, τον προσδιορισμό της τιμής της κυκλοφορίας Γ . Είναι διδακτικό να επαληθεύσουμε μέσω της (50) το αποτέλεσμα για την κυκλοφορία γύρω από επίπεδη πλάκα υπό κλίση, που είχαμε λύσει με σύμμορφη απεικόνιση. Η επίπεδη πλάκα υπό κλίση αντιστοιχεί σε $dy_m/dx = -\alpha$. Αντικαθιστούμε στην (50) και βρίσκουμε ότι:

$$\Gamma = -2\alpha U \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} d\xi = -\pi \alpha c$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος υπολογίστηκε με την αντικατάσταση $\xi = sc/2$, $|s| < 1$. Το αποτέλεσμα συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε με την μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισης.

Αντικαθιστούμε την τιμή της Γ και την τιμή του $v(\xi, 0)$ από την (47) στην εξίσωση (49) και βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση για την πυκνότητα γ :

$$\gamma(x) = \frac{2U}{\pi} \sqrt{\frac{c/2 - x}{c/2 + x}} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dy_m}{dx}(\xi) \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} \frac{1}{\xi - x} d\xi \quad (51)$$

Η πυκνότητα στροβιλότητας τώρα μηδενίζεται στο άκρο εκφυγής, λόγω της συνθήκης Kutta.

Για την άνωση ανά μονάδα πλάτους L βρίσκουμε ότι:

$$L = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) dx = -2\rho U^2 \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dy_m}{dx}(\xi) \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} d\xi \quad (52)$$

Οπότε ο συντελεστής άνωσης C_L δίνεται από την σχέση:

$$C_L = -\frac{4}{c} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dy_m}{dx}(\xi) \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} d\xi \quad (53)$$

Η ροπή γύρω από την αρχή των αξόνων, M_O , προκύπτει ίση με:

$$M_O = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(\xi) \xi \, d\xi = 2\rho U^2 \int_{-c/2}^{c/2} \frac{d y_m}{d x}(\xi) \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \xi^2} \, d\xi \quad (54)$$

Γιά υδροτομές συμμετρικές ως προς τον άξονα των y η κλίση $d y_m / d x$ είναι περιττή συνάρτηση του x για μηδενική γωνία πρόσπτωσης, οπότε η ροπή μηδενίζεται.

Ο συντελεστής ροπής δίνεται από την σχέση:

$$C_M = \frac{4}{c^2} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{d y_m}{d x}(\xi) \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \xi^2} \, d\xi \quad (55)$$

Το κέντρο πίεσης της υδροτομής βρίσκεται σε απόσταση $M_O/L = c C_M / C_L$ από το κέντρο της χορδής.

Παράδειγμα 1

Ας θεωρήσουμε μιά υδροτομή με παραβολικό σχήμα. Τότε η εξίσωση της μέσης γραμμής κυρτότητας για μηδενική γωνία πρόσπτωσης δίνεται από την σχέση:

$$\eta_m = \frac{1}{2} b \left(\frac{c^2}{4} - x^2 \right)$$

Οπου b μιά σταθερά τέτοια ώστε η μέγιστη κυρτότητα της υδροτομής, m , να είναι ίση με $bc^2/8$.

Επομένως έχουμε ότι:

$$\frac{d \eta_m}{d x} = -bx$$

Στην περίπτωση αυτή από τις εξισώσεις (51), (53), και (55) προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\gamma(x) = -2Ub \left(\frac{c^2}{4} - x^2 \right)^{1/2}$$

$$C_L = \frac{1}{2} \pi bc$$

$$C_M = 0$$

Παρατηρούμε ότι για μηδενική γωνία πρόσπτωσης η συνθήκη Kutta ικανοποιείται και στο άκρο πρόσπτωσης.

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η μέση γραμμή κυρτότητας υδροτομής υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης που να έχει σταθερή φόρτιση σε όλο το μήκος της χορδής της.

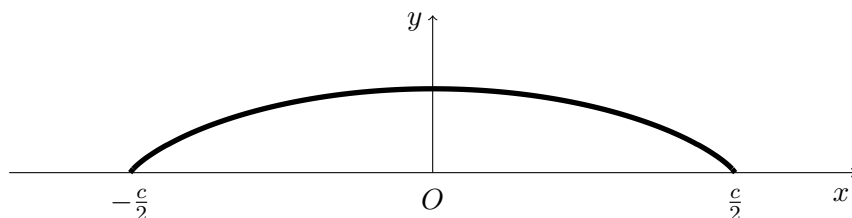
Από την ολοκληρωτική εξίσωση (47) για $\gamma = \text{σταθερά}$ (αρνητική) έχουμε ότι:

$$\frac{d\eta_m}{dx} = -\kappa \int_{-c/2}^{c/2} \frac{1}{\xi - x} d\xi = -\kappa (\ln(\frac{c}{2} - x) - \ln(\frac{c}{2} + x))$$

Οπου $\kappa = \gamma/(2\pi U)$. Ολοκληρώνουμε ως προς x και έχουμε ότι:

$$\eta_m = A + \kappa((\frac{c}{2} - x) \ln(\frac{c}{2} - x) + (\frac{c}{2} + x) \ln(\frac{c}{2} + x))$$

Οπου A η σταθερά ολοκλήρωσης. Για να έχουμε $\eta_m = 0$ στα δύο άκρα $x = \pm c/2$ πρέπει να έχουμε $A = -\kappa c \ln c$, οπότε η υδροτομή έχει το σχήμα που φαίνεται στο γράφημα που ακολουθεί.



Σχήμα 7: Μέση γραμμή κυρτότητας υδροτομής με σταθερή φόρτιση

Το σχήμα που υπολογίσαμε δεν είναι όμως συνεπές με τη θεωρία, επειδή στα δύο άκρα $x = \pm c/2$ η μέση γραμμή κυρτότητας έχει άπειρη κλίση, πράγμα που παραβιάζει μιά από τις βασικές υποθέσεις της θεωρίας λεπτών υδροτομών. Επί πλέον το σχήμα δεν ευνοεί την καλή υδροδυναμική ανάπτυξη των οριακών στρωμάτων πάνω στην υδροτομή.

Άσκηση

Χρησιμοποιήστε την εξίσωση (30) για να πάρετε μιά έκφραση για την μιγαδική ταχύτητα της ροής γύρω από υδροτομή. Στην συνέχεια χρησιμοποιείστε αυτή την έκφραση και την γενική έκφραση για την δύναμη και ροπή σε αντικείμενο σε δισδιάστατη αστρόβιλη ροή για να επαληθεύσετε τις εξισώσεις (44), (45).

Από την εξίσωση (30) έχουμε ότι η μιγαδική ταχύτητα της ροής $u - w$ στην θέση $z = x + iy$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u - w = U - \frac{i}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi$$

Για $|z| > |\xi|$ έχουμε ότι:

$$\frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{z(1-\xi/z)} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{\xi}{z} + \left(\frac{\xi}{z}\right)^2 + \dots \right)$$

Οπότε η μιγαδική ταχύτητα γράφεται σαν σειρά Laurent ως εξής:

$$u - w = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots$$

Οπου οι συντελεστές C_0, C_1, C_2, \dots ορίζονται ως εξής:

$$C_0 = U$$

$$C_n = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \xi^{n-1} \gamma(\xi) \, d\xi, \quad \text{για } n = 1, 2, \dots$$

Τώρα αντικαθιστούμε τους συντελεστές της σειράς Laurent στις γενικές εκφράσεις για την δύναμη F_x, F_y και τη ροπή M_O σε αντικείμενο σε δισδιάστατη μόνιμη αστρόβιλη ροή και έχουμε:

(i) Πρώτα για τη δύναμη

$$F_x - iF_y = -2\pi\rho C_0 C_1 = i\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(\xi) \, d\xi$$

Επομένως

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(\xi) \, d\xi$$

(ii) Υστερα για τη ροπή

$$M_O = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re}(2i\pi (C_1^2 + 2C_0 C_2)) = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \xi \gamma(\xi) \, d\xi$$

Προέκυψαν δηλαδή οι εξισώσεις (44), (45).

4 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με την χρήση σειράς Fourier

Η ακριβής λύση της εξίσωσης (47) απαιτεί τον υπολογισμό μερικών όχι και τόσο απλών ολοκληρωμάτων (μάλλον, για να ακριβολογούμε, των κυρίων τιμών των ολοκληρωμάτων). Εναλλακτικά η εξίσωση (47) μπορεί να επιλυθεί με την βοήθεια της θεωρίας σειράς Fourier. Η χρήση σειράς Fourier οδηγεί σε πολύ απλούστερες εκφράσεις για τον συντελεστή άνωσης και τον συντελεστή ροπής από αυτές που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Πρώτα μετασχηματίζουμε της εξίσωση (47) ορίζοντας τις μεταβλητές θ και φ στο διάστημα $(0, \pi)$, ως εξής:

$$x = \frac{s}{2} \cos \theta \quad \xi = \frac{s}{2} \cos \varphi \quad (56)$$

Από τον ορισμό έχουμε ότι $d\xi = -(s/2) \sin \varphi d\varphi$, οπότε η εξίσωση (47) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$U \frac{d y_m}{d x}(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} \sin \varphi d\varphi \quad (57)$$

Στην εξίσωση (57) ο άγνωστος γ αλλά και ο γνωστός όρος στο αριστερό μέρος της εξίσωσης $U d y_m / d x$ θεωρούνται συναρτήσεις των μεταβλητών θ, φ .

Ως γνωστόν στο άκρο εκφυγής ($\theta = 0$) έχουμε την συνθήκη Kutta που επιβάλλει μηδενισμό της στροβιλότητας, ενώ στο άκρο πρόσπτωσης η στροβιλότητα έχει ανώμαλο σημείο. Η συμπεριφορά της στροβιλότητας στο ανώμαλο σημείο είναι γνωστή, είναι η ίδια με αυτήν που είδαμε στη άκρο πρόσπτωσης επίπεδης πλάκας υπό κλίση.

Μπορούμε επομένως να παραστήσουμε την στροβιλότητα σαν μία ημιτονική σειρά Fourier αρκεί να ομαλοποιήσουμε πρώτα τη συμπεριφορά της στο άκρο πρόσπτωσης. Όπως αποδείξαμε στη ροή γύρω από κεκλιμένη πλάκα, η στροβιλότητα στο άκρο πρόσπτωσης ($\theta = \pi$) είναι ανάλογη με $\tan(\theta/2)$, επομένως αναμένουμε ότι η στροβιλότητα σε υδροτομή με κυρτό άξονα πρέπει επίσης να είναι ανάλογη με $\tan(\theta/2)$ στο άκρο εκφυγής αλλά με διαφορετική σταθερά αναλογίας.

Επομένως, για να ομαλοποιήσουμε τη συμπεριφορά της στροβιλότητας στο άκρο εκφυγής, αφαιρούμε από τη στροβιλότητα τον όρο $A_0 \tan(\theta/2)$ όπου A_0 μια άγνωστη σταθερά. Επιλέγοντας την κατάλληλη τιμή A_0 μπορούμε να κάνουμε τη διαφορά να μηδενίζεται και στο άκρο πρόσπτωσης. Γράφουμε δηλαδή την στροβιλότητα στην ακόλουθη μορφή:

$$\gamma = -2U(A_0 \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)) \quad (58)$$

Άγνωστοι τώρα είναι οι συντελεστές $A_n, n = 0, 1, 2, \dots$. Ο όρος U έχει εισαχθεί στο δεξιό μέλος της εξίσωσης ώστε οι συντελεστές A_n να είναι αδιάστατοι, και το αρνητικό πρόσημο έχει εισαχθεί ώστε οι συντελεστές A_n να είναι θετικοί. Όπως είπαμε, η τιμή

του όρου A_0 είναι τέτοια ώστε η παράσταση $\gamma + 2UA_0 \tan(\theta/2)$ να μηδενίζεται στο άκρο πρόσπτωσης $\theta = 0$. Για παράδειγμα, στην ειδική περίπτωση που έχουμε επίπεδη πλάκα υπό κλίση, όπως έχουμε δει, $A_0 = \alpha$, όπου α είναι η γωνία πρόσπτωσης. Στην γενική περίπτωση βέβαια η τιμή του A_0 προκύπτει από τη λύση του προβλήματος, όπως θα δούμε λίγο παρακάτω.

Από τη θεωρία για τις σειρές Fourier έχουμε ότι οι συντελεστές A_n $n = 1, 2, \dots$ στην εξίσωση (58) δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$2U A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\gamma + 2UA_0 \tan \frac{\theta}{2}) \sin(n\theta) d\theta \quad (59)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τη εξίσωση (57) για να λύσουμε για τους άγνωστους A_n . Αντικαθιστούμε την εξίσωση (58) στην (57) και εναλλάσσοντας ολοκλήρωση και άθροιση βρίσκουμε ότι:

$$\frac{dy_m}{dx} = \frac{1}{\pi} (A_0 \int_0^\pi \tan \frac{\varphi}{2} \frac{1}{\cos \varphi - \cos \theta} \sin \varphi d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \frac{\sin(n\varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} \sin \varphi d\varphi) \quad (60)$$

Στη συνέχεια μεταχειριζόμαστε τις ακόλουθες τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\tan \frac{x}{2} \sin x = 1 - \cos x$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

Με χρήση των δύο ταυτοτήτων, η εξίσωση (60) γράφεται ως εξής:

$$\frac{dy_m}{dx} = \frac{1}{\pi} (A_0 \int_0^\pi \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \frac{\cos((n-1)\varphi) - \cos((n+1)\varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi) \quad (61)$$

Όλα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (61) είναι της μορφής (για τιμές του $n = 0, 1, 2, \dots$):

$$G_n(\theta) = \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi \quad (62)$$

Οι κύριες τιμές των ολοκληρωμάτων (62) μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή και ορίζουν τις λεγόμενες συναρτήσεις του Glauert:

$$G_n(\theta) = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (63)$$

Η απόδειξη της εξίσωσης (63) γίνεται χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες με την βοήθεια μαθηματικής επαγωγής, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις G_n ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$G_{n+1} + G_{n-1} - 2 \cos \theta G_n = 0 \quad (64)$$

Μεταχειριζόμαστε τώρα την εξίσωση (62) για να εκφράσουμε τα ολοκληρώματα στην (61) ως εξής:

$$\frac{d y_m}{d x} = \frac{1}{\pi} (A_0(G_0 - G_1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (G_{n-1} - G_{n+1})) \quad (65)$$

Παρατηρούμε (εξίσωση (62)) ότι $G_0 = 0$, $G_1 = \pi$, και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin x - \sin y = 2 \sin((x-y)/2) \cos((x+y)/2)$ ότι ισχύει:

$$G_{n-1} - G_{n+1} = \pi \frac{\sin((n-1)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = -2\pi \cos(n\theta) \quad (66)$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση (65) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{d y_m}{d x} = -(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta)) \quad (67)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι άγνωστοι είναι ίσοι με μείον τους συντελεστές της συνημιτονικής σειράς Fourier της συνάρτησης $d y_m / d x$, θεωρούμενης σαν συνάρτησης της μεταβλητής θ στο διάστημα $(0, \pi)$.

Σύμφωνα με την θεωρία σειρών Fourier, οι άγνωστοι A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ μπορούν να υπολογισθούν από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d y_m}{d x} d \theta \quad (68)$$

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d y_m}{d x} \cos(n\theta) d \theta \quad n = 1, 2, \dots \quad (69)$$

Οι συντελεστές άνωσης και ροπής μπορούν να εκφραστούν πολύ απλά συναρτήσει των (γνωστών πλέον) συντελεστών A_n :

$$\begin{aligned} C_L &= -\frac{2}{U c} \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) d x = -\frac{1}{U} \int_0^{\pi} (-2U A_0 \tan \frac{\theta}{2} - 2U \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)) \sin \theta d \theta = \\ &= \pi(2A_0 + A_1) \quad (70) \end{aligned}$$

$$C_M = -\frac{2}{U c^2} \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) x \, dx = -\frac{1}{2U} \int_0^\pi (-2UA_0 \tan \frac{\theta}{2} - 2U \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)) \cos \theta \sin \theta \, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} (-A_0 + \frac{1}{2} A_2) \quad (71)$$

Γιά να καταλήξουμε στις εξισώσεις (70) και (71) χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\int_0^\pi \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta \, d\theta = \pi$$

$$\int_0^\pi \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin(k\theta) \sin(n\theta) \, d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

Εύκολες επαληθεύσεις των εξισώσεων (70) και (71) μπορούν να γίνουν με τις εξής ειδικές περιπτώσεις (όπου το αποτέλεσμα μας είναι γνωστό):

1. Επίπεδη πλάκα υπό γωνία πρόσπτωσης α : $d\eta_m/dx = -\alpha$, οπότε $A_0 = \alpha$, $A_1 = A_2 = \dots = 0$. Οι εξισώσεις (70) και (71) δίνουν $C_L = 2\pi\alpha$, $C_M = -\pi\alpha/2$.
2. Παραβολικό τόξο με μέγιστη κυρτότητα $m = bc^2/8$ υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης: $d\eta_m/dx = -bx = -b(c/2) \cos \theta$, οπότε $A_1 = bc/2$, $A_0 = A_2 = A_3 = \dots = 0$. Οι εξισώσεις (70) και (71) δίνουν $C_L = (1/2)\pi bc$, $C_M = 0$.
3. Παραβολικό τόξο με μέγιστη κυρτότητα $m = bc^2/8$ υπό γωνία πρόσπτωσης α : $d\eta_m/dx = -\alpha - bx = -\alpha - b(c/2) \cos \theta$, οπότε $A_0 = \alpha$, $A_1 = bc/2$, $A_2 = A_3 = \dots = 0$. Οι εξισώσεις (70) και (71) δίνουν $C_L = (1/2)\pi bc + 2\pi\alpha$, $C_M = -\pi\alpha/2$.

Άσκηση θεωρίας:

Να συζητήσετε τη συμπεριφορά της συνάρτησης πυκνότητας στροβιλότητας στο άκρο πρόσπτωσης της υδροτομής.

Λύση

Για $\theta \rightarrow \pi$ η σειρά Fourier τείνει στο μηδέν, επομένως έχουμε ότι:

$$\gamma \sim -2U A_0 \tan \frac{\theta}{2}$$

Από την εξίσωση (68), χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής, έχουμε ότι:

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d y_m}{d x} d\theta = -\frac{d y_m}{d x}(\theta_c)$$

Όπου θ_c είναι κάποια τιμή της μεταβλητής θ στο διάστημα ολοκλήρωσης, δηλαδή $0 < \theta_c < \pi$.

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο συντελεστής A_0 είναι ίσος με μία “μέση γωνία κλίσης” β που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\beta = -\frac{d y_m}{d x}(\theta_c)$$

Οπότε καταλήγουμε ότι, για $\theta \rightarrow \pi$, η συνάρτηση γ γράφεται ως εξής:

$$\gamma \sim -2U\beta \tan \frac{\theta}{2}$$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης γ δηλαδή είναι η ίδια με τη συνάρτηση γ μια επίπεδης πλάκας που έχει κλίση ως προς τη ροή ίση με μία μέση τιμή της γωνίας κλίσης της εφαπτομένης κατά το μήκος της χορδής της υδροτομής. Στη ειδική περίπτωση που η μέση γραμμή κυρτότητας είναι ευθεία γραμμή (συμμετρική υδροτομή), η γωνία β είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης α .

5 Ιδανική γωνία πρόσπτωσης

Εστω B_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ οι συντελεστές της σειράς Fourier για μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Σύμφωνα με το προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε ότι:

$$B_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_m}{dx} d\theta \quad (72)$$

$$B_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_m}{dx} \cos(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, \dots \quad (73)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (21) στις (68), (69) βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση ανάμεσα στους συντελεστές A_n και B_n :

$$A_0 = B_0 + \alpha \quad (74)$$

$$A_n = B_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (75)$$

Από την εξίσωση (74) συμπεραίνουμε ότι, όταν η γωνία πρόσπτωσης πάρει την τιμή $\alpha_i = -B_0$, ο συντελεστής A_0 μηδενίζεται. Επομένως, για $\alpha = \alpha_i$, η πυκνότητα στροβιλότητας μηδενίζεται στο άκρο πρόσπτωσης, δηλαδή η συνθήκη Kutta ικανοποιείται και στο άκρο πρόσπτωσης, με αποτέλεσμα η ροή να είναι απαλλαγμένη από το ανεπιθύμητο φαινόμενο των χαμηλών πιέσεων στο άκρο πρόσπτωσης. Γι' αυτό το λόγο η γωνία α_i , που από τον ορισμό της είναι ιδιότητα της υδροτομής, λέγεται "ιδανική γωνία πρόσπτωσης".

Για υδροτομές που είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y , η κλίση της μέσης γραμμής κυρτότητας $d\eta_m/dx$ είναι περιττή συνάρτηση του x , οπότε από την εξίσωση (72) προκύπτει ότι ο συντελεστής B_0 είναι ίσος με μηδέν. Επομένως για συμμετρικές υδροτομές (π.χ. η επίπεδη πλάκα) η ιδανική γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με μηδέν.