

# **ΡΟΕΣ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟ**

Γ. Σ. Τριανταφύλλου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

2018

# 1 Γενικά

Μιά ροή με πεδίο ταχυτήτων  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  λέγεται αστρόβιλη όταν η στροβιλότητα  $\boldsymbol{\omega}$  είναι ίση με το μηδέν. Μαθηματικά αυτό γράφεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

Ο μηδενισμός της στροβιλότητας συνεπάγεται την ύπαρξη συνάρτησης δυναμικού  $\phi$ , της οποίας το grad είναι ίσο με την ταχύτητα  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (2)$$

Για ασυμπίεστη ροή έχουμε ότι  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , επομένως αντικαθιστώντας την εξίσωση (2) βρίσκουμε ότι το δυναμικό  $\phi$  ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

Σημειώνουμε ότι για αστρόβιλη ροή οι εξισώσεις Navier-Stokes ανάγονται στην εξίσωση του Bernoulli. Πράγματι ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\rho} \nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4)$$

όπου  $\Pi = p + (1/2)\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho g z$ .

Για αστρόβιλη ροή  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , οπότε αντικαθιστούμε την εξίσωση (2) στην εξίσωση (4) και, μετά από μιά αναγωγή όρων, βρίσκουμε ότι:

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Pi \right) = 0 \quad (5)$$

Η εξίσωση (5) προέκυψε από το γεγονός ότι ο τελευταίος όρος στην εξίσωση (4) μηδενίζεται λόγω της εξίσωσης (3). Δηλαδή, για αστρόβιλη ροή, παρά το ότι ο τανυστής των τάσεων λόγω ιξώδους δεν είναι μηδενικός, η απόκλιση του τανυστή (που εμφανίζεται στις εξισώσεις κίνησης) είναι ίση με το μηδέν.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5) έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Pi = C(t) \quad (6)$$

Όπου  $C(t)$  είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση του χρόνου μόνο, είναι δηλαδή η σταθερά ολοκλήρωσης. Χωρίς απώλεια γενικότητας μπορούμε να θέσουμε  $C(t) = K$ , όπου  $K$  οποιαδήποτε σταθερά (ακόμα και μηδέν). Αυτό ισχύει επειδή η συνάρτηση  $C(t)$  μπορεί να “απορροφηθεί” μέσα στο δυναμικό με τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\phi = \phi_1 + \int C(t) dt - Kt \quad (7)$$

Όποια και να είναι η  $C(t)$ , οι συναρτήσεις  $\phi$  και  $\phi_1$  δίνουν το ίδιο πεδίο ταχυτήτων αφού  $\nabla\phi = \nabla\phi_1$ .

Κατά συνέπεια η εξίσωση (6) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gz = K \quad (8)$$

Η εξίσωση (8) είναι η εξίσωση του Bernoulli για μη μόνιμη ροή, και ισχύει χωρίς προσέγγιση όταν η ροή είναι αστρόβιλη.

Όταν έχουμε ροή γύρω από ένα σώμα, η στροβιλότητα δεν μπορεί να είναι παντού μηδέν, επειδή η τριβή του ρευστού πάνω στην επιφάνεια του αντικειμένου δημιουργεί στροβιλότητα. Επομένως η περιοχή ισχύος της εξίσωσης του Bernoulli περιορίζεται στην περιοχή έξω από τα οριακά στρώματα και τον ομόρροου του αντικειμένου.

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου το να θεωρήσουμε ότι η ροή είναι παντού αστρόβιλη δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα για πρακτικές εφαρμογές. Παραδείγματα είναι ο υπολογισμός της δυναμικής άνωσης (ή άντωσης) σε υδροτομές, ή ο υπολογισμός φόρτισης κατασκευών λόγω θαλασσιών κυματισμών. Στις περιπτώσεις αυτές είναι υποχρεωτικό να υποθέσουμε ιδανικό ρευστό, γιατί μία αστρόβιλη ροή μπορεί να ικανοποιήσει την κινηματική οριακή συνθήκη πάνω στο σώμα, αλλά όχι την φυσική οριακή συνθήκη.

Γιά να επιλύσουμε το πρόβλημα αστρόβιλης ροής γύρω από σώμα έχουμε επομένως την εξίσωση του Laplace (3) για το δυναμικό που ισχύει στο πεδίο ροής, και την κινηματική οριακή συνθήκη πάνω στο περίγραμμα του σώματος  $B$ :

$$(\nabla\phi - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}|_B = 0 \quad (9)$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (9) ως εξής:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}|_B = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

Όπου  $\mathbf{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο  $B$  και  $\mathbf{v}$  είναι η ταχύτητα των σημείων της επιφάνειας του σώματος. Επίσης μεταχειριστήκαμε τον συμβολισμό  $\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \partial\phi/\partial n$ .

Η οριακή συνθήκη (10) λέγεται συνθήκη Neumann. Έχουμε επομένως ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (εξισώσεις (3) και (10)), που όμως θα χρειαστεί μία επιπλέον συνθήκη

που προσδιορίζει το πώς είναι η ροή πολύ μακριά από το αντικείμενο (π.χ. η ροή είναι ομοιόμορφη). Μαθηματικά αυτή η οριακή συνθήκη αναφέρεται σαν “συνθήκη στο άπειρο”. Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση του Laplace με οριακή συνθήκη Neumann και την συνθήκη στο άπειρο έχει μοναδική λύση για το πεδίο ταχυτήτων της ροής. Επομένως αν βρούμε μία λύση της εξίσωσης του Laplace που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες του προβλήματος αυτή είναι και η λύση του προβλήματος.

Αφού επιλύσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για το δυναμικό  $\phi$ , υπολογίζουμε την πίεση από την εξίσωση (8), οπότε η δύναμη  $\mathbf{F}$  και η ροπή  $\mathbf{M}_0$  ως προς την αρχή των αξόνων που ασκούνται πάνω στο σώμα υπολογίζονται με ολοκλήρωση των δυνάμεων πίεσης και των ροπών των δυνάμεων πίεσης, αντίστοιχα, πάνω στην επιφάνεια του σώματος  $B$ :

$$\mathbf{F} = - \int_B p \mathbf{n} dA \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_0 = - \int_B \mathbf{x} \times p \mathbf{n} dA \quad (12)$$

οπου  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  είναι το διάνυσμα θέσης στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση του Bernoulli (8) στις εκφράσεις για την δύναμη (11) και την ροπή (12) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{F} = \int_B \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} dA + \frac{1}{2} \int_B \rho |\nabla \phi|^2 \mathbf{n} dA + \int_B \rho g z \mathbf{n} dA \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_0 = \int_B \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{x} \times \mathbf{n} dA + \frac{1}{2} \int_B \rho |\nabla \phi|^2 \mathbf{x} \times \mathbf{n} dA + \int_B \rho g z \mathbf{x} \times \mathbf{n} dA \quad (14)$$

Στις εξισώσεις (13) και (14) οι τρίτοι όροι είναι, αντίστοιχα, η υδροστατική δύναμη και η υδροστατική ροπή, ενώ οι πρώτοι όροι είναι η δύναμη και η ροπή λόγω μη μονιμότητας της ροής.

## 2 Αιδιάστατες ροές με δυναμικό

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ροή είναι διδιάστατη, όπως για παράδειγμα στο πρόβλημα υπολογισμού ροής γύρω από μία υδροτομή. Ο υπολογισμός διδιάστατων ροών είναι πολύ απλούστερος από τον υπολογισμό τριδιάστατων ροών. Στην ειδική περίπτωση των αστρόβιλων ροών υπάρχει η επιπλέον διευκόλυνση ότι το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί με χρήση μιγαδικών συναρτήσεων, πράγμα που μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μερικά πολύ χρήσιμα εργαλεία από την θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων που διευκολύνουν πολύ την επίλυση του προβλήματος. Τα δύο βασικά εργαλεία που θα χρειαστούμε είναι (1) Η θεωρία σύμμορφων απεικονίσεων, και (2) Το θεώρημα των υπολοίπων, το οποίο διευκολύνει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων μιγαδικών συναρτήσεων.

### 2.1 Το μιγαδικό δυναμικό

Θεωρούμε μία ροή στο επίπεδο  $(x, y)$  με πεδίο ταχυτήτων  $(u, v)$ . Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο εξάμηνο, για οποιαδήποτε διδιάστατη ροή ασυμπίεστου ρευστού (με ή χωρίς στροβιλότητα) υπάρχει η λεγόμενη *ροική συνάρτηση*  $\psi(x, y)$ , που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (15)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (16)$$

Η ονομασία της ροικής συνάρτησης προέρχεται από το γεγονός ότι η εξίσωση  $\psi = C$ , όπου  $C$  σταθερά, περιγράφει τις γραμμές ροής. Αυτό προκύπτει από το ότι η εξίσωση  $\psi = C$  ορίζει καμπύλη της οποίας η εφαπτομένη σε κάθε σημείο έχει κλίση ίση με την κλίση του διανύσματος της ταχύτητας στο ίδιο σημείο:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = \frac{v}{u} \quad (17)$$

Για διδιάστατη ροή η μοναδική συνιστώσα της στροβιλότητας (που είναι η συνιστώσα κάθετη προς το επίπεδο κίνησης) δίνεται από την σχέση:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (18)$$

Επομένως για ασυμπίεστη αστρόβιλη ροή η ροική συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.

Επειδή υπάρχει μόνο ένα πεδίο ταχυτήτων, συμπεραίνουμε ότι η ροική συνάρτηση και η συνάρτηση δυναμικού συνδέονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (20)$$

Οι εξισώσεις (19) και (20) λέγονται *εξισώσεις Cauchy-Riemann*. Όταν δύο συναρτήσεις ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann λέγονται *συζυγείς συναρτήσεις*.

Μιά άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι δύο συναρτήσεις  $\phi, \psi$  ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann είναι ότι η συνάρτηση  $\phi + i\psi$  (όπου  $i = \sqrt{-1}$ ) είναι αναλυτική συνάρτηση της μεταβλητής  $z = x + iy$ . Συμβολίζουμε αυτή τη συνάρτηση με  $w(z)$  και λέγεται *μιγαδικό δυναμικό* της ροής.

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (21)$$

Η παράγωγος του μιγαδικού δυναμικού λέγεται *μιγαδική ταχύτητα*, επειδή έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \quad (22)$$

Σημειώνουμε ότι η εξίσωση  $\phi = C$  ορίζει μία δεύτερη οικογένεια καμπύλων που λέγονται *ισοδυναμικές καμπύλες*. Η κλίση αυτών των καμπύλων δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} = -\frac{u}{v} \quad (23)$$

Συγκρίνοντας την (23) με την εξίσωση (17) βλέπουμε ότι οι *ισοδυναμικές καμπύλες* είναι κάθετες προς τις γραμμές ροής.

Το απλούστερο παράδειγμα αστρόβιλης ροής, και το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές, είναι η ομοιόμορφη ροή με σταθερή ταχύτητα. Αν παραστήσουμε με  $U, V$  τις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού κατά τον άξονα των  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w(z) = (U - iV)z \quad (24)$$

Παίρνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (24) βρίσκουμε ότι το δυναμικό της ροής είναι  $\phi = Ux + Vy$ , και η ροική συνάρτηση είναι  $\psi = Uy - Vx$ . Επομένως οι γραμμές ροής είναι  $Uy - Vx = \text{σταθερό}$  (δηλ. ευθείες παράλληλες με τον άξονα το διάνυσμα  $(U, V)$ ), και οι *ισοδυναμικές καμπύλες* είναι  $Ux + Vy = \text{σταθερό}$  (δηλ. ευθείες κάθετες προς το διάνυσμα  $(U, V)$ ). Προφανώς οι δύο οικογένειες καμπύλων είναι κάθετες μεταξύ τους.

## 2.2 Σύμμορφες απεικονίσεις

Η σχέση  $\zeta = f(z)$ , όπου  $f(z)$  είναι μία αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ , απεικονίζει το επίπεδο  $z = x + iy$  στο επίπεδο  $\zeta = \xi + i\eta$ . Η αντίστροφη απεικόνιση από το επίπεδο  $\zeta$  στο επίπεδο  $z$  συμβολίζεται με την σχέση  $z = f^{-1}(\zeta)$ . Εστω  $f'(z)$  η παράγωγος της  $f(z)$ . Εάν  $f'(z) \neq 0$ , η απεικόνιση λέγεται σύμμορφη.

Η ονομασία σύμμορφη προέρχεται από το γεγονός ότι η απεικόνιση διατηρεί τις γωνίες. Αν θεωρήσουμε δηλαδή δύο απειροστά ευθύγραμμα τμήματα  $(AB)$ ,  $(A\Gamma)$  στο επίπεδο  $z$ , και τις εικόνες τους  $(A'B')$ ,  $(A'\Gamma')$  στο επίπεδο  $\zeta$ , αν η απεικόνιση είναι σύμμορφη, η γωνία  $BA\Gamma$  είναι ίση με την γωνία  $B'A'\Gamma'$ .

Από την βασική ιδιότητα των σύμμορφων απεικονίσεων προκύπτει μία εναλλακτική απόδειξη για το ότι οι ισοδυναμικές γραμμές είναι κάθετες προς τις γραμμές ροής. Το μιγαδικό δυναμικό είναι μία σύμμορφη απεικόνιση του επιπέδου  $(x, y)$  της ροής στο επίπεδο  $(\phi, \psi)$ . Οι ισοδυναμικές γραμμές και οι γραμμές ροής απεικονίζονται, αντίστοιχα, στις ευθείες  $\phi = \text{const}$ ,  $\psi = \text{const}$ . Επειδή οι τελευταίες είναι κάθετες μεταξύ τους, το ίδιο ισχύει και για τις πρώτες. Εξαιρέση σε αυτό αποτελούν τα σημεία ανακοπής της ροής, επειδή σε αυτά έχουμε  $dw/dz = 0$ , και επομένως η απεικόνιση δεν είναι σύμμορφη.

Η βασική χρήση των σύμμορφων απεικονίσεων στην υδροδυναμική είναι ο υπολογισμός ροής γύρω από ένα αντικείμενο απεικονίζοντάς την σε ροή γύρω από ένα άλλο αντικείμενο, για το οποίο η λύση είναι γνωστή. Η εύρεση της κατάλληλης σύμμορφης απεικόνισης είναι το πιό δύσκολο μέρος του προβλήματος.

Θεωρούμε αστρόβιλη ροή γύρω από ένα αντικείμενο με περίγραμμα  $B$  στο επίπεδο  $(x, y)$ , και έστω  $w(z)$  το μιγαδικό δυναμικό της ροής. Μέσω της σύμμορφης απεικόνισης  $\zeta = f(z)$  το περίγραμμα  $B$  απεικονίζεται στο  $B'$  στο επίπεδο  $(\xi, \eta)$ . Ας υποθέσουμε ότι λύση για αστρόβιλη ροή γύρω από το αντικείμενο  $B'$  είναι γνωστή, και έστω  $W(\zeta)$  το μιγαδικό δυναμικό της ροής. Τότε το μιγαδικό δυναμικό της ροής γύρω από το αντικείμενο  $B$  στο επίπεδο  $(x, y)$  δίνεται από την ακόλουθη σύνθετη συνάρτηση:

$$w(z) = W(f(z)) \quad (25)$$

Για την απόδειξη της (25) σκεφτόμαστε ως εξής: Το αντικείμενο  $B'$  είναι γραμμή ροής, επομένως η ροική συνάρτηση είναι σταθερή πάνω στο  $B'$ :

$$\text{Im}[W(\zeta)]|_{B'} = C \quad (26)$$

Όπου  $\text{Im}[A]$  συμβολίζει το φανταστικό μέρος του  $A$ . Κατά συνέπεια στο επίπεδο  $(x, y)$  έχουμε ότι:

$$\text{Im}[w(z)]|_B = \text{Im}[W(\zeta)]|_{B'} = C \quad (27)$$

Αυτό δείχνει ότι η ροική συνάρτηση είναι σταθερή πάνω στο περίγραμμα του αντικειμένου, και επομένως ότι το διάνυσμα της ταχύτητας εφάπτεται στο αντικείμενο.

Σαν παράδειγμα θα υπολογίσουμε τη διδιάστατη αστρόβιλη ροή σε ορθή γωνία.

Επιλέγουμε τους άξονες  $x$  και  $y$  να συμπίπτουν με τις δύο πλευρές της γωνίας. Θα επιλύσουμε τη ροή απεικονίζοντας την γεωμετρία του προβλήματος σε ροή πάνω από άπειρη επίπεδη πλάκα. Αυτό επιτυγχάνεται με το μετασχηματισμό:

$$\zeta = z^2 \quad (28)$$

Αυτό επαληθεύεται εύκολα παρατηρώντας ότι η εικόνα της μίας πλευράς της γωνίας ( $z = x$ ) είναι  $\zeta = x^2$ , δηλαδή είναι ο θετικός άξονας των  $\xi$ , ενώ η εικόνα της άλλης πλευράς της γωνίας ( $z = iy$ ) είναι  $\zeta = -x^2$ , δηλαδή ο αρνητικός άξονας των  $\xi$ .

Το μιγαδικό δυναμικό της ροής στο επίπεδο  $\zeta$  δίνεται από τη σχέση:

$$W = k\zeta \quad (29)$$

Οπου  $k$  είναι μία πραγματική σταθερά για να είναι διαστατικά σωστό το πρόβλημα.

Επιστρέφοντας στο επίπεδο  $z$  μέσω του μετασχηματισμού (28) έχουμε ότι:

$$w = kz^2 \quad (30)$$

Το δυναμικό και η ροική συνάρτηση δίνονται, αντίστοιχα, από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi = k(x^2 - y^2) \quad (31)$$

$$\psi = 2kxy \quad (32)$$

Από τις εξισώσεις (32 και (31) βλέπουμε ότι οι γραμμές ροής είναι οι υπερβολές  $xy = C$ , και οι ισοδυναμικές γραμμές είναι οι υπερβολές  $x^2 - y^2 = C$ . Μία γραφική απεικόνιση των γραμμών ροής και των ισοδυναμικών γραμμών φαίνεται στην γράφημα 1.

Γενικεύοντας, για να επιλύσουμε το πρόβλημα της αστρόβιλης ροής σε γωνία ίση με  $\pi/n$  μεταχειριζόμαστε τον μετασχηματισμό  $\zeta = z^n$ , οπότε το μιγαδικό δυναμικό που προκύπτει είναι  $w = kz^n$ .

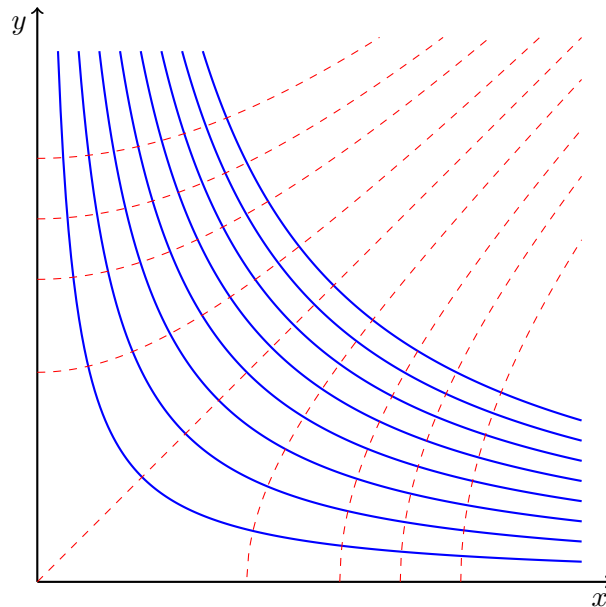
Άσκηση: Να υπολογιστεί η διδιάστατη αστρόβιλη ροή γύρω από ημίαιρη πλάκα. Να υπολογιστούν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης σε τυχόν σημείο του πεδίου ροής.

Η συνάρτηση  $\zeta = z^2$  απεικονίζει τη δεδομένη ροή σε ροή πάνω από άπειρη πλάκα. Η τελευταία περιγράφεται από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

$$W(\zeta) = K\zeta \quad (33)$$

Οπου  $K$  είναι μία σταθερά.





Σχήμα 1: Γραμμές ροής (συνεχείς) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομμένες) για αστρόβιλη ροή σε ορθή γωνία. Σημείωση: Η ισοδυναμική γραμμή που αντιστοιχεί σε τιμή της σταθεράς ίση με το μηδέν, είναι η ευθεία γραμμή με κλίση  $45^\circ$  που περνά από την αρχή των αξόνων

Κατά συνέπεια το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w(z) = K z^{1/2} \quad (34)$$

Το δυναμικό της ροής  $\phi$  και η ροική συνάρτηση  $\psi$  δίνονται, αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\phi = \operatorname{Re}[K z^{1/2}] = K r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (35)$$

$$\psi = \operatorname{Im}[K z^{1/2}] = K r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (36)$$

Οπου θέσαμε  $z = r \exp(i\theta)$ .

Οι γραμμές ροής προκύπτουν θέτοντας  $\psi = C$ . Αυτό μας δίνει:

$$r \frac{1 - \cos \theta}{2} = C_a^2 \quad (37)$$

Οπου  $C_a = C/K$ . Η ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$r = \frac{2 C_a^2}{1 - \cos \theta} \quad (38)$$

Η εξίσωση (38) περιγράφει μιά οικογένεια παραβολών με εστία την αρχή των αξόνων. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η (38) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

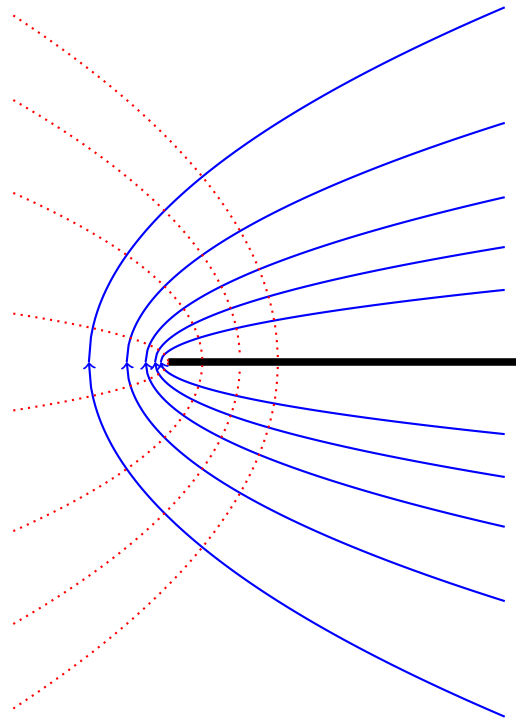
$$y^2 = 4x C_a^2 + 4C_a^4 \quad (39)$$

Γραφική παράσταση των γραμμών ροής για διάφορα  $C_a$  φαίνεται στο σχήμα 1.

Σημειώνουμε ότι, με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει η εξίσωση για τις ισοδυναμικές γραμμές σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$y^2 = -4x C_a^2 + 4C_a^4 \quad (40)$$

η οποία επίσης παριστάνει οικογένεια παραβολών (Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Γραμμές ροής (συνεχείς μπλε) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομμένες κόκκινες) για ροή γύρω από ημιάπειρη πλάκα.

Το πεδίο ταχυτήτων σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (41)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (42)$$

Οπότε η πίεση προκύπτει από την αρχή του Bernoulli:

$$p = p_\infty - \frac{1}{8} \rho \frac{K^2}{r} \quad (43)$$

Οπου  $p_\infty$  η πίεση πολύ μακριά από την πλάκα.

Κατά συνέπεια, από τις εξισώσεις του Euler, οι συνιστώσες της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες  $a_r, a_\theta$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{K^2}{r^2} \quad (44)$$

$$a_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (45)$$

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι κεντρομόλος και διευθύνεται προς την αρχή της πλάκας.

## 2.3 Πηγές, δίνες και δίπολα

Οποιαδήποτε αναλυτική συνάρτηση της μεταβλητής  $z$  παριστάνει κάποια αστρόβιλη ροή στο επίπεδο  $(x, y)$  (όχι κατ'ανάγκη με πρακτικό ενδιαφέρον). Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε μερικές βασικές αστρόβιλες ροές, που προκύπτουν από απλά μιγαδικά δυναμικά, και που περιγράφουν βασικούς τύπους αστροβιλης κίνησης του ρευστού. Οι ροές αυτές είναι (α) Πηγή (και καταβόθρα) (β) Σημειακή δίνη, και (γ) Δίπολο. Μαθηματικά οι ροές αυτές λέγονται και συναρτήσεις του Green, επειδή με υπέρθεση τέτοιων ροών (που επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green) μπορούμε να υπολογίσουμε ροές γύρω από περίπλοκα σχήματα.

### 2.3.1 Σημειακή Πηγή

Σημειακή πηγή είναι η ροή που προκύπτει από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

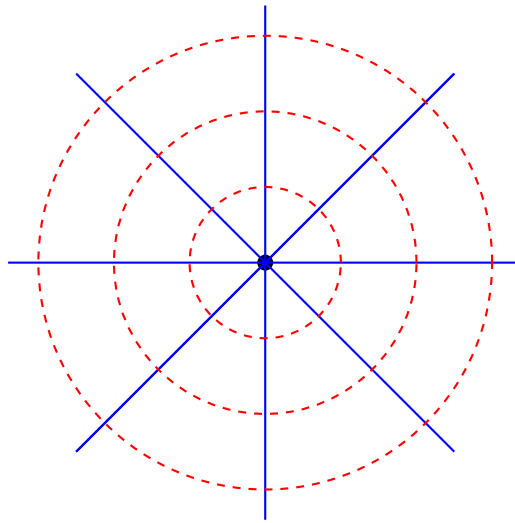
$$w = \frac{m}{2\pi} \ln z \quad (46)$$

Οπου  $m$  είναι μία σταθερά που λέγεται ένταση της πηγής, και  $\ln$  ο φυσικός λογάριθμος. Γράφοντας την μιγαδική μεταβλητή  $z$  σε πολική μορφή  $z = r \exp(i\theta)$  βρίσκουμε ότι το δυναμικό και η ροική συνάρτηση της ροής δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r \quad (47)$$

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \theta \quad (48)$$

Από τις εξισώσεις (47), (48) βλέπουμε ότι οι γραμμές ροής δίνονται από την σχέση  $\theta = \text{σταθερό}$ , είναι δηλαδή ευθείες γραμμές που περνούν από την αρχή των αξόνων, και οι ισοδυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 3: Γραμμές ροής (μπλε συνεχείς) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομένες κόκκινες) για σημειακή πηγή ή καταβόθρα. Το ρευστό κινείται από την πηγή προς το άπειρο, και αντίστροφα για καταβόθρα.

Το πεδίο ταχυτήτων εκφράζεται πολύ απλά σε πολικές συντεταγμένες  $u_r, u_\theta$  ως εξής:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{2\pi r} \quad (49)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (50)$$

Αν  $m > 0$  βλέπουμε ότι το ρευστό ρέει από την αρχή των αξόνων προς το άπειρο, υπάρχει δηλαδή μία “πηγή” ρευστού στην αρχή των αξόνων. Αν  $m < 0$  το ρευστό ρέει από το άπειρο προς την αρχή των αξόνων, υπάρχει δηλαδή μια “καταβόθρα” στην αρχή των αξόνων.

Η ένταση της πηγής  $m$  είναι ίση με την παροχή όγκου γύρω από μία κλειστή καμπύλη που περικλείει την αρχή των αξόνων, όπως μπορεί να επαληθευθεί εύκολα, υπολογίζοντας την εκροή όγκου μέσα από ένα κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Υπενθυμίζουμε ότι, επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη, η παροχή όγκου μέσα από οποιαδήποτε καμπύλη που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων είναι ίση με το μηδέν.

### 2.3.2 Σημειακή δίνη

Σημειακή δίνη είναι η αστρόβιλη ροή που περιγράφεται από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

$$w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (51)$$

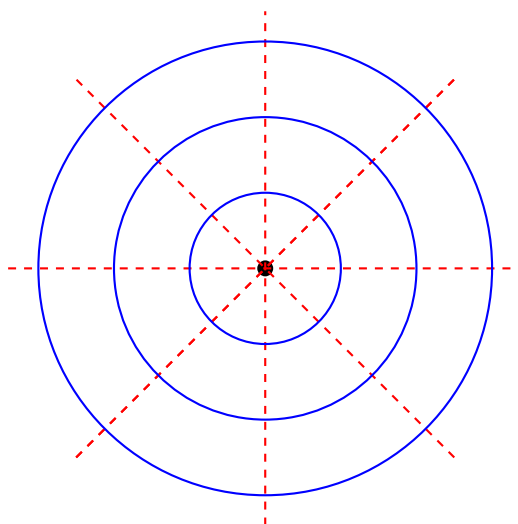
Όπου  $\Gamma$  είναι μιά σταθερά και λέγεται ένταση της δίνης.

Χρησιμοποιώντας, όπως και με την πηγή, πολικές συντεταγμένες το δυναμικό και η ροική συνάρτηση δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (52)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (53)$$

Από τις εξισώσεις (52), (53) βλέπουμε ότι οι γραμμές ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων, ενώ οι ισοδυναμικές γραμμές δίνονται από την σχέση  $\theta = \text{σταθερό}$ , είναι δηλαδή ευθείες γραμμές που περνούν από την αρχή των αξόνων. Παρατηρούμε ότι οι ισοδυναμικές γραμμές της πηγής είναι γραμμές ροής της δίνης, και οι γραμμές ροής της πηγής είναι ισοδυναμικές γραμμές της δίνης. Δύο ροές που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται συζυγείς.



Σχήμα 4: Γραμμές ροής (μπλε συνεχείς) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομμένες κόκκινες) για σημειακή δίνη. Η κίνηση του ρευστού γίνεται κατά την αντι-ωρολογιακή φορά για  $\Gamma > 0$ , και ωρολογιακή φορά για  $\Gamma < 0$ .

Το πεδίο ταχυτήτων εκφράζεται πολύ απλά σε πολικές συντεταγμένες  $u_r, u_\theta$  ως εξής:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (54)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (55)$$

Η ένταση της δίνης είναι ίση με την κυκλοφορία γύρω από μιά κλειστή καμπύλη που περικλείει την αρχή των αξόνων, όπως μπορεί να επαληθευθεί εύκολα, υπολογίζοντας την κυκλοφορία γύρω από ένα κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Υπενθυμίζουμε ότι, επειδή η ροή είναι αστρόβιλη, η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων είναι ίση με το μηδέν.

### 2.3.3 Δίπολο

Αρχίζουμε θεωρώντας δίπολο παράλληλο με τον άξονα των  $x$ , που είναι η ροή που περιγράφεται από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

$$w = -\frac{\mu}{z} \quad (56)$$

Οπου  $\mu$  είναι σταθερά και λέγεται ένταση του διπόλου.

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες το δυναμικό και η ροική συνάρτηση δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi = -\frac{\mu}{r} \cos \theta \quad (57)$$

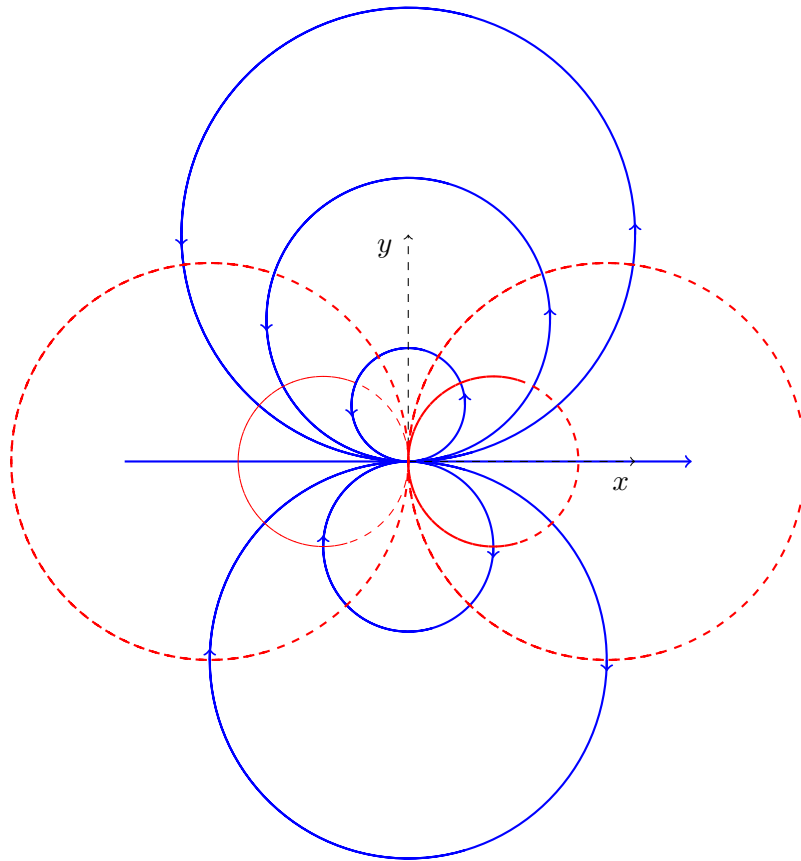
$$\psi = \frac{\mu}{r} \sin \theta \quad (58)$$

Γιά να βρούμε τις γραμμές ροής θέτουμε  $\psi = C$ . Από την εξίσωση (58) βρίσκουμε ότι:

$$x^2 + y^2 - \frac{\mu}{C}y = 0 \quad (59)$$

ή ισοδύναμα:

$$x^2 + \left(y - \frac{\mu}{2C}\right)^2 = \frac{\mu^2}{4C^2} \quad (60)$$



Σχήμα 5: Γραμμές ροής (συνεχής μπλε γραμμή) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομένη κόκκινη γραμμή) για δίπολο παράλληλο προς τον άξονα των  $x$ . Ο άξονας των  $x$  είναι επίσης γραμμή ροής. Για θετικές τιμές της παραμέτρου  $\mu$  οι γραμμές ροής διαγράφονται από τα σωματίδια του ρευστού κατά την αντιωρολογιακή φορά στο άνω ημιεπίπεδο, και κατά την ωρολογιακή φορά στο κάτω ημιεπίπεδο (όπως στο σχήμα). Για αρνητικές τιμές της παραμέτρου  $\mu$  αντίστροφα.

Βλέπουμε επομένως ότι κάθε γραμμή ροής είναι κύκλος με κέντρο το σημείο  $(0, \mu/(2C))$  και ακτίνα  $\mu/(2C)$ , είναι δηλαδή κύκλος με κέντρο σημείο του άξονα των  $y$  και εφαπτόμενος με τον άξονα των  $x$ . Οι γραμμές ροής απεικονίζονται στην εικόνα 2.

Γιά να βρούμε τις ισοδυναμικές γραμμές θέτουμε  $\phi = C$ . Από την εξίσωση (57) ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία όπως με τις γραμμές ροής βρίσκουμε ότι κάθε ισοδυναμική επιφάνεια ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$\left(x - \frac{\mu}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{\mu^2}{4C^2} \quad (61)$$

Βλέπουμε επομένως ότι κάθε ισοδυναμική γραμμή είναι κύκλος με κέντρο το σημείο  $(\mu/(2C), 0)$  και ακτίνα  $\mu/(2C)$ , είναι δηλαδή κύκλος με κέντρο σημείο του άξονα των  $x$  και εφαπτόμενος με τον άξονα των  $y$ .

Το πεδίο ταχυτήτων δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2} \cos \theta \quad (62)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\mu}{r^2} \sin \theta \quad (63)$$

Παρατηρώντας τα πρόσημα των δύο συνιστωσών της ταχύτητας στα τέσσερα τεταρτημόρια του επιπέδου βλέπουμε ότι το ρευστό "ανοίγει" μπροστά από το δίπολο, και κλείνει πίσω του, προσομοιάζει δηλαδή την κίνηση του ρευστού λόγω αντικειμένου που κινείται παράλληλα προς τον άξονα των  $x$ .

Ενα δίπολο παράλληλο με τον άξονα των  $y$  είναι η ροή που περιγράφεται από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

$$w = -i \frac{\mu}{z} \quad (64)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ότι η ροή αυτή είναι η συζυγής ροή της ροής λόγω διπόλου με τον άξονα των  $x$ , βρίσκουμε δηλαδή ότι το σχήμα γραμμών ροής/ισοδυναμικών γραμμών είναι το σχήμα της ροής λόγω διπόλου με τον άξονα των  $x$  γυρισμένο κατά γωνία ενενήντα μοιρών. Η ροή αυτή προσομοιάζει δηλαδή την κίνηση του ρευστού λόγω αντικειμένου που κινείται παράλληλα προς τον άξονα των  $y$ .

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό του διπόλου, θεωρώντας δίπολο έντασης  $\mu$  παράλληλο με ευθεία που έχει γωνία κλίσεως  $\alpha$  ως προς τον άξονα των  $x$  ίση με μία οποιαδήποτε γωνία  $\alpha$ . Το μιγαδικό δυναμικό ορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$w = -i \frac{\mu \cos \alpha + i \mu \sin \alpha}{z} \quad (65)$$



Η εξίσωση (65) προσομοιάζει την ροή αντικειμένου το οποίο κινείται παράλληλα με ευθεία που έχει κλίση ίση με την γωνία  $\alpha$ .

Θα δούμε στη συνέχεια ότι το δυναμικό ροής γύρω από οποιοδήποτε αντικείμενο τείνει μακριά από το αντικείμενο στο δυναμικό διπόλου (εξίσωση (65))

### 2.3.4 Αρχή της συμμετρίας

Κατ'αρχήν σημειώνουμε ότι αν η πηγή, δίνη, ή δίπολο δεν βρίσκονται στην αρχή των αξόνων, αλλά σε κάποιο τυχόν σημείο με συντεταγμένες  $(x_0, y_0)$ , τα αντίστοιχα μιγαδικά δυναμικά τροποποιούνται ως εξής:

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad w = -\frac{\mu}{z - z_0} \quad (66)$$

οπου  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

Αν υπάρχει μιά άπειρη επίπεδη πλάκα, όπως μπορεί να επαληθευθεί εύκολα, το δυναμικό της ροής προκύπτει από το άθροισμα του δυναμικού της πηγής, δίνης, ή διπόλου και το δυναμικό της κατοπτρικής της εικόνας ως προς την πλάκα. Αυτό είναι γνωστό σαν η αρχή της συμμετρίας.

Γιά παράδειγμα, αν η πλάκα συμπίπτει με τον άξονα των  $x$ , το δυναμικό για πηγή, δίνη, ή δίπολο γίνεται αντίστοιχα ως εξής:

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0^*) \quad (67)$$

$$w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0^*) \quad (68)$$

$$w = -\frac{\mu}{z - z_0} - \frac{\mu}{z - z_0^*} \quad (69)$$

οπου  $z_0^* = x_0 - iy_0$ .

**Ασκηση 1:** Να βρεθεί το δυναμικό της ροής για σημειακή πηγή σε ορθή γωνία.

**Λύση:** Εστω  $(x_0, y_0)$  η θέση της πηγής. Θέτουμε  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Ως γνωστόν, ο μετασχηματισμός  $\zeta = z^2$  μετατρέπει την ορθή γωνία σε ευθεία γωνία. Οπότε, χρησιμοποιώντας την αρχή της συμμετρίας, βρίσκουμε μετά από κάποιες αναγωγές όρων ότι το δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0^*) + \frac{m}{2\pi} \ln(z + z_0) + \frac{m}{2\pi} \ln(z + z_0^*)$$

**Ασκηση 2:** Θεωρείστε ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα  $U$  και σημειακή πηγή έντασης  $m$ . Να αποδειχθεί ότι μοντελοποιεί την ροή γύρω από ημίσφαιρο αντικείμενο μεγίστου πλάτους  $m/U$ .

Λύση

Επιλέγοντας την αρχή των αξόνων να συμπίπτει με τη θέση της πηγής το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$w = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln z \quad (70)$$

Οπότε η μιγαδική ταχύτητα είναι:

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{2\pi z} \quad (71)$$

Θετώντας την μιγαδική ταχύτητα ίση με το μηδέν βρίσκουμε ότι το μοναδικό σημείο ανακοπής βρίσκεται πάνω στον άξονα των  $x$  στην θέση  $z = -a$ , όπου  $a$ :

$$a = \frac{m}{2\pi U} \quad (72)$$

Η ροική συνάρτηση δίνεται από την ακόλουθη σχέση (χρησιμοποιώντας ανάμεικτες καρτεσιανές-πολικές συντεταγμένες):

$$\Psi = Uy + \frac{m}{2\pi} \theta \quad (73)$$

Οπότε οι γραμμές ροής προκύπτουν θέτοντας  $\Psi = C$ . Η γραμμή ροής που περνά από το σημείο ανακοπής έχει  $C = m/2$ , οπότε η εξίσωση της είναι:

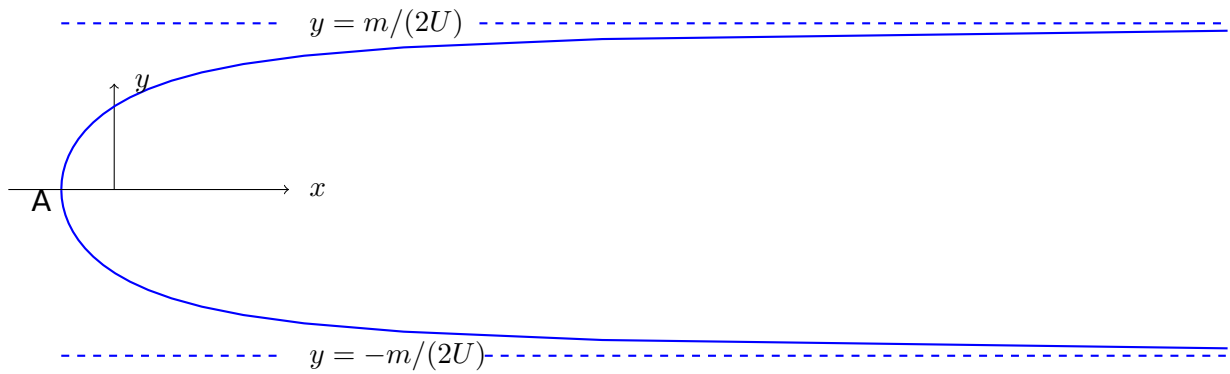
$$Uy + \frac{m}{2\pi} \theta = \frac{m}{2} \quad (74)$$

Η γραμμή ροής αποτελείται από το μέρος του πραγματικού άξονα  $x < -a$ , και από δύο συμμετρικές ως προς τον άξονα των  $x$  καμπύλες που ξεκινούν από το σημείο ανακοπής και καταλήγουν στο άπειρο παράλληλα με την σταθερή ροή. Οι δύο αυτές καμπύλες μπορούν να θεωρηθούν σαν το περίγραμμα ενός ημιάπειρου αντικειμένου που εκτείνεται από το σημείο ανακοπής μέχρι το άπειρο. Το σχήμα θυμίζει λίγο την πλώρη ενός πλοίου.

Από την εξίσωση (74) προκύπτει ότι, για  $x \rightarrow \infty$  και  $\theta \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow m/(2U)$  (η άνω καμπυλη), και  $y \rightarrow -m/(2U)$  (η κάτω καμπυλη). Επομένως το μέγιστο πλάτος του αντικειμένου είναι πράγματι ίσο με  $2m/(2U) = m/U$ .

Ασκησης συνέχεια: Χρησιμοποιώντας ένα ορθογωνικό όγκο ελέγχου που ξεκινά πολύ πριν από το αντικείμενο και το περιβάλλει, αποδείξτε ότι η δύναμη στο αντικείμενο δίνεται από τη σχέση:

$$F_x = p_\infty h$$



Σχήμα 6: Ροή που προκύπτει από υπέρθεση ομοιόμορφης ροής παράλληλης με τον άξονα των  $x$ , και σημειακής πηγής στην αρχή των αξόνων. Η γραμμή ροής που αρχικά ταυτίζεται με τον άξονα των  $x$  διακλαδίζεται στο σημείο ανακοπής A σε δύο συμμετρικές καμπύλες σχηματίζοντας ένα ημιάπειρο αντικείμενο με μέγιστο πάχος  $m/U$ .

Όπου  $p_\infty$  είναι η πίεση περιβάλλοντος, και  $h = m/U$

Άσκηση 3: Βρείτε το αντικείμενο που σχηματίζεται από την υπέρθεση μίας πηγής έντασης  $m$ , μίας καταβόθρας επίσης έντασης  $m$ , και ομοιόμορφης ροής με ταχύτητα  $U$  παράλληλη προς την ευθεία που ενώνει πηγή και καταβόθρα.

Λύση

Εστω  $2a$  η απόσταση ανάμεσα στην πηγή και στην καταβόθρα. Χωρίς απώλεια γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε τους άξονες έτσι ώστε η πηγή να είναι στο σημείο  $(-a, 0)$ , και η καταβόθρα στο σημείο  $(a, 0)$ . Το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln(z + a) - \frac{m}{2\pi} \ln(z - a) \quad (75)$$

Η μιγαδική ταχύτητα είναι ίση με:

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{2\pi(z + a)} - \frac{m}{2\pi(z - a)} \quad (76)$$

Θέτοντας τη μιγαδική ταχύτητα ίση με το μηδέν βρίσκουμε ότι τα σημεία ανακοπής της ροής βρίσκονται στις θέσεις:

$$z = \pm \sqrt{\frac{ma}{\pi U} + a^2} \quad (77)$$

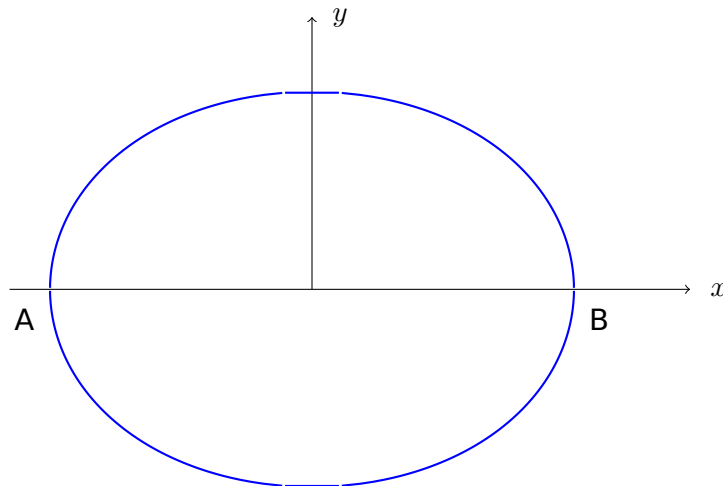
Η ροική συνάρτηση δίνεται από την σχέση:

$$\Psi = Uy + \frac{m}{2\pi}\theta_1 - \frac{m}{2\pi}\theta_2 \quad (78)$$

Οπου  $\theta_1, \theta_2$  ορίζονται απο τις σχέσεις:

$$\theta_1 = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x+a}\right) \qquad \theta_2 = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x-a}\right) \qquad (79)$$

Η γραμμή ροής που περνά από τα δύο σημεία ανακοπής έχει  $\Psi = 0$ . Αριστερά από το πρώτο σημείο ανακοπής και δεξιά από το δεύτερο συμπίπτει με τον άξονα των  $x$ . Στο πρώτο σημείο ανακοπής διακλαδίζεται σε δύο συμμετρικές ως προς τον άξονα των  $x$  καμπύλες, οι οποίες ξαναενώνονται στο δεύτερο σημείο ανακοπής (Σχήμα 3).



Σχήμα 7: Αντικείμενο που σχηματίζεται από την υπέρθεση μιάς πηγής έντασης  $m$ , μιάς καταβόθρας επίσης έντασης  $m$ , και ομοιόμορφης ροής με ταχύτητα  $U$  παράλληλη προς την ευθεία που ενώνει πηγή και καταβόθρα. A και B είναι τα σημεία ανακοπής της ροής.

Ασκηση 4: Θεωρείστε μιά πηγή και μιά καταβόθρα ίσης έντασης  $m$  σε απόσταση  $2a$  μεταξύ τους. Να αποδειχθεί ότι οι γραμμές ροής είναι τόξα κύκλων.

Επιλέγουμε τον άξονα των  $x$  να συμπίπτει με την ευθεία που ενώνει την πηγή και την καταβόθρα, και κέντρο των αξόνων το μέσο της μεταξύ τους απόστασης. Η πηγή καταλαμβάνει τη θέση  $(a, 0)$ , και η καταβόθρα τη θέση  $(-a, 0)$ . Επομένως το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w = -\frac{m}{2\pi} \ln(z+a) + \frac{m}{2\pi} \ln(z-a)$$

Θέτουμε:

$$z-a = |z-a| \exp(i\theta_1), \qquad z+a = |z+a| \exp(i\theta_2)$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για το μιγαδικό δυναμικό, και παίρνοντας το φανταστικό μέρος, καταλήγουμε ότι η ροική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

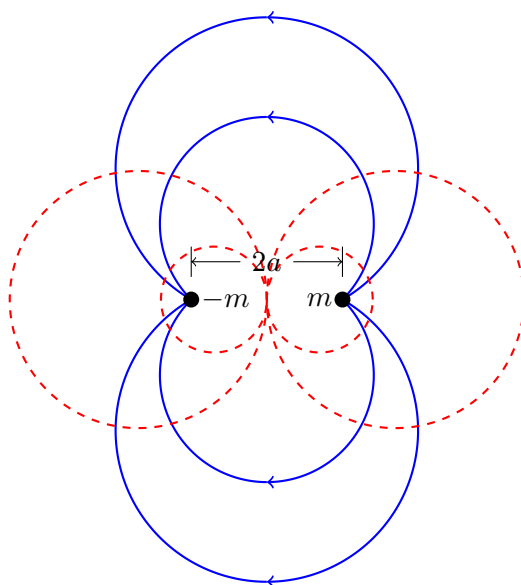
$$\Psi = \frac{m}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

Οι γραμμές ροής δίνονται από τη σχέση  $\Psi = \text{σταθερά}$ , η οποία οδηγεί στο  $\theta_1 - \theta_2 = \text{σταθερά}$ . Ως γνωστόν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν αυτή τη σχέση είναι δύο συμμετρικά ως προς τον άξονα των  $x$  τόξα κύκλου που περνούν από τα δύο σημεία  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$ . Η φορά διαγραφής των γραμμών ροής (των τόξων κύκλου δηλαδή) είναι από την πηγή προς την καταβόθρα. Φυσικά το ίδιο προκύπτει εκφράζοντας τα  $\theta_1, \theta_2$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες και καταλήγοντας σε εξίσωση κύκλου.

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος του μιγαδικού δυναμικού καταλήγουμε ότι το πραγματικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{|z - a|}{|z + a|}$$

Οι ισοδυναμικές γραμμές δίνονται από τη σχέση  $|z - a|/|z + a| = C$ , που ως γνωστόν είναι κύκλοι (Απολλώνιοι κύκλοι). Εύκολα μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά την εξίσωση τους.



Σχήμα 8: Γραμμές ροής (μπλε συνεχείς), και ισοδυναμικές γραμμές (κόκκινες διακεκομμένες), για πηγή έντασης  $m$  και πηγή έντασης  $-m$  (καταβόθρα) σε απόσταση  $2a$  μεταξύ τους.

Άσκηση 5: Βρείτε το όριο της ροής στην άσκηση 4 όταν  $a \rightarrow 0$  με  $(ma/\pi) \rightarrow \mu$ , όπου  $\mu$  σταθερά, και αποδείξτε ότι είναι δίπολο παράλληλο με τον άξονα  $x$  με ένταση  $\mu$ .

Παίρνουμε το όριο του μιγαδικού δυναμικού της άσκησης 4 όταν  $a \rightarrow 0$  με  $(ma/\pi) \rightarrow \mu$ , και έχουμε ότι:

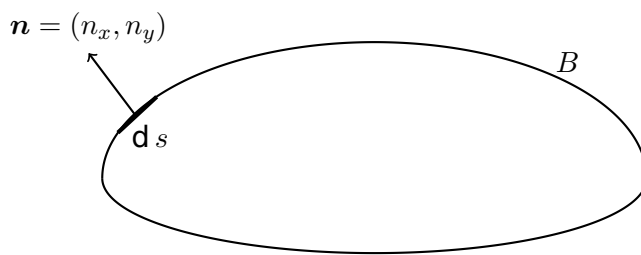
$$\begin{aligned}
w(z) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2\pi} \ln(z-a) - \frac{m}{2\pi} \ln(z+a) \right) = \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{2ma}{2\pi} \frac{\ln(z-a) - \ln(z+a)}{2a} \right) = \\
&= -\mu \frac{d}{dz} \ln z = -\frac{\mu}{z}
\end{aligned}$$

Αποδείξαμε δηλαδή το ζητούμενο. Παρατηρούμε ότι, για  $a \rightarrow 0$ , το σχήμα της άσκησης 4 ανάγεται στο σχήμα γραμμών ροής και ισοδυναμικών του διπόλου παράλληλου με τον άξονα  $x$ .

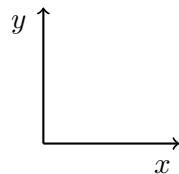
## 2.4 Δύναμη και ροπή σε αντικείμενο σε μόνιμη αστρόβιλη ροή: Τα θεωρήματα του Blasius

Τα θεωρήματα του Blasius εκφράζουν την δύναμη και τη ροπή σε σώμα σε μόνιμη αστρόβιλη ροή συναρτήσεως του μιγαδικού δυναμικού. Η βασική διευκόλυνση που προκύπτει από αυτό είναι το ότι μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των υπολοίπων από την θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Θεωρούμε αντικείμενο  $B$  σε μόνιμη διδιάστατη αστρόβιλη ροή με μιγαδικό δυναμικό  $w(z)$ . Εστω  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  η δύναμη ανά μονάδα πλάτους που ασκείται στο σώμα, και  $M_0$  η ροπή ανά μονάδα πλάτους ως προς την αρχή των αξόνων που ασκείται στο σώμα (9).



$$\mathbf{F} = - \int_B p \mathbf{n} \, ds$$



$$M_0 = - \int_B p(xn_y - yn_x) \, ds$$

Σχήμα 9: Δύναμη  $\mathbf{F}$  και ροπή  $M_0$  ως προς την αρχή των αξόνων σε αντικείμενο με περίγραμμα  $B$  σε μόνιμη αστρόβιλη ροή.

Η δύναμη και η ροπή στο αντικείμενο δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις (θεωρήματα Blasius)

### 1ο Θεώρημα Blasius

Οι συνιστώσες της δύναμης ανά μονάδα πλάτους  $F_x, F_y$  δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \quad (80)$$

### 2ο Θεώρημα Blasius

Η ροπή ανά μονάδα πλάτους ως προς την αρχή των αξόνων  $M_0$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$M_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_C z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \right] \quad (81)$$

Όπου  $\operatorname{Re}[A]$  συμβολίζει το πραγματικό μέρος του  $A$ .

Και τα δύο θεωρήματα είναι εναλλακτικές εκφράσεις των βασικών εξισώσεων για την δύναμη και τη ροπή που είδαμε στο κεφάλαιο 1 για μόνιμη διδιάστατη αστρόβιλη ροή, κάνοντας χρήση του μιγαδικού δυναμικού της ροής.

Ξεκινάμε με την απόδειξη του πρώτου θεωρήματος. Θεωρούμε την δύναμη ανά μονάδα πλάτους που ασκείται σε απειροστό τμήμα της περιμέτρου  $B$  μήκους  $ds$ . Οι δύο συνιστώσες  $dF_x, dF_y$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$dF_x = -pn_x ds \quad (82)$$

$$dF_y = -pn_y ds \quad (83)$$

Όπου  $(n_x, n_y)$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς το τμήμα  $ds$ , που κατευθύνεται έξω από το σώμα, και  $C$  μιά οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περικλείει μόνο το σώμα  $B$ .

Το εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα στο τμήμα  $ds$  είναι  $(dx/ds, dy/ds)$ , επομένως το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση  $n = dy/ds, -dx/ds$ . Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (82) (83) έχουμε ότι:

$$dF_x = -p dy \quad (84)$$

$$dF_y = p dx \quad (85)$$

Γράφοντας τις εξισώσεις (84) (85) σε μιγαδική μορφή προκύπτει ότι:

$$dF_x - i dF_y = -p dy - ip dx = -ip(dx - i dy) = -ip dz^* \quad (86)$$

Οπου  $dz = dx + i dy$ , και  $A^*$  συμβολίζει τον συζυγή του  $A$ .

Ολοκληρώνοντας την γύρω από το αντικείμενο  $B$  έχουμε:

$$F_x - iF_y = -i \int_C p dz^* \quad (87)$$

Από την αρχή του Bernoulli έχουμε ότι σε όλο το πεδίο ροής ισχύει:

$$p + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) = k \quad (88)$$

Οπου  $k$  σταθερά.

Επομένως:

$$p = k - \frac{1}{2}\rho \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \quad (89)$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση (89) στην (87) και βρίσκουμε ότι:

$$F_x - iF_y = \frac{i}{2}\rho \int_C \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dz^* \quad (90)$$

Για να καταλήξουμε στην (13) χρησιμοποιήσαμε ότι:

$$\int_C k dz^* = \left( \int_C k dz \right)^* = 0 \quad (91)$$

Τώρα σκεφτόμαστε ως εξής: Αφού η ροή είναι μόνιμη η ταχύτητα του ρευστού εφάπτεται στο αντικείμενο, δηλαδή το περίγραμμα  $B$  είναι γραμμή ροής. Πάνω στο  $B$  έχουμε επομένως ότι  $\psi = \text{σταθερό}$ , ή, ισοδύναμα ότι  $d\psi = 0$ . Αρα πάνω στο  $B$  έχουμε  $dw = d\phi + i d\psi = d\phi = dw^*$ . Αυτό μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε την εξίσωση (90) ως εξής:

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= \frac{i}{2}\rho \int_C \frac{dw}{dz} \left( \frac{dw}{dz} \right)^* dz^* = \frac{i}{2}\rho \int_C \frac{dw}{dz} dw^* = \\ &= \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{dw}{dz} dw = \frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (92)$$



Επειδή η συνάρτηση που ολοκληρώνεται στην (92) είναι αναλυτική, από το θεώρημα του Cauchy, το ολοκλήρωμα πάνω στην καμπύλη  $B$  μπορεί να αντικατασταθεί από το ολοκλήρωμα σε οποιαδήποτε καμπύλη  $C$  που περικλείει την καμπύλη  $B$ , και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του 1ου θεωρήματος του Blasius.

Γιά το δεύτερο θεώρημα θεωρούμε την ροπή της δύναμης  $dF_x, dF_y$  ως προς την αρχή των αξόνων (υπενθυμίζουμε ότι η αντι-ωρολογιακή φορά θεωρείται θετική):

$$dM_0 = -dF_x y + dF_y x \quad (93)$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (84), (85) στην (93) και ολοκληρώνουμε γύρω από το αντικείμενο  $B$ , οπότε βρίσκουμε ότι:

$$M_0 = \int_B z p(x dx + y dy) = \operatorname{Re} \left[ \int_B z p dz^* \right] \quad (94)$$

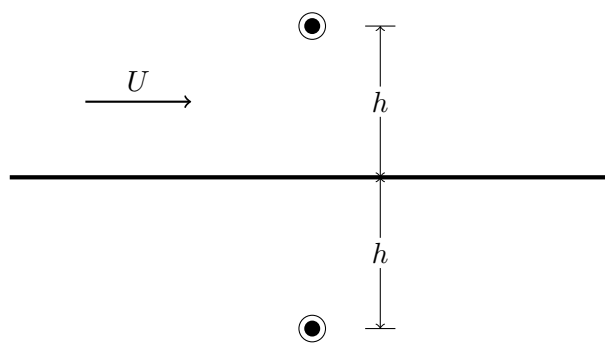
Αντικαθιστώντας την (89) στην (94) έχουμε:

$$M_0 = -\operatorname{Re} \left[ \int_B z \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dz^* \right] \quad (95)$$

Γιά την μετάβαση από την (94) στην (95) κάναμε το ακόλουθο βήμα:

$$\operatorname{Re} \left[ \int_B z k dz^* \right] = k \int_B (x dx + y dy) = k \int_B d\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) = 0 \quad (96)$$

Ακολουθώντας για την εξίσωση (95) την ίδια ακριβώς διαδικασία όπως κάναμε για την (90) αποδεικνύουμε το 2ο θεώρημα του Blasius.



Σχήμα 10: Ομοιόμορφη ροή και δίπολο σε απόσταση  $h$  από άπειρη πλάκα

Άσκηση: Να υπολογιστεί η δύναμη σε αντικείμενο που κινείται με ταχύτητα  $U$  παράλληλα με άπειρη επίπεδη πλάκα σε απόσταση  $h$ .

## ΛΥΣΗ

Επιλέγουμε σύστημα αναφοράς που κινείται με το αντικείμενο, οπότε η ροή είναι μόνιμη, και η δύναμη υπολογίζεται με τη χρήση του θεωρήματος του Blasius (80). Επιλέγουμε τον άξονα  $x$  να συμπίπτει με την πλάκα. Υποθέτουμε ότι η απόσταση  $h$  είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του αντικειμένου, και κατά συνέπεια, το δυναμικό του μπορεί να προσεγγιστεί με αυτό του διπόλου. Η οριακή συνθήκη στην πλάκα μπορεί να ικανοποιηθεί με την αρχή της συμμετρίας. Εστω  $\mu$  η σταθερά του διπόλου για μοναδιαία ταχύτητα. Το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$w = Uz + \frac{U\mu}{z - ih} + \frac{U\mu}{z + ih}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (80) και βρίσκουμε ότι:

$$F_x = 0, \quad F_y = -\frac{\pi \rho \mu^2 U^2}{2 h^3}$$

Βλέπουμε επομένως ότι το αντικείμενο δέχεται μια ελκτική δύναμη από την πλάκα.

## 2.5 Δύναμη και ροπή σε αντικείμενο σε άπειρο ρευστό

Με τα δύο θεωρήματα του Blasius μπορούμε να βγάλουμε γενικές εκφράσεις για τη δύναμη και τη ροπή σε αντικείμενο σε άπειρο ρευστό σε μόνιμη αστρόβιλη ροή.

Θεωρούμε μόνιμη αστρόβιλη ροή γύρω από αντικείμενο με περίγραμμα  $B$ . Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα στο άπειρο είναι σταθερή με συνιστώσες κατά  $x, y$  αντίστοιχα  $U, V$ . Η μιγαδική ταχύτητα  $dw/dz$  είναι αναλυτική συνάρτηση του  $z$  σε όλο το πεδίο ροής. Κατά συνέπεια μπορεί να παρασταθεί σαν το άθροισμα μιάς σειράς Laurent:

$$\frac{dw}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z^n} \quad (97)$$

Όπου  $A_n, n = 0, 1, 2, \dots$  είναι σταθερές.

Η σταθερά  $A_0$  είναι ίση με την μιγαδική ταχύτητα στο άπειρο, επομένως έχουμε ότι:

$$A_0 = U \cos \alpha - iU \sin \alpha = U e^{-i\alpha} \quad (98)$$

Όπου  $U$  είναι το μέγεθος της ταχύτητας στο άπειρο, και  $\alpha$  η γωνία κλίσης της ταχύτητας στο άπειρο ως προς τον άξονα των  $x$ .

Η σταθερά  $A_1$  που πολλαπλασιάζει τον όρο  $1/z$  οφείλεται στην ύπαρξη κυκλοφορίας γύρω από το αντικείμενο, επομένως έχουμε:

$$A_1 = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (99)$$

Όπου  $\Gamma$  είναι η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη που περικλείει το αντικείμενο  $B$ .

Τέλος οι σταθερές  $A_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  εξαρτώνται από το σχήμα του αντικειμένου (αλλά και από την ταχύτητα στο άπειρο).

Τώρα αν αντικαταστήσουμε τη σειρά (97) στα δύο θεωρήματα του Blasius θα βρούμε γενικές εκφράσεις για την δύναμη και την ροπή πάνω σε αντικείμενο σε μόνιμη αστροβιλη ροή. Εδώ θα μας χρειαστεί ένα βασικό αποτέλεσμα από την ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων (που αποδεικνύεται πολύ εύκολα):

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = \begin{cases} 2i\pi & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases} \quad (100)$$

Όπου  $a$  είναι μία μιγαδική σταθερά, και  $C$  είναι οποιαδήποτε καμπύλη που περικλείει το  $a$ .

Ξεκινάμε με τον υπολογισμό της δύναμης ανά πλάτος στο αντικείμενο. Αντικαθιστούμε την σειρά (97) στην εξίσωση (80) και, με την βοήθεια της (100) και των (98) και (99), βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= \frac{i\rho}{2} \int_C \left( A_0^2 + \frac{2A_0A_1}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_2}{z^2} + \dots \right) dz = \\ &= -2\pi\rho A_0A_1 = i\rho U e^{-i\alpha} \Gamma \end{aligned} \quad (101)$$

Διαχωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (101) βρίσκουμε:

$$F_x = \rho U \Gamma \sin \alpha \quad (102)$$

$$F_y = -\rho U \Gamma \cos \alpha \quad (103)$$

Βλέπουμε ότι το μέγεθος της δύναμης είναι ίσο με  $\rho U \Gamma$ . Κατά συνέπεια το μέγεθος της δύναμης δεν εξαρτάται από το σχήμα του αντικειμένου (το οποίο επηρεάζει τους συντελεστές  $A_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ), αλλά μόνο από την ταχύτητα στο άπειρο και την κυκλοφορία γύρω από το σώμα. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι κάθετη προς της ταχύτητα στο άπειρο (επαληθεύεται πολύ εύκολα αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της ταχύτητας και της δύναμης, το οποίο μηδενίζεται). Η συνιστώσα της δύναμης που είναι

κάθετη προς την εξωτερική ροή λέγεται δυναμική άνωση (ή άντωση), ενώ η συνιστώσα της δύναμης που είναι παράλληλη προς την εξωτερική ροή λέγεται αντίσταση.

Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (102), (103), για αντικείμενο σε μόνιμη ροή ιδανικού ρευστού μπορεί να υπάρχει δυναμική άνωση αν  $\Gamma \neq 0$ , αλλά όχι αντίσταση. Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό σαν παράδοξο του d' Alembert. Το παράδοξο του d' Alembert είναι παράδοξο ως προς το ότι αντιβαίνει την εμπειρία, είναι όμως συνεπές με την υπόθεση μηδενικού ιξώδους στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε. Αν υπήρχε δηλαδή αντίσταση, τότε το εσωτερικό γινόμενο της ταχύτητας με την δύναμη θα ήταν μη μηδενικό, ένα αντικείμενο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα θα προσέδιδε ενέργεια στο ρευστό με σταθερό ρυθμό. Καθώς δεν υπάρχει ιξώδες για να αποσβέσει την αυτή ενέργεια, η κινητική ενέργεια του ρευστού θα έτεινε στο άπειρο.

Για τον υπολογισμό της ροπής αντικαθιστούμε την σειρά (97) στην εξίσωση (80) και, με την βοήθεια της (100) και των (98) και (99), καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_0 &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_C z \left( A_0^2 + \frac{2A_0A_1}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_2}{z^2} + \dots \right) dz \right] = \\ &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} [2i\pi(A_1^2 + 2A_0A_2)] = -\rho \operatorname{Re} [2\pi i A_2 U e^{-i\alpha}] \end{aligned} \quad (104)$$

Συμπεραίνουμε ότι η ροπή είναι ανάλογη με τον συντελεστή  $A_2$ , εξαρτάται δηλαδή από το σχήμα του αντικειμένου. Είναι δυνατόν η συνολική δύναμη στο αντικείμενο να είναι ίση με το μηδέν (αν  $\Gamma = 0$ ), αλλά η ροπή στο αντικείμενο να μην είναι μηδέν. Η ροπή (104) λέγεται ροπή Munk, και οφείλεται στη μη συμμετρική κατανομή της πίεσης γύρω από ένα αντικείμενο γενικού σχήματος.

## 2.6 Ροή γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής

Θεωρούμε αστρόβιλη ροή γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής με ακτίνα  $R$ . Όπως συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μιγαδική ταχύτητα δίνεται από την γενική έκφραση (97):

$$\frac{dw}{dz} = U - i \frac{\Gamma}{2\pi z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (105)$$

Όπου, χωρίς απώλεια γενικότητας λόγω της συμμετρίας του κύκλου, πήραμε την ταχύτητα στο άπειρο να είναι παράλληλη με τον άξονα των  $x$ .

Η οριακή συνθήκη πάνω στον κύλινδρο είναι:

$$un_x + vn_y = \operatorname{Re}[(u - iv)(n_x + in_y)] = 0 \quad (106)$$

Όπου  $n_x, n_y$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την επιφάνεια του κυλίνδρου. Για κύλινδρο του οποίου το κέντρο είναι στην αρχή των αξόνων  $n_x + in_y = \exp(i\theta)$ . Αντι-

καθιστούμε την (105) με  $z = R \exp(i\theta)$  στην (106) και γράφοντας τους συντελεστές  $A_n$   $n = 2, 3, \dots$  σε πολική μορφή  $A_n = |A_n| \exp(i\beta_n)$  καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$U \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| R^{-n} \cos((n-1)\theta - \beta_n) = 0 \quad (107)$$

Για να ισχύει η (107) για κάθε τιμή του  $\theta$  θα πρέπει οι συντελεστές των όρων  $\cos n\theta$  να είναι όλοι μηδέν. Αυτό δίνει:

$$\beta_2 = \pi \quad (108)$$

$$|A_n| = \begin{cases} UR^n & n = 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases} \quad (109)$$

Συνεπώς το δυναμικό για ροή γύρω από κύλινδρο περιλαμβάνει μόνο την ομοιόμορφη ροή, ένα δίπολο με ένταση  $UR^2$ , και μία κυκλοφορία  $\Gamma$ . Η μιγαδική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dw}{dz} = U \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i \frac{\Gamma}{2\pi z} \quad (110)$$

Με ολοκλήρωση ως προς  $z$  το μιγαδικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$w = U \left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (111)$$

Θέτουμε  $z = r \exp(i\theta)$  στην (111) και χωρίζουμε πραγματικό και φανταστικό μέρος. Αυτό μας δίνει το δυναμικό  $\phi$  και τη ροική συνάρτηση  $\psi$ :

$$\phi = U \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (112)$$

$$\psi = U \left(r - \frac{R^2}{r}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (113)$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τα σημεία ανακοπής της ροής. Προς τούτο θέτουμε τη μιγαδική ταχύτητα ίση με το μηδέν, πράγμα που μας δίνει την ακόλουθη εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$z^2 - 2i\kappa z - R^2 = 0 \quad (114)$$

Οπου  $\kappa = \Gamma/(4\pi U)$ . Οι λύσεις της (114) είναι:

$$z_{1,2} = i\kappa \pm \sqrt{-\kappa^2 + R^2} \quad (115)$$

Διακρίνουμε επομένως τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i)  $\Gamma < 4\pi UR$  (ισοδυναμεί με  $\kappa < R$ ). Το υπόριζο στην εξίσωση (115) είναι θετικό, επομένως η (114) έχει δύο μιγαδικές λύσεις με ίσα φανταστικά μέρη και αντίθετα πραγματικά. Και οι δύο λύσεις έχουν απόλυτη τιμή ίση με  $R$ , επομένως υπάρχουν δύο σημεία ανακοπής πάνω στον κύλινδρο σε συμμετρικές θέσεις ως προς τον άξονα των  $y$ .

(ii)  $\Gamma > 4\pi UR$  (ισοδυναμεί με  $\kappa > R$ ). Το υπόριζο στην εξίσωση (115) είναι αρνητικό, επομένως η (114) έχει δύο φανταστικές λύσεις. Η λύση που αντιστοιχεί στο θετικό πρόσημο έχει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από  $R$ , ενώ η λύση που αντιστοιχεί στο αρνητικό πρόσημο έχει απόλυτη τιμή μικρότερη από  $R$  (βρίσκεται επομένως στο εσωτερικό του κυλίνδρου). Επομένως υπάρχει ένα σημείο ανακοπής που βρίσκεται στο άξονα των  $y$  έξω από τον κύλινδρο.

(iii) Τέλος για  $\Gamma = 4\pi UR$  (ισοδυναμεί με  $\kappa = R$ ) το υπόριζο στην εξίσωση (115) είναι ίσο με το μηδέν, που σημαίνει ότι υπάρχει ένα σημείο ανακοπής πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου, στην θέση  $z = iR$ .

Από τις γενικές εκφράσεις για τη δύναμη και τη ροπή σε αντικείμενο προκύπτει ότι για κύλινδρο με κυκλική διατομή έχουμε:

$$F_x = 0 \quad (116)$$

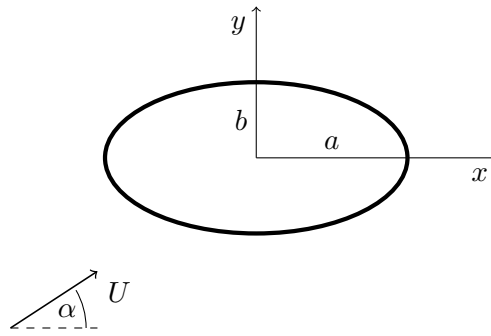
$$F_y = -\rho U \Gamma \quad (117)$$

$$M_0 = 0 \quad (118)$$

Η τελευταία σχέση είναι αναμενόμενη ακόμα και χωρίς κανένα υπολογισμό, επειδή οι δυνάμεις λόγω πίεσης είναι κάθετες προς την επιφάνεια του κυλίνδρου και κατά συνέπεια περνούν από το κέντρο του κυλίνδρου και δίνουν μηδενική ροπή ως προς το κέντρο του κυλίνδρου.

## 2.7 Ροή γύρω από κύλινδρο ελλειπτικής διατομής

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την λύση για αστρόβιλη ροή γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής για να υπολογίσουμε αστρόβιλη ροή με κυκλοφορία γύρω από κύλινδρο ελλειπτικής διατομής με την βοήθεια της κατάλληλης σύμμορφης απεικόνισης.



Σχήμα 11: Ροή γύρω από έλλειψη με ημιάξονες  $a$  και  $b$

Θεωρούμε λοιπόν διδιάστατη αστρόβιλη ροή με ταχύτητα  $U$  στο άπειρο γύρω από μια έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα  $a$  και μικρό ημιάξονα  $b$ . Θεωρούμε ότι ο άξονας των  $x$  συμπίπτει με τον μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης, και ο άξονας των  $y$  με τον μικρό ημιάξονα. Αντίθετα με την ροή γύρω από κύκλο, η κλίση της ταχύτητας της ροής ως προς τον άξονα των  $x$  έχει σημασία, και συμβολίζουμε με  $\alpha$  την γωνία της ταχύτητας στο άπειρο με τον άξονα των  $x$  (Εικόνα 3).

Θα επιλύσουμε την ροή χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό του Joukowski που απεικονίζει το επίπεδο  $\zeta = \xi + i\eta$  στο επίπεδο  $z = x + iy$  μέσα από την ακόλουθη σχέση:

$$z = \zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta} \quad (119)$$

Όπου  $\lambda$  είναι μία σταθερά. Η απεικόνιση δεν είναι ένα προς ένα, επειδή, όπως προκύπτει από τον ορισμό, τα σημεία  $\zeta$  και  $\lambda^2/\zeta$  απεικονίζονται στο ίδιο  $z$ . Συνέπεια αυτού είναι ότι το εσωτερικό του κύκλου  $|\zeta| = \lambda$  απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού Joukowski σε ολόκληρο το επίπεδο  $z$ , αλλά και το εξωτερικό του κύκλου  $|\zeta| = \lambda$  επίσης απεικονίζεται σε όλο το επίπεδο  $z$ .

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Joukowski προκύπτει επιλύοντας την (119) ως προς  $\zeta$ , και δίνεται από την σχέση:

$$\zeta = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4\lambda^2}) \quad (120)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός (120) έχει δύο κλαδικά σημεία στα σημεία  $z = \pm 2\lambda$ . Για να είναι και ο αντίστροφος μετασχηματισμός μία αναλυτική συνάρτηση, επιλέγουμε τον ένα κλάδο της συνάρτησης (αυτόν που αντιστοιχεί στο θετικό πρόσημο μπροστά από το ριζικό) και ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα ως εξής:

$$z - 2\lambda = r_1 e^{i\theta_1} \quad 0 < \theta_1 < 2\pi \quad (121)$$

$$z + 2\lambda = r_1 e^{i\theta_2} \quad 0 < \theta_2 < 2\pi \quad (122)$$

Οπότε η αντίστροφη απεικόνιση γράφεται ως εξής:

$$\zeta = \frac{1}{2}(z + \sqrt{r_1 r_2} \exp(i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})) \quad (123)$$

Με τους ορισμούς (121) (122) υπάρχει μία κλαδική γραμμή στο μέρος του πραγματικού άξονα  $-2\lambda < \xi < \lambda$ , που όμως είναι εντός της έλλειψης (δηλαδή εκτός του πεδίου ροής), επομένως η αντίστροφη απεικόνιση (123) είναι επίσης αναλυτική συνάρτηση εντός του πεδίου ροής.

Θεωρούμε κύκλο στο επίπεδο  $\zeta$  με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $R$ :

$$\zeta = R e^{i\theta} \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (124)$$

Αντικαθιστώντας την (124) στην εξίσωση (119) και χωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος βλέπουμε ότι η εικόνα του κύκλου στο επίπεδο  $z$  δίνεται από τις ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = (R + \frac{\lambda^2}{R}) \cos \theta \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (125)$$

$$y = (R - \frac{\lambda^2}{R}) \sin \theta \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (126)$$

Οι εξισώσεις (125) (126) παριστάνουν σε παραμετρική μορφή έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα  $R + \lambda^2/R$  και μικρό ημιάξονα  $R - \lambda^2/R$ . Για την δεδομένη έλλειψη με ημιάξονες  $a, b$  οι κατάλληλες τιμές των  $R, \lambda$  είναι:

$$R = \frac{1}{2}(a + b) \quad (127)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2} \quad (128)$$

Επιλέγοντας την τιμή του  $\lambda$  από την εξίσωση (128) η έλλειψη με ημιάξονες  $a, b$  είναι εικόνα κύκλου με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα που ορίζεται από την (127). Παρατηρούμε ότι αν το αντικείμενο είναι κύκλος ( $a = b$ ) η τιμή του  $\lambda$  μηδενίζεται, και ο μετασχηματισμός Joukowski είναι απλά ο ταυτοτικός μετασχηματισμός  $z = \zeta$ .

Η ροή στο επίπεδο  $\zeta = \xi + i\eta$  έρχεται υπό γωνία  $\alpha$  ως προς τον άξονα των  $\xi$ . Επομένως η εξίσωση (111) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως έχει. Γι' αυτό εκτελούμε πρώτα μία περιστροφή των αξόνων κατά γωνία  $\alpha$ , οπότε στο νέο σύστημα αξόνων  $\xi_1, \eta_1$  η ροή είναι παράλληλη προς τον άξονα των  $\xi_1$ . Κατά συνέπεια το μιγαδικό δυναμικό δίνεται από την σχέση:



$$W = U\left(\zeta_1 + \frac{R^2}{\zeta_1}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \zeta_1 \quad (129)$$

Η περιστροφή των αξόνων που κάναμε περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\xi_1 = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (130)$$

$$\eta_1 = \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha \quad (131)$$

Σε μιγαδική μορφή οι εξισώσεις (130), (131) γράφονται ως εξής:

$$\zeta_1 = \zeta e^{-i\alpha} \quad (132)$$

Και αντίστροφα:

$$\zeta = \zeta_1 e^{i\alpha} \quad (133)$$

Αντικαθιστούμε την (133) στην (129) και έχουμε το μιγαδικό δυναμικό στο επίπεδο  $\zeta$ :

$$W = U\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{\zeta} e^{i\alpha}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \zeta \quad (134)$$

Αντίστοιχα, η μιγαδική ταχύτητα δίνεται από την σχέση:

$$\frac{dW}{d\zeta} = U\left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{\zeta^2} e^{i\alpha}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi\zeta} \quad (135)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του Joukowski δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστος, οπότε για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας σε τυχόν σημείο  $z$  ενεργούμε ως εξής: Βρίσκουμε πρώτα την εικόνα του  $z$  στο επίπεδο  $\zeta$  χρησιμοποιώντας την εξίσωση (123). Μετά υπολογίζουμε την μιγαδική ταχύτητα χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγωγής σύνθετης συνάρτησης:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{1}{dz/d\zeta} = \left( U\left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{\zeta^2} e^{i\alpha}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi\zeta} \right) \frac{1}{1 - \lambda^2/\zeta^2} \quad (136)$$

Γιά τις συνιστώσες της δύναμης ανά μονάδα πλάτους πάνω στην έλλειψη από τις γενικές εκφράσεις (102) και (102) έχουμε ότι:

$$F_x = \rho U \Gamma \sin \alpha \quad (137)$$

$$F_y = -\rho U \Gamma \cos \alpha \quad (138)$$

Γιά την ροπή ανά μονάδα πλάτους πάνω στην έλλειψη έχουμε την γενική έκφραση (104), αλλά ο συντελεστής  $A_2$  είναι άγνωστος. Η τιμή του  $A_2$  μπορεί να υπολογιστεί παρατηρώντας ότι, από την γενική έκφραση (97), αν πολλαπλασιάσουμε επί  $z$  και ολοκληρώσουμε πάνω σε μιά καμπύλη  $C$  που περικλείει την έλλειψη, από την έκφραση (100) προκύπτει ότι:

$$A_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_C z \frac{dw}{dz} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\zeta} z(\zeta) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta \quad (139)$$

Οπου  $C_\zeta$  η εικόνα της καμπύλης  $C$  στο επίπεδο  $\zeta$ . Κατά συνέπεια η (139) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\zeta} \left(\zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta}\right) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\zeta} \left(\zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta}\right) \left(U(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{\zeta^2} e^{i\alpha}) - i \frac{\Gamma}{2\pi\zeta}\right) d\zeta \end{aligned} \quad (140)$$

Εκτελώντας τα γινόμενα παραγόντων στην (140) και χρησιμοποιώντας πάλι την έκφραση (100) καταλήγουμε στο ότι:

$$A_2 = U(\lambda^2 e^{-i\alpha} - R^2 e^{i\alpha}) \quad (141)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (127) και (128) για  $R$  και  $\lambda$  έχουμε την ακόλουθη έκφραση για τον συντελεστή  $A_2$ :

$$A_2 = \frac{1}{4} U((a^2 - b^2)e^{-i\alpha} - (a + b)^2 e^{i\alpha}) \quad (142)$$

Αντικαθιστούμε τώρα την (142) στην γενική έκφραση (104) και βρίσκουμε την ροπή πάνω στην έλλειψη:

$$\begin{aligned} M_0 &= -2\pi\rho \operatorname{Re}\left[iUe^{-i\alpha} \frac{1}{4} U((a^2 - b^2)e^{-i\alpha} - (a + b)^2 e^{i\alpha})\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\pi\rho U^2(a^2 - b^2) \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (143)$$

Συμπεραίνουμε ότι για  $a \neq b$  η ροπή Munk είναι μη μηδενική, εκτός αν η ροή έρχεται παραλληλα προς τον μεγάλο ή τον μικρό άξονα της έλλειψης (που είναι και άξονες συμμετρίας της έλλειψης).

## 2.8 Ροή γύρω από κεκλιμένη επίπεδη πλάκα-Συνθήκη του Kutta

Αστρόβιλη ροή γύρω από ελλειπτικό κύλινδρο έχει ενδιαφέρον για πρακτικές εφαρμογές κυρίως για μία υποπερίπτωση: Αυτή της επίπεδης πλάκας. Επίπεδη πλάκα υπό κλίση είναι ένα ικανοποιητικό μοντέλο για λεπτές συμμετρικές διατομές. Χρησιμοποιώντας ορολογία υδροτομών θα αποκαλούμε το μπροστινό άκρο της πλάκας *άκρο πρόσπτωσης*, και το πίσω άκρο *άκρο εκφυγής*. Αν συμβολίσουμε με  $c$  το μήκος της πλάκας, που αποκαλείται *χορδή* στις υδροτομές, έχουμε ότι:

$$a = \frac{c}{2} \quad b = 0 \quad (144)$$

Από τις εξισώσεις (127) και (128) οι παράμετροι  $R$  και  $\lambda$  δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$R = \lambda = \frac{c}{4} \quad (145)$$

Οι δύο συνιστώσες της δύναμης και η ροπή δίνονται από τις σχέσεις (137) και (138) ενώ οι σχέσεις (145) προσδιορίζουν τα  $R$  και  $\lambda$ . Το πρόβλημα βέβαια παραμένει ότι η κυκλοφορία  $\Gamma$  είναι άγνωστη.

Η τιμή της κυκλοφορίας μπορεί να προσδιοριστεί από την φυσικά εύλογη συνθήκη ότι η ταχύτητα στο άκρο εκφυγής να είναι πεπερασμένη. Η συνθήκη αυτή λέγεται *συνθήκη του Kutta*. Η τιμή της δυναμικής άνωσης που προκύπτει από τη συνθήκη του Kutta συμφωνεί ικανοποιητικά με πειραματικές μετρήσεις.

Γιά να φτάσουμε στη συνθήκη του Kutta εκφράζουμε πρώτα την ταχύτητα πάνω στην πλάκα  $\zeta = R \exp(i\theta)$  στην εξίσωση (136):

$$\begin{aligned} u - iv &= (U(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\theta)}) - i \frac{\Gamma e^{-i\theta}}{2\pi R}) \frac{1}{1 - e^{-2i\theta}} = \\ &= (U(e^{i(\theta-\alpha)} - e^{-i(\theta-\alpha)}) - i \frac{\Gamma}{2\pi R}) \frac{1}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \\ &= (U \sin(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{4\pi R}) \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (146)$$

Από την εξίσωση (146) προκύπτει ότι η συνιστώσα  $v$  είναι, όπως αναμενόταν, μηδενική, και η συνιστώσα  $u$  δίνεται από την τελευταία γραμμή της (146).

Το άκρο εκφυγής αντιστοιχεί στο  $\theta = 0$ , οπότε η συνιστώσα  $u$  απειρίζεται επειδή μηδενίζεται ο παρονομαστής στο δεξιό μέλος της (146), εκτός από την τιμή της κυκλοφορίας για την οποία μηδενίζεται και ο αριθμητής. Η τιμή αυτή είναι:

$$\Gamma = -4\pi UR \sin \alpha = -\pi U c \sin \alpha \quad (147)$$

Η εξίσωση (147) δίνει τη μοναδική τιμή της κυκλοφορίας  $\Gamma$  για την οποία ισχύει η συνθήκη του Kutta.

Αντικαθιστώντας την τιμή της κυκλοφορίας (147) στην εξίσωση (146) βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για την ταχύτητα  $u$ :

$$u = U \frac{\sin(\theta - \alpha) + \sin \alpha}{\sin \theta} \quad (148)$$

Με τον κανόνα του de l' Hospital στην εξίσωση (148) για  $\theta \rightarrow 0$  βρίσκουμε ότι η τιμή του  $u$  στο άκρο εκφυγής δίνεται από τη σχέση:

$$u|_{\theta=0} = U \cos \alpha \quad (149)$$

Η ροή εγκαταλείπει δηλαδή το άκρο εκφυγής παράλληλα με την πλάκα με μία ταχύτητα ίση με την  $x$  συνιστώσα της ταχύτητας στο άπειρο.

Χρησιμοποιώντας απλές τριγωνομετρικές σχέσεις η εξίσωση (148) γράφεται ως εξής:

$$u = U \frac{\cos(\theta/2 - \alpha)}{\cos(\theta/2)} = U \cos \alpha + U \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2} \quad (150)$$

Σημειώνουμε ότι, όπως φαίνεται εύκολα από την εξίσωση (150), η ταχύτητα  $u$  απειρίζεται στο άκρο πρόσπτωσης ( $\theta = \pi$ ). Αυτό δεν μπορεί να διορθωθεί στο υπάρχον μοντέλο, πράγμα που σημαίνει ότι και η πίεση τείνει στο πλην άπειρο εκεί. Στην πραγματικότητα όλες οι υδροτομές έχουν στρογγυλεμένο άκρο πρόσπτωσης, και επομένως ταχύτητα και πίεση, ακόμα και αν δεν λάβουμε υπ' όψη το ιξώδες του ρευστού, θα είναι πεπερασμένες. Πάντως η πρόβλεψη του μοντέλου αντιστοιχεί στο γεγονός ότι στο άκρο πρόσπτωσης λεπτής υδροτομής η ταχύτητα του ρευστού είναι αυξημένη η πίεση αντίστοιχα μειωμένη. Η εξίσωση (150) θα μας χρειαστεί στο κεφάλαιο της θεωρίας λεπτών υδροτομών.

Αντικαθιστώντας την τιμή της κυκλοφορίας από την (147) στις εκφράσεις (137) και (138) βρίσκουμε ότι:

$$F_x = -\pi \rho c U^2 \sin^2 \alpha \quad (151)$$

$$F_y = \pi \rho c U^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (152)$$

Η συνολική άνωση  $L$  (κάθετη προς τη ροή) δίνεται από τη σχέση:

$$L = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \pi \rho c U^2 \sin \alpha \quad (153)$$

Ο συντελεστής άνωσης  $C_L$  είναι:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 c} = 2\pi \sin \alpha \quad (154)$$

Αντίστοιχα η ροπή ως προς την αρχή των αξόνων προκύπτει από την εξίσωση (143):

$$M_0 = -\frac{1}{8} \pi \rho U^2 c^2 \sin(2\alpha) \quad (155)$$

Ο συντελεστής ροπής  $C_M$  ορίζεται από τη σχέση:

$$C_M = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho c^2 U^2} \sin(2\alpha) = -\frac{1}{4} \pi \sin(2\alpha) \quad (156)$$

Γιά μικρές γωνίες  $\alpha$  έχουμε ότι  $\sin \alpha \sim \alpha$  (με το  $\alpha$  να εκφράζεται σε ακτίνια), οπότε ο συντελεστής άνωσης  $C_L$  και ο συντελεστής ροπής  $C_M$  απλοποιούνται ως εξής:

$$C_L = 2\pi \alpha \quad (157)$$

$$C_M = -\frac{\pi}{2} \alpha \quad (158)$$

Συχνά παραλείπουμε για ευκολία το πρόσημο του συντελεστή ροπής, αλλά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η ροπή είναι αρνητική. Μιά άμεση συνέπεια των εξισώσεων (157) και (158) είναι ότι, για μικρές γωνίες πρόσπτωσης, η δυναμική άνωση ασκείται στο σημείο  $x = -c/4$ , δηλαδή στο μέσο της απόστασης ανάμεσα στο άκρο πρόσπτωσης και στο μέσο της πλάκας.

Γιά μικρές γωνίες πρόσπτωσης οι εξισώσεις (157) και (158) συμφωνούν πολύ ικανοποιητικά με τα πειράματα. Για μεγαλύτερες γωνίες πρόσπτωσης η θεωρία που αναπτύξαμε δεν επαρκεί επειδή φαινόμενα όπως μη μονιμότητα και αποκόλληση της ροής αρχίζουν να γίνονται σημαντικά. Όταν όμως εμφανιστούν τέτοια φαινόμενα, η λειτουργία της πλάκας σαν υδροτομή δεν είναι καλή, επειδή μειώνεται σημαντικά η άνωση. Συνοψίζοντας επομένως μπορούμε να πούμε ότι οι εξισώσεις (157) και (158) συμφωνούν πολύ ικανοποιητικά με τα πειράματα στην περιοχή καλής λειτουργίας της υδροτομής.

Κλείνοντας το κεφάλαιο για την κεκλιμένη πλάκα αξίζει να σημειώσουμε ότι το ανώμαλο σημείο που υπάρχει στο άκρο πρόσπτωσης (που απειρίζεται η ταχύτητα δηλαδή)

ευθύνεται για το ακόλουθο “παράδοξο”: Η δύναμη που ασκείται πάνω στην πλάκα είναι κάθετη προς την ροή, ενώ θα περίμενε κανείς να είναι κάθετη προς την πλάκα, αφού η δύναμη προέρχεται από το διανυσματικό άθροισμα δυνάμεων πίεσης που είναι κάθετες προς την πλάκα. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό θεωρώντας την πλάκα σαν το όριο μιάς έλλειψης όταν ο μικρός ημιάξονας της τείνει στο μηδέν (όπως άλλωστε κάναμε σε αυτό το κεφάλαιο): Η πίεση στο άκρο πρόσπτωσης της έλλειψης τείνει στο πλην άπειρο, και έτσι δημιουργείται μιά πεπερασμένη δύναμη παράλληλη προς την πλάκα με σταθερό μέγεθος. Το άθροισμα αυτής της δύναμης και της δύναμης που είναι κάθετη προς την πλάκα δημιουργεί μιά δύναμη κάθετη προς την ροή στο άπειρο.

Υπενθυμίζουμε ότι όταν υπολογίσαμε την ταχύτητα πάνω στην πλάκα για να εφαρμόσουμε την συνθήκη του Kutta, βάλουμε πρώτα  $b = 0$  στην μιγαδική ταχύτητα, και ύστερα υπολογίσαμε την ταχύτητα στα δύο άκρα της πλάκας. Στον υπολογισμό της δύναμης όμως κάνουμε το αντίστροφο, δηλαδή υπολογίζουμε πρώτα την δύναμη σε έλλειψη και ύστερα θέτουμε  $b = 0$ . Παρατηρούμε επομένως ότι η μετάβαση από έλλειψη σε επίπεδη πλάκα παίρνοντας το όριο όταν ο μικρός ημιάξονας  $b$  τείνει στο μηδέν, παρότι εκ πρώτης όψεως απλή διαδικασία, έχει μερικά λεπτά σημεία από μαθηματικής πλευράς που χρειάζονται προσοχή. Αυτό συμβαίνει επειδή, όπως επαληθεύεται εύκολα, η παράγωγος της λύσης ως προς  $b$  τείνει στο άπειρο όταν  $b \rightarrow 0$ .

Πιο φορμαλιστικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη λύση που βρήκαμε για να εκφράσουμε τη διαφορά πίεσης στην πλάκα: Από την εξίσωση Bernoulli προκύπτει ότι η διαφορά της πίεσης στην κάτω πλευρά της πλάκας,  $p_-$ , μείον την πίεση στην άνω πλευρά,  $p_+$ , δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta p = p_- - p_+ = \frac{1}{2}\rho(u_+^2 - u_-^2) \quad (159)$$

Οπου  $u_+$  και  $u_-$  είναι, αντίστοιχα, η ταχύτητα στην άνω και στην κάτω πλευρά της πλάκας.

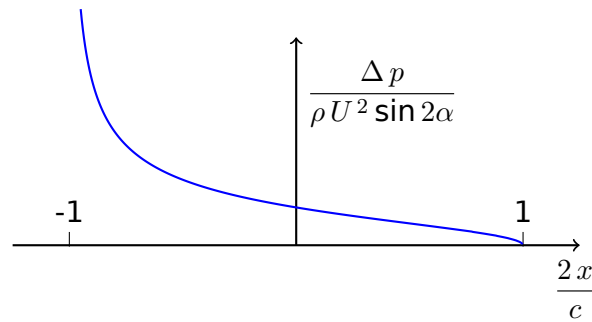
Από την εξίσωση (150) και παρατηρώντας ότι, αν σε ένα σημείο στην άνω πλευρά της πλάκας αντιστοιχεί η γωνία  $\theta$ , στο ακριβώς από κάτω του σημείο αντιστοιχεί η γωνία  $2\pi - \theta$ , προκύπτει ότι η διαφορά ταχύτητας ανάμεσα στην άνω και στην κάτω πλευρά δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u_+ - u_- = 2U \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2} \quad 0 < \theta < \pi \quad (160)$$

Προκύπτει επίσης ότι  $u_+ + u_- = 2U \cos \alpha$ , οπότε έχουμε την ακόλουθη έκφραση για την διαφορά πίεσης:

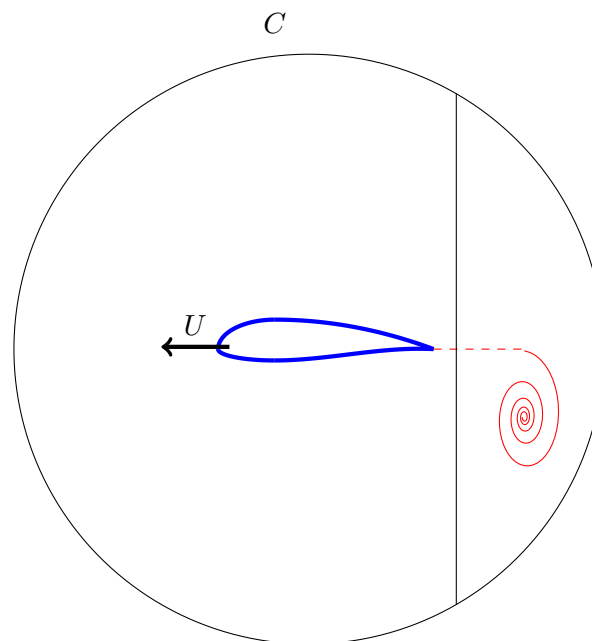
$$\Delta p = \rho U^2 \sin 2\alpha \tan \frac{\theta}{2} \quad 0 < \theta < \pi \quad (161)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η διαφορά πίεσης απειρίζεται στο άκρο πρόσπτωσης ( $\theta = \pi$ ) ανάλογα με την συνάρτηση  $\tan(\theta/2)$ . Παρατηρούμε επίσης ότι όταν η εξωτερική ροή είναι παράλληλη προς έναν από τους άξονες  $x, y$  η διαφορά πίεσης είναι μηδενική, όπως αναμένεται λόγω συμμετρίας. Η μεταβολή της διαφοράς πίεσης κατά το μήκος της πλάκας διαιρεμένης με την ποσότητα  $\rho U^2 \sin 2\alpha$  απεικονίζεται στο γράφημα (12).



Σχήμα 12: Μεταβολή της διαφοράς πίεσης κατά το μήκος της πλάκας. Στο άκρο πρόσπτωσης η πίεση απειρίζεται.

Στο μοντέλο ιδανικού ρευστού που μεταχειριζόμαστε η κυκλοφορία γύρω από το αντικείμενο είναι απλά μιά παράμετρος, της οποίας η τιμή προσδιορίζεται για λεπτές υδροτομές από την συνθήκη του Kutta. Μαθηματικά δηλαδή η συνθήκη του Kutta επιλέγει την κατάλληλη λύση από την απειρία των δυνατών λύσεων με κυκλοφορία που επιτρέπουν οι εξισώσεις κίνησης ιδανικού ρευστού.



Σχήμα 13: Δημιουργία κυκλοφορίας γύρω από υδροτομή: Όταν η υδροτομή τεθεί σε κίνηση με ταχύτητα  $U$  η τριβή του ρευστού με την επιφάνεια της υδροτομής δημιουργεί την δίνη εκκίνησης (με συνεχή κόκκινη γραμμή). Η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε γραμμή που περικλείει την δίνη είναι ίση με την ένταση της δίνης  $\Gamma$ . Κατά συνέπεια, για να παραμείνει η κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη  $C$  μηδενική δημιουργείται γύρω από την υδροτομή κυκλοφορία ίση με  $-\Gamma$ .

Στην πραγματικότητα η δημιουργία της κυκλοφορίας οφείλεται στο ιξώδες του ρευστού. Ας θεωρήσουμε μιά υδροτομή η οποία είναι αρχικά ακίνητη. Η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη  $C$  που περικλείει την υδροτομή σε μεγάλη απόσταση είναι φυ-

σικά μηδενική. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η υδροτομή τίθεται σε κίνηση σε κάποια χρονική στιγμή. Οριακά στρώματα αναπτύσσονται λόγω του ιξώδους στην άνω και στην κάτω πλευρά της υδροτομής. Όταν τα σωματίδια που βρίσκονται μέσα στα οριακά στρώματα φτάσουν στο άκρο εκφυγής εγκαταλείπουν την υδροτομή και δημιουργούν μιά δίνη πίσω από την υδροτομή (δες σχήμα στην εικόνα 13). Η δίνη λέγεται δίνη εκκίνησης. Η κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη  $C$  παραμένει μηδανική, αφού το ρευστό μακριά από την υδροτομή παραμένει ακίνητο. Επειδή όμως η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη που περικλείει την δίνη εκκίνησης είναι ίση με την ένταση της δίνης, γύρω από την υδροτομή αναπτύσσεται μιά κυκλοφορία ίση και αντίθετη με την ένταση της δίνης  $\Gamma$ . Η κυκλοφορία αυτή είναι που στη θεωρία ιδανικού ρευστού προσδιορίζουμε με την συνθήκη του Kutta.

## 2.9 Υδροτομές Joukowski

Ενας κύκλος στο  $\zeta$  επίπεδο του οποίου το κέντρο δεν συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και που περνά από το σημείο  $(\lambda, 0)$  απεικονίζεται με το μετασχηματισμό Joukowski στο  $z$  επίπεδο σε μιά υδροτομή, που λέγεται υδροτομή Joukowski. Η θέση του κέντρου του κύκλου είναι παράμετρος που επηρεάζει το σχήμα της υδροτομής, και η ακτίνα επιλέγεται έτσι ώστε ο κύκλος να περνά από το σημείο  $(\lambda, 0)$ . Μιά τυπική υδροτομή Joukowski φαίνεται στο σχήμα 14. Η υδροτομή Joukowski χαρακτηρίζεται από ένα οξύ άκρο εκφυγής, δηλαδή στο άκρο εκφυγής η άνω και η κάτω πλευρά της υδροτομής έχουν κοινή εφαπτομένη (cusp). Σημειώνουμε επίσης ότι αν το κέντρο του κύκλου στο επίπεδο  $\zeta$  βρίσκεται πάνω στον μιγαδικό άξονα η υδροτομή στο επίπεδο  $z$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των  $x$ .

Ο κύκλος στο επίπεδο  $\zeta$  του οποίου εικόνα είναι η υδροτομή Joukowski δίνεται από την εξίσωση:

$$\zeta = \zeta_0 + R e^{i\theta} \quad -\pi < \theta < \pi \quad (162)$$

Όπου  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$  είναι η θέση του κέντρου του κύκλου, και  $R^2 = (\lambda - \xi_0)^2 + \eta_0^2$ , ώστε ο κύκλος να περνά από το σημείο  $\zeta = \lambda$ .

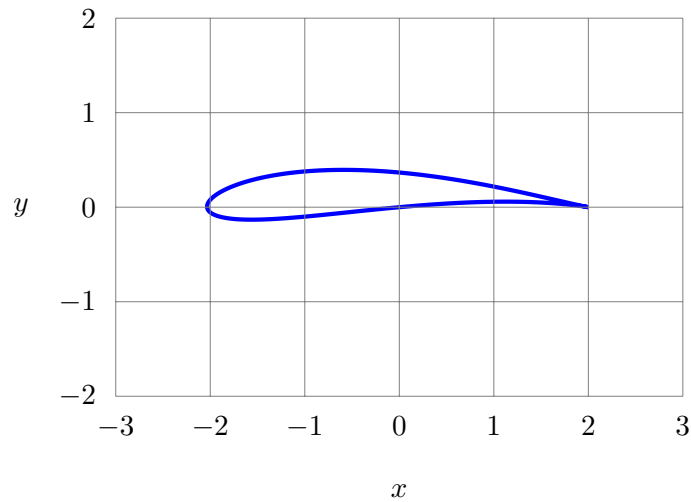
Το άκρο εκφυγής της υδροτομής  $z = 2\lambda$  είναι εικόνα του σημείου  $\zeta_b = \lambda = R \exp i\theta_b$ , όπου  $\sin \theta_b = -\eta_0/R$ . Το άκρο πρόσπτωσης είναι εικόνα του σημείου  $\zeta_a = R \exp(i(\pi - \theta_b)) = 2\xi_0 - \lambda$ , και βρίσκεται στην θέση  $z_a = \zeta_a - \lambda^2/\zeta_a$ . Η χορδή της υδροτομής δίνεται από τη σχέση  $c = z_b - z_a$ .

Όπως και στην περίπτωση ροής γύρω από έλλειψη, η μιγαδική ταχύτητα της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u - iv = \frac{dw}{dz} = \left( U(e^{-i\alpha} - \frac{R^2 e^{i\alpha}}{(\zeta - \zeta_0)^2}) - i \frac{\Gamma}{2\pi(\zeta - \zeta_0)} \right) \frac{1}{1 - \lambda^2/\zeta^2} \quad (163)$$

Όπου  $\alpha$  είναι η γωνία πρόσπτωσης,  $\Gamma$  η κυκλοφορία γύρω από την υδροτομή, και η μεταβλητή  $\zeta$  εκφράζεται συναρτήσει της μεταβλητής  $z$  μέσω του αντίστροφου του μετασχηματισμού Joukowski. Η συνθήκη Kutta για πεπερασμένη τιμή της ταχύτητας στο





Σχήμα 14: Τυπική υδροτομή Joukowski στο επίπεδο  $x - y$ . Η συγκεκριμένη υδροτομή είναι εικόνα κύκλου στο επίπεδο  $\zeta$  με κέντρο το σημείο  $(-0.1, 0.1)$  και ακτίνας 1.105, ενώ  $\lambda = 1$ .

άκρο εκφυγής επιβάλλει να μηδενίζεται ο αριθμητής στο δεξιό μέλος της (163) για  $\zeta = \lambda = R \exp(i\theta_b)$ . Αυτό δίνει την ακόλουθη τιμή για την κυκλοφορία:

$$\Gamma = 4\pi R U \sin(\theta_b - \alpha) \quad (164)$$

Η τιμή της δύναμης ανά μονάδα πλάτους πάνω στην υδροτομή προκύπτει τότε από τις γενικές εκφράσεις (102) και (103). Σημειώνουμε ότι η το σημείο  $\zeta = -\lambda$ , που είναι το δεύτερο ανώμαλο σημείο της εξίσωσης (163), βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (162), οπότε η ταχύτητα του ρευστού δεν απειρίζεται σε κανένα σημείο του πεδίου ροής.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε για την ροή γύρω από την έλλειψη (χρησιμοποιώντας δηλαδή τις εξισώσεις (139) και (104)) προκύπτει και η ακόλουθη έκφραση για την ροπή ανά μονάδα πλάτους πάνω στην υδροτομή:

$$M_0 = -2\pi\rho U^2(\lambda^2 \sin(2\alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi U}(\xi_0 \cos \alpha + \eta_0 \sin \alpha)) \quad (165)$$

Η οξεία μορφή που έχει το άκρο εκφυγής της υδροτομής Joukowski, το γεγονός δηλαδή ότι η άνω και η κάτω πλευρά έχουν κοινή εφαπτομένη, επιταχύνει την αποκόλληση των οριακών στρωμάτων από την επιφάνειά της, επιφέροντας αισθητή μείωση της δυναμικής άνωσης εν σχέσει με αυτή που προβλέπει η θεωρία ιδανικού ρευστού. Γι' αυτό η πρακτική χρήση των υδροτομών Joukowski είναι περιορισμένη. Αντίθετα, στις διατομές που χρησιμοποιούνται στην πράξη οι εφαπτόμενες της άνω και κάτω πλευράς της υδροτομής να σχηματίζουν πεπερασμένη γωνία στο άκρο εκφυγής.

### 3 Τρισδιάστατες αστρόβιλες ροές

Η ανάλυση των τρισδιάστατων αστρόβιλων ροών είναι πολύ πιο δύσκολη από την ανάλυση των δισδιάστατων αστρόβιλων ροών. Δεν υπάρχει για παράδειγμα θεωρητικό εργαλείο αντίστοιχο με την θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων για να μας βοηθήσει στην ανάλυση τρισδιάστατων ροών, και, με ελάχιστες εξαιρέσεις, τα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν αριθμητικά στον υπολογιστή (π.χ. με πεπερασμένες διαφορές, ή με χρήση του θεωρήματος του Green). Η ροική συνάρτηση στις τρεις διαστάσεις είναι διανυσματική. Επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη υπάρχει μία διανυσματική συνάρτηση  $\Psi$  τέτοια ώστε  $\mathbf{u} = \nabla \times \Psi$ . Η συνάρτηση  $\Psi$  λέγεται το *ροικό διάνυσμα*. Το ροικό διάνυσμα έχει επίσης τρεις συνιστώσες, όπως και η ταχύτητα, οπότε δεν επιφέρει κάποια σημαντική διευκόλυνση, σαν αυτή που επιφέρει η χρήση της ροικής συνάρτησης στις δισδιάστατες ροές, και η χρήση του είναι μάλλον περιορισμένη.

#### 3.1 Πηγές και δίπολα

Η έννοια της πηγής και το διπόλου επεκτείνονται εύκολα στις τρισδιάστατες ροές (αλλά όχι και αυτή της σημειακής δίνης). Για την επέκταση θα χρειαστεί να θυμηθούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες: Η θέση ενός σημείου με διάνυσμα θέσης  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  προσδιορίζεται από την απόσταση από την αρχή των συντεταγμένων  $r$  και τις γωνίες  $\theta$  και  $\psi$  (Εικόνα 15).

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες συνδέονται με τις σφαιρικές συντεταγμένες με τις ακόλουθες εξισώσεις:

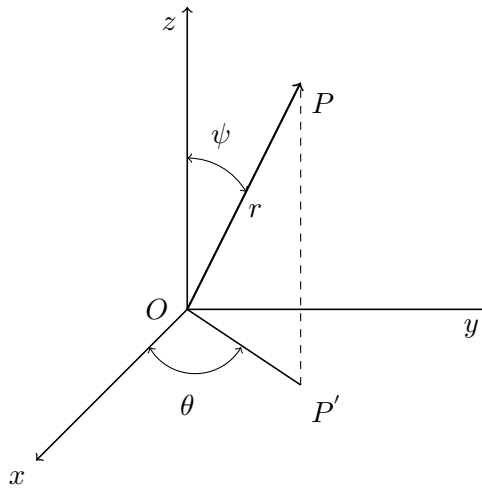
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (166)$$

$$x = r \sin \psi \cos \theta \quad (167)$$

$$y = r \sin \psi \sin \theta \quad (168)$$

$$z = r \cos \psi \quad (169)$$

Αντίστοιχα το διάνυσμα της ταχύτητας  $\mathbf{u}$  προσδιορίζεται από τις συνιστώσες του  $u_r$ ,  $u_\theta$ , και  $u_\psi$ :  $u_r$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την κατεύθυνση  $OP$ ,  $u_\theta$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας στο επίπεδο  $(x, y)$  κάθετη προς την  $OP'$ , και  $u_\psi$  η συνιστώσα στο επίπεδο που σχηματίζουν η  $OP$  με τον άξονα  $z$  κάθετη προς την  $OP$ . Χρησιμοποιώντας την έκφραση του  $\nabla \phi$  σε σφαιρικές συντεταγμένες, βρίσκουμε ότι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:



Σχήμα 15: Σφαιρικές συντεταγμένες σημείου  $P$ :  $r$  είναι η απόσταση του σημείου  $P$  από την αρχή των αξόνων  $O$ ,  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει η  $OP'$  με τον άξονα  $x$  ( $P'$  είναι η προβολή του  $P$  στο επίπεδο  $(x, y)$ ), και  $\psi$  είναι η γωνία που κάνει  $OP$  με τον άξονα  $z$ .

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (170)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (171)$$

$$u_\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \quad (172)$$

Η εξίσωση του Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται ως εξής:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right) = 0 \quad (173)$$

Σαν δυναμικό πηγής ορίζουμε την σφαιρικά συμμετρική λύση της εξίσωσης (173), δηλαδή την λύση που είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης  $r$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0 \quad (174)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (174) βρίσκουμε ότι:

$$\phi = -\frac{K}{r} \quad (175)$$

Όπου  $K$  είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Η ταχύτητα που προκύπτει από το δυναμικό (175) έχει μηδενικές τις συνιστώσες  $u_\theta$  και  $u_\psi$ , ενώ η συνιστώσα  $u_r$  δίνεται από την σχέση:

$$u_r = \frac{K}{r^2} \quad (176)$$

Βλέπουμε επομένως ότι αν  $K > 0$  η ταχύτητα ρέει από την αρχή των αξόνων προς το άπειρο (πηγή), ενώ αν  $K < 0$  γίνεται το αντίστροφο (καταβόθρα). Θεωρώντας την παροχή όγκου  $m$  που περνά από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια που περικλείει την αρχή των αξόνων βρίσκουμε ότι:

$$m = 4\pi K \quad (177)$$

Χρησιμοποιώντας την (177) το δυναμικό της πηγής γράφεται ως εξής:

$$\phi = -\frac{m}{4\pi r} \quad (178)$$

Αντίστοιχα με την διδιάστατες ροές το δυναμικό διπόλου παράλληλου με τον άξονα των  $z$  ορίζεται σαν η παράγωγος του δεξιού μέλους της (175) ως προς  $z$ :

$$\phi = -\frac{\mu}{r^2} \cos \psi \quad (179)$$

Το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει από το δυναμικό (179) δίνεται από τις σχέσεις

$$u_r = \frac{2\mu}{r^3} \cos \psi \quad (180)$$

$$u_\theta = 0 \quad (181)$$

$$u_\psi = \frac{\mu}{r^3} \sin \psi \quad (182)$$

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό διπόλου παράλληλου με τον άξονα των  $x$ , των  $y$  ή προς οποιαδήποτε άλλη ευθεία. Όπως και στις δύο διαστάσεις το δυναμικό οποιουδήποτε κινουμένου σώματος μακριά από το αντικείμενο τείνει στο δυναμικό διπόλου παράλληλου με την κατεύθυνση κίνησης του σώματος (το παραθέτουμε χωρίς απόδειξη).

### 3.2 Αστρόβιλη ροή γύρω από σφαίρα

Θεωρούμε ομοιόμορφη ροή παράλληλη με τον άξονα των  $z$  με ταχύτητα  $U$  γύρω από σφαίρα ακτίνας  $R$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Το δυναμικό της ροής ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, και πάνω στη σφαίρα η ταχύτητα κάθετη προς την σφαίρα μηδενίζεται. Λόγω της γεωμετρίας είναι προφανώς καλύτερα να μεταχειριστούμε σφαιρικές συντεταγμένες. Η εξίσωση του Laplace έχει την μορφή (173), ενώ η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι κάθετη προς την σφαίρα είναι η  $u_r$ , οπότε η οριακή συνθήκη στην σφαίρα έχει την πολύ απλή μορφή:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (183)$$

Η λύση του προβλήματος οριακών τιμών δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση δυναμικού (όπως επαληθεύεται με κατ' ευθείαν αντικατάσταση):

$$\phi = U \left( r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \psi \quad (184)$$

Το δυναμικό της ροής είναι δηλαδή ίσο με το άθροισμα του δυναμικού ομοιόμορφης ροής παράλληλης προς τον άξονα  $z$  συν το δυναμικό διπόλου παράλληλου προς τον ίδιο άξονα.

Χρησιμοποιώντας τις (170), (171), και (172) βρίσκουμε ότι το πεδίο ταχυτήτων δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_r = U \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \psi \quad (185)$$

$$u_\theta = 0 \quad (186)$$

$$u_\psi = -U \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \psi \quad (187)$$

Πάνω στη σφαίρα ( $r = R$ ) η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας είναι η  $u_\psi$  που είναι ίση με  $-(3/2)U \sin \psi$ . Επομένως η μέγιστη τιμή της ταχύτητας πάνω στη σφαίρα είναι ίση κατ' απόλυτη τιμή με  $1.5U$ . Σημειώνουμε ότι για ροή γύρω από κύλινδρο με μηδενική κυκλοφορία η μέγιστη ταχύτητα πάνω στον κύλινδρο (όπως προκύπτει εύκολα από την εξίσωση (110)) είναι ίση κατ' απόλυτη τιμή με  $2U$ . Βλέπουμε επομένως ότι ένα δισδιάστατο αντικείμενο επιταχύνει την ροή σημαντικά περισσότερο από ότι ένα τρισδιάστατο αντικείμενο με το ίδιο πάχος. Αυτό οφείλεται στο ότι το ρευστό μπορεί να κινηθεί ολόγυρα από το τρισδιάστατο αντικείμενο, ενώ υποχρεωτικά θα περάσει μόνο από πάνω και από κάτω στο διδιάστατο αντικείμενο, και θα αναγκαστεί να επιταχυνθεί περισσότερο.

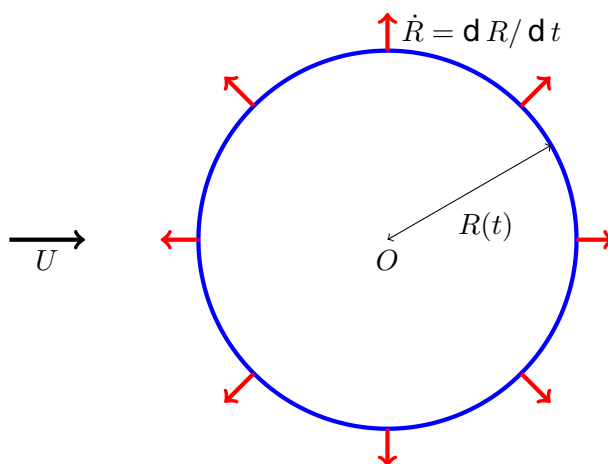
Η τιμή της αντίστασης της σφαίρας σε μόνιμη ροή είναι σύμφωνα με το παράδοξο του D' Alambert ίση με μηδέν. Αυτό προκύπτει από το γενικό επιχείρημα διατήρησης της ενεργείας που εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και φυσικά μπορεί να επαληθευθεί χρησιμοποιώντας την αρχή του Bernoulli για να υπολογίσουμε την πίεση πάνω στην σφαίρα, και στη συνέχεια να ολοκληρώσουμε για να υπολογίσουμε την δύναμη.

Γιά τον υπολογισμό αστρόβιλης ροής γύρω από ένα γενικό τρισδιάστατο αντικείμενο μοναδική επιλογή είναι η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης του Laplace με την συνθήκη Neumann πάνω στο αντικείμενο, κάτι που δεν θα μας απασχολήσει σε αυτό το μάθημα.

## ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί αστρόβιλη ροή γύρω από σφαίρα με χρονικά μεταβλητή ακτίνα (αλλά σταθερό σχήμα). Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται πάνω στην σφαίρα, και να δοθεί φυσική ερμηνεία στο αποτέλεσμα.

## ΛΥΣΗ



Σχήμα 16: Εικόνα για αστρόβιλη ροή γύρω από σφαίρα με μεταβλητή χρονικά διάμετρο  $R(t)$ .

Επιλέγουμε την αρχή των αξόνων στο κέντρο της σφαίρας. Εστω  $R(t)$  η ακτίνα της σφαίρας και  $U$  η ταχύτητα της ομοιόμορφης ροής παράλληλη με τον άξονα των  $z$ . Η οριακή συνθήκη στην επιφάνεια της σφαίρας είναι:

$$u_r|_{r=R} = \frac{dR}{dt} \quad (188)$$

Η οριακή συνθήκη (188) είναι ισοδύναμη με το να υπάρχει μιά σημειακή πηγή στο κέντρο της σφαίρας με κατάλληλη ένταση η οποία προκαλεί την ακτινική ταχύτητα  $dR/dt$ . Οπότε γράφουμε το δυναμικό σαν το άθροισμα του δυναμικού για ομοιόμορφη ροή γύρω από σφαίρα (εξίσωση (184)) συν το δυναμικό σημειακής πηγής άγνωστης έντασης  $m$  που βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας:

$$\phi = U\left(r + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^2}\right) \cos \psi - \frac{m}{4\pi r} \quad (189)$$

Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (188) καταλήγουμε ότι:

$$u_r|_{r=R} = \frac{m}{4\pi R^2} = \frac{dR}{dt} \quad (190)$$

Επομένως έχουμε ότι η ένταση της πηγής δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{m}{4\pi} = R^2 \frac{dR}{dt} \quad (191)$$

Παραγωγίζοντας την έκφραση για το δυναμικό, και ορίζοντας για συντομία  $\dot{R} = dR/dt$ , βρίσκουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας:

$$u_r = \dot{R} \quad u_\theta = 0 \quad u_\psi = -\frac{3}{2}U \sin \psi \quad (192)$$

Από την εξίσωση Bernoulli η πίεση στην επιφάνεια της σφαίρας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} p|_{r=R} &= -\rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) |_{r=R} = \\ &= -\rho \left( \frac{3}{2} U \dot{R} \cos \psi + \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) \frac{1}{R} + \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \frac{9}{4} U^2 \sin^2 \psi) \right) \end{aligned} \quad (193)$$

Η δύναμη που ασκείται στην σφαίρα στην κατεύθυνση  $z$  προκύπτει ολοκληρώνοντας την έκφραση (193) πάνω στην σφαίρα:

$$\begin{aligned} F_z &= - \int_B p n_z dA = - \int_0^\pi p 2\pi R^2 \cos \psi \sin \psi d\psi = \\ &= 2\pi \rho R^2 \int_0^\pi \left( \frac{3}{2} U \dot{R} \cos \psi + \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) \frac{1}{R} + \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \frac{9}{4} U^2 \sin^2 \psi) \right) \cos \psi \sin \psi d\psi = \\ &= 2\pi \rho R^2 U \dot{R} \end{aligned} \quad (194)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι  $n_z = \cos \psi$  και, επειδή η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε δεν εξαρτάται από την γωνία  $\theta$  των σφαιρικών συντεταγμένων, επιλέξαμε για  $dA$  τον κυκλικό δακτύλιο πάνω στη σφαίρα με ακτίνα  $R \sin \psi$  και απειροστό πάχος  $R d\psi$ :

$$dA = (2\pi R \sin \psi)(R d\psi) = 2\pi R^2 \sin \psi d\psi$$

Επίσης χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \psi \sin \psi \, d\psi = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \cos \psi \sin \psi \, d\psi = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos \psi \sin^3 \psi \, d\psi = 0$$

Λόγω συμμετρίας οι άλλες δύο συνιστώσες της δύναμης  $F_{\theta}$  και  $F_{\psi}$  είναι μηδενικές (αυτό φυσικά μπορεί να επαληθευθεί και αναλυτικά).

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα δεν είναι μηδενική, επειδή η ροή δεν είναι μόνιμη. Επί πλέον, παρατηρούμε ότι για  $\dot{R} > 0$  (δηλαδή η σφαίρα διαστέλεται), η δύναμη είναι παράλληλη με την ταχύτητα του ρευστού, και η σφαίρα παρουσιάζει αντίσταση. Αντίθετα, για  $\dot{R} < 0$  (δηλαδή η σφαίρα συρρικνώνεται), η δύναμη είναι αντίθετη προς την ταχύτητα του ρευστού, και η σφαίρα αναπτύσσει πρόωση.

Η δημιουργία της δύναμης μπορεί να εξηγηθεί ενεργειακά ως εξής: Καθώς η ακτίνα της σφαίρας μεταβάλλεται, η σφαίρα διαταράσσει περισσότερο ή λιγότερο τη ροή, ανάλογα με το αν η ακτίνα αυξάνεται ή μειώνεται. Αυτό μεταβάλλει αντίστοιχα την κινητική ενέργεια του ρευστού. Η απαιτούμενη ισχύς για τη μεταβολή της ενέργειας παρέχεται από την δύναμη (194).