

# ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Γ. Σ. Τριανταφύλλου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

2018

# Περιεχόμενα

<b>1 ΡΟΕΣ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟ</b>	<b>1</b>
1.1 Γενικά . . . . .	1
1.2 Διδιάστατες ροές με δυναμικό . . . . .	4
1.2.1 Το μιγαδικό δυναμικό . . . . .	4
1.2.2 Σύμμορφες απεικονίσεις . . . . .	6
1.2.3 Πηγές, δίνες και δίπολα . . . . .	10
1.2.4 Δύναμη και ροπή σε αντικείμενο σε μόνιμη αστρόβιλη ροή: Τα θεωρήματα του Blasius . . . . .	21
1.2.5 Δύναμη και ροπή σε αντικείμενο σε άπειρο ρευστό . . . . .	25
1.2.6 Ροή γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής . . . . .	27
1.2.7 Ροή γύρω από κύλινδρο ελλειπτικής διατομής . . . . .	29
1.2.8 Ροή γύρω από κεκλιμένη επίπεδη πλάκα-Συνθήκη του Kutta . . . . .	33
1.2.9 Υδροτομές Joukowski . . . . .	38
1.3 Τρισδιάστατες αστρόβιλες ροές . . . . .	41
1.3.1 Πηγές και δίπολα . . . . .	41
1.3.2 Αστρόβιλη ροή γύρω από σφαίρα . . . . .	44
<b>2 ΘΕΩΡΙΑ ΛΕΠΤΩΝ ΥΔΡΟΤΟΜΩΝ</b>	<b>48</b>
2.1 Γενικά: Ορολογία υδροτομών . . . . .	48
2.2 Γραμμική θεωρία υδροτομών . . . . .	50
2.3 Λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος με χρήση διανεμημένης στροβιλότητας. . . . .	57
2.4 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με την χρήση σειράς Fourier . . . . .	65
2.5 Ιδανική γωνία πρόσπτωσης . . . . .	70
<b>3 ΘΕΩΡΙΑ ΦΕΡΟΥΣΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ</b>	<b>71</b>
3.1 Στροβιλότητα . . . . .	71
3.1.1 Γενικά . . . . .	71
3.1.2 Νόμος Biot-Savart . . . . .	73
3.1.3 Ιδιόμορφη γραμμή δίνης . . . . .	74
3.1.4 Ιδιόμορφα φύλλα στροβιλότητας . . . . .	75
3.2 Θεωρία φερουσών επιφανειών . . . . .	80
3.2.1 Ροή ιδανικού ρευστού γύρω από πτέρυγα . . . . .	81
3.2.2 Σχέση ανάμεσα στην πυκνότητα στροβιλότητας και στην διαφορά πίεσης για μόνιμη ροή . . . . .	83
3.2.3 Γραμμική θεωρία φερουσών επιφανειών . . . . .	84
3.2.4 Θεωρία της φέρουσας γραμμής . . . . .	88
<b>4 ΘΕΩΡΙΑ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ</b>	<b>98</b>
4.1 Εισαγωγή . . . . .	98
4.2 Γραμμική θεωρία . . . . .	101

4.2.1	Γενικά . . . . .	101
4.2.2	Απλοί αρμονικοί κυματισμοί . . . . .	101
4.2.3	Κύματα πάνω από ομοιόμορφη ροή . . . . .	115
4.3	Γενική κίνηση της θάλασσας . . . . .	117
4.3.1	Υπέρθωση απλών αρμονικών κυματισμών σε νερό σταθερού βάθους . .	117
4.3.2	Ομάδες κυμάτων . . . . .	119
4.4	Κύματα πλοίου σε βαθύ νερό . . . . .	121
4.4.1	Γενικά . . . . .	121
4.4.2	Γραμμική θεωρία κυμάτων πλοίου . . . . .	121
4.4.3	Αντίσταση πλοίου λόγω κυματισμών . . . . .	125

# Κεφάλαιο 1

## ΡΟΕΣ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

### 1.1 Γενικά

Μιά ροή με πεδίο ταχυτήτων  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  λέγεται αστρόβιλη όταν η στροβιλότητα  $\boldsymbol{\omega}$  είναι ίση με το μηδέν. Μαθηματικά αυτό γράφεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

Ο μηδενισμός της στροβιλότητας συνεπάγεται την ύπαρξη συνάρτησης δυναμικού  $\phi$ , της οποίας το grad είναι ίσο με την ταχύτητα  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (1.2)$$

Για ασυμπίεστη ροή έχουμε ότι  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , επομένως αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.2) βρίσκουμε ότι το δυναμικό  $\phi$  ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.3)$$

Σημειώνουμε ότι για αστρόβιλη ροή οι εξισώσεις Navier-Stokes ανάγονται στην εξίσωση του Bernoulli. Πράγματι ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\rho} \nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.4)$$

$$\text{όπου } \Pi = p + (1/2)\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho g z.$$

Για αστρόβιλη ροή  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , οπότε αντικαθιστούμε την εξίσωση (1.2) στην εξίσωση (1.4) και, μετά από μιά αναγωγή όρων, βρίσκουμε ότι:

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Pi \right) = 0 \quad (1.5)$$

Η εξίσωση (1.5)) προέκυψε από το γεγονός ότι ο τελευταίος όρος στην εξίσωση (1.4) μηδενίζεται λόγω της εξίσωσης (1.3). Δηλαδή, για αστρόβιλη ροή, παρά το ότι ο ταχυστής των τάσεων λόγω ιξώδους δεν είναι μηδενικός, η απόκλιση του ταχυστή (που εμφανίζεται στις εξισώσεις κίνησης) είναι ίση με το μηδέν.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (1.5)) έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Pi = C(t) \quad (1.6)$$

Όπου  $C(t)$  είναι μιά οποιαδήποτε συνάρτηση του χρόνου μόνο, είναι δηλαδή η σταθερά ολοκλήρωσης. Χωρίς απώλεια γενικότητας μπορούμε να θέσουμε  $C(t) = K$ , όπου  $K$  οποιαδήποτε σταθερά (ακόμα και μηδέν). Αυτό ισχύει επειδή η συνάρτηση  $C(t)$  μπορεί να "απορροφηθεί" μέσα στο δυναμικό με τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\phi = \phi_1 + \int C(t) dt - Kt \quad (1.7)$$

Οποια και να είναι η  $C(t)$ , οι συναρτήσεις  $\phi$  και  $\phi_1$  δίνουν το ίδιο πεδίο ταχυτήτων αφού  $\nabla \phi = \nabla \phi_1$ .

Κατά συνέπεια η εξίσωση (1.6) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz = K \quad (1.8)$$

Η εξίσωση (1.8) είναι η εξίσωση του Bernoulli για μη μόνιμη ροή, και ισχύει χωρίς προσέγγιση όταν η ροή είναι αστρόβιλη.

Όταν έχουμε ροή γύρω από ένα σώμα, η στροβιλότητα δεν μπορεί να είναι παντού μηδέν, επειδή η τριβή του ρευστού πάνω στην επιφάνεια του αντικειμένου δημιουργεί στροβιλότητα. Επομένως η περιοχή ισχύος της εξίσωσης του Bernoulli περιορίζεται στην περιοχή έξω από τα οριακά στρώματα και τον ομόρρο του αντικειμένου.

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου το να θεωρήσουμε ότι η ροή είναι παντού αστρόβιλη δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα για πρακτικές εφαρμογές. Παραδείγματα είναι ο υπολογισμός της δυναμικής άνωσης (ή άντωσης) σε υδροτομές, ή ο υπολογισμός φόρτισης κατασκευών λόγω θαλασσίων κυματισμών. Στις περιπτώσεις αυτές είναι υποχρεωτικό να υποθέσουμε ιδανικό ρευστό, γιατί μιά αστρόβιλη ροή μπορεί να ικανοποιήσει την κινηματική οριακή συνθήκη πάνω στο σώμα, αλλά όχι την φυσική οριακή συνθήκη.

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αστρόβιλης ροής γύρω από σώμα έχουμε επομένως την εξίσωση του Laplace (1.3) για το δυναμικό που ισχύει στο πεδίο ροής, και την κινηματική οριακή συνθήκη πάνω στο περίγραμμα του σώματος  $B$ :

$$(\nabla \phi - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}|_B = 0 \quad (1.9)$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (1.9) ως εξής:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_B = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (1.10)$$

Όπου  $\mathbf{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο  $B$  και  $\mathbf{v}$  είναι η ταχύτητα των σημείων της επιφάνειας του σώματος. Επίσης μεταχειριστήκαμε τον συμβολισμό  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \partial \phi / \partial n$ .

Η οριακή συνθήκη (1.10) λέγεται συνθήκη Neumann. Έχουμε επομένως ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (εξισώσεις (1.3) και (1.10), που όμως θα χρειαστεί μία επιπλέον συνθήκη που προσδιορίζει το πώς είναι η ροή πολύ μακριά από το αντικείμενο (π.χ. η ροή είναι ομοιόμορφη). Μαθηματικά αυτή η οριακή συνθήκη αναφέρεται σαν “συνθήκη στο άπειρο”. Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση του Laplace με οριακή συνθήκη Neumann και την συνθήκη στο άπειρο έχει μοναδική λύση για το πεδίο ταχυτήτων της ροής. Επομένως αν βρούμε μία λύση της εξίσωσης του Laplace που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες του προβλήματος αυτή είναι και η λύση του προβλήματος.

Αφού επιλύσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών για το δυναμικό  $\phi$ , υπολογίζουμε την πίεση από την εξίσωση (1.8), οπότε η δύναμη  $\mathbf{F}$  και η ροπή  $\mathbf{M}_0$  ως προς την αρχή των αξόνων που ασκούνται πάνω στο σώμα υπολογίζονται με ολοκλήρωση των δυνάμεων πίεσης και των ροπών των δυνάμεων πίεσης, αντίστοιχα, πάνω στην επιφάνεια του σώματος  $B$ :

$$\mathbf{F} = - \int_B p \mathbf{n} \, dA \quad (1.11)$$

$$\mathbf{M}_0 = - \int_B \mathbf{x} \times p \mathbf{n} \, dA \quad (1.12)$$

όπου  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  είναι το διάνυσμα θέσης στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση του Bernoulli (1.8) στις εκφράσεις για την δύναμη (1.11) και την ροπή (1.12) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{F} = \int_B \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} \, dA + \frac{1}{2} \int_B \rho |\nabla \phi|^2 \mathbf{n} \, dA + \int_B \rho g z \mathbf{n} \, dA \quad (1.13)$$

$$\mathbf{M}_0 = \int_B \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{x} \times \mathbf{n} \, dA + \frac{1}{2} \int_B \rho |\nabla \phi|^2 \mathbf{x} \times \mathbf{n} \, dA + \int_B \rho g z \mathbf{x} \times \mathbf{n} \, dA \quad (1.14)$$

Στις εξισώσεις (1.13) και (1.14) οι τρίτοι όροι είναι, αντίστοιχα, η υδροστατική δύναμη και η υδροστατική ροπή, ενώ οι πρώτοι όροι είναι η δύναμη και η ροπή λόγω μη μονιμότητας της ροής.

## 1.2 Διδιάστατες ροές με δυναμικό

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ροή είναι διδιάστατη, όπως για παράδειγμα στο πρόβλημα υπολογισμού ροής γύρω από μιά υδροτομή. Ο υπολογισμός διδιάστατων ροών είναι πολύ απλούστερος από τον υπολογισμό τριδιάστατων ροών. Στην ειδική περίπτωση των αστρόβιλων ροών υπάρχει η επιπλέον διευκόλυνση ότι το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί με χρήση μιγαδικών συναρτήσεων, πράγμα που μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μερικά πολύ χρήσιμα εργαλεία από την θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων που διευκολύνουν πολύ την επίλυση του προβλήματος. Τα δύο βασικά εργαλεία που θα χρειαστούμε είναι (1) Η θεωρία σύμμορφων απεικονίσεων, και (2) Το θεώρημα των υπολοίπων, το οποίο διευκολύνει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων μιγαδικών συναρτήσεων.

### 1.2.1 Το μιγαδικό δυναμικό

Θεωρούμε μιά ροή στο επίπεδο  $(x, y)$  με πεδίο ταχυτήτων  $(u, v)$ . Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο εξάμηνο, για οποιαδήποτε διδιάστατη ροή ασυμπίεστου ρευστού (με ή χωρίς στροβιλότητα) υπάρχει η λεγόμενη *ροϊκή συνάρτηση*  $\psi(x, y)$ , που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.15)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.16)$$

Η ονομασία της ροϊκής συνάρτησης προέρχεται από το γεγονός ότι η εξίσωση  $\psi = C$ , όπου  $C$  σταθερά, περιγράφει τις γραμμές ροής. Αυτό προκύπτει από το ότι η εξίσωση  $\psi = C$  ορίζει καμπύλη της οποίας η εφαπτομένη σε κάθε σημείο έχει κλίση ίση με την κλίση του διανύσματος της ταχύτητας στο ίδιο σημείο:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = \frac{v}{u} \quad (1.17)$$

Για διδιάστατη ροή η μοναδική συνιστώσα της στροβιλότητας (που είναι η συνιστώσα κάθετη προς το επίπεδο κίνησης) δίνεται από την σχέση:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (1.18)$$

Επομένως για ασυμπίεστη αστρόβιλη ροή η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.

Επειδή υπάρχει μόνο ένα πεδίο ταχυτήτων, συμπεραίνουμε ότι η ροϊκή συνάρτηση και η συνάρτηση δυναμικού συνδέονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.20)$$

Οι εξισώσεις (1.19) και (1.20) λέγονται *εξισώσεις Cauchy-Riemann*. Όταν δύο συναρτήσεις ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann λέγονται *συζυγείς συναρτήσεις*.

Μιά άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι δύο συναρτήσεις  $\phi, \psi$  ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann είναι ότι η συνάρτηση  $\phi + \iota\psi$  (όπου  $\iota = \sqrt{-1}$ ) είναι αναλυτική συνάρτηση της μεταβλητής  $z = x + \iota y$ . Συμβολίζουμε αυτή τη συνάρτηση με  $w(z)$  και λέγεται *μιγαδικό δυναμικό* της ροής.

$$w(z) = \phi(x, y) + \iota\psi(x, y) \quad (1.21)$$

Η παράγωγος του μιγαδικού δυναμικού λέγεται *μιγαδική ταχύτητα*, επειδή έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \iota \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - \iota v \quad (1.22)$$

Σημειώνουμε ότι η εξίσωση  $\phi = C$  ορίζει μία δεύτερη οικογένεια καμπύλων που λέγονται *ισοδυναμικές καμπύλες*. Η κλίση αυτών των καμπύλων δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} = -\frac{u}{v} \quad (1.23)$$

Συγκρίνοντας την (1.23) με την εξίσωση (1.17) βλέπουμε ότι οι *ισοδυναμικές καμπύλες* είναι κάθετες προς τις γραμμές ροής.

Το απλούστερο παράδειγμα αστρόβιλης ροής, και το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές, είναι η ομοιόμορφη ροή με σταθερή ταχύτητα. Αν παραστήσουμε με  $U, V$  τις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού κατά τον άξονα των  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w(z) = (U - \iota V)z \quad (1.24)$$

Παίρνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (1.24) βρίσκουμε ότι το δυναμικό της ροής είναι  $\phi = Ux + Vy$ , και η ροική συνάρτηση είναι  $\psi = Uy - Vx$ . Επομένως οι γραμμές ροής είναι  $Uy - Vx = \text{σταθερό}$  (δηλ. ευθείες παράλληλες με τον άξονα το διάνυσμα  $(U, V)$ ), και οι *ισοδυναμικές καμπύλες* είναι  $Ux + Vy = \text{σταθερό}$  (δηλ. ευθείες κάθετες προς το διάνυσμα  $(U, V)$ ). Προφανώς οι δύο οικογένειες καμπύλων είναι κάθετες μεταξύ τους.



### 1.2.2 Σύμμορφες απεικονίσεις

Η σχέση  $\zeta = f(z)$ , όπου  $f(z)$  είναι μία αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ , απεικονίζει το επίπεδο  $z = x + iy$  στο επίπεδο  $\zeta = \xi + i\eta$ . Η αντίστροφη απεικόνιση από το επίπεδο  $\zeta$  στο επίπεδο  $z$  συμβολίζεται με την σχέση  $z = f^{-1}(\zeta)$ . Εστω  $f'(z)$  η παράγωγος της  $f(z)$ . Εάν  $f'(z) \neq 0$ , η απεικόνιση λέγεται σύμμορφη.

Η ονομασία σύμμορφη προέρχεται από το γεγονός ότι η απεικόνιση διατηρεί τις γωνίες. Αν θεωρήσουμε δηλαδή δύο απειροστά ευθύγραμμα τμήματα  $(AB)$ ,  $(A\Gamma)$  στο επίπεδο  $z$ , και τις εικόνες τους  $(A'B')$ ,  $(A'\Gamma')$  στο επίπεδο  $\zeta$ , αν η απεικόνιση είναι σύμμορφη, η γωνία  $BA\Gamma$  είναι ίση με την γωνία  $B'A'\Gamma'$ .

Από την βασική ιδιότητα των σύμμορφων απεικονίσεων προκύπτει μία εναλλακτική απόδειξη για το ότι οι ισοδυναμικές γραμμές είναι κάθετες προς τις γραμμές ροής. Το μιγαδικό δυναμικό είναι μία σύμμορφη απεικόνιση του επιπέδου  $(x, y)$  της ροής στο επίπεδο  $(\phi, \psi)$ . Οι ισοδυναμικές γραμμές και οι γραμμές ροής απεικονίζονται, αντίστοιχα, στις ευθείες  $\phi = \text{const}$ ,  $\psi = \text{const}$ . Επειδή οι τελευταίες είναι κάθετες μεταξύ τους, το ίδιο ισχύει και για τις πρώτες. Εξαιρέση σε αυτό αποτελούν τα σημεία ανακοπής της ροής, επειδή σε αυτά έχουμε  $dw/dz = 0$ , και επομένως η απεικόνιση δεν είναι σύμμορφη.

Η βασική χρήση των σύμμορφων απεικονίσεων στην υδροδυναμική είναι ο υπολογισμός ροής γύρω από ένα αντικείμενο απεικονίζοντάς την σε ροή γύρω από ένα άλλο αντικείμενο, για το οποίο η λύση είναι γνωστή. Η εύρεση της κατάλληλης σύμμορφης απεικόνισης είναι το πιο δύσκολο μέρος του προβλήματος.

Θεωρούμε αστρόβιλη ροή γύρω από ένα αντικείμενο με περίγραμμα  $B$  στο επίπεδο  $(x, y)$ , και έστω  $w(z)$  το μιγαδικό δυναμικό της ροής. Μέσω της σύμμορφης απεικόνισης  $\zeta = f(z)$  το περίγραμμα  $B$  απεικονίζεται στο  $B'$  στο επίπεδο  $(\xi, \eta)$ . Ας υποθέσουμε ότι λύση για αστρόβιλη ροή γύρω από το αντικείμενο  $B'$  είναι γνωστή, και έστω  $W(\zeta)$  το μιγαδικό δυναμικό της ροής. Τότε το μιγαδικό δυναμικό της ροής γύρω από το αντικείμενο  $B$  στο επίπεδο  $(x, y)$  δίνεται από την ακόλουθη σύνθετη συνάρτηση:

$$w(z) = W(f(z)) \quad (1.25)$$

Για την απόδειξη της (1.25) σκεφτόμαστε ως εξής: Το αντικείμενο  $B'$  είναι γραμμή ροής, επομένως η ροική συνάρτηση είναι σταθερή πάνω στο  $B'$ :

$$\text{Im}[W(\zeta)]|_{B'} = C \quad (1.26)$$

Όπου  $\text{Im}[A]$  συμβολίζει το φανταστικό μέρος του  $A$ . Κατά συνέπεια στο επίπεδο  $(x, y)$  έχουμε ότι:

$$\text{Im}[w(z)]|_B = \text{Im}[W(\zeta)]|_{B'} = C \quad (1.27)$$

Αυτό δείχνει ότι η ροική συνάρτηση είναι σταθερή πάνω στο περίγραμμα του αντικείμενου, και επομένως ότι το διάνυσμα της ταχύτητας εφάπτεται στο αντικείμενο.

Σαν παράδειγμα θα υπολογίσουμε τη διδιάστατη αστρόβιλη ροή σε ορθή γωνία.

Επιλέγουμε τους άξονες  $x$  και  $y$  να συμπίπτουν με τις δύο πλευρές της γωνίας. Θα επιλύσουμε τη ροή απεικονίζοντας την γεωμετρία του προβλήματος σε ροή πάνω από άπειρη επίπεδη πλάκα. Αυτό επιτυγχάνεται με το μετασχηματισμό:

$$\zeta = z^2 \quad (1.28)$$

Αυτό επαληθεύεται εύκολα παρατηρώντας ότι η εικόνα της μίας πλευράς της γωνίας ( $z = x$ ) είναι  $\zeta = x^2$ , δηλαδή είναι ο θετικός άξονας των  $\xi$ , ενώ η εικόνα της άλλης πλευράς της γωνίας ( $z = iy$ ) είναι  $\zeta = -x^2$ , δηλαδή ο αρνητικός άξονας των  $\xi$ .

Το μιγαδικό δυναμικό της ροής στο επίπεδο  $\zeta$  δίνεται από τη σχέση:

$$W = k\zeta \quad (1.29)$$

Οπου  $k$  είναι μία πραγματική σταθερά για να είναι διαστατικά σωστό το πρόβλημα.

Επιστρέφοντας στο επίπεδο  $z$  μέσω του μετασχηματισμού (1.28) έχουμε ότι:

$$w = kz^2 \quad (1.30)$$

Το δυναμικό και η ροική συνάρτηση δίνονται, αντίστοιχα, από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi = k(x^2 - y^2) \quad (1.31)$$

$$\psi = 2kxy \quad (1.32)$$

Από τις εξισώσεις (1.32) και (1.31) βλέπουμε ότι οι γραμμές ροής είναι οι υπερβολές  $xy = C$ , και οι ισοδυναμικές γραμμές είναι οι υπερβολές  $x^2 - y^2 = C$ . Μία γραφική απεικόνιση των γραμμών ροής και των ισοδυναμικών γραμμών φαίνεται στην γράφημα 1.1.

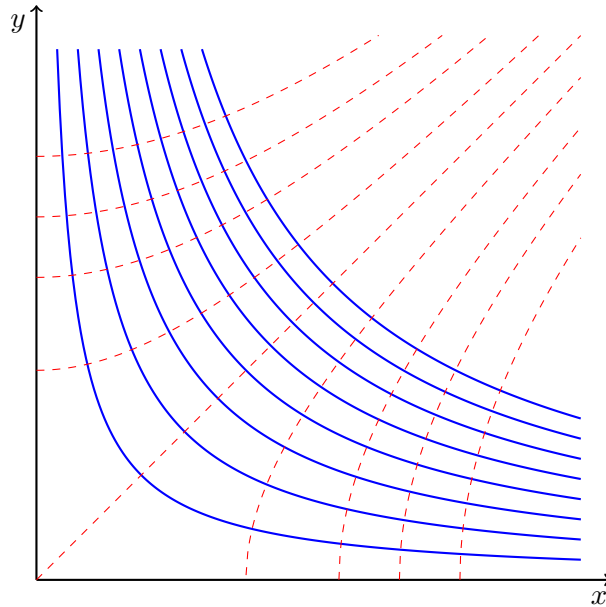
Γενικεύοντας, για να επιλύσουμε το πρόβλημα της αστρόβιλης ροής σε γωνία ίση με  $\pi/n$  μεταχειριζόμαστε τον μετασχηματισμό  $\zeta = z^n$ , οπότε το μιγαδικό δυναμικό που προκύπτει είναι  $w = kz^n$ .

Άσκηση: Να υπολογιστεί η διδιάστατη αστρόβιλη ροή γύρω από ημίπειρη πλάκα. Να υπολογιστούν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης σε τυχόν σημείο του πεδίου ροής.

Η συνάρτηση  $\zeta = z^2$  απεικονίζει τη δεδομένη ροή σε ροή πάνω από άπειρη πλάκα. Η τελευταία περιγράφεται από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

$$W(\zeta) = K\zeta \quad (1.33)$$

Οπου  $K$  είναι μία σταθερά.



Σχήμα 1.1: Γραμμές ροής (συνεχείς) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομμένες) για αστρόβιλη ροή σε ορθή γωνία. Σημείωση: Η ισοδυναμική γραμμή που αντιστοιχεί σε τιμή της σταθεράς ίση με το μηδέν, είναι η ευθεία γραμμή με κλίση  $45^\circ$  που περνά από την αρχή των αξόνων

Κατά συνέπεια το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w(z) = K z^{1/2} \quad (1.34)$$

Το δυναμικό της ροής  $\phi$  και η ροική συνάρτηση  $\psi$  δίνονται, αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\phi = \operatorname{Re}[K z^{1/2}] = K r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.35)$$

$$\psi = \operatorname{Im}[K z^{1/2}] = K r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.36)$$

Οπου θέσαμε  $z = r \exp(i\theta)$ .

Οι γραμμές ροής προκύπτουν θέτοντας  $\psi = C$ . Αυτό μας δίνει:

$$r \frac{1 - \cos \theta}{2} = C_a^2 \quad (1.37)$$

Οπου  $C_a = C/K$ . Η ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$r = \frac{2 C_a^2}{1 - \cos \theta} \quad (1.38)$$

Η εξίσωση (1.38) περιγράφει μία οικογένεια παραβολών με εστία την αρχή των αξόνων. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η (1.38) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

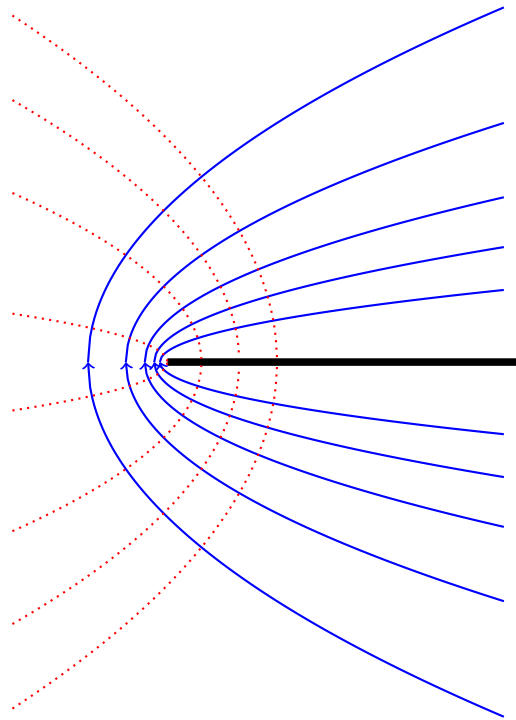
$$y^2 = 4x C_a^2 + 4C_a^4 \quad (1.39)$$

Γραφική παράσταση των γραμμών ροής για διάφορα  $C_a$  φαίνεται στο σχήμα 1.

Σημειώνουμε ότι, με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει η εξίσωση για τις ισοδυναμικές γραμμές σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$y^2 = -4x C_a^2 + 4C_a^4 \quad (1.40)$$

η οποία επίσης παριστάνει οικογένεια παραβολών (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Γραμμές ροής (συνεχείς μπλε) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομμένες κόκκινες) για ροή γύρω από ημιάπειρη πλάκα.

Το πεδίο ταχυτήτων σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.41)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.42)$$

Οπότε η πίεση προκύπτει από την αρχή του Bernoulli:

$$p = p_\infty - \frac{1}{8} \rho \frac{K^2}{r} \quad (1.43)$$

Όπου  $p_\infty$  η πίεση πολύ μακριά από την πλάκα.

Κατά συνέπεια, από τις εξισώσεις του Euler, οι συνιστώσες της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες  $a_r, a_\theta$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{K^2}{r^2} \quad (1.44)$$

$$a_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (1.45)$$

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση είναι κεντρομόλος και διευθύνεται προς την αρχή της πλάκας.

### 1.2.3 Πηγές, δίνες και δίπολα

Οποιαδήποτε αναλυτική συνάρτηση της μεταβλητής  $z$  παριστάνει κάποια αστρόβιλη ροή στο επίπεδο  $(x, y)$  (όχι κατ'ανάγκη με πρακτικό ενδιαφέρον). Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε μερικές βασικές αστρόβιλες ροές, που προκύπτουν από απλά μιγαδικά δυναμικά, και που περιγράφουν βασικούς τύπους αστροβιλης κίνησης του ρευστού. Οι ροές αυτές είναι (α) Πηγή (και καταβόθρα) (β) Σημειακή δίνη, και (γ) Δίπολο. Μαθηματικά οι ροές αυτές λέγονται και συναρτήσεις του Green, επειδή με υπέρθεση τέτοιων ροών (που επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green) μπορούμε να υπολογίσουμε ροές γύρω από περίπλοκα σχήματα.

#### Σημειακή Πηγή

Σημειακή πηγή είναι η ροή που προκύπτει από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

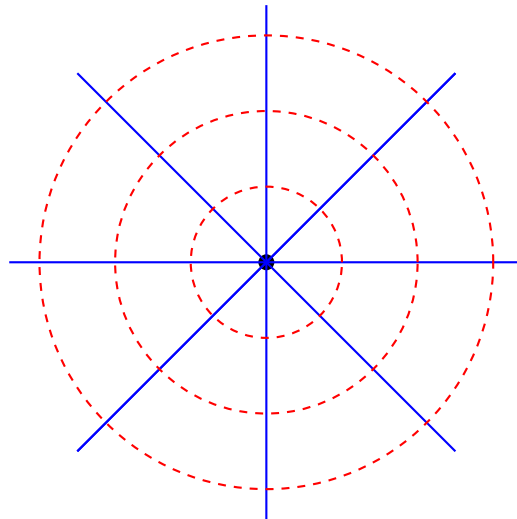
$$w = \frac{m}{2\pi} \ln z \quad (1.46)$$

Όπου  $m$  είναι μία σταθερά που λέγεται ένταση της πηγής, και  $\ln$  ο φυσικός λογάριθμος. Γράφοντας την μιγαδική μεταβλητή  $z$  σε πολική μορφή  $z = r \exp(i\theta)$  βρίσκουμε ότι το δυναμικό και η ροϊκή συνάρτηση της ροής δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r \quad (1.47)$$

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \theta \quad (1.48)$$

Από τις εξισώσεις (1.47), (1.48) βλέπουμε ότι οι γραμμές ροής δίνονται από την σχέση  $\theta = \text{σταθερό}$ , είναι δηλαδή ευθείες γραμμές που περνούν από την αρχή των αξόνων, και οι ισοδυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 1.3: Γραμμές ροής (μπλε συνεχείς) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομμένες κόκκινες) για σημειακή πηγή ή καταβόθρα. Το ρευστό κινείται από την πηγή προς το άπειρο, και αντίστροφα για καταβόθρα.

Το πεδίο ταχυτήτων εκφράζεται πολύ απλά σε πολικές συντεταγμένες  $u_r, u_\theta$  ως εξής:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{2\pi r} \quad (1.49)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (1.50)$$

Αν  $m > 0$  βλέπουμε ότι το ρευστό ρέει από την αρχή των αξόνων προς το άπειρο, υπάρχει δηλαδή μία “πηγή” ρευστού στην αρχή των αξόνων. Αν  $m < 0$  το ρευστό ρέει από το άπειρο προς την αρχή των αξόνων, υπάρχει δηλαδή μια “καταβόθρα” στην αρχή των αξόνων.

Η ένταση της πηγής  $m$  είναι ίση με την παροχή όγκου γύρω από μία κλειστή καμπύλη που περικλείει την αρχή των αξόνων, όπως μπορεί να επαληθευθεί εύκολα, υπολογίζοντας την εκροή όγκου μέσα από ένα κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Υπενθυμίζουμε ότι, επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη, η παροχή όγκου μέσα από οποιαδήποτε καμπύλη που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων είναι ίση με το μηδέν.

### Σημειακή δίνη

Σημειακή δίνη είναι η αστρόβιλη ροή που περιγράφεται από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

$$w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (1.51)$$

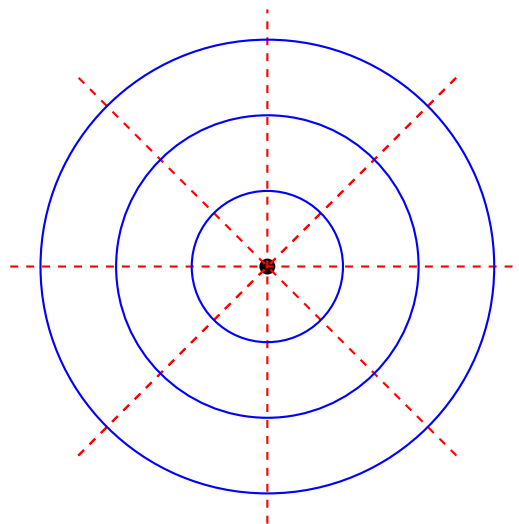
Όπου  $\Gamma$  είναι μιά σταθερά και λέγεται ένταση της δίνης.

Χρησιμοποιώντας, όπως και με την πηγή, πολικές συντεταγμένες το δυναμικό και η ροϊκή συνάρτηση δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad (1.52)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (1.53)$$

Από τις εξισώσεις (1.52), (1.53) βλέπουμε ότι οι γραμμές ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων, ενώ οι ισοδυναμικές γραμμές δίνονται από την σχέση  $\theta = \text{σταθερό}$ , είναι δηλαδή ευθείες γραμμές που περνούν από την αρχή των αξόνων. Παρατηρούμε ότι οι ισοδυναμικές γραμμές της πηγής είναι γραμμές ροής της δίνης, και οι γραμμές ροής της πηγής είναι ισοδυναμικές γραμμές της δίνης. Δύο ροές που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται συζυγείς.



Σχήμα 1.4: Γραμμές ροής (μπλε συνεχείς) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομμένες κόκκινες) για σημειακή δίνη. Η κίνηση του ρευστού γίνεται κατά την αντι-ωρολογιακή φορά για  $\Gamma > 0$ , και ωρολογιακή φορά για  $\Gamma < 0$ .

Το πεδίο ταχυτήτων εκφράζεται πολύ απλά σε πολικές συντεταγμένες  $u_r, u_\theta$  ως εξής:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (1.54)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.55)$$

Η ένταση της δίνης είναι ίση με την κυκλοφορία γύρω από μία κλειστή καμπύλη που περικλείει την αρχή των αξόνων, όπως μπορεί να επαληθευθεί εύκολα, υπολογίζοντας την κυκλοφορία γύρω από ένα κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Υπενθυμίζουμε ότι, επειδή η ροή είναι αστρόβιλη, η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων είναι ίση με το μηδέν.

### Δίπολο

Αρχίζουμε θεωρώντας δίπολο παράλληλο με τον άξονα των  $x$ , που είναι η ροή που περιγράφεται από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

$$w = -\frac{\mu}{z} \quad (1.56)$$

Οπου  $\mu$  είναι σταθερά και λέγεται ένταση του διπόλου.

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες το δυναμικό και η ροική συνάρτηση δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\phi = -\frac{\mu}{r} \cos \theta \quad (1.57)$$

$$\psi = \frac{\mu}{r} \sin \theta \quad (1.58)$$

Γιά να βρούμε τις γραμμές ροής θέτουμε  $\psi = C$ . Από την εξίσωση (1.58) βρίσκουμε ότι:

$$x^2 + y^2 - \frac{\mu}{C}y = 0 \quad (1.59)$$

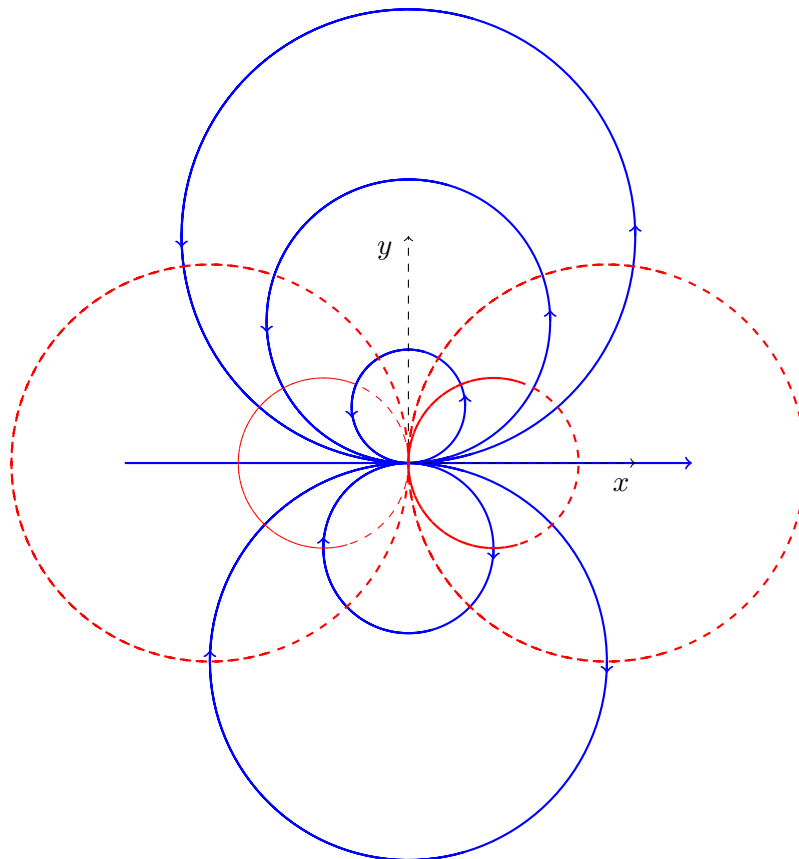
ή ισοδύναμα:

$$x^2 + \left(y - \frac{\mu}{2C}\right)^2 = \frac{\mu^2}{4C^2} \quad (1.60)$$

Βλέπουμε επομένως ότι κάθε γραμμή ροής είναι κύκλος με κέντρο το σημείο  $(0, \mu/(2C))$  και ακτίνα  $\mu/(2C)$ , είναι δηλαδή κύκλος με κέντρο σημείο του άξονα των  $y$  και εφαπτόμενος με τον άξονα των  $x$ . Οι γραμμές ροής απεικονίζονται στην εικόνα 2.

Γιά να βρούμε τις ισοδυναμικές γραμμές θέτουμε  $\phi = C$ . Από την εξίσωση (1.57) ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία όπως με τις γραμμές ροής βρίσκουμε ότι κάθε ισοδυναμική επιφάνεια ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:





Σχήμα 1.5: Γραμμές ροής (συνεχής μπλε γραμμή) και ισοδυναμικές γραμμές (διακεκομένη κόκκινη γραμμή) για δίπολο παράλληλο προς τον άξονα των  $x$ . Ο άξονας των  $x$  είναι επίσης γραμμή ροής. Για θετικές τιμές της παραμέτρου  $\mu$  οι γραμμές ροής διαγράφονται από τα σωματίδια του ρευστού κατά την αντιωρολογιακή φορά στο άνω ημιεπίπεδο, και κατά την ωρολογιακή φορά στο κάτω ημιεπίπεδο (όπως στο σχήμα). Για αρνητικές τιμές της παραμέτρου  $\mu$  αντίστροφα.

$$\left(x - \frac{\mu}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{\mu^2}{4C^2} \quad (1.61)$$

Βλέπουμε επομένως ότι κάθε ισοδυναμική γραμμή είναι κύκλος με κέντρο το σημείο  $(\mu/(2C), 0)$  και ακτίνα  $\mu/(2C)$ , είναι δηλαδή κύκλος με κέντρο σημείο του άξονα των  $x$  και εφαπτόμενος με τον άξονα των  $y$ .

Το πεδίο ταχυτήτων δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2} \cos \theta \quad (1.62)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\mu}{r^2} \sin \theta \quad (1.63)$$

Παρατηρώντας τα πρόσημα των δύο συνιστωσών της ταχύτητας στα τέσσερα τεταρτημόρια του επιπέδου βλέπουμε ότι το ρευστό “ανοίγει” μπροστά από το δίπολο, και κλείνει πίσω του, προσομοιάζει δηλαδή την κίνηση του ρευστού λόγω αντικειμένου που κινείται παράλληλα προς τον άξονα των  $x$ .

Ενα δίπολο παράλληλο με τον άξονα των  $y$  είναι η ροή που περιγράφεται από το ακόλουθο μιγαδικό δυναμικό:

$$w = -i \frac{\mu}{z} \quad (1.64)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ότι η ροή αυτή είναι η συζυγής ροή της ροής λόγω διπόλου με τον άξονα των  $x$ , βρίσκουμε δηλαδή ότι το σχήμα γραμμών ροής/ισοδυναμικών γραμμών είναι το σχήμα της ροής λόγω διπόλου με τον άξονα των  $x$  γυρισμένο κατά γωνία ενενήντα μοιρών. Η ροή αυτή προσομοιάζει δηλαδή την κίνηση του ρευστού λόγω αντικειμένου που κινείται παράλληλα προς τον άξονα των  $y$ .

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό του διπόλου, θεωρώντας δίπολο έντασης  $\mu$  παράλληλο με ευθεία που έχει γωνία κλίσεως ως προς τον άξονα των  $x$  ίση με μιά οποιαδήποτε γωνία  $\alpha$ . Το μιγαδικό δυναμικό ορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$w = -i \frac{\mu \cos \alpha + i \mu \sin \alpha}{z} \quad (1.65)$$

Η εξίσωση (1.65) προσομοιάζει την ροή αντικειμένου το οποίο κινείται παράλληλα με ευθεία που έχει κλίση ίση με την γωνία  $\alpha$ .

Θα δούμε στη συνέχεια ότι το δυναμικό ροής γύρω από οποιοδήποτε αντικείμενο τείνει μακριά από το αντικείμενο στο δυναμικό διπόλου (εξίσωση (1.65))

### Αρχή της συμμετρίας

Κατ'αρχήν σημειώνουμε ότι αν η πηγή, δίνη, ή δίπολο δεν βρίσκονται στην αρχή των αξόνων, αλλά σε κάποιο τυχόν σημείο με συντεταγμένες  $(x_0, y_0)$ , τα αντίστοιχα μιγαδικά δυναμικά τροποποιούνται ως εξής:

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad w = -\frac{\mu}{z - z_0} \quad (1.66)$$

όπου  $z_0 = x_0 + i y_0$ .

Αν υπάρχει μιά άπειρη επίπεδη πλάκα, όπως μπορεί να επαληθευθεί εύκολα, το δυναμικό της ροής προκύπτει από το άθροισμα του δυναμικού της πηγής, δίνης, ή διπόλου και το δυναμικό της κατοπτρικής της εικόνας ως προς την πλάκα. Αυτό είναι γνωστό σαν η αρχή της συμμετρίας.

Γιά παράδειγμα, αν η πλάκα συμπίπτει με τον άξονα των  $x$ , το δυναμικό για πηγή, δίνη, ή δίπολο γίνεται αντίστοιχα ως εξής:

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0^*) \quad (1.67)$$

$$w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0^*) \quad (1.68)$$

$$w = -\frac{\mu}{z - z_0} - \frac{\mu}{z - z_0^*} \quad (1.69)$$

όπου  $z_0^* = x_0 - i y_0$ .

**Άσκηση 1:** Να βρεθεί το δυναμικό της ροής για σημειακή πηγή σε ορθή γωνία.

**Λύση:** Εστω  $(x_0, y_0)$  η θέση της πηγής. Θέτουμε  $z_0 = x_0 + i y_0$ . Ως γνωστόν, ο μετασχηματισμός  $\zeta = z^2$  μετατρέπει την ορθή γωνία σε ευθεία γωνία. Οπότε, χρησιμοποιώντας την αρχή της συμμετρίας, βρίσκουμε μετά από κάποιες αναγωγές όρων ότι το δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w = \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0^*) + \frac{m}{2\pi} \ln(z + z_0) + \frac{m}{2\pi} \ln(z + z_0^*)$$

**Άσκηση 2:** Θεωρείστε ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα  $U$  και σημειακή πηγή έντασης  $m$ . Να αποδειχθεί ότι μοντελοποιεί την ροή γύρω από ημίαιπρο αντικείμενο μεγίστου πλάτους  $m/U$ .

**Λύση**

Επιλέγοντας την αρχή των αξόνων να συμπίπτει με τη θέση της πηγής το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$w = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln z \quad (1.70)$$

Οπότε η μιγαδική ταχύτητα είναι:

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{2\pi z} \quad (1.71)$$

Θετοντας την μιγαδική ταχύτητα ίση με το μηδέν βρίσκουμε ότι το μοναδικό σημείο ανακοπής βρίσκεται πάνω στον άξονα των  $x$  στην θέση  $z = -a$ , όπου  $a$ :

$$a = \frac{m}{2\pi U} \quad (1.72)$$

Η ροική συνάρτηση δίνεται από την ακόλουθη σχέση (χρησιμοποιώντας ανάμεικτες καρτεσιανές-πολικές συντεταγμένες):

$$\Psi = Uy + \frac{m}{2\pi}\theta \quad (1.73)$$

Οπότε οι γραμμές ροής προκύπτουν θέτοντας  $\Psi = C$ . Η γραμμή ροής που περνά από το σημείο ανακοπής έχει  $C = m/2$ , οπότε η εξίσωση της είναι:

$$Uy + \frac{m}{2\pi}\theta = \frac{m}{2} \quad (1.74)$$

Η γραμμή ροής αποτελείται από το μέρος του πραγματικού άξονα  $x < -a$ , και από δύο συμμετρικές ως προς τον άξονα των  $x$  καμπύλες που ξεκινούν από το σημείο ανακοπής και καταλήγουν στο άπειρο παράλληλα με την σταθερή ροή. Οι δύο αυτές καμπύλες μπορούν να θεωρηθούν σαν το περίγραμμα ενός ημιάπειρου αντικείμενου που εκτείνεται από το σημείο ανακοπής μέχρι το άπειρο. Το σχήμα θυμίζει λίγο την πλώρη ενός πλοίου.

Από την εξίσωση (1.74) προκύπτει ότι, για  $x \rightarrow \infty$  και  $\theta \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow m/(2U)$  (η άνω καμπυλη), και  $y \rightarrow -m/(2U)$  (η κάτω καμπυλη). Επομένως το μέγιστο πλάτος του αντικείμενου είναι πράγματι ίσο με  $2m/(2U) = m/U$ .

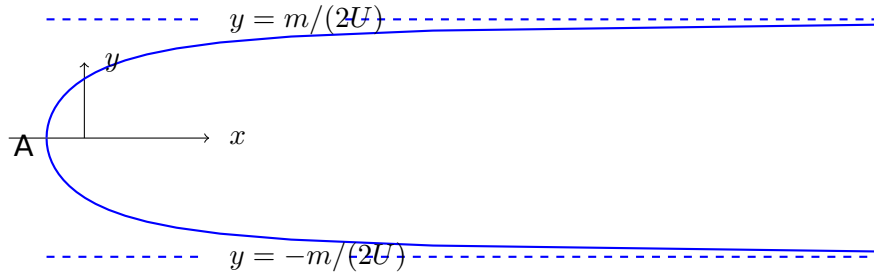
Ασκησης συνέχεια: Χρησιμοποιώντας ένα ορθογωνικό όγκο ελέγχου που ξεκινά πολύ πριν από το αντικείμενο και το περιβάλλει, αποδείξτε ότι η δύναμη στο αντικείμενο δίνεται από τη σχέση:

$$F_x = p_\infty h$$

Οπου  $p_\infty$  είναι η πίεση περιβάλλοντος, και  $h = m/U$

Ασκηση 3: Βρείτε το αντικείμενο που σχηματίζεται από την υπέρθεση μιάς πηγής έντασης  $m$ , μιάς καταβόθρας επίσης έντασης  $m$ , και ομοιόμορφης ροής με ταχύτητα  $U$  παράλληλη προς την ευθεία που ενώνει πηγή και καταβόθρα.

Λύση



Σχήμα 1.6: Ροή που προκύπτει από υπέρθεση ομοιόμορφης ροής παράλληλης με τον άξονα των  $x$ , και σημειακής πηγής στην αρχή των αξόνων. Η γραμμή ροής που αρχικά ταυτίζεται με τον άξονα των  $x$  διακλαδίζεται στο σημείο ανακοπής A σε δύο συμμετρικές καμπύλες σχηματίζοντας ένα ημιάπειρο αντικείμενο με μέγιστο πάχος  $m/U$ .

Εστω  $2a$  η απόσταση ανάμεσα στην πηγή και στην καταβόθρα. Χωρίς απώλεια γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε τους άξονες έτσι ώστε η πηγή να είναι στο σημείο  $(-a, 0)$ , και η καταβόθρα στο σημείο  $(a, 0)$ . Το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln(z + a) - \frac{m}{2\pi} \ln(z - a) \quad (1.75)$$

Η μιγαδική ταχύτητα είναι ίση με:

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{2\pi(z + a)} - \frac{m}{2\pi(z - a)} \quad (1.76)$$

Θέτοντας τη μιγαδική ταχύτητα ίση με το μηδέν βρίσκουμε ότι τα σημεία ανακοπής της ροής βρίσκονται στις θέσεις:

$$z = \pm \sqrt{\frac{ma}{\pi U} + a^2} \quad (1.77)$$

Η ροική συνάρτηση δίνεται από την σχέση:

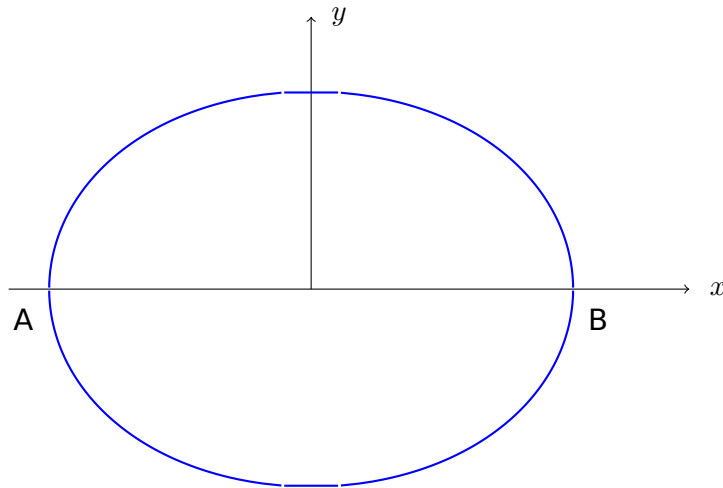
$$\Psi = Uy + \frac{m}{2\pi}\theta_1 - \frac{m}{2\pi}\theta_2 \quad (1.78)$$

Οπου  $\theta_1, \theta_2$  ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\theta_1 = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x+a}\right) \quad \theta_2 = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x-a}\right) \quad (1.79)$$

Η γραμμή ροής που περνά από τα δύο σημεία ανακοπής έχει  $\Psi = 0$ . Αριστερά από το πρώτο σημείο ανακοπής και δεξιά από το δεύτερο συμπίπτει με τον άξονα των  $x$ . Στο πρώτο σημείο ανακοπής διακλαδίζεται σε δύο συμμετρικές ως προς τον άξονα των  $x$  καμπύλες, οι οποίες ξαναενώνονται στο δεύτερο σημείο ανακοπής (Σχήμα 3).

Άσκηση 4: Θεωρείστε μιά πηγή και μιά καταβόθρα ίσης έντασης  $m$  σε απόσταση  $2a$  μεταξύ τους. Να αποδειχθεί ότι οι γραμμές ροής είναι τόξα κύκλων.



Σχήμα 1.7: Αντικείμενο που σχηματίζεται από την υπέρθεση μίας πηγής έντασης  $m$ , μίας καταβόθρας επίσης έντασης  $m$ , και ομοιόμορφης ροής με ταχύτητα  $U$  παράλληλη προς την ευθεία που ενώνει πηγή και καταβόθρα. A και B είναι τα σημεία ανακοπής της ροής.

Επιλέγουμε τον άξονα των  $x$  να συμπίπτει με την ευθεία που ενώνει την πηγή και την καταβόθρα, και κέντρο των αξόνων το μέσο της μεταξύ τους απόστασης. Η πηγή καταλαμβάνει τη θέση  $(a, 0)$ , και η καταβόθρα τη θέση  $(-a, 0)$ . Επομένως το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από τη σχέση:

$$w = -\frac{m}{2\pi} \ln(z+a) + \frac{m}{2\pi} \ln(z-a)$$

Θέτουμε:

$$z-a = |z-a| \exp(i\theta_1), \quad z+a = |z+a| \exp(i\theta_2)$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για το μιγαδικό δυναμικό, και παίρνοντας το φανταστικό μέρος, καταλήγουμε ότι η ροική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

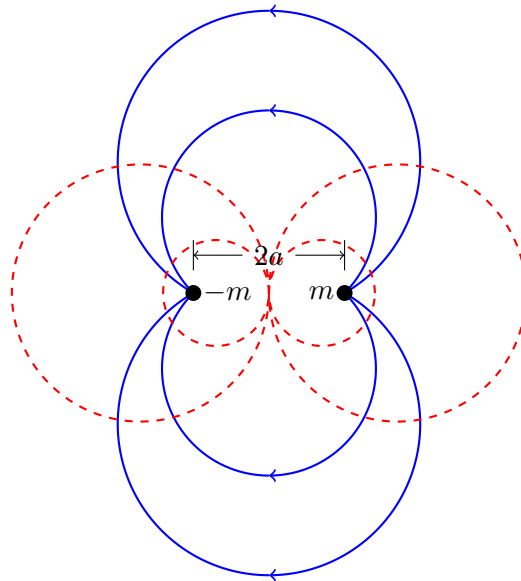
$$\Psi = \frac{m}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

Οι γραμμές ροής δίνονται από τη σχέση  $\Psi = \text{σταθερά}$ , η οποία οδηγεί στο  $\theta_1 - \theta_2 = \text{σταθερά}$ . Ως γνωστόν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν αυτή τη σχέση είναι δύο συμμετρικά ως προς τον άξονα των  $x$  τόξα κύκλου που περνούν από τα δύο σημεία  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$ . Η φορά διαγραφής των γραμμών ροής (των τόξων κύκλου δηλαδή) είναι από την πηγή προς την καταβόθρα. Φυσικά το ίδιο προκύπτει εκφράζοντας τα  $\theta_1, \theta_2$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες και καταλήγοντας σε εξίσωση κύκλου.

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος του μιγαδικού δυναμικού καταλήγουμε ότι το πραγματικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{|z-a|}{|z+a|}$$

Οι ισοδυναμικές γραμμές δίνονται από τη σχέση  $|z-a|/|z+a| = C$ , που ως γνωστόν είναι κύκλοι (Απολλώνιοι κύκλοι). Εύκολα μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά την εξίσωση τους.



Σχήμα 1.8: Γραμμές ροής (μπλε συνεχείς), και ισοδυναμικές γραμμές (κόκκινες διακεκομμένες), για πηγή έντασης  $m$  και πηγή έντασης  $-m$  (καταβόθρα) σε απόσταση  $2a$  μεταξύ τους.

Άσκηση 5: Βρείτε το όριο της ροής στην άσκηση 4 όταν  $a \rightarrow 0$  με  $(ma/\pi) \rightarrow \mu$ , όπου  $\mu$  σταθερά, και αποδείξτε ότι είναι δίπολο παράλληλο με τον άξονα  $x$  με ένταση  $\mu$ .

Παίρνουμε το όριο του μιγαδικού δυναμικού της άσκησης 4 όταν  $a \rightarrow 0$  με  $(ma/\pi) \rightarrow \mu$ , και έχουμε ότι:

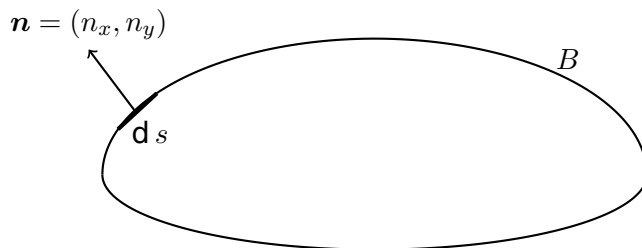
$$\begin{aligned} w(z) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2\pi} \ln(z-a) - \frac{m}{2\pi} \ln(z+a) \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{2ma}{2\pi} \frac{\ln(z-a) - \ln(z+a)}{2a} \right) = \\ &= -\mu \frac{d}{dz} \ln z = -\frac{\mu}{z} \end{aligned}$$

Αποδείξαμε δηλαδή το ζητούμενο. Παρατηρούμε ότι, για  $a \rightarrow 0$ , το σχήμα της άσκησης 4 ανάγεται στο σχήμα γραμμών ροής και ισοδυναμικών του δίπολου παράλληλου με τον άξονα  $x$ .

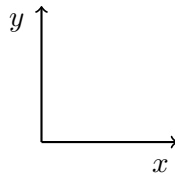
### 1.2.4 Δύναμη και ροπή σε αντικείμενο σε μόνιμη αστρόβιλη ροή: Τα θεωρήματα του Blasius

Τα θεωρήματα του Blasius εκφράζουν την δύναμη και τη ροπή σε σώμα σε μόνιμη αστρόβιλη ροή συναρτήσει του μιγαδικού δυναμικού. Η βασική διευκόλυνση που προκύπτει από αυτό είναι το ότι μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των υπολοίπων από την θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Θεωρούμε αντικείμενο  $B$  σε μόνιμη διδιάστατη αστρόβιλη ροή με μιγαδικό δυναμικό  $w(z)$ . Εστω  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  η δύναμη ανά μονάδα πλάτους που ασκείται στο σώμα, και  $M_0$  η ροπή ανά μονάδα πλάτους ως προς την αρχή των αξόνων που ασκείται στο σώμα (1.9).



$$\mathbf{F} = - \int_B p \mathbf{n} \, ds$$



$$M_0 = - \int_B p (x n_y - y n_x) \, ds$$

Σχήμα 1.9: Δύναμη  $\mathbf{F}$  και ροπή  $M_0$  ως προς την αρχή των αξόνων σε αντικείμενο με περίγραμμα  $B$  σε μόνιμη αστρόβιλη ροή.

Η δύναμη και η ροπή στο αντικείμενο δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις (θεωρήματα Blasius)

#### 1ο Θεώρημα Blasius

Οι συνιστώσες της δύναμης ανά μονάδα πλάτους  $F_x, F_y$  δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad (1.80)$$

#### 2ο Θεώρημα Blasius

Η ροπή ανά μονάδα πλάτους ως προς την αρχή των αξόνων  $M_0$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$M_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_C z \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right] \quad (1.81)$$



Οπου  $\operatorname{Re}[A]$  συμβολίζει το πραγματικό μέρος του  $A$ .

Και τα δύο θεωρήματα είναι εναλλακτικές εκφράσεις των βασικών εξισώσεων για την δύναμη και τη ροπή που είδαμε στο κεφάλαιο 1 για μόνιμη διδιάστατη αστρόβιλη ροή, κάνοντας χρήση του μιγαδικού δυναμικού της ροής.

Ξεκινάμε με την απόδειξη του πρώτου θεωρήματος. Θεωρούμε την δύναμη ανά μονάδα πλάτους που ασκείται σε απειροστό τμήμα της περιμέτρου  $B$  μήκους  $ds$ . Οι δύο συνιστώσες  $dF_x, dF_y$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$dF_x = -pn_x ds \quad (1.82)$$

$$dF_y = -pn_y ds \quad (1.83)$$

Οπου  $(n_x, n_y)$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς το τμήμα  $ds$ , που κατευθύνεται έξω από το σώμα, και  $C$  μία οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περικλείει μόνο το σώμα  $B$ .

Το εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα στο τμήμα  $ds$  είναι  $(dx/ds, dy/ds)$ , επομένως το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση  $\mathbf{n} = dy/ds, -dx/ds$ . Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (1.82) (1.83) έχουμε ότι:

$$dF_x = -p dy \quad (1.84)$$

$$dF_y = p dx \quad (1.85)$$

Γράφοντας τις εξισώσεις (1.84) (1.85) σε μιγαδική μορφή προκύπτει ότι:

$$dF_x - i dF_y = -p dy - ip dx = -ip(dx - i dy) = -ip dz^* \quad (1.86)$$

Οπου  $dz = dx + i dy$ , και  $A^*$  συμβολίζει τον συζυγή του  $A$ .

Ολοκληρώνοντας την γύρω από το αντικείμενο  $B$  έχουμε:

$$F_x - iF_y = -i \int_C p dz^* \quad (1.87)$$

Από την αρχή του Bernoulli έχουμε ότι σε όλο το πεδίο ροής ισχύει:

$$p + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) = k \quad (1.88)$$

Οπου  $k$  σταθερά.

Επομένως:

$$p = k - \frac{1}{2}\rho \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \quad (1.89)$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση (1.89) στην (1.87) και βρίσκουμε ότι:

$$F_x - iF_y = \frac{i}{2}\rho \int_C \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dz^* \quad (1.90)$$

Για να καταλήξουμε στην (1.13) χρησιμοποιήσαμε ότι:

$$\int_C k dz^* = \left( \int_C k dz \right)^* = 0 \quad (1.91)$$

Τώρα σκεφτόμαστε ως εξής: Αφού η ροή είναι μόνιμη η ταχύτητα του ρευστού εφάπτεται στο αντικείμενο, δηλαδή το περίγραμμα  $B$  είναι γραμμή ροής. Πάνω στο  $B$  έχουμε επομένως ότι  $\psi = \text{σταθερό}$ , ή, ισοδύναμα ότι  $d\psi = 0$ . Αρα πάνω στο  $B$  έχουμε  $dw = d\phi + i d\psi = d\phi = dw^*$ . Αυτό μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε την εξίσωση (1.90) ως εξής:

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= \frac{i}{2}\rho \int_C \frac{dw}{dz} \left( \frac{dw}{dz} \right)^* dz^* = \frac{i}{2}\rho \int_C \frac{dw}{dz} dw^* = \\ &= \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{dw}{dz} dw = \frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (1.92)$$

Επειδή η συνάρτηση που ολοκληρώνεται στην (1.92) είναι αναλυτική, από το θεώρημα του Cauchy, το ολοκλήρωμα πάνω στην καμπύλη  $B$  μπορεί να αντικατασθεί από το ολοκλήρωμα σε οποιαδήποτε καμπύλη  $C$  που περικλείει την καμπύλη  $B$ , και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του 1ου θεωρήματος του Blasius.

Γιά το δεύτερο θεώρημα θεωρούμε την ροπή της δύναμης ( $dF_x, dF_y$ ) ως προς την αρχή των αξόνων (υπενθυμίζουμε ότι η αντι-ωρολογιακή φορά θεωρείται θετική):

$$dM_0 = -dF_x y + dF_y x \quad (1.93)$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (1.84), (1.85) στην (1.93) και ολοκληρώνουμε γύρω από το αντικείμενο  $B$ , οπότε βρίσκουμε ότι:

$$M_0 = \int_B z p(x dx + y dy) = \text{Re} \left[ \int_B z p dz^* \right] \quad (1.94)$$

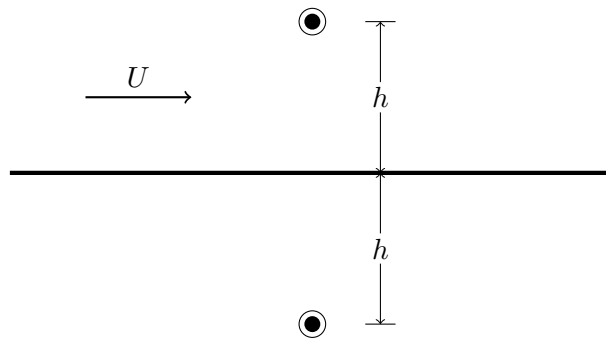
Αντικαθιστώντας την (1.89) στην (1.94) έχουμε:

$$M_0 = -\operatorname{Re}\left[\int_B z \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dz^*\right] \quad (1.95)$$

Γιά την μετάβαση από την (1.94) στην (1.95) κάναμε το ακόλουθο βήμα:

$$\operatorname{Re}\left[\int_B z k dz^*\right] = k \int_B (x dx + y dy) = k \int_B d\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) = 0 \quad (1.96)$$

Ακολουθώντας για την εξίσωση (1.95) την ίδια ακριβώς διαδικασία όπως κάναμε για την (1.90) αποδεικνύουμε το 2ο θεώρημα του Blasius.



Σχήμα 1.10: Ομοιόμορφη ροή και δίπολο σε απόσταση  $h$  από άπειρη πλάκα

Άσκηση: Να υπολογιστεί η δύναμη σε αντικείμενο που κινείται με ταχύτητα  $U$  παράλληλα με άπειρη επίπεδη πλάκα σε απόσταση  $h$ .

ΛΥΣΗ

Επιλέγουμε σύστημα αναφοράς που κινείται με το αντικείμενο, οπότε η ροή είναι μόνη, και η δύναμη υπολογίζεται με τη χρήση του θεωρήματος του Blasius (1.80). Επιλέγουμε τον άξονα  $x$  να συμπίπτει με την πλάκα. Υποθέτουμε ότι η απόσταση  $h$  είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του αντικειμένου, και κατά συνέπεια, το δυναμικό του μπορεί να προσεγγιστεί με αυτό του διπόλου. Η οριακή συνθήκη στην πλάκα μπορεί να ικανοποιηθεί με την αρχή της συμμετρίας. Εστω  $\mu$  η σταθερά του διπόλου για μοναδιαία ταχύτητα. Το μιγαδικό δυναμικό της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$w = Uz + \frac{U\mu}{z - ih} + \frac{U\mu}{z + ih}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1.80) και βρίσκουμε ότι:

$$F_x = 0, \quad F_y = -\frac{\pi \rho \mu^2 U^2}{2 h^3}$$

Βλέπουμε επομένως ότι το αντικείμενο δέχεται μια ελκτική δύναμη από την πλάκα.

### 1.2.5 Δύναμη και ροπή σε αντικείμενο σε άπειρο ρευστό

Με τα δύο θεωρήματα του Blasius μπορούμε να βγάλουμε γενικές εκφράσεις για τη δύναμη και τη ροπή σε αντικείμενο σε άπειρο ρευστό σε μόνιμη αστρόβιλη ροή.

Θεωρούμε μόνιμη αστρόβιλη ροή γύρω από αντικείμενο με περίγραμμα  $B$ . Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα στο άπειρο είναι σταθερή με συνιστώσες κατά  $x, y$  αντίστοιχα  $U, V$ . Η μιγαδική ταχύτητα  $dw/dz$  είναι αναλυτική συνάρτηση του  $z$  σε όλο το πεδίο ροής. Κατά συνέπεια μπορεί να παρασταθεί σαν το άθροισμα μιάς σειράς Laurent:

$$\frac{dw}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z^n} \quad (1.97)$$

Οπου  $A_n, n = 0, 1, 2, \dots$  είναι σταθερές.

Η σταθερά  $A_0$  είναι ίση με την μιγαδική ταχύτητα στο άπειρο, επομένως έχουμε ότι:

$$A_0 = U \cos \alpha - iU \sin \alpha = Ue^{-i\alpha} \quad (1.98)$$

Οπου  $U$  είναι το μέγεθος της ταχύτητας στο άπειρο, και  $\alpha$  η γωνία κλίσης της ταχύτητας στο άπειρο ως προς τον άξονα των  $x$ .

Η σταθερά  $A_1$  που πολλαπλασιάζει τον όρο  $1/z$  οφείλεται στην ύπαρξη κυκλοφορίας γύρω από το αντικείμενο, επομένως έχουμε:

$$A_1 = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (1.99)$$

Οπου  $\Gamma$  είναι η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη που περικλείει το αντικείμενο  $B$ .

Τέλος οι σταθερές  $A_n, n = 2, 3, \dots$  εξαρτώνται από το σχήμα του αντικειμένου (αλλά και από την ταχύτητα στο άπειρο).

Τώρα αν αντικαταστήσουμε τη σειρά (1.97) στα δύο θεωρήματα του Blasius θα βρούμε γενικές εκφράσεις για την δύναμη και την ροπή πάνω σε αντικείμενο σε μόνιμη αστρόβιλη ροή. Εδώ θα μας χρειαστεί ένα βασικό αποτέλεσμα από την ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων (που αποδεικνύεται πολύ εύκολα):

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = \begin{cases} 2i\pi & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases} \quad (1.100)$$

Οπου  $a$  είναι μία μιγαδική σταθερά, και  $C$  είναι οποιαδήποτε καμπύλη που περικλείει το  $a$ .

Ξεκινάμε με τον υπολογισμό της δύναμης ανά πλάτος στο αντικείμενο. Αντικαθιστούμε την σειρά (1.97) στην εξίσωση (1.80) και, με την βοήθεια της (1.100) και των (1.98) και (1.99), βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
F_x - \imath F_y &= \frac{\imath\rho}{2} \int_C \left( A_0^2 + \frac{2A_0A_1}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_2}{z^2} + \dots \right) \mathbf{d}z = \\
&= -2\pi\rho A_0A_1 = \imath\rho U e^{-\imath\alpha}\Gamma
\end{aligned} \tag{1.101}$$

Διαχωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (1.101) βρίσκουμε:

$$F_x = \rho U \Gamma \sin \alpha \tag{1.102}$$

$$F_y = -\rho U \Gamma \cos \alpha \tag{1.103}$$

Βλέπουμε ότι το μέγεθος της δύναμης είναι ίσο με  $\rho U \Gamma$ . Κατά συνέπεια το μέγεθος της δύναμης δεν εξαρτάται από το σχήμα του αντικειμένου (το οποίο επηρεάζει τους συντελεστές  $A_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ), αλλά μόνο από την ταχύτητα στο άπειρο και την κυκλοφορία γύρω από το σώμα. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η ταχύτητα είναι κάθετη προς της ταχύτητα στο άπειρο (επαληθεύεται πολύ εύκολα αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της ταχύτητας και της δύναμης, το οποίο μηδενίζεται). Η συνιστώσα της δύναμης που είναι κάθετη προς την εξωτερική ροή λέγεται δυναμική άνωση (ή άντωση), ενώ η συνιστώσα της δύναμης που είναι παράλληλη προς την εξωτερική ροή λέγεται αντίσταση.

Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (1.102), (1.103), για αντικείμενο σε μόνιμη ροή ιδανικού ρευστού μπορεί να υπάρχει δυναμική άνωση αν  $\Gamma \neq 0$ , αλλά όχι αντίσταση. Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό σαν παράδοξο του d' Alembert. Το παράδοξο του d' Alembert είναι παράδοξο ως προς το ότι αντιβαίνει την εμπειρία, είναι όμως συνεπές με την υπόθεση μηδενικού ιξώδους στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε. Αν υπήρχε δηλαδή αντίσταση, οπότε το εσωτερικό γινόμενο της ταχύτητας με την δύναμη θα ήταν μη μηδενικό, ένα αντικείμενο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα θα προσέδιδε ενέργεια στο ρευστό με σταθερό ρυθμό. Καθώς δεν υπάρχει ιξώδες για να αποσβέσει την αυτή ενέργεια, η κινητική ενέργεια του ρευστού θα έτεινε στο άπειρο.

Γιά τον υπολογισμό της ροπής αντικαθιστούμε την σειρά (1.97) στην εξίσωση (1.80) και, με την βοήθεια της (1.100) και των (1.98) και (1.99), καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}
M_0 &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_C z \left( A_0^2 + \frac{2A_0A_1}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_2}{z^2} + \dots \right) \mathbf{d}z \right] = \\
&= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} [2\imath\pi (A_1^2 + 2A_0A_2)] = -\rho \operatorname{Re} [2\pi\imath A_2 U e^{-\imath\alpha}]
\end{aligned} \tag{1.104}$$

Συμπεραίνουμε ότι η ροπή είναι ανάλογη με τον συντελεστή  $A_2$ , εξαρτάται δηλαδή από το σχήμα του αντικειμένου. Είναι δυνατόν η συνολική δύναμη στο αντικείμενο να είναι ίση με το μηδέν (αν  $\Gamma = 0$ ), αλλά η ροπή στο αντικείμενο να μην είναι μηδέν. Η ροπή (1.104) λέγεται ροπή Munk, και οφείλεται στη μη συμμετρική κατανομή της πίεσης γύρω από ένα αντικείμενο γενικού σχήματος.

### 1.2.6 Ροή γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής

Θεωρούμε αστρόβιλη ροή γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής με ακτίνα  $R$ . Όπως συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μιγαδική ταχύτητα δίνεται από την γενική έκφραση (1.97) :

$$\frac{dw}{dz} = U - i\frac{\Gamma}{2\pi z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \quad (1.105)$$

Όπου, χωρίς απώλεια γενικότητας λόγω της συμμετρίας του κύκλου, πήραμε την ταχύτητα στο άπειρο να είναι παράλληλη με τον άξονα των  $x$ .

Η οριακή συνθήκη πάνω στον κύλινδρο είναι:

$$un_x + vn_y = \operatorname{Re}[(u - w)(n_x + in_y)] = 0 \quad (1.106)$$

Όπου  $n_x, n_y$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την επιφάνεια του κυλίνδρου. Για κύλινδρο του οποίου το κέντρο είναι στην αρχή των αξόνων  $n_x + in_y = \exp(i\theta)$ . Αντικαθιστούμε την (1.105) με  $z = R \exp(i\theta)$  στην (1.106) και γράφοντας τους συντελεστές  $A_n$   $n = 2, 3, \dots$  σε πολική μορφή  $A_n = |A_n| \exp(i\beta_n)$  καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$U \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| R^{-n} \cos((n-1)\theta - \beta_n) = 0 \quad (1.107)$$

Για να ισχύει η (1.107) για κάθε τιμή του  $\theta$  θα πρέπει οι συντελεστές των όρων  $\cos n\theta$  να είναι όλοι μηδέν. Αυτό δίνει:

$$\beta_2 = \pi \quad (1.108)$$

$$|A_n| = \begin{cases} UR^n & n = 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases} \quad (1.109)$$

Συνεπώς το δυναμικό για ροή γύρω από κύλινδρο περιλαμβάνει μόνο την ομοιόμορφη ροή, ένα δίπολο με ένταση  $UR^2$ , και μιά κυκλοφορία  $\Gamma$ . Η μιγαδική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dw}{dz} = U\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi z} \quad (1.110)$$

Με ολοκλήρωση ως προς  $z$  το μιγαδικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$w = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (1.111)$$

Θέτουμε  $z = r \exp(i\theta)$  στην (1.111) και χωρίζουμε πραγματικό και φανταστικό μέρος. Αυτό μας δίνει το δυναμικό  $\phi$  και τη ροική συνάρτηση  $\psi$ :

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (1.112)$$

$$\psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (1.113)$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τα σημεία ανακοπής της ροής. Προς τούτο θέτουμε τη μιγαδική ταχύτητα ίση με το μηδέν, πράγμα που μας δίνει την ακόλουθη εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$z^2 - 2i\kappa z - R^2 = 0 \quad (1.114)$$

Όπου  $\kappa = \Gamma/(4\pi U)$ . Οι λύσεις της (1.114) είναι:

$$z_{1,2} = i\kappa \pm \sqrt{-\kappa^2 + R^2} \quad (1.115)$$

Διακρίνουμε επομένως τις ακόλουθες περιπτώσεις:

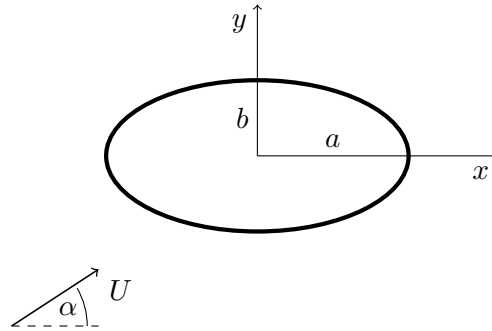
(i)  $\Gamma < 4\pi UR$  (ισοδυναμεί με  $\kappa < R$ ). Το υπόριζο στην εξίσωση (1.115) είναι θετικό, επομένως η (1.114) έχει δύο μιγαδικές λύσεις με ίσα φανταστικά μέρη και αντίθετα πραγματικά. Και οι δύο λύσεις έχουν απόλυτη τιμή ίση με  $R$ , επομένως υπάρχουν δύο σημεία ανακοπής πάνω στον κύλινδρο σε συμμετρικές θέσεις ως προς τον άξονα των  $y$ .

(ii)  $\Gamma > 4\pi UR$  (ισοδυναμεί με  $\kappa > R$ ). Το υπόριζο στην εξίσωση (1.115) είναι αρνητικό, επομένως η (1.114) έχει δύο φανταστικές λύσεις. Η λύση που αντιστοιχεί στο θετικό πρόσημο έχει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από  $R$ , ενώ η λύση που αντιστοιχεί στο αρνητικό πρόσημο έχει απόλυτη τιμή μικρότερη από  $R$  (βρίσκεται επομένως στο εσωτερικό του κυλίνδρου). Επομένως υπάρχει ένα σημείο ανακοπής που βρίσκεται στο άξονα των  $y$  έξω από τον κύλινδρο.

(iii) Τέλος για  $\Gamma = 4\pi UR$  (ισοδυναμεί με  $\kappa = R$ ) το υπόριζο στην εξίσωση (1.115) είναι ίσο με το μηδέν, που σημαίνει ότι υπάρχει ένα σημείο ανακοπής πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου, στην θέση  $z = iR$ .

Από τις γενικές εκφράσεις για τη δύναμη και τη ροπή σε αντικείμενο προκύπτει ότι για κύλινδρο με κυκλική διατομή έχουμε:

$$F_x = 0 \quad (1.116)$$

Σχήμα 1.11: Ροή γύρω από έλλειψη με ημιάξονες  $a$  και  $b$ 

$$F_y = -\rho U \Gamma \quad (1.117)$$

$$M_0 = 0 \quad (1.118)$$

Η τελευταία σχέση είναι αναμενόμενη ακόμα και χωρίς κανένα υπολογισμό, επειδή οι δυνάμεις λόγω πίεσης είναι κάθετες προς την επιφάνεια του κυλίνδρου και κατά συνέπεια περνούν από το κέντρο του κυλίνδρου και δίνουν μηδενική ροπή ως προς το κέντρο του κυλίνδρου.

### 1.2.7 Ροή γύρω από κύλινδρο ελλειπτικής διατομής

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την λύση για αστρόβιλη ροή γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής για να υπολογίσουμε αστρόβιλη ροή με κυκλοφορία γύρω από κύλινδρο ελλειπτικής διατομής με την βοήθεια της κατάλληλης σύμμορφης απεικόνισης.

Θεωρούμε λοιπόν διδιάστατη αστρόβιλη ροή με ταχύτητα  $U$  στο άπειρο γύρω από μία έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα  $a$  και μικρό ημιάξονα  $b$ . Θεωρούμε ότι ο άξονας των  $x$  συμπίπτει με τον μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης, και ο άξονας των  $y$  με τον μικρό ημιάξονα. Αντίθετα με την ροή γύρω από κύκλο, η κλίση της ταχύτητας της ροής ως προς τον άξονα των  $x$  έχει σημασία, και συμβολίζουμε με  $\alpha$  την γωνία της ταχύτητας στο άπειρο με τον άξονα των  $x$  (Εικόνα 3).

Θα επιλύσουμε την ροή χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό του Joukowski που απεικονίζει το επίπεδο  $\zeta = \xi + i\eta$  στο επίπεδο  $z = x + iy$  μέσα από την ακόλουθη σχέση:

$$z = \zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta} \quad (1.119)$$

Οπου  $\lambda$  είναι μία σταθερά. Η απεικόνιση δεν είναι ένα προς ένα, επειδή, όπως προκύπτει από τον ορισμό, τα σημεία  $\zeta$  και  $\lambda^2/\zeta$  απεικονίζονται στο ίδιο  $z$ . Συνέπεια αυτού είναι ότι



το εσωτερικό του κύκλου  $|\zeta| = \lambda$  απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού Joukowski σε ολόκληρο το επίπεδο  $z$ , αλλά και το εξωτερικό του κύκλου  $|\zeta| = \lambda$  επίσης απεικονίζεται σε όλο το επίπεδο  $z$ .

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Joukowski προκύπτει επιλύοντας την (1.119) ως προς  $\zeta$ , και δίνεται από την σχέση:

$$\zeta = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4\lambda^2}) \quad (1.120)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός (1.120) έχει δύο κλαδικά σημεία στα σημεία  $z = \pm 2\lambda$ . Για να είναι και ο αντίστροφος μετασχηματισμός μιά αναλυτική συνάρτηση, επιλέγουμε τον ένα κλάδο της συνάρτησης (αυτόν που αντιστοιχεί στο θετικό πρόσημο μπροστά από το ριζικό) και ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα ως εξής:

$$z - 2\lambda = r_1 e^{i\theta_1} \quad 0 < \theta_1 < 2\pi \quad (1.121)$$

$$z + 2\lambda = r_1 e^{i\theta_2} \quad 0 < \theta_2 < 2\pi \quad (1.122)$$

Οπότε η αντίστροφη απεικόνιση γράφεται ως εξής:

$$\zeta = \frac{1}{2}(z + \sqrt{r_1 r_2} \exp(i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})) \quad (1.123)$$

Με τους ορισμούς (1.121), (1.122) υπάρχει μιά κλαδική γραμμή στο μέρος του πραγματικού άξονα  $-2\lambda < \xi < \lambda$ , που όμως είναι εντός της έλλειψης (δηλαδή εκτός του πεδίου ροής), επομένως η αντίστροφη απεικόνιση (1.123) είναι επίσης αναλυτική συνάρτηση εντός του πεδίου ροής.

Θεωρούμε κύκλο στο επίπεδο  $\zeta$  με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $R$ :

$$\zeta = R e^{i\theta} \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (1.124)$$

Αντικαθιστώντας την (1.124) στην εξίσωση (1.119) και χωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος βλέπουμε ότι η εικόνα του κύκλου στο επίπεδο  $z$  δίνεται από τις ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = (R + \frac{\lambda^2}{R}) \cos \theta \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (1.125)$$

$$y = (R - \frac{\lambda^2}{R}) \sin \theta \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (1.126)$$

Οι εξισώσεις (1.125) (1.126) παριστάνουν σε παραμετρική μορφή έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα  $R + \lambda^2/R$  και μικρό ημιάξονα  $R - \lambda^2/R$ . Για την δεδομένη έλλειψη με ημιάξονες  $a, b$  οι κατάλληλες τιμές των  $R, \lambda$  είναι:

$$R = \frac{1}{2}(a + b) \quad (1.127)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2} \quad (1.128)$$

Επιλέγοντας την τιμή του  $\lambda$  από την εξίσωση (1.128) η έλλειψη με ημιάξονες  $a, b$  είναι εικόνα κύκλου με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα που ορίζεται από την (1.127). Παρατηρούμε ότι αν το αντικείμενο είναι κύκλος ( $a = b$ ) η τιμή του  $\lambda$  μηδενίζεται, και ο μετασχηματισμός Joukowski είναι απλά ο ταυτοτικός μετασχηματισμός  $z = \zeta$ .

Η ροή στο επίπεδο  $\zeta = \xi + i\eta$  έρχεται υπό γωνία  $\alpha$  ως προς τον άξονα των  $\xi$ . Επομένως η εξίσωση (1.111) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως έχει. Γι' αυτό εκτελούμε πρώτα μία περιστροφή των αξόνων κατά γωνία  $\alpha$ , οπότε στο νέο σύστημα αξόνων  $\xi_1, \eta_1$  η ροή είναι παράλληλη προς τον άξονα των  $\xi_1$ . Κατά συνέπεια το μιγαδικό δυναμικό δίνεται από την σχέση:

$$W = U\left(\zeta_1 + \frac{R^2}{\zeta_1}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \zeta_1 \quad (1.129)$$

Η περιστροφή των αξόνων που κάναμε περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\xi_1 = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (1.130)$$

$$\eta_1 = \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha \quad (1.131)$$

Σε μιγαδική μορφή οι εξισώσεις (1.130) και (1.131) γράφονται ως εξής:

$$\zeta_1 = \zeta e^{-i\alpha} \quad (1.132)$$

Και αντίστροφα:

$$\zeta = \zeta_1 e^{i\alpha} \quad (1.133)$$

Αντικαθιστούμε την (1.133) στην (1.129) και έχουμε το μιγαδικό δυναμικό στο επίπεδο  $\zeta$ :

$$W = U\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{\zeta} e^{i\alpha}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \zeta \quad (1.134)$$

Αντίστοιχα, η μιγαδική ταχύτητα δίνεται από την σχέση:

$$\frac{dW}{d\zeta} = U(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{\zeta^2}e^{i\alpha}) - i\frac{\Gamma}{2\pi\zeta} \quad (1.135)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του Joukowski δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστος, οπότε για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας σε τυχόν σημείο  $z$  ενεργούμε ως εξής: Βρίσκουμε πρώτα την εικόνα του  $z$  στο επίπεδο  $\zeta$  χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.123). Μετά υπολογίζουμε την μιγαδική ταχύτητα χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγωγίσις σύνθετης συνάρτησης:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{1}{dz/d\zeta} = (U(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{\zeta^2}e^{i\alpha}) - i\frac{\Gamma}{2\pi\zeta}) \frac{1}{1 - \lambda^2/\zeta^2} \quad (1.136)$$

Για τις συνιστώσες της δύναμης ανά μονάδα πλάτους πάνω στην έλλειψη από τις γενικές εκφράσεις (1.102) και (1.102) έχουμε ότι:

$$F_x = \rho U \Gamma \sin \alpha \quad (1.137)$$

$$F_y = -\rho U \Gamma \cos \alpha \quad (1.138)$$

Για την ροπή ανά μονάδα πλάτους πάνω στην έλλειψη έχουμε την γενική έκφραση (1.104), αλλά ο συντελεστής  $A_2$  είναι άγνωστος. Η τιμή του  $A_2$  μπορεί να υπολογιστεί παρατηρώντας ότι, από την γενική έκφραση (1.97), αν πολλαπλασιάσουμε επί  $z$  και ολοκληρώσουμε πάνω σε μία καμπύλη  $C$  που περικλείει την έλλειψη, από την έκφραση (1.100) προκύπτει ότι:

$$A_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_C z \frac{dw}{dz} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\zeta} z(\zeta) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta \quad (1.139)$$

Όπου  $C_\zeta$  η εικόνα της καμπύλης  $C$  στο επίπεδο  $\zeta$ . Κατά συνέπεια η (1.139) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\zeta} (\zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta}) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\zeta} (\zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta}) (U(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{\zeta^2}e^{i\alpha}) - i\frac{\Gamma}{2\pi\zeta}) d\zeta \end{aligned} \quad (1.140)$$

Εκτελώντας τα γινόμενα παραγόντων στην (1.140) και χρησιμοποιώντας πάλι την έκφραση (1.100) καταλήγουμε στο ότι:

$$A_2 = U(\lambda^2 e^{-i\alpha} - R^2 e^{i\alpha}) \quad (1.141)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (1.127) και (1.128) για  $R$  και  $\lambda$  έχουμε την ακόλουθη έκφραση για τον συντελεστή  $A_2$ :

$$A_2 = \frac{1}{4}U((a^2 - b^2)e^{-i\alpha} - (a + b)^2e^{i\alpha}) \quad (1.142)$$

Αντικαθιστούμε τώρα την (1.142) στην γενική έκφραση (1.104) και βρίσκουμε την ροπή πάνω στην έλλειψη:

$$\begin{aligned} M_0 &= -2\pi\rho \operatorname{Re}[iUe^{-i\alpha}\frac{1}{4}U((a^2 - b^2)e^{-i\alpha} - (a + b)^2e^{i\alpha})] = \\ &= -\frac{1}{2}\pi\rho U^2(a^2 - b^2) \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (1.143)$$

Συμπεραίνουμε ότι για  $a \neq b$  η ροπή Munk είναι μη μηδενική, εκτός αν η ροή έρχεται παραλληλα προς τον μεγάλο ή τον μικρό άξονα της έλλειψης (που είναι και άξονες συμμετρίας της έλλειψης).

### 1.2.8 Ροή γύρω από κεκλιμένη επίπεδη πλάκα-Συνθήκη του Kutta

Αστρόβιλη ροή γύρω από ελλειπτικό κύλινδρο έχει ενδιαφέρον για πρακτικές εφαρμογές κυρίως για μία υποπερίπτωση: Αυτή της επίπεδης πλάκας. Επίπεδη πλάκα υπό κλίση είναι ένα ικανοποιητικό μοντέλο για λεπτές συμμετρικές διατομές. Χρησιμοποιώντας ορολογία υδροτομών θα αποκαλούμε το μπροστινό άκρο της πλάκας *άκρο πρόσπτωσης*, και το πίσω άκρο *άκρο εκφυγής*. Αν συμβολίσουμε με  $c$  το μήκος της πλάκας, που αποκαλείται *χορδή* στις υδροτομές, έχουμε ότι:

$$a = \frac{c}{2} \quad b = 0 \quad (1.144)$$

Από τις εξισώσεις (1.127) και (1.128) προκύπτει ότι οι παράμετροι  $R$  και  $\lambda$  δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$R = \lambda = \frac{c}{4} \quad (1.145)$$

Οι δύο συνιστώσες της δύναμης και η ροπή δίνονται από τις σχέσεις (1.137) και (1.138), ενώ οι σχέσεις (1.145) προσδιορίζουν τα  $R$  και  $\lambda$ . Το πρόβλημα βέβαια παραμένει ότι η κυκλοφορία  $\Gamma$  είναι άγνωστη.

Η τιμή της κυκλοφορίας μπορεί να προσδιοριστεί από την φυσικά εύλογη συνθήκη ότι η ταχύτητα στο άκρο εκφυγής να είναι πεπερασμένη. Η συνθήκη αυτή λέγεται *συνθήκη του Kutta*. Η τιμή της δυναμικής άνωσης που προκύπτει από τη συνθήκη του Kutta συμφωνεί ικανοποιητικά με πειραματικές μετρήσεις.

Γιά να φτάσουμε στη συνθήκη του Kutta εκφράζουμε πρώτα την ταχύτητα πάνω στην πλάκα  $z = R \exp(i\theta)$  στην εξίσωση (1.136):

$$\begin{aligned} u - iw &= (U(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\theta)}) - i \frac{\Gamma e^{-i\theta}}{2\pi R}) \frac{1}{1 - e^{-2i\theta}} = \\ &= (U(e^{i(\theta-\alpha)} - e^{-i(\theta-\alpha)}) - i \frac{\Gamma}{2\pi R}) \frac{1}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \\ &= (U \sin(\theta - \alpha) - \frac{\Gamma}{4\pi R}) \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (1.146)$$

Από την εξίσωση (1.146) προκύπτει ότι η συνιστώσα  $v$  είναι, όπως αναμενόταν, μηδενική, και η συνιστώσα  $u$  δίνεται από την τελευταία γραμμή της (1.146).

Το άκρο εκφυγής αντιστοιχεί στο  $\theta = 0$ , οπότε η συνιστώσα  $u$  απειρίζεται επειδή μηδενίζεται ο παρονομαστής στο δεξιό μέλος της (1.146), εκτός από την τιμή της κυκλοφορίας για την οποία μηδενίζεται και ο αριθμητής. Η τιμή αυτή είναι:

$$\Gamma = -4\pi UR \sin \alpha = -\pi U c \sin \alpha \quad (1.147)$$

Η εξίσωση (1.147) δίνει τη μοναδική τιμή της κυκλοφορίας  $\Gamma$  για την οποία ισχύει η συνθήκη του Kutta.

Αντικαθιστώντας την τιμή της κυκλοφορίας (1.147) στην εξίσωση (1.146) βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για την ταχύτητα  $u$ :

$$u = U \frac{\sin(\theta - \alpha) + \sin \alpha}{\sin \theta} \quad (1.148)$$

Με τον κανόνα του de l' Hospital στην εξίσωση (1.148) για  $\theta \rightarrow 0$  βρίσκουμε ότι η τιμή του  $u$  στο άκρο εκφυγής δίνεται από τη σχέση:

$$u|_{\theta=0} = U \cos \alpha \quad (1.149)$$

Η ροή εγκαταλείπει δηλαδή το άκρο εκφυγής παράλληλα με την πλάκα με μιά ταχύτητα ίση με την  $x$  συνιστώσα της ταχύτητας στο άπειρο.

Χρησιμοποιώντας απλές τριγωνομετρικές σχέσεις η εξίσωση (1.148) γράφεται ως εξής:

$$u = U \frac{\cos(\theta/2 - \alpha)}{\cos(\theta/2)} = U \cos \alpha + U \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2} \quad (1.150)$$

Σημειώνουμε ότι, όπως φαίνεται εύκολα από την εξίσωση (1.150), η ταχύτητα  $u$  απειρίζεται στο άκρο πρόσπτωσης ( $\theta = \pi$ ). Αυτό δεν μπορεί να διορθωθεί στο υπάρχον μοντέλο,

πράγμα που σημαίνει ότι και η πίεση τείνει στο πλην άπειρο εκεί. Στην πραγματικότητα όλες οι υδροτομές έχουν στρογγυλεμένο άκρο πρόσπτωσης, και επομένως ταχύτητα και πίεση, ακόμα και αν δεν λάβουμε υπ' όψη το ιξώδες του ρευστού, θα είναι πεπερασμένες. Πάντως η πρόβλεψη του μοντέλου αντιστοιχεί στο γεγονός ότι στο άκρο πρόσπτωσης λεπτής υδροτομής η ταχύτητα του ρευστού είναι αυξημένη η πίεση αντίστοιχα μειωμένη. Η εξίσωση (1.150) θα μας χρειαστεί στο κεφάλαιο της θεωρίας λεπτών υδροτομών.

Αντικαθιστώντας την τιμή της κυκλοφορίας από την (1.147) στις εκφράσεις (1.137) και (1.138) βρίσκουμε ότι:

$$F_x = -\pi \rho c U^2 \sin^2 \alpha \quad (1.151)$$

$$F_y = \pi \rho c U^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.152)$$

Η συνολική άνωση  $L$  (κάθετη προς τη ροή) δίνεται από τη σχέση:

$$L = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \pi \rho c U^2 \sin \alpha \quad (1.153)$$

Ο συντελεστής άνωσης  $C_L$  είναι:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 c} = 2\pi \sin \alpha \quad (1.154)$$

Αντίστοιχα η ροπή ως προς την αρχή των αξόνων προκύπτει από την εξίσωση (1.143):

$$M_0 = -\frac{1}{8} \pi \rho U^2 c^2 \sin(2\alpha) \quad (1.155)$$

Ο συντελεστής ροπής  $C_M$  ορίζεται από τη σχέση:

$$C_M = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho c^2 U^2} \sin(2\alpha) = -\frac{1}{4} \pi \sin(2\alpha) \quad (1.156)$$

Γιά μικρές γωνίες  $\alpha$  έχουμε ότι  $\sin \alpha \sim \alpha$  (με το  $\alpha$  να εκφράζεται σε ακτίνια), οπότε ο συντελεστής άνωσης  $C_L$  και ο συντελεστής ροπής  $C_M$  απλοποιούνται ως εξής:

$$C_L = 2\pi \alpha \quad (1.157)$$

$$C_M = -\frac{\pi}{2} \alpha \quad (1.158)$$

Συχνά παραλείπουμε για ευκολία το πρόσημο του συντελεστή ροπής, αλλά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η ροπή είναι αρνητική. Μιά άμεση συνέπεια των εξισώσεων (1.157) και (1.158) είναι ότι, για μικρές γωνίες πρόσπτωσης, η δυναμική άνωση ασκείται στο σημείο  $x = -c/4$ , δηλαδή στο μέσο της απόστασης ανάμεσα στο άκρο πρόσπτωσης και στο μέσο της πλάκας.

Για μικρές γωνίες πρόσπτωσης οι εξισώσεις (1.157) και (1.158) συμφωνούν πολύ ικανοποιητικά με τα πειράματα. Για μεγαλύτερες γωνίες πρόσπτωσης η θεωρία που αναπτύξαμε δεν επαρκεί επειδή φαινόμενα όπως μη μονιμότητα και αποκόλληση της ροής αρχίζουν να γίνονται σημαντικά. Όταν όμως εμφανιστούν τέτοια φαινόμενα, η λειτουργία της πλάκας σαν υδροτομή δεν είναι καλή, επειδή μειώνεται σημαντικά η άνωση. Συνοψίζοντας επομένως μπορούμε να πούμε ότι οι εξισώσεις (1.157) και (1.158) συμφωνούν πολύ ικανοποιητικά με τα πειράματα στην περιοχή καλής λειτουργίας της υδροτομής.

Κλείνοντας το κεφάλαιο για την κεκλιμένη πλάκα αξίζει να σημειώσουμε ότι το ανώμαλο σημείο που υπάρχει στο άκρο πρόσπτωσης (που απειρίζεται η ταχύτητα δηλαδή) ευθύνεται για το ακόλουθο “παράδοξο”: Η δύναμη που ασκείται πάνω στην πλάκα είναι κάθετη προς την ροή, ενώ θα περίμενε κανείς να είναι κάθετη προς την πλάκα, αφού η δύναμη προέρχεται από το διανυσματικό άθροισμα δυνάμεων πίεσης που είναι κάθετες προς την πλάκα. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό θεωρώντας την πλάκα σαν το όριο μιάς έλλειψης όταν ο μικρός ημιάξονας της τείνει στο μηδέν (όπως άλλωστε κάναμε σε αυτό το κεφάλαιο): Η πίεση στο άκρο πρόσπτωσης της έλλειψης τείνει στο πλην άπειρο, και έτσι δημιουργείται μιά πεπερασμένη δύναμη παράλληλη προς την πλάκα με σταθερό μέγεθος. Το άθροισμα αυτής της δύναμης και της δύναμης που είναι κάθετη προς την πλάκα δημιουργεί μιά δύναμη κάθετη προς την ροή στο άπειρο.

Υπενθυμίζουμε ότι όταν υπολογίσαμε την ταχύτητα πάνω στην πλάκα για να εφαρμόσουμε την συνθήκη του Kutta, βάλαμε πρώτα  $b = 0$  στην μιγαδική ταχύτητα, και ύστερα υπολογίσαμε την ταχύτητα στα δύο άκρα της πλάκας. Στον υπολογισμό της δύναμης όμως κάνουμε το αντίστροφο, δηλαδή υπολογίζουμε πρώτα την δύναμη σε έλλειψη και ύστερα θέτουμε  $b = 0$ . Παρατηρούμε επομένως ότι η μετάβαση από έλλειψη σε επίπεδη πλάκα παίρνοντας το όριο όταν ο μικρός ημιάξονας  $b$  τείνει στο μηδέν, παρότι εκ πρώτης όψεως απλή διαδικασία, έχει μερικά λεπτά σημεία από μαθηματικής πλευράς που χρειάζονται προσοχή. Αυτό συμβαίνει επειδή, όπως επαληθεύεται εύκολα, η παράγωγος της λύσης ως προς  $b$  τείνει στο άπειρο όταν  $b \rightarrow 0$ .

Πιο φορμαλιστικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη λύση που βρήκαμε για να εκφράσουμε τη διαφορά πίεσης στην πλάκα: Από την εξίσωση Bernoulli προκύπτει ότι η διαφορά της πίεσης στην κάτω πλευρά της πλάκας,  $p_-$ , μείον την πίεση στην άνω πλευρά,  $p_+$ , δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta p = p_- - p_+ = \frac{1}{2}\rho(u_+^2 - u_-^2) \quad (1.159)$$

Όπου  $u_+$  και  $u_-$  είναι, αντίστοιχα, η ταχύτητα στην άνω και στην κάτω πλευρά της πλάκας.

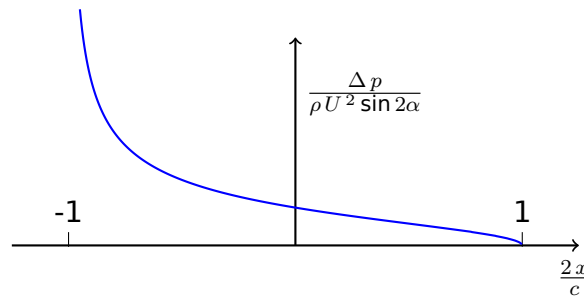
Από την εξίσωση (1.150) και παρατηρώντας ότι, αν σε ένα σημείο στην άνω πλευρά της πλάκας αντιστοιχεί η γωνία  $\theta$ , στο ακριβώς από κάτω του σημείο αντιστοιχεί η γωνία  $2\pi - \theta$ , προκύπτει ότι η διαφορά ταχύτητας ανάμεσα στην άνω και στην κάτω πλευρά δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u_+ - u_- = 2U \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2} \quad 0 < \theta < \pi \quad (1.160)$$

Προκύπτει επίσης ότι  $u_+ + u_- = 2U \cos \alpha$ , οπότε έχουμε την ακόλουθη έκφραση για την διαφορά πίεσης:

$$\Delta p = \rho U^2 \sin 2\alpha \tan \frac{\theta}{2} \quad 0 < \theta < \pi \quad (1.161)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η διαφορά πίεσης απειρίζεται στο άκρο πρόσπτωσης ( $\theta = \pi$ ) ανάλογα με την συνάρτηση  $\tan(\theta/2)$ . Παρατηρούμε επίσης ότι όταν η εξωτερική ροή είναι παράλληλη προς έναν από τους άξονες  $x, y$  η διαφορά πίεσης είναι μηδενική, όπως αναμένεται λόγω συμμετρίας. Η μεταβολή της διαφοράς πίεσης κατά το μήκος της πλάκας διαιρεμένης με την ποσότητα  $\rho U^2 \sin 2\alpha$  απεικονίζεται στο γράφημα 1.12.

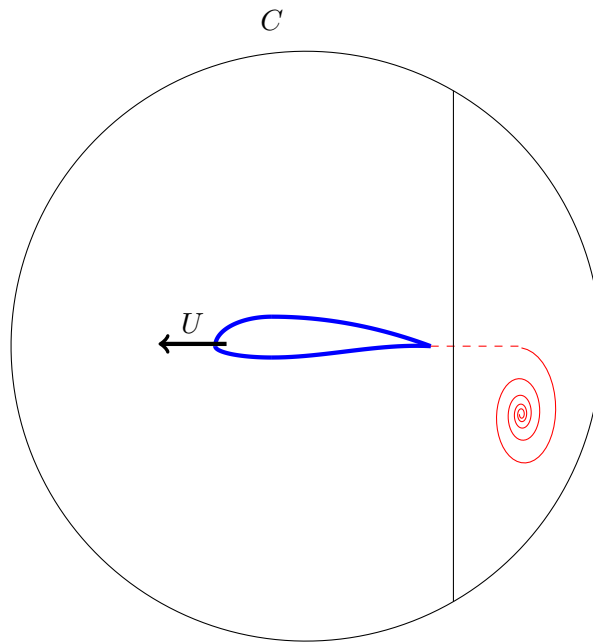


Σχήμα 1.12: Μεταβολή της διαφοράς πίεσης κατά το μήκος της πλάκας. Στο άκρο πρόσπτωσης η πίεση απειρίζεται.

Στο μοντέλο ιδανικού ρευστού που μεταχειριζόμαστε η κυκλοφορία γύρω από το αντικείμενο είναι απλά μία παράμετρος, της οποίας η τιμή προσδιορίζεται για λεπτές υδροτομές από την συνθήκη του Kutta. Μαθηματικά δηλαδή η συνθήκη του Kutta επιλέγει την κατάλληλη λύση από την απειρία των δυνατών λύσεων με κυκλοφορία που επιτρέπουν οι εξισώσεις κίνησης ιδανικού ρευστού.

Στην πραγματικότητα η δημιουργία της κυκλοφορίας οφείλεται στο ιξώδες του ρευστού. Ας θεωρήσουμε μία υδροτομή η οποία είναι αρχικά ακίνητη. Η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη  $C$  που περικλείει την υδροτομή σε μεγάλη απόσταση είναι φυσικά μηδενική. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η υδροτομή τίθεται σε κίνηση σε κάποια χρονική στιγμή. Οριακά στρώματα αναπτύσσονται λόγω του ιξώδους στην άνω και στην κάτω πλευρά της υδροτομής. Όταν τα σωματίδια που βρίσκονται μέσα στα οριακά στρώματα φτάσουν στο άκρο εκφυγής εγκαταλείπουν την υδροτομή και δημιουργούν μία δίνη πίσω από την υδροτομή (δες σχήμα στην εικόνα 1.13). Η δίνη λέγεται δίνη εκκίνησης. Η κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη  $C$  παραμένει μηδανική, αφού το ρευστό μακριά από την υδροτομή παραμένει ακίνητο. Επειδή όμως η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη που περικλείει την δίνη εκκίνησης είναι ίση με την ένταση της δίνης, γύρω από την υδροτομή αναπτύσσεται μία κυκλοφορία ίση και αντίθετη με την ένταση της δίνης  $\Gamma$ . Η κυκλοφορία αυτή είναι που στη θεωρία ιδανικού ρευστού προσδιορίζουμε με την συνθήκη του Kutta.





Σχήμα 1.13: Δημιουργία κυκλοφορίας γύρω από υδροτομή: Όταν η υδροτομή τεθεί σε κίνηση με ταχύτητα  $U$  η τριβή του ρευστού με την επιφάνεια της υδροτομής δημιουργεί την δίνη εκκίνησης (με συνεχή κόκκινη γραμμή). Η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε γραμμή που περικλείει την δίνη είναι ίση με την ένταση της δίνης  $\Gamma$ . Κατά συνέπεια, για να παραμείνει η κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη  $C$  μηδενική δημιουργείται γύρω από την υδροτομή κυκλοφορία ίση με  $-\Gamma$ .

### 1.2.9 Υδροτομές Joukowski

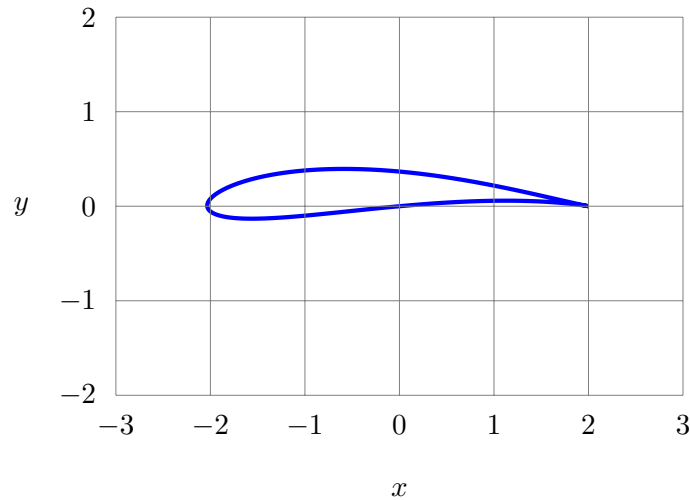
Ενας κύκλος στο  $\zeta$  επίπεδο του οποίου το κέντρο δεν συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και που περνά από το σημείο  $(\lambda, 0)$  απεικονίζεται με το μετασχηματισμό Joukowski στο  $z$  επίπεδο σε μία υδροτομή, που λέγεται υδροτομή Joukowski. Η θέση του κέντρου του κύκλου είναι παράμετρος που επηρεάζει το σχήμα της υδροτομής, και η ακτίνα επιλέγεται έτσι ώστε ο κύκλος να περνά από το σημείο  $(\lambda, 0)$ . Μία τυπική υδροτομή Joukowski φαίνεται στο σχήμα 1.14. Η υδροτομή Joukowski χαρακτηρίζεται από ένα οξύ άκρο εκφυγής, δηλαδή στο άκρο εκφυγής η άνω και η κάτω πλευρά της υδροτομής έχουν κοινή επαπτομένη (cusp). Σημειώνουμε επίσης ότι αν το κέντρο του κύκλου στο επίπεδο  $\zeta$  βρίσκεται πάνω στον μιγαδικό άξονα η υδροτομή στο επίπεδο  $z$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των  $x$ .

Ο κύκλος στο επίπεδο  $\zeta$  του οποίου εικόνα είναι η υδροτομή Joukowski δίνεται από την εξίσωση:

$$\zeta = \zeta_0 + Re^{i\theta} \quad -\pi < \theta < \pi \quad (1.162)$$

Όπου  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$  είναι η θέση του κέντρου του κύκλου, και  $R^2 = (\lambda - \xi_0)^2 + \eta_0^2$ , ώστε ο κύκλος να περνά από το σημείο  $\zeta = \lambda$ .

Το άκρο εκφυγής της υδροτομής  $z = 2\lambda$  είναι εικόνα του σημείου  $\zeta_b = \lambda = R \exp i\theta_b$ , όπου  $\sin \theta_b = -\eta_0/R$ . Το άκρο πρόσπτωσης είναι εικόνα του σημείου  $\zeta_a = R \exp(i(\pi - \theta_b)) = 2\xi_0 - \lambda$ ,



Σχήμα 1.14: Τυπική υδροτομή Joukowski στο επίπεδο  $x-y$ . Η συγκεκριμένη υδροτομή είναι εικόνα κύκλου στο επίπεδο  $\zeta$  με κέντρο το σημείο  $(-0.1, 0.1)$  και ακτίνας 1.105, ενώ  $\lambda = 1$ .

και βρίσκεται στην θέση  $z_a = \zeta_a - \lambda^2/\zeta_a$ . Η χορδή της υδροτομής δίνεται από τη σχέση  $c = z_b - z_a$ .

Όπως και στην περίπτωση ροής γύρω από έλλειψη, η μιγαδική ταχύτητα της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u - w = \frac{dw}{dz} = \left( U(e^{-i\alpha} - \frac{R^2 e^{i\alpha}}{(\zeta - \zeta_0)^2}) - i \frac{\Gamma}{2\pi(\zeta - \zeta_0)} \right) \frac{1}{1 - \lambda^2/\zeta^2} \quad (1.163)$$

Όπου  $\alpha$  είναι η γωνία πρόσπτωσης,  $\Gamma$  η κυκλοφορία γύρω από την υδροτομή, και η μεταβλητή  $\zeta$  εκφράζεται συναρτήσει της μεταβλητής  $z$  μέσω του αντιστροφου του μετασχηματισμού Joukowski. Η συνθήκη Kutta για πεπερασμένη τιμή της ταχύτητας στο άκρο εκφυγής επιβάλλει να μηδενίζεται ο αριθμητής στο δεξιό μέλος της (1.163) για  $\zeta = \lambda = R \exp(i\theta_b)$ . Αυτό δίνει την ακόλουθη τιμή για την κυκλοφορία:

$$\Gamma = 4\pi R U \sin(\theta_b - \alpha) \quad (1.164)$$

Η τιμή της δύναμης ανά μονάδα πλάτους πάνω στην υδροτομή προκύπτει τότε από τις γενικές εκφράσεις (1.102) και (1.103). Σημειώνουμε ότι η το σημείο  $\zeta = -\lambda$ , που είναι το δεύτερο ανώμαλο σημείο της εξίσωσης (1.163), βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (1.162), οπότε η ταχύτητα του ρευστού δεν απειρίζεται σε κανένα σημείο του πεδίου ροής.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε για την ροή γύρω από την έλλειψη (χρησιμοποιώντας δηλαδή τις εξισώσεις (1.139) και (1.104) προκύπτει και η ακόλουθη έκφραση για την ροπή ανά μονάδα πλάτους πάνω στην υδροτομή:

$$M_0 = -2\pi\rho U^2(\lambda^2 \sin(2\alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi U}(\xi_0 \cos \alpha + \eta_0 \sin \alpha)) \quad (1.165)$$

Η οξεία μορφή που έχει το άκρο εκφυγής της υδροτομής Joukowski, το γεγονός δηλαδή ότι η άνω και η κάτω πλευρά έχουν κοινή επαπτομένη, επιταχύνει την αποκόλληση των οριακών στρωμάτων από την επιφάνειά της, επιφέροντας αισθητή μείωση της δυναμικής άνωσης εν σχέσει με αυτή που προβλέπει η θεωρία ιδανικού ρευστού. Γι' αυτό η πρακτική χρήση των υδροτομών Joukowski είναι περιορισμένη. Αντίθετα, στις διατομές που χρησιμοποιούνται στην πράξη οι επαπτόμενες της άνω και κάτω πλευράς της υδροτομής να σχηματίζουν πεπερασμένη γωνία στο άκρο εκφυγής.

### 1.3 Τρισδιάστατες αστρόβιλες ροές

Η ανάλυση των τρισδιάστατων αστρόβιλων ροών είναι πολύ πιο δύσκολη από την ανάλυση των δισδιάστατων αστρόβιλων ροών. Δεν υπάρχει για παράδειγμα θεωρητικό εργαλείο αντίστοιχο με την θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων για να μας βοηθήσει στην ανάλυση τρισδιάστατων ροών, και, με ελάχιστες εξαιρέσεις, τα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν αριθμητικά στον υπολογιστή (π.χ. με πεπερασμένες διαφορές, ή με χρήση του θεωρήματος του Green). Η ροική συνάρτηση στις τρεις διαστάσεις είναι διανυσματική. Επειδή η ροή είναι ασυμπύεστη υπάρχει μία διανυσματική συνάρτηση  $\Psi$  τέτοια ώστε  $\mathbf{u} = \nabla \times \Psi$ . Η συνάρτηση  $\Psi$  λέγεται το *ροικό διάνυσμα*. Το ροικό διάνυσμα έχει επίσης τρεις συνιστώσες, όπως και η ταχύτητα, οπότε δεν επιφέρει κάποια σημαντική διευκόλυνση, σαν αυτή που επιφέρει η χρήση της ροικής συνάρτησης στις δισδιάστατες ροές, και η χρήση του είναι μάλλον περιωρισμένη.

#### 1.3.1 Πηγές και δίπολα

Η έννοια της πηγής και το δίπολο επεκτείνονται εύκολα στις τρισδιάστατες ροές (αλλά όχι και αυτή της σημειακής δίνης). Για την επέκταση θα χρειαστεί να θυμηθούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες: Η θέση ενός σημείου με διάνυσμα θέσης  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  προσδιορίζεται από την απόσταση από την αρχή των συντεταγμένων  $r$  και τις γωνίες  $\theta$  και  $\psi$  (Εικόνα 1.15).

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες συνδέονται με τις σφαιρικές συντεταγμένες με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.166)$$

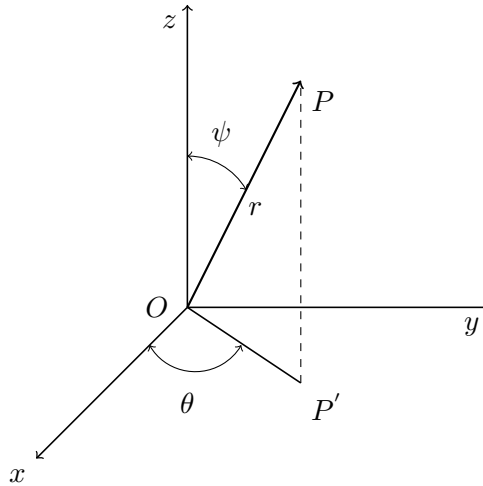
$$x = r \sin \psi \cos \theta \quad (1.167)$$

$$y = r \sin \psi \sin \theta \quad (1.168)$$

$$z = r \cos \psi \quad (1.169)$$

Αντίστοιχα το διάνυσμα της ταχύτητας  $\mathbf{u}$  προσδιορίζεται από τις συνιστώσες του  $u_r$ ,  $u_\theta$ , και  $u_\psi$ :  $u_r$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την κατεύθυνση  $OP$ ,  $u_\theta$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας στο επίπεδο  $(x, y)$  κάθετη προς την  $OP'$ , και  $u_\psi$  η συνιστώσα στο επίπεδο που σχηματίζουν η  $OP$  με τον άξονα  $z$  κάθετη προς την  $OP$ . Χρησιμοποιώντας την έκφραση του  $\nabla\phi$  σε σφαιρικές συντεταγμένες, βρίσκουμε ότι οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (1.170)$$



Σχήμα 1.15: Σφαιρικές συντεταγμένες σημείου  $P$ :  $r$  είναι η απόσταση του σημείου  $P$  από την αρχή των αξόνων  $O$ ,  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει η  $OP'$  με τον άξονα  $x$  ( $P'$  είναι η προβολή του  $P$  στο επίπεδο  $(x, y)$ ), και  $\psi$  είναι η γωνία που κάνει  $OP$  με τον άξονα  $z$ .

$$u_\theta = \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (1.171)$$

$$u_\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \quad (1.172)$$

Η εξίσωση του Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται ως εξής:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right) = 0 \quad (1.173)$$

Σαν δυναμικό πηγής ορίζουμε την σφαιρικά συμμετρική λύση της εξίσωσης (1.173), δηλαδή την λύση που είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης  $r$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0 \quad (1.174)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (1.174) βρίσκουμε ότι:

$$\phi = -\frac{K}{r} \quad (1.175)$$

Όπου  $K$  είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

Η ταχύτητα που προκύπτει από το δυναμικό (1.175) έχει μηδενικές τις συνιστώσες  $u_\theta$  και  $u_\psi$ , ενώ η συνιστώσα  $u_r$  δίνεται από την σχέση:

$$u_r = \frac{K}{r^2} \quad (1.176)$$

Βλέπουμε επομένως ότι αν  $K > 0$  η ταχύτητα ρέει από την αρχή των αξόνων προς το άπειρο (πηγή), ενώ αν  $K < 0$  γίνεται το αντίστροφο (καταβόθρα). Θεωρώντας την παροχή όγκου  $m$  που περνά από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια που περικλείει την αρχή των αξόνων βρίσκουμε ότι:

$$m = 4\pi K \quad (1.177)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.177) το δυναμικό της πηγής γράφεται ως εξής:

$$\phi = -\frac{m}{4\pi r} \quad (1.178)$$

Αντίστοιχα με την διδιάστατες ροές το δυναμικό διπόλου παράλληλου με τον άξονα των  $z$  ορίζεται σαν η παράγωγος του δεξιού μέλους της (1.175) ως προς  $z$ :

$$\phi = -\frac{\mu}{r^2} \cos \psi \quad (1.179)$$

Το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει από το δυναμικό (1.179) δίνεται από τις σχέσεις

$$u_r = \frac{2\mu}{r^3} \cos \psi \quad (1.180)$$

$$u_\theta = 0 \quad (1.181)$$

$$u_\psi = \frac{\mu}{r^3} \sin \psi \quad (1.182)$$

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό διπόλου παράλληλου με τον άξονα των  $x$ , των  $y$  ή προς οποιαδήποτε άλλη ευθεία. Όπως και στις δύο διαστάσεις το δυναμικό οποιουδήποτε κινουμένου σώματος μακριά από το αντικείμενο τείνει στο δυναμικό διπόλου παραλλήλου με την κατεύθυνση κίνησης του σώματος (το παραθέτουμε χωρίς απόδειξη).

### 1.3.2 Αστρόβιλη ροή γύρω από σφαίρα

Θεωρούμε ομοιόμορφη ροή παράλληλη με τον άξονα των  $z$  με ταχύτητα  $U$  γύρω από σφαίρα ακτίνας  $R$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Το δυναμικό της ροής ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, και πάνω στη σφαίρα η ταχύτητα κάθετη προς την σφαίρα μηδενίζεται. Λόγω της γεωμετρίας είναι προφανώς καλύτερα να μεταχειριστούμε σφαιρικές συντεταγμένες. Η εξίσωση του Laplace έχει την μορφή (1.173), ενώ η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι κάθετη προς την σφαίρα είναι η  $u_r$ , οπότε η οριακή συνθήκη στην σφαίρα έχει την πολύ απλή μορφή:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (1.183)$$

Η λύση του προβλήματος οριακών τιμών δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση δυναμικού (όπως επαληθεύεται με κατ' ευθείαν αντικατάσταση):

$$\phi = U \left( r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \psi \quad (1.184)$$

Το δυναμικό της ροής είναι δηλαδή ίσο με το άθροισμα του δυναμικού ομοιόμορφης ροής παράλληλης προς τον άξονα  $z$  συν το δυναμικό διπόλου παράλληλου προς τον ίδιο άξονα.

Χρησιμοποιώντας τις (1.170), (1.171), και (1.172), βρίσκουμε ότι το πεδίο ταχυτήτων δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_r = U \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \psi \quad (1.185)$$

$$u_\theta = 0 \quad (1.186)$$

$$u_\psi = -U \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \psi \quad (1.187)$$

Πάνω στη σφαίρα ( $r = R$ ) η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας είναι η  $u_\psi$  που είναι ίση με  $-(3/2)U \sin \psi$ . Επομένως η μέγιστη τιμή της ταχύτητας πάνω στη σφαίρα είναι ίση κατ' απόλυτη τιμή με  $1.5U$ . Σημειώνουμε ότι για ροή γύρω από κύλινδρο με μηδενική κυκλοφορία η μέγιστη ταχύτητα πάνω στον κύλινδρο (όπως προκύπτει εύκολα από την εξίσωση (1.110)) είναι ίση κατ' απόλυτη τιμή με  $2U$ . Βλέπουμε επομένως ότι ένα δισδιάστατο αντικείμενο επιταχύνει την ροή σημαντικά περισσότερο από ότι ένα τρισδιάστατο αντικείμενο με το ίδιο πάχος. Αυτό οφείλεται στο ότι το ρευστό μπορεί να κινηθεί ολόγυρα από το τρισδιάστατο αντικείμενο, ενώ υποχρεωτικά θα περάσει μόνο από πάνω και από κάτω στο διδιάστατο αντικείμενο, και θα αναγκαστεί να επιταχυνθεί περισσότερο.

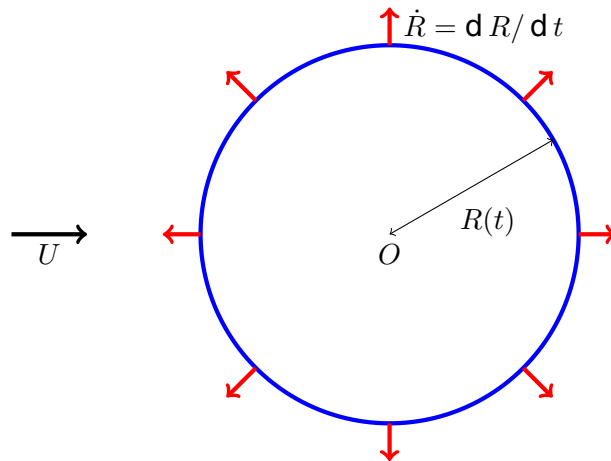
Η τιμή της αντίστασης της σφαίρας σε μόνιμη ροή είναι σύμφωνα με το παράδοξο του D'Alambert ίση με μηδέν. Αυτό προκύπτει από το γενικό επιχείρημα διατήρησης της ενέργειας που εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και φυσικά μπορεί να επαληθευθεί χρησιμοποιώντας την αρχή του Bernoulli για να υπολογίσουμε την πίεση πάνω στην σφαίρα, και στη συνέχεια να ολοκληρώσουμε για να υπολογίσουμε την δύναμη.

Για τον υπολογισμό αστρόβιλης ροής γύρω από ένα γενικό τρισδιάστατο αντικείμενο μοναδική επιλογή είναι η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης του Laplace με την συνθήκη Neumann πάνω στο αντικείμενο, κάτι που δεν θα μας απασχολήσει σε αυτό το μάθημα.

### ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί αστρόβιλη ροή γύρω από σφαίρα με χρονικά μεταβλητή ακτίνα (αλλά σταθερό σχήμα). Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται πάνω στην σφαίρα, και να δοθεί φυσική ερμηνεία στο αποτέλεσμα.

### ΛΥΣΗ



Σχήμα 1.16: Εικόνα για αστρόβιλη ροή γύρω από σφαίρα με μεταβλητή χρονικά διάμετρο  $R(t)$ .

Επιλέγουμε την αρχή των αξόνων στο κέντρο της σφαίρας. Εστω  $R(t)$  η ακτίνα της σφαίρας και  $U$  η ταχύτητα της ομοιόμορφης ροής παράλληλη με τον άξονα των  $z$ . Η οριακή συνθήκη στην επιφάνεια της σφαίρας είναι:

$$u_r|_{r=R} = \frac{dR}{dt} \quad (1.188)$$

Η οριακή συνθήκη (1.188) είναι ισοδύναμη με το να υπάρχει μία σημειακή πηγή στο κέντρο της σφαίρας με κατάλληλη ένταση η οποία προκαλεί την ακτινική ταχύτητα  $dR/dt$ . Οπότε γράφουμε το δυναμικό σαν το άθροισμα του δυναμικού για ομοιόμορφη ροή γύρω από σφαίρα (εξίσωση (1.184)) συν το δυναμικό σημειακής πηγής άγνωστης έντασης  $m$  που βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας:



$$\phi = U\left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2}\right) \cos \psi - \frac{m}{4\pi r} \quad (1.189)$$

Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη (1.188) καταλήγουμε ότι:

$$u_r|_{r=R} = \frac{m}{4\pi R^2} = \frac{dR}{dt} \quad (1.190)$$

Επομένως έχουμε ότι η ένταση της πηγής δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{m}{4\pi} = R^2 \frac{dR}{dt} \quad (1.191)$$

Παραγωγίζοντας την έκφραση για το δυναμικό, και ορίζοντας για συντομία  $\dot{R} = dR/dt$ , βρίσκουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας:

$$u_r = \dot{R} \quad u_\theta = 0 \quad u_\psi = -\frac{3}{2}U \sin \psi \quad (1.192)$$

Από την εξίσωση Bernoulli η πίεση στην επιφάνεια της σφαίρας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} p|_{r=R} &= -\rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) |_{r=R} = \\ &= -\rho \left( \frac{3}{2} U \dot{R} \cos \psi + \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) \frac{1}{R} + \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \frac{9}{4} U^2 \sin^2 \psi) \right) \end{aligned} \quad (1.193)$$

Η δύναμη που ασκείται στην σφαίρα στην κατεύθυνση  $z$  προκύπτει ολοκληρώνοντας την έκφραση (1.193) πάνω στην σφαίρα:

$$\begin{aligned} F_z &= - \int_B p n_z dA = - \int_0^\pi p 2\pi R^2 \cos \psi \sin \psi d\psi = \\ &= 2\pi \rho R^2 \int_0^\pi \left( \frac{3}{2} U \dot{R} \cos \psi + \frac{d}{dt} (R^2 \dot{R}) \frac{1}{R} + \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \frac{9}{4} U^2 \sin^2 \psi) \right) \cos \psi \sin \psi d\psi = \\ &= 2\pi \rho R^2 U \dot{R} \end{aligned} \quad (1.194)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι  $n_z = \cos \psi$  και, επειδή η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε δεν εξαρτάται από την γωνία  $\theta$  των σφαιρικών συντεταγμένων, επιλέξαμε για  $dA$  τον κυκλικό δακτύλιο πάνω στη σφαίρα με ακτίνα  $R \sin \psi$  και απειροστό πάχος  $R d\psi$ :

$$dA = (2\pi R \sin \psi)(R d\psi) = 2\pi R^2 \sin \psi d\psi$$

Επίσης χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\int_0^\pi \cos^2 \psi \sin \psi \, d\psi = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^\pi \cos \psi \sin \psi \, d\psi = 0$$

$$\int_0^\pi \cos \psi \sin^3 \psi \, d\psi = 0$$

Λόγω συμμετρίας οι άλλες δύο συνιστώσες της δύναμης  $F_\theta$  και  $F_\psi$  είναι μηδενικές (αυτό φυσικά μπορεί να επαληθευθεί και αναλυτικά).

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα δεν είναι μηδενική, επειδή η ροή δεν είναι μόνιμη. Επί πλέον, παρατηρούμε ότι για  $\dot{R} > 0$  (δηλαδή η σφαίρα διαστέλεται), η δύναμη είναι παράλληλη με την ταχύτητα του ρευστού, και η σφαίρα παρουσιάζει αντίσταση. Αντίθετα, για  $\dot{R} < 0$  (δηλαδή η σφαίρα συρρικνώνεται), η δύναμη είναι αντίθετη προς την ταχύτητα του ρευστού, και η σφαίρα αναπτύσσει πρόωση.

Η δημιουργία της δύναμης μπορεί να εξηγηθεί ενεργειακά ως εξής: Καθώς η ακτίνα της σφαίρας μεταβάλλεται, η σφαίρα διαταράσσει περισσότερο ή λιγότερο τη ροή, ανάλογα με το αν η ακτίνα αυξάνεται ή μειώνεται. Αυτό μεταβάλλει αντίστοιχα την κινητική ενέργεια του ρευστού. Η απαιτούμενη ισχύς για τη μεταβολή της ενέργειας παρέχεται από την δύναμη (1.194).

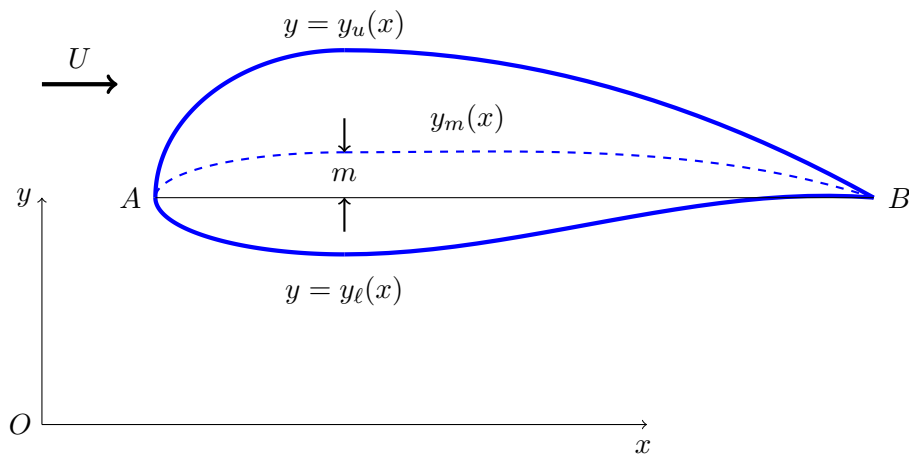
## Κεφάλαιο 2

# ΘΕΩΡΙΑ ΛΕΠΤΩΝ ΥΔΡΟΤΟΜΩΝ

### 2.1 Γενικά: Ορολογία υδροτομών

Οι υδροτομές είναι αντικείμενα που αναπτύσσουν σημαντική δυναμική άνωση (lift) με μικρή αντίσταση (drag). Υδροτομές χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε αντικείμενα που κινούνται στο νερό ή στον αέρα (γι' αυτό λέγονται και αεροτομές). Για παράδειγμα, η τομή πτέρυγας του αεροπλάνου, πτερυγίου προπέλλας, πηδαλίου πλοίου έχουν σχήμα υδροτομής.

Στην εικόνα 2.1 βλέπουμε ένα τυπικό παράδειγμα υδροτομής σε ροή με ταχύτητα  $U$  παράλληλη προς τον άξονα των  $x$ . Η υδροτομή έχει κυρτωμένη επιφάνεια και γωνία κλίσης ως προς την εξωτερική ροή.



Σχήμα 2.1: Σχήμα ορισμού των χαρακτηριστικών υδροτομής. Σημείωση: Συνήθως ο άξονας  $x$  επιλέγεται να συμπίπτει με την θέση της χορδής σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Εδώ δεν ακολουθήθηκε η σύμβαση αυτή για να είναι το σχήμα πιό ευκρινές.

Το άκρο της υδροτομής προς την πλευρά απ' όπου έρχεται η ροή (σημείο  $A$  στο σχήμα) λέγεται *άκρο πρόσπτωσης* (leading edge). Το άκρο προς την πλευρά που πηγαίνει η ροή (σημείο  $B$  στο σχήμα) λέγεται *άκρο εκφυγής* (trailing edge). Όπως είχαμε μάθει στη θεωρία οριακών στρωμάτων, το άκρο πρόσπτωσης είναι στρογγυλεμένο, ενώ το άκρο εκφυγής είναι αιχμηρό. Η νοητή ευθεία  $AB$  που συνδέει τα δύο άκρα έγεται *χορδή* της υδροτομής (chord) και το μήκος της παριστάνεται με  $c$ . Η οξεία γωνία που σχηματίζει η χορδή

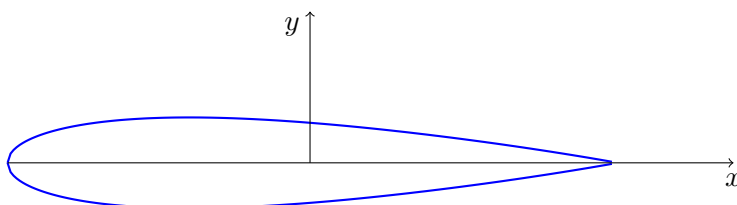
με την εξωτερική ταχύτητα λέγεται *γωνία πρόσπτωσης* (angle of attack). Στο σχήμα 2.1 η γωνία πρόσπτωσης είναι μηδενική.

Η άνω και η κάτω επιφάνεια της υδροτομής περιγράφονται, αντίστοιχα, από εξισώσεις της μορφής  $y = y_u(x)$  και  $y = y_\ell(x)$ , όπου  $y_u(x)$  και  $y_\ell(x)$  γνωστές συναρτήσεις. Η νοητή γραμμή που περιγράφεται από την εξίσωση  $y = y_m(x)$ , όπου  $y_m(x) = (y_u(x) + y_\ell(x))/2$ , λέγεται *μέση γραμμή κυρτότητας* (mean camber line). Η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση  $m$  ανάμεσα στην χορδή και στη μέση γραμμή κυρτότητας λέγεται *μέγιστο βέλος κυρτότητας* (maximum camber).

Η συνάρτηση  $y_u(x) - y_\ell(x)$  λέγεται *συνάρτηση πάχους*. Η μέγιστη τιμή  $h$  της συνάρτησης πάχους λέγεται *πάχος* της υδροτομής (thickness).

Η καλή υδροδυναμική λειτουργία της υδροτομής απαιτεί οι υδροτομές να είναι λεπτές και να έχουν μικρή κυρτότητα, δηλαδή  $h \ll c$  και  $m \ll c$ . Στο σχήμα ορισμού 2.1 η κατακόρυφη κλίμακα έχει είναι διαφορετική από την οριζόντια για λόγους ευκρίνειας. Επίσης η γωνία πρόσπτωσης πρέπει να είναι μικρή προς αποφυγή αποκόλλησης της ροής.

Η δυναμική άνωση οφείλεται εν μέρει στην κυρτότητα της υδροτομής και εν μέρει στη γωνία πρόσπτωσης. Μία σημαντική υποκατηγορία υδροτομών είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x$  όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μηδενική (παράδειγμα στο σχήμα 2.2). Οι υδροτομές αυτές λέγονται *συμμετρικές*, και η δυναμική άνωση που αναπτύσσουν οφείλεται αποκλειστικά στη γωνία πρόσπτωσης. Οι συμμετρικές υδροτομές έχουν  $y_m(x) = 0$  και  $m = 0$ . Λόγω της συμμετρίας τους, οι συμμετρικές υδροτομές έχουν μηδενική άνωση σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Η τομή του πηδαλίου του πλοίου είναι ένα κλασσικό παράδειγμα συμμετρικής υδροτομής.



Σχήμα 2.2: Συμμετρική υδροτομή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης

Λόγω της ευρύτατης χρήσης υδροτομών υπάρχει και τεράστια ποικιλία υδροτομών, καθώς και συστήματα ταξινόμησης τους. Ένα από τα πιό γνωστά και απλά συστήματα ταξινόμησης είναι το τετραψήφιο της NACA (ακρώνυμο για National Advisory Committee for Aeronautics), που χρησιμοποιεί τέσσερεις μονοψήφιους αριθμούς για να προσδιορίσει τη γεωμετρία μιάς υδροτομής. Ο πρώτος αριθμός δηλώνει το μέγιστο βέλος κυρτότητας της υδροτομής σε επί τοις εκατό της χορδής, ο δεύτερος την απόσταση του σημείου μεγίστου βέλους από το άκρο πρόσπτωσης σε δέκατα της χορδής, και οι δύο τελευταίοι αριθμοί δηλώνουν το πάχος της υδροτομής σε επί τοις εκατό της χορδής. Για παράδειγμα,  $NACA\ 2412$  σημαίνει μέγιστο βέλος κυρτότητας 2% της χορδής σε απόσταση  $0.4c$  από το άκρο πρόσπτωσης και πάχος 12% της χορδής. Αντίστοιχα  $NACA\ 0012$  σημαίνει μηδενικό βέλος κυρτότητας (οπότε και το δεύτερο ψηφίο είναι κατ'ανάγκη μηδενικό), άρα η υδροτομή είναι συμμετρική με πάχος 12% της χορδής.

## 2.2 Γραμμική θεωρία υδροτομών

Θεωρούμε υδροτομή στο επίπεδο  $x-y$ , και ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα  $U$  παράλληλη με τον θετικό άξονα των  $x$ . Το κέντρο των αξόνων συμπίπτει με το μέσο της χορδής της υδροτομής όταν αυτή έχει μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Η άνω πλευρά της υδροτομής περιγράφεται από την εξίσωση  $y = y_u(x)$ , ενώ η κάτω πλευρά της υδροτομής περιγράφεται από την εξίσωση  $y = y_\ell(x)$ .

Υποθέτουμε αστρόβιλη δισδιάστατη ροή. Εστω  $\phi$  το δυναμικό της ροής λόγω της παρουσίας της υδροτομής, δηλαδή το ολικό δυναμικό της ροής είναι  $\varphi = \phi + Ux$ . Οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού είναι  $U + \partial\phi/\partial x$ ,  $\partial\phi/\partial y$ .

Το δυναμικό  $\phi$  ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα οριακών τιμών:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (2.1)$$

Σε κάθε σημείο του περιγράμματος της υδροτομής η ταχύτητα είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της υδροτομής:

$$\frac{\partial\phi/\partial y}{U + \partial\phi/\partial x} = \frac{dy}{dx} \quad \text{για} \quad y = y_u(x), \quad y = y_\ell(x) \quad (2.2)$$

Μακριά από την υδροτομή η υδροδυναμική της επίδραση τείνει στο μηδέν:

$$|\nabla\phi| \rightarrow 0 \quad \text{για} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

Τέλος στο άκρο εκφυγής  $B$  έχουμε την συνθήκη Kutta:

$$|\nabla\phi|_B < \infty \quad (2.4)$$

Η άνωση ανά μονάδα πλάτους στην υδροτομή  $L$  δίνεται από την ολοκλήρωση των δυνάμεων λόγω πιέσεων γύρω από την υδροτομή:

$$L = - \int_C (p - p_\infty) n_y \, ds \quad (2.5)$$

Οπου  $p_\infty$  είναι η πίεση του ρευστού πολύ μακριά από την υδροτομή, και  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την επιφάνεια της υδροτομής με φορά προς το ρευστό.

Η ροπή ανά μονάδα πλάτους γύρω από την αρχή των αξόνων,  $M_O$ , προκύπτει από την ολοκλήρωση των ροπών των δυνάμεων λόγω πιέσεων γύρω από την υδροτομή:

$$M_O = - \int_C (p - p_\infty)(xn_y - yn_x) \, ds \quad (2.6)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή Bernoulli ανάμεσα σε τυχόν σημείο πάνω στην υδροτομή και σε σημείο στο άπειρο έχουμε:

$$p - p_\infty = -\rho U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \rho \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (2.7)$$

Θεωρούμε τώρα ότι η υδροτομή είναι λεπτή, και ότι έχει μικρή κυρτότητα. Υποθέτουμε επίσης ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι μικρή. Τότε η θέση της υδροτομής δεν διαφέρει πολύ από την προβολή της στον άξονα  $x$ , και κάνουμε τις εξής παραδοχές:

1. Οι ταχύτητες που προκαλεί η παρουσία της υδροτομής είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα  $U$ :  $|\nabla \phi| \ll U$ .
2. Η οριακή συνθήκη (2.2) μπορεί να εφαρμοστεί στην προβολή της υδροτομής στον άξονα  $x$ , δηλαδή στο  $y = 0$ , αντί για την πραγματική θέση της υδροτομής. Η άνω πλευρά της υδροτομής αντικαθίσταται από την άνω πλευρά του άξονα  $x$ , που θα συμβολίζουμε με  $y = 0+$ , και η κάτω πλευρά της υδροτομής αντικαθίσταται από την κάτω πλευρά του άξονα  $x$ , που θα συμβολίζουμε με  $y = 0-$ .
3. Επειδή  $|dy_u/dx|, |dy_\ell/dx| \ll 1$  μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $n_x = 0, n_y = 1$  στην άνω πλευρά της υδροτομής και  $n_x = 0, n_y = -1$  στην κάτω πλευρά.

Με βάση τις παραδοχές 1 και 2 η οριακή συνθήκη (2.2) αντικαθίσταται από τις ακόλουθες:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = U \frac{dy_u}{dx} \quad y = 0+, \quad |x| < \frac{c}{2} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = U \frac{dy_\ell}{dx} \quad y = 0- \quad |x| < \frac{c}{2} \quad (2.9)$$

Η εξίσωση του Laplace και η εξίσωση (2.3) παραμένουν φυσικά ως έχουν (με μόνη διαφορά ότι η εξίσωση του Laplace ισχύει τώρα σε όλο το επίπεδο έξω από το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ ). Η συνθήκη Kutta από την άλλη πλευρά γράφεται ως εξής:

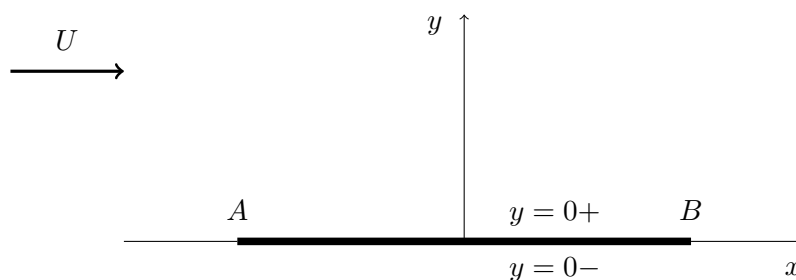
$$|\nabla \phi|_{x=c/2, y=0} < \infty \quad (2.10)$$

Λόγω της παραδοχής (1) η εξίσωση Bernoulli (2.7) απλοποιείται ως εξής:

$$p - p_\infty = -\rho U \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.11)$$

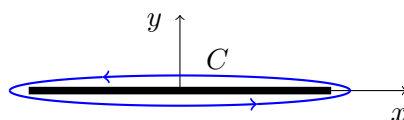
Λόγω της παραδοχής (3) και της εξίσωσης (2.11) για  $y = 0\pm$ , συμπεραίνουμε ότι:

$$(p - p_\infty)n_y = \rho U \frac{\partial \phi}{\partial \ell} \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.3: Το γραμμικοποιημένο πρόβλημα για το δυναμικό της υδροτομής.

όπου  $\partial\phi/\partial\ell$  είναι η παράγωγος παράλληλα προς το μοναδιαίο διάνυσμα  $\ell$  που εφάπτεται στη γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής όπως αυτό διαγράφεται αντιωρολογιακά (δες σχήμα 2.4): Στο  $y = 0-$  έχουμε  $\ell = i$  άρα  $\partial\phi/\partial x = \partial\phi/\partial\ell$ , και στο  $y = 0+$  έχουμε  $\ell = -i$  άρα  $\partial\phi/\partial x = -\partial\phi/\partial\ell$ .



Σχήμα 2.4: Επεξηγηματικό σχήμα για την εξίσωση (2.12).

Η έκφραση για την δυναμική άνωση ανά μονάδα πλάτους γράφεται επομένως σύμφωνα με την γραμμική θεωρία ως εξής:

$$L = -\rho U \int_C \frac{\partial\phi}{\partial\ell} ds = -\rho U \Gamma \tag{2.13}$$

Το ολοκλήρωμα στη εξίσωση (2.13) υπολογίζεται στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής και είναι συνεπώς ίσο με την κυκλοφορία  $\Gamma$  γύρω από το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . Η εξίσωση (2.13) επιβεβαιώνει το γενικό αποτέλεσμα που έχουμε αποδείξει με την βοήθεια του 1ου θεωρήματος του Blasius.

Εναλλακτικά, η δυναμική άνωση ανά μονάδα πλάτους μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$L = \rho U \int_{-c/2}^{c/2} (u_+ - u_-) dx \tag{2.14}$$

Ομοίως η εξίσωση για την ροπή ανά μονάδα πλάτους μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$M_0 = \rho U \int_{-c/2}^{c/2} x(u_+ - u_-) dx \tag{2.15}$$

Η γραμμικοποίηση του προβλήματος μας παρέχει την διευκόλυνση ότι μπορούμε να γράψουμε την λύση του προβλήματος σαν το άθροισμα των λύσεων δυο επί μέρους προβλημάτων, ενός συμμετρικού ως προς τον άξονα των  $x$ , και ενός αντισυμμετρικού ως προς τον άξονα των  $x$ . Συγκεκριμένα, γράφουμε το γραμμικοποιημένο δυναμικό ως εξής:

$$\phi = \phi_e + \phi_o \quad (2.16)$$

Όπου  $\phi_e, \phi_o$  είναι λύσεις της εξίσωσης του Laplace που ικανοποιούν τις συνθήκη (2.3), την συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής, και τις ακόλουθες οριακές συνθήκες πάνω στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής:

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial y} \Big|_{y=0\pm} = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{dy_u}{dx} - \frac{dy_\ell}{dx} \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \phi_o}{\partial y} \Big|_{y=0\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{dy_u}{dx} + \frac{dy_\ell}{dx} \right) \quad (2.18)$$

Από τις συνθήκες (2.17) και (2.18) έπεται ότι η παράγωγος του  $\phi_e$  ως προς  $y$  είναι περιττή συνάρτηση του  $y$ . Επομένως το  $\phi_e$  είναι άρτια συνάρτηση του  $y$  (συμμετρικό ως προς τον άξονα των  $x$ ). Ομοίως προκύπτει ότι το  $\phi_o$  είναι περιττή συνάρτηση του  $y$  (αντισυμμετρικό ως προς τον άξονα των  $x$ ).

Βλέπουμε δηλαδή ότι η γραμμικοποίηση επέτρεψε την αναγωγή του αρχικού προβλήματος σε δύο επί μέρους ανεξάρτητα προβλήματα: Το 1ο πρόβλημα (δυναμικό  $\phi_e$ ) περιγράφει την ροή γύρω από μιά συμμετρική διατομή με πάχος ίσο με το πάχος της δεδομένης υδροτομής  $y_u - y_\ell$ , και με μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Το 2ο πρόβλημα (δυναμικό  $\phi_o$ ) περιγράφει την ροή γύρω από μιά διατομή μηδενικού πάχους με σχήμα που ταυτίζεται με την μέση γραμμή κυρτότητας  $(y_u + y_\ell)/2$  της δεδομένης υδροτομής.

Λογω γραμμικότητας της εξίσωσης (2.13) ως προς  $\phi$ , η δύναμη πάνω στην υδροτομή είναι το άθροισμα των δυνάμεων που προκύπτουν από την λύση των δύο διαφορετικών προβλημάτων. Στο 1ο πρόβλημα η υδροτομή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα και έχει μηδενική γωνία πρόσπτωσης, οπότε αναπτύσσεται μηδενική άνωση και ροπή. Η άνωση και η ροπή προκύπτουν επομένως από την λύση του 2ου προβλήματος. Η έκφραση για την άνωση δηλαδή γράφεται:

$$L = \rho U \int_{-c/2}^{c/2} \left( \frac{\partial \phi_o}{\partial x} \Big|_+ - \frac{\partial \phi_o}{\partial x} \Big|_- \right) dx \quad (2.19)$$

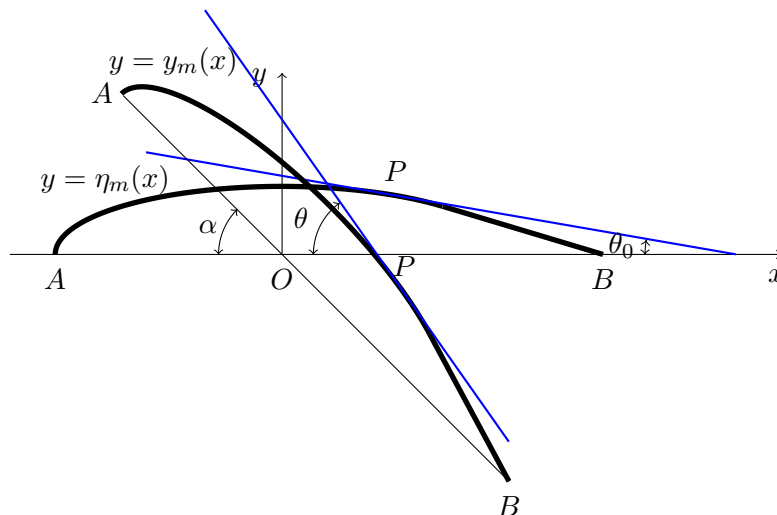
Και ομοίως η έκφραση για την ροπή παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$M_0 = \rho U \int_{-c/2}^{c/2} x \left( \frac{\partial \phi_o}{\partial x} \Big|_+ - \frac{\partial \phi_o}{\partial x} \Big|_- \right) dx \quad (2.20)$$

Σε πρώτη προσέγγιση, που είναι η γραμμική θεωρία υδροτομών, το πάχος της υδροτομής δεν παίζει ρόλο στον προσδιορισμό άνωσης και ροπής.

Επικεντρωνόμαστε κατά συνέπεια στην λύση του αντισυμμετρικού προβλήματος. Εστω  $\eta_u(x)$ , και  $\eta_\ell(x)$ , αντίστοιχα, οι εξισώσεις της άνω και κάτω πλευράς της υδροτομής υπό γωνία μηδενικής πρόσπτωσης. Στην τωρινή της θέση η υδροτομή έχει περιστραφεί κατά γωνία ίση με την γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ .





Σχήμα 2.5: Επεξηγηματικό σχήμα για την απόδειξη της εξίσωσης (2.21). Η διατομή περιστρέφεται κατά τη γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ , οπότε και η εφαπτομένη σε τυχόν σημείο  $P$  της μέσης γραμμής κυρτότητας (μπλε γραμμή) περιστρέφεται κατά την ίδια γωνία. Επομένως έχουμε ότι:  $\theta = \theta_0 + \alpha$

Κατά συνέπεια και οι εφαπτόμενες στην υδροτομή έχουν περιστραφεί κατά τη ίδια γωνία, δηλαδή μία τυχούσα εφαπτομένη που σχηματίζει οξεία γωνία κλίσης  $\theta_0$  ως προς τον άξονα των  $x$ , σχηματίζει τώρα γωνία  $\theta = \theta_0 + \alpha$ . Οπότε έχουμε τις σχέσεις:

$$\frac{dy_i}{dx} = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \tan(\pi - \theta_0) = -\tan \theta_0$$

Αυτό συνεπάγεται την ακόλουθη σχέση ανάμεσα στα  $dy_i/dx$  και στα  $d\eta_i/dx$  (οπου  $i = u, \ell$ ):

$$\frac{dy_i}{dx} = -\tan \theta = -\tan(\theta_0 + \alpha) = -\frac{\tan \theta_0 + \tan \alpha}{1 - \tan \theta_0 \tan \alpha} = -\frac{-d\eta_i/dx + \tan \alpha}{1 + (d\eta_i/dx) \tan \alpha}$$

Μεταχειριζόμαστε το γεγονός ότι  $|d\eta_i/dx| \ll 1$ , και το ότι η γωνία  $\alpha$  είναι μικρή (άρα  $\tan \alpha \approx \alpha$ ), και καταλήγουμε ότι:

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{d\eta_i}{dx} - \alpha \quad i = u, \ell \quad (2.21)$$

Επομένως στην γραμμική θεωρία μπορούμε να γράψουμε το δυναμικό  $\phi_o$  σαν το άθροισμα δύο δυναμικών,  $\phi_0$  και  $\phi_\alpha$  τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες στη γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial y} \Big|_{y=0\pm} = U \frac{d\eta_m}{dx} \quad (2.22)$$

Οπου  $\eta_m = (\eta_u + \eta_\ell)/2$  είναι η εξίσωση της μέσης γραμμής κυρτότητας υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης.

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y} \Big|_{y=0\pm} = -U\alpha \quad (2.23)$$

Το δυναμικό  $\phi_0$  παριστάνει τη γραμμικοποιημένη λύση για ροή γύρω από την υδροτομή υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης, ενώ το δυναμικό  $\phi_\alpha$  παριστάνει τη γραμμικοποιημένη λύση για ροή γύρω από επίπεδη πλάκα υπό γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ .

Το δυναμικό  $\phi_0$  είναι ιδιότητα της συγκεκριμένης υδροτομής. Το δυναμικό  $\phi_\alpha$  το έχουμε υπολογίσει με την θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων και η λύση είναι γνωστή: Δημιουργείται άνωση ίση με  $\pi\rho U^2 c \sin \alpha$ , το οποίο για μικρές γωνίες πρόσπτωσης απλοποιείται σε  $\pi\rho U^2 c \alpha$ .

Κατά συνέπεια αν ονομάσουμε  $L_0$  την δυναμική άνωση ανά μονάδα πλάτους στην υδροτομή υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης, από την εξίσωση (2.19) και την λύση για κεκλιμένη επίπεδη πλάκα, έχουμε ότι:

$$L = L_0 + \pi\rho U^2 c \alpha \quad (2.24)$$

Διαιρώντας με  $(1/2)\rho U^2 c$  καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για τον *συντελεστή άνωσης*  $C_L$ :

$$C_L = C_{L0} + 2\pi\alpha \quad (2.25)$$

Οπου  $C_{L0} = 2L_0/(\rho U^2 c)$  είναι ο συντελεστής άνωσης για μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Η εξίσωση (2.25) είναι η πιο βασική σχέση της θεωρίας λεπτών υδροτομών.

Ο συντελεστής άνωσης μηδενίζεται για όταν η γωνία πρόσπτωσης πάρει την τιμή  $\alpha_0 = -C_{L0}/(2\pi)$ . Ο συντελεστής άνωσης γράφεται λοιπόν και ως εξής:

$$C_L = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \quad (2.26)$$

Η γωνία  $\alpha_0 = -C_{L0}/(2\pi)$  λέγεται *γωνία μηδενικής άνωσης*.

Ομοίως καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για την ροπή στην λεπτή υδροτομή:

$$M_O = M_h - \pi\rho U^2 c^2 \alpha \quad (2.27)$$

Οπου  $M_h$  είναι η συνισταμένη ροπή των υδροδυναμικών δυνάμεων ως προς την αρχή των αξόνων υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Αντίστοιχα με την εξίσωση (2.25) για τον

συντελεστή άνωσης μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη εξίσωση για τον συντελεστή ροπής:

$$C_M = C_{Mh} - \frac{1}{2}\pi\alpha \quad (2.28)$$

Όπου  $C_{Mh} = 2M_h/(\rho U^2 c^2)$  είναι ο συντελεστής ροπής υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης.

Ενα σημείο που αξίζει να αναφέρουμε είναι το ότι, όπως βρήκαμε από την λύση για επίπεδη πλάκα υπό γωνία κλίσης, η ταχύτητα είναι άπειρη στο άκρο πρόσπτωσης. Και η ταχύτητα απειρίζεται εκεί επειδή προκύπτει από λύση προβλήματος υδροτομής με μηδενικό πάχος. Η ταχύτητα στο άκρο πρόσπτωσης δεν θα γίνει φυσικά στην πραγματικότητα άπειρη, ενδεχομένως να είναι όμως αρκετά μεγάλη για να προκαλέσει χαμηλές πιέσεις με δυσάρεστα επακόλουθα (σπηλαίωση). Είναι κατά συνέπεια επιθυμητό η φόρτιση της υδροτομής, δηλαδή η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην άνω και στην κάτω πλευρά της υδροτομής, να είναι κατά το δυνατόν ομοιόμορφη κατά το μήκος της χορδής. Αυτό είναι μία απαίτηση κατά τον σχεδιασμό των υδροτομών, δηλαδή επιλογή των χαρακτηριστικών της υδροτομής ώστε να αποφεύγονται, κατά το δυνατόν, μεγάλες ανομοιομορφίες στην φόρτιση.

Υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή της γωνίας πρόσπτωσης στην οποία η ταχύτητα στο άκρο πρόσ-πτωσης δεν απειρίζεται έστω και αν υποθεθεί ότι το πάχος της υδροτομής είναι μηδενικό. Αυτό γίνεται όταν το μπροστινό σημείο ανακοπής συμπίπτει με το άκρο πρόσπτωσης. Η γωνία αυτή λέγεται ιδανική γωνία πρόσπτωσης. Η ονομασία ιδανική αναφέρεται στο ότι είναι απαλλαγμένη από το πρόβλημα της δημιουργίας χαμηλών πιέσεων στην ακμή πρόσπτωσης. Για οποιαδήποτε υδροτομή συμμετρική ως προς το μέσο της χορδής, η ιδανική γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με μηδέν. Αυτό συμβαίνει επειδή, λόγω συμμετρίας της υδροτομής υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης, η συνθήκη Kutta ισχύει και στο άκρο πρόσπτωσης. Θα δούμε την εξίσωση που ορίζει την ιδανική γωνία πρόσπτωσης στο κεφάλαιο με τη λύση του προβλήματος με σειρά Fourier.

## 2.3 Λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος με χρήση διανεμημένης στροβιλότητας.

Η παρουσία υδροτομής αμελητέου πάχους προκαλεί αύξηση της ταχύτητας του ρευστού στην άνω πλευρά της υδροτομής και μείωση της ταχύτητας του ρευστού στην κάτω πλευρά. Αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία κατανομή στροβιλότητας πάνω στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής.

Θεωρούμε μία δίνη απειροστής έντασης  $d\Gamma$  στην θέση  $(\xi, 0)$ . Ως γνωστόν το πεδίο ταχυτήτων που δημιουργεί η δίνη δίνεται από την σχέση:

$$du - v dv = -i \frac{d\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - \xi} \quad (2.29)$$

Όπου  $z = x + iy$  και  $i = \sqrt{-1}$ . Θεωρούμε τώρα ότι όλο το τμήμα  $(-c/2, c/2)$  καλύπτεται από τέτοιες δίνες διαφορετικής έντασης. Το συνολικό πεδίο ταχυτήτων προκύπτει από την ολοκλήρωση της (2.29) ως προς  $\xi$ :

$$u - w = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi \quad (2.30)$$

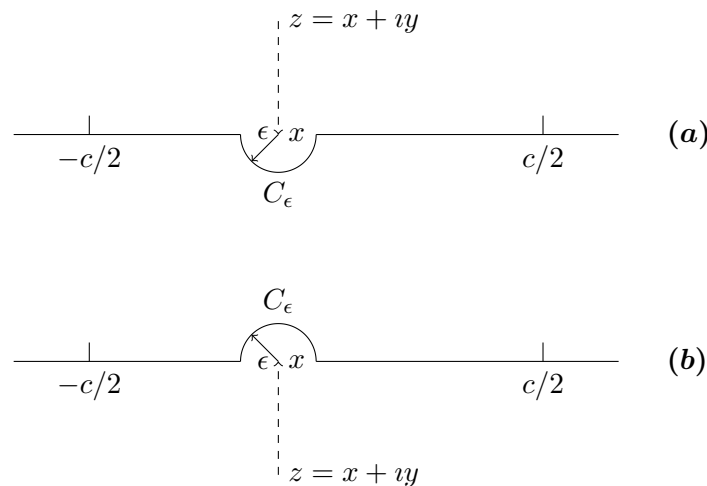
Όπου θέσαμε  $d\Gamma(\xi) = \gamma(\xi) d\xi$ . Η συνάρτηση  $\gamma(\xi)$  λέγεται πυκνότητα στροβιλότητας, και από τον ορισμό της έχει διαστάσεις ταχύτητας. Διαχωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (2.30) έχουμε ότι:

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi) y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (2.31)$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi) (x - \xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (2.32)$$

Οι εξισώσεις (2.31) και (2.32) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστούν οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας σε οποιοδήποτε σημείο έξω από την υδροτομή, με την προϋπόθεση βέβαια ότι έχουμε βρει την πυκνότητα στροβιλότητας. Για να εφαρμόσουμε όμως την οριακή συνθήκη στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής, που μας είναι απαραίτητο για να λύσουμε για την πυκνότητα στροβιλότητας, πρέπει πρώτα να βρούμε το όριο των (2.31) και (2.32) για  $y \rightarrow 0$ . Έχει βέβαια σημασία αν  $y \rightarrow 0$  από θετικές ή από αρνητικές τιμές. Χρησιμοποιούμε ένα δείκτη '+' για τιμές μεγεθών στην πλευρά  $y = 0+$ , και ένα δείκτη '-' για τιμές μεγεθών στην πλευρά  $y = 0-$ .

Το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (2.30) δεν συγκλίνει όταν  $y = 0$  επειδή υπάρχει ανώμαλο σημείο στο  $\xi = x$ . Για να παρακάμψουμε αυτή τη δυσκολία θα θεωρήσουμε μία "παραμορφωμένη" γραμμή ολοκλήρωσης από το  $-c/2$  στο  $c/2$  (σχήμα 2.6, που περιλαμβάνει ένα ημικύκλιο  $C_\epsilon$ , το οποίο περικλείει το ανώμαλο σημείο  $\xi = x$ ). Όπως φαίνεται στο σχήμα, υπάρχουν δύο διαφορετικές γραμμές ολοκλήρωσης ανάλογα με το αν η μεταβλητή  $y$  τείνει στο μηδέν από θετικές ή από αρνητικές τιμές. Στην συνέχεια θα πάρουμε το όριο για  $\epsilon \rightarrow 0$ .



Σχήμα 2.6: Σχήμα για την ολοκλήρωση όταν το σημείο βρεθεί πάνω στην γραμμικοποιημένη θέση της υδροτομής. Σχήμα (a) όταν  $y \rightarrow 0$  από θετικές τιμές, και σχήμα (b) όταν  $y \rightarrow 0$  από αρνητικές τιμές.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση που το  $y$  τείνει στο μηδέν από θετικές τιμές (χρησιμοποιούμε τη γραμμή ολοκλήρωσης στο σχήμα (a)). Τότε έχουμε ότι:

$$u_+ - w_+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_\epsilon \tag{2.33}$$

Όπου η συνάρτηση  $q_\epsilon$  ορίζεται ως εξής:

$$q_\epsilon = -i \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-c/2}^{x-\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi + \int_{C_\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi + \int_{x+\epsilon}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \right) \tag{2.34}$$

Όταν πάρουμε το όριο για  $\epsilon \rightarrow 0$  της εξίσωσης (2.34), το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου όρου θα μας δώσουν εξ ορισμού την κύρια τιμή του ολοκληρώματος της συνάρτησης  $\gamma(\xi)/(x-\xi)$  από  $-c/2$  έως  $c/2$ :

$$\int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-c/2}^{x-\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi + \int_{x+\epsilon}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \right) \tag{2.35}$$

Η οριζόντια γραμμή στο σύμβολο του ολοκληρώματος συμβολίζει την “κύρια τιμή”, όπως ορίζεται από την εξίσωση (2.35).

Γιά να βρούμε τώρα το όριο του δεύτερου όρου της εξίσωσης (2.34) για  $\epsilon \rightarrow 0$ , επειδή το σημείο ολοκλήρωσης  $\xi$  διαγράφει το ημικύκλιο  $C_\epsilon$  που έχει ακτίνα  $\epsilon$ , κάνουμε την αντικατάσταση  $\xi = x + \epsilon e^{i\theta}$ , με  $\pi < \theta < 2\pi$ , οπότε  $d\xi = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ , και έχουμε ότι:

$$\int_{C_\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = -i \int_{\pi}^{2\pi} \gamma(x + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \tag{2.36}$$

Παίρνουμε τώρα το όριο της (2.36) για  $\epsilon \rightarrow 0$  και βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi = -i \int_{\pi}^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma(x + \epsilon e^{i\theta}) d\theta = -i\pi\gamma(x) \quad (2.37)$$

Αντικαθιστούμε τις (2.37) και (2.35) στην (2.33) και έχουμε ότι:

$$u_+ - v_+ = -i \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi - i\pi\gamma(x) \right) = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi - \frac{1}{2}\gamma(x) \quad (2.38)$$

Διαχωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (2.38) καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις για τις  $u_+, v_+$ :

$$u_+ = -\frac{1}{2}\gamma \quad (2.39)$$

$$v_+ = v(x, 0_+) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (2.40)$$

Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για  $y \rightarrow 0$  από αρνητικές τιμές (ολοκλήρωση στην γραμμή (b)), καταλήγουμε ότι η συνιστώσα  $v_-$  δίνεται επίσης από την εξίσωση (2.40), ενώ η συνιστώσα  $u_-$  είναι ίση με  $\gamma(x)/2$ . Καταλήγουμε επομένως ότι:

$$u_{\pm} = \mp \frac{1}{2}\gamma(x) \quad (2.41)$$

$$v_{\pm} = v(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (2.42)$$

Από την γραμμικοποιημένη αρχή του Bernoulli (2.11) και τις εξισώσεις (2.41) η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην πάνω πλευρά της υδροτομής δίνεται από την σχέση:

$$p_- - p_+ = \rho U(u_+ - u_-) = -\rho U \gamma \quad (2.43)$$

Η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην άνω πλευρά της υδροτομής είναι κατά συνέπεια κατ' ευθείαν ανάλογη με την πυκνότητα στροβιλότητας  $\gamma$ , και γι' αυτό η τελευταία λέγεται και *φόρτιση* της υδροτομής.

Από τις εκφράσεις (2.14) και (2.15) αντικαθιστώντας  $\gamma = u_- - u_+$  (ή ισοδύναμα ολοκληρώνοντας τη διαφορά πίεσης (2.43) κατά το μήκος της χορδής) έχουμε τις ακόλουθες εκφράσεις της δύναμης και της ροπής ανά μονάδα πλάτους στην υδροτομή συναρτήσει της φόρτισης  $\gamma$ :

$$L = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) \, dx \quad (2.44)$$

$$M_O = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} x \gamma(x) \, dx \quad (2.45)$$

Από την εξίσωση (2.44) και την γενική σχέση  $F_y = -\rho U \Gamma$  προκύπτει ότι η κυκλοφορία γύρω από την υδροτομή  $\Gamma$  είναι το ολοκλήρωμα της πυκνότητας στροβιλότητας  $\gamma$ :

$$\Gamma = \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) \, dx \quad (2.46)$$

Εφαρμογή της οριακής συνθήκης (2.18) οδηγεί στην εξής σχέση:

$$U \frac{d y_m}{d x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} \, d\xi = v(x, 0) \quad (2.47)$$

Οπου  $y_m(x) = (y_u(x) + y_\ell(x))/2$  είναι η εξίσωση της μέσης γραμμής κυρτότητας. Η εξίσωση (2.47) λέγεται γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση. Ολοκληρωτική επειδή ο άγνωστος (η πυκνότητα στροβιλότητας  $\gamma$ ) βρίσκεται δεξιά από το σύμβολο ολοκλήρωσης και γραμμική επειδή ο άγνωστος εμφανίζεται στην πρώτη δύναμη.

Η συνθήκη Kutta επιβαλλει πεπερασμένη ταχύτητα στο άκρο εκφυγής, το οποίο σημαίνει ότι η διαφορά πίεσης στο άκρο εκφυγής θα είναι μηδενική. Λόγω της εξίσωσης (2.43) η συνθήκη Kutta γράφεται ως εξής:

$$\gamma(x)|_{x=c/2} = 0 \quad (2.48)$$

Εχουμε επομένως να επιλύσουμε ως προς την συνάρτηση  $\gamma(x)$  την (2.47) με οριακή συνθήκη την (2.48). Γενικά μιά ολοκληρωτική εξίσωση επιλύεται προσεγγίζοντας την ολοκλήρωση με ένα σχήμα αριθμητικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων (π.χ. κανόνας Simpson), και μετατρέποντας έτσι την ολοκληρωτική εξίσωση σε ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.47) όμως ανήκει στην (μικρή) υποκατηγορία ολοκληρωτικών εξισώσεων των οποίων η λύση μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή.

Αποδεικνύεται στην θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων ότι η λύση της (2.47) δίνεται από την εξής σχέση:

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi((c/2)^2 - x^2)^{1/2}} \left( \int_{-c/2}^{c/2} \frac{(((c/2)^2 - \xi^2))^{1/2}}{\xi - x} v(\xi, 0) \, d\xi + \frac{1}{2}\Gamma \right) \quad (2.49)$$

Οπου  $\Gamma$  είναι η κυκλοφορία γύρω από την υδροτομή (εξ. (2.46)), η οποία είναι άγνωστη. Οπως είχαμε κάνει και στο πρόβλημα υπολογισμού της άνωσης σε επίπεδη πλάκα υπό

κλίση, για τον υπολογισμό της  $\Gamma$  θα επικαλεστούμε την συνθήκη του Kutta, (Η απόδειξη της (2.49) παραλείπεται).

Η τιμή της πυκνότητας στροβιλότητας που προκύπτει είναι άπειρη και στα δύο άκρα. Αυτό συνεπάγεται ότι και η ταχύτητα απειρίζεται στα δύο άκρα. Η απειρία στο άκρο εκφυγής μπορεί να απαλειφθεί αν, επικαλούμενοι την συνθήκη του Kutta, επιλέξουμε την κυκλοφορία έτσι ώστε η παράσταση μέσα στις παρενθέσεις στην εξίσωση (2.49) να μηδενίζεται στο άκρο εκφυγής. Θέτουμε  $x = c/2$  στην παράσταση μέσα στις παρενθέσεις της (2.49) και βρίσκουμε ότι η παράσταση μηδενίζεται για την ακόλουθη τιμή της  $\Gamma$ :

$$\Gamma = 2 \int_{-c/2}^{c/2} \frac{((c/2)^2 - \xi^2)^{1/2}}{c/2 - \xi} v(\xi, 0) d\xi = 2U \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dy_m}{dx}(\xi) \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} d\xi \quad (2.50)$$

Η συνθήκη Kutta επιτρέπει, όπως και στην περίπτωση της επίπεδης πλάκας υπό κλίση, τον προσδιορισμό της τιμής της κυκλοφορίας  $\Gamma$ . Είναι διδακτικό να επαληθεύσουμε μέσω της (2.50) το αποτέλεσμα για την κυκλοφορία γύρω από επίπεδη πλάκα υπό κλίση, που είναμε λύσει με σύμμορφη απεικόνιση. Η επίπεδη πλάκα υπό κλίση αντιστοιχεί σε  $dy_m/dx = -\alpha$ . Αντικαθιστούμε στην (2.50) και βρίσκουμε ότι:

$$\Gamma = -2\alpha U \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} d\xi = -\pi \alpha c$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος υπολογίστηκε με την αντικατάσταση  $\xi = sc/2$ ,  $|s| < 1$ . Το αποτέλεσμα συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε με την μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισης.

Αντικαθιστούμε την τιμή της  $\Gamma$  και την τιμή του  $v(\xi, 0)$  από την (2.47) στην εξίσωση (2.49) και βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση για την πυκνότητα  $\gamma$ :

$$\gamma(x) = \frac{2U}{\pi} \sqrt{\frac{c/2 - x}{c/2 + x}} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dy_m}{dx}(\xi) \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} \frac{1}{\xi - x} d\xi \quad (2.51)$$

Η πυκνότητα στροβιλότητας τώρα μηδενίζεται στο άκρο εκφυγής, λόγω της συνθήκης Kutta.

Για την άνοση ανά μονάδα πλάτους  $L$  βρίσκουμε ότι:

$$L = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) dx = -2\rho U^2 \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dy_m}{dx}(\xi) \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} d\xi \quad (2.52)$$

Οπότε ο συντελεστής άνοσης  $C_L$  δίνεται από την σχέση:

$$C_L = -\frac{4}{c} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dy_m}{dx}(\xi) \sqrt{\frac{c/2 + \xi}{c/2 - \xi}} d\xi \quad (2.53)$$

Η ροπή γύρω από την αρχή των αξόνων,  $M_O$ , προκύπτει ίση με:



$$M_O = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(\xi) \xi \, d\xi = 2\rho U^2 \int_{-c/2}^{c/2} \frac{d y_m}{d x}(\xi) \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \xi^2} \, d\xi \quad (2.54)$$

Γιά υδροτομές συμμετρικές ως προς τον άξονα των  $y$  η κλίση  $d y_m / d x$  είναι περιττή συνάρτηση του  $x$  για μηδενική γωνία πρόσπτωσης, οπότε η ροπή μηδενίζεται.

Ο συντελεστής ροπής δίνεται από την σχέση:

$$C_M = \frac{4}{c^2} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{d y_m}{d x}(\xi) \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \xi^2} \, d\xi \quad (2.55)$$

Το κέντρο πίεσης της υδροτομής βρίσκεται σε απόσταση  $M_O/L = c C_M / C_L$  από το κέντρο της χορδής.

Παράδειγμα 1

Ας θεωρήσουμε μία υδροτομή με παραβολικό σχήμα. Τότε η εξίσωση της μέσης γραμμής κυρτότητας για μηδενική γωνία πρόσπτωσης δίνεται από την σχέση:

$$\eta_m = \frac{1}{2} b \left( \frac{c^2}{4} - x^2 \right)$$

Οπου  $b$  μία σταθερά τέτοια ώστε η μέγιστη κυρτότητα της υδροτομής,  $m$ , να είναι ίση με  $bc^2/8$ .

Επομένως έχουμε ότι:

$$\frac{d \eta_m}{d x} = -bx$$

Στην περίπτωση αυτή από τις εξισώσεις (2.51), (2.53), και (2.55) προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\gamma(x) = -2Ub \left( \frac{c^2}{4} - x^2 \right)^{1/2}$$

$$C_L = \frac{1}{2} \pi bc$$

$$C_M = 0$$

Παρατηρούμε ότι για μηδενική γωνία πρόσπτωσης η συνθήκη Kutta ικανοποιείται και στο άκρο πρόσπτωσης.

## Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί η μέση γραμμή κυρτότητας υδροτομής υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης που να έχει σταθερή φόρτιση σε όλο το μήκος της χορδής της.

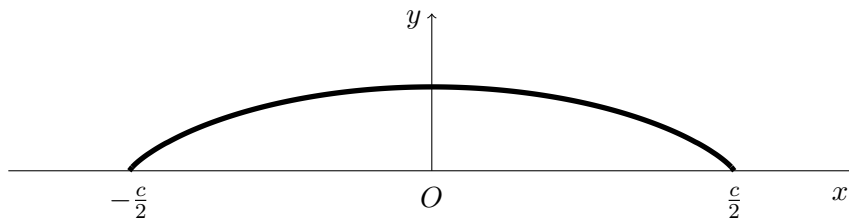
Από την ολοκληρωτική εξίσωση (2.47) για  $\gamma = \text{σταθερά}$  (αρνητική) έχουμε ότι:

$$\frac{d\eta_m}{dx} = -\kappa \int_{-c/2}^{c/2} \frac{1}{\xi - x} d\xi = -\kappa (\ln(\frac{c}{2} - x) - \ln(\frac{c}{2} + x))$$

Οπου  $\kappa = \gamma/(2\pi U)$ . Ολοκληρώνουμε ως προς  $x$  και έχουμε ότι:

$$\eta_m = A + \kappa \left( \left(\frac{c}{2} - x\right) \ln\left(\frac{c}{2} - x\right) + \left(\frac{c}{2} + x\right) \ln\left(\frac{c}{2} + x\right) \right)$$

Οπου  $A$  η σταθερά ολοκλήρωσης. Για να έχουμε  $\eta_m = 0$  στα δύο άκρα  $x = \pm c/2$  πρέπει να έχουμε  $A = -\kappa c \ln c$ , οπότε η υδροτομή έχει το σχήμα που φαίνεται στο γράφημα που ακολουθεί.



Σχήμα 2.7: Μέση γραμμή κυρτότητας υδροτομής με σταθερή φόρτιση

Το σχήμα που υπολογίσαμε δεν είναι όμως συνεπές με τη θεωρία, επειδή στα δύο άκρα  $x = \pm c/2$  η μέση γραμμή κυρτότητας έχει άπειρη κλίση, πράγμα που παραβιάζει μία από τις βασικές υποθέσεις της θεωρίας λεπτών υδροτομών. Επί πλέον το σχήμα δεν ευνοεί την καλή υδροδυναμική ανάπτυξη των οριακών στρωμάτων πάνω στην υδροτομή.

## Ασκηση

Χρησιμοποιήστε την εξίσωση (2.30) για να πάρετε μία έκφραση για την μιγαδική ταχύτητα της ροής γύρω από υδροτομή. Στην συνέχεια χρησιμοποιείστε αυτή την έκφραση και την γενική έκφραση για την δύναμη και ροπή σε αντικείμενο σε δισδιάστατη αστρόβιλη ροή για να επαληθεύσετε τις εξισώσεις (2.44), (2.45).

Από την εξίσωση (2.30) έχουμε ότι η μιγαδική ταχύτητα της ροής  $u - iw$  στην θέση  $z = x + iy$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u - iw = U - \frac{i}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi$$

Για  $|z| > |\xi|$  έχουμε ότι:

$$\frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{z(1-\xi/z)} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{\xi}{z} + \left(\frac{\xi}{z}\right)^2 + \dots\right)$$

Οπότε η μιγαδική ταχύτητα γράφεται σαν σειρά Laurent ως εξής:

$$u - w = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots$$

Οπου οι συντελεστές  $C_0, C_1, C_2, \dots$  ορίζονται ως εξής:

$$C_0 = U$$

$$C_n = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \xi^{n-1} \gamma(\xi) \, d\xi, \quad \text{για } n = 1, 2, \dots$$

Τώρα αντικαθιστούμε τους συντελεστές της σειράς Laurent στις γενικές εκφράσεις για την δύναμη  $F_x, F_y$  και τη ροπή  $M_O$  σε αντικείμενο σε διδιάστατη μόνιμη αστρόβιλη ροή και έχουμε:

(i) Πρώτα για τη δύναμη

$$F_x - iF_y = -2\pi\rho C_0 C_1 = i\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(\xi) \, d\xi$$

Επομένως

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(\xi) \, d\xi$$

(ii) Υστερα για τη ροπή

$$M_O = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re}(2i\pi (C_1^2 + 2C_0 C_2)) = -\rho U \int_{-c/2}^{c/2} \xi \gamma(\xi) \, d\xi$$

Προέκυψαν δηλαδή οι εξισώσεις (2.44), (2.45).

## 2.4 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με την χρήση σειράς Fourier

Η ακριβής λύση της εξίσωσης (2.47) απαιτεί τον υπολογισμό μερικών όχι και τόσο απλών ολοκληρωμάτων (μάλλον, για να ακριβολογούμε, των κυρίων τιμών των ολοκληρωμάτων). Εναλλακτικά η εξίσωση (2.47) μπορεί να επιλυθεί με την βοήθεια της θεωρίας σειράς Fourier. Η χρήση σειράς Fourier οδηγεί σε πολύ απλούστερες εκφράσεις για τον συντελεστή άνωσης και τον συντελεστή ροπής από αυτές που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Πρώτα μετασχηματίζουμε της εξίσωση (2.47) ορίζοντας τις μεταβλητές  $\theta$  και  $\varphi$  στο διάστημα  $(0, \pi)$ , ως εξής:

$$x = \frac{s}{2} \cos \theta \quad \xi = \frac{s}{2} \cos \varphi \quad (2.56)$$

Από τον ορισμό έχουμε ότι  $d\xi = -(s/2) \sin \varphi d\varphi$ , οπότε η εξίσωση (2.47) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$U \frac{d y_m}{d x}(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} \sin \varphi d\varphi \quad (2.57)$$

Στην εξίσωση (2.57) ο άγνωστος  $\gamma$  αλλά και ο γνωστός όρος στο αριστερό μέρος της εξίσωσης  $U d y_m / d x$  θεωρούνται συναρτήσεις των μεταβλητών  $\theta, \varphi$ .

Ως γνωστόν στο άκρο εκφυγής ( $\theta = 0$ ) έχουμε την συνθήκη Kutta που επιβάλλει μηδενισμό της στροβιλότητας, ενώ στο άκρο πρόσπτωσης η στροβιλότητα έχει ανώμαλο σημείο. Η συμπεριφορά της στροβιλότητας στο ανώμαλο σημείο είναι γνωστή, είναι η ίδια με αυτήν που είδαμε στη άκρο πρόσπτωσης επίπεδης πλάκας υπό κλίση.

Μπορούμε επομένως να παραστήσουμε την στροβιλότητα σαν μία ημιτονική σειρά Fourier αρκεί να ομαλοποιήσουμε πρώτα τη συμπεριφορά της στο άκρο πρόσπτωσης. Όπως αποδείξαμε στη ροή γύρω από κεκλιμένη πλάκα, η στροβιλότητα στο άκρο πρόσπτωσης ( $\theta = \pi$ ) είναι ανάλογη με  $\tan(\theta/2)$ , επομένως αναμένουμε ότι η στροβιλότητα σε υδροτομή με κυρτό άξονα πρέπει επίσης να είναι ανάλογη με  $\tan(\theta/2)$  στο άκρο εκφυγής αλλά με διαφορετική σταθερά αναλογίας.

Επομένως, για να ομαλοποιήσουμε τη συμπεριφορά της στροβιλότητας στο άκρο εκφυγής, αφαιρούμε από τη στροβιλότητα τον όρο  $A_0 \tan(\theta/2)$  όπου  $A_0$  μια άγνωστη σταθερά. Επιλέγοντας την κατάλληλη τιμή  $A_0$  μπορούμε να κάνουμε τη διαφορά να μηδενίζεται και στο άκρο πρόσπτωσης. Γράφουμε δηλαδή την στροβιλότητα στην ακόλουθη μορφή:

$$\gamma = -2U(A_0 \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)) \quad (2.58)$$

Άγνωστοι τώρα είναι οι συντελεστές  $A_n, n = 0, 1, 2, \dots$ . Ο όρος  $U$  έχει εισαχθεί στο δεξιό μέλος της εξίσωσης ώστε οι συντελεστές  $A_n$  να είναι αδιάστατοι, και το αρνητικό πρόσημο έχει εισαχθεί ώστε οι συντελεστές  $A_n$  να είναι θετικοί. Όπως είπαμε, η τιμή

του όρου  $A_0$  είναι τέτοια ώστε η παράσταση  $\gamma + 2UA_0 \tan(\theta/2)$  να μηδενίζεται στο άκρο πρόσπτωσης  $\theta = 0$ . Για παράδειγμα, στην ειδική περίπτωση που έχουμε επίπεδη πλάκα υπό κλίση, όπως έχουμε δει,  $A_0 = \alpha$ , όπου  $\alpha$  είναι η γωνία πρόσπτωσης. Στην γενική περίπτωση βέβαια η τιμή του  $A_0$  προκύπτει από τη λύση του προβλήματος, όπως θα δούμε λίγο παρακάτω.

Από τη θεωρία για τις σειρές Fourier έχουμε ότι οι συντελεστές  $A_n$   $n = 1, 2, \dots$  στην εξίσωση (2.58) δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$2U A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\gamma + 2UA_0 \tan \frac{\theta}{2}) \sin(n\theta) d\theta \quad (2.59)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τη εξίσωση (2.57) για να λύσουμε για τους άγνωστους  $A_n$ . Αντικαθιστούμε την εξίσωση (2.58) στην (2.57) και εναλλάσσοντας ολοκλήρωση και άθροιση βρίσκουμε ότι:

$$\frac{dy_m}{dx} = \frac{1}{\pi} (A_0 \int_0^\pi \tan \frac{\varphi}{2} \frac{1}{\cos \varphi - \cos \theta} \sin \varphi d\varphi + \sum_{n=1}^\infty A_n \int_0^\pi \frac{\sin(n\varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} \sin \varphi d\varphi) \quad (2.60)$$

Στη συνέχεια μεταχειριζόμαστε τις ακόλουθες τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\tan \frac{x}{2} \sin x = 1 - \cos x$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

Με χρήση των δύο ταυτοτήτων, η εξίσωση (2.60) γράφεται ως εξής:

$$\frac{dy_m}{dx} = \frac{1}{\pi} (A_0 \int_0^\pi \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty A_n \int_0^\pi \frac{\cos((n-1)\varphi) - \cos((n+1)\varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi) \quad (2.61)$$

Όλα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.61) είναι της μορφής (για τιμές του  $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$G_n(\theta) = \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi)}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi \quad (2.62)$$

Οι κύριες τιμές των ολοκληρωμάτων (2.62) μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή και ορίζουν τις λεγόμενες συναρτήσεις του Glauert:

$$G_n(\theta) = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (2.63)$$

Η απόδειξη της εξίσωσης (2.63) γίνεται χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες με την βοήθεια μαθηματικής επαγωγής, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις  $G_n$  ικανοποιούν την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$G_{n+1} + G_{n-1} - 2 \cos \theta G_n = 0 \quad (2.64)$$

Μεταχειριζόμαστε τώρα την εξίσωση (2.62) για να εκφράσουμε τα ολοκληρώματα στην (2.61) ως εξής:

$$\frac{d y_m}{d x} = \frac{1}{\pi} (A_0 (G_0 - G_1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (G_{n-1} - G_{n+1})) \quad (2.65)$$

Παρατηρούμε (εξίσωση (2.62)) ότι  $G_0 = 0$ ,  $G_1 = \pi$ , και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα  $\sin x - \sin y = 2 \sin ((x - y)/2) \cos ((x + y)/2)$  ότι ισχύει:

$$G_{n-1} - G_{n+1} = \pi \frac{\sin ((n - 1)\theta) - \sin ((n + 1)\theta)}{\sin \theta} = -2\pi \cos (n\theta) \quad (2.66)$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση (2.65) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{d y_m}{d x} = -(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos (n\theta)) \quad (2.67)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι άγνωστοι είναι ίσοι με μείον τους συντελεστές της συνημιτονικής σειράς Fourier της συνάρτησης  $d y_m / d x$ , θεωρούμενης σαν συνάρτησης της μεταβλητής  $\theta$  στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

Σύμφωνα με την θεωρία σειρών Fourier, οι άγνωστοι  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  μπορούν να υπολογισθούν από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d y_m}{d x} d \theta \quad (2.68)$$

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d y_m}{d x} \cos (n\theta) d \theta \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

Οι συντελεστές άνωσης και ροπής μπορούν να εκφραστούν πολύ απλά συναρτήσει των (γνωστών πλέον) συντελεστών  $A_n$ :

$$\begin{aligned} C_L &= -\frac{2}{U c} \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) d x = -\frac{1}{U} \int_0^{\pi} (-2U A_0 \tan \frac{\theta}{2} - 2U \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin (n\theta)) \sin \theta d \theta = \\ &= \pi(2A_0 + A_1) \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned}
C_M &= -\frac{2}{U c^2} \int_{-c/2}^{c/2} \gamma(x) x \, dx = -\frac{1}{2U} \int_0^\pi (-2UA_0 \tan \frac{\theta}{2} - 2U \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta)) \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \\
&= \frac{\pi}{2} (-A_0 + \frac{1}{2} A_2) \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Γιά να καταλήξουμε στις εξισώσεις (2.70) και (2.71) χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta \, d\theta &= \pi \\
\int_0^\pi \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta &= -\frac{\pi}{2} \\
\int_0^\pi \sin(k\theta) \sin(n\theta) \, d\theta &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}
\end{aligned}$$

Εύκολες επαληθεύσεις των εξισώσεων (2.70) και (2.71) μπορούν να γίνουν με τις εξής ειδικές περιπτώσεις (όπου το αποτέλεσμα μας είναι γνωστό):

1. Επίπεδη πλάκα υπό γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ :  $d\eta_m/dx = -\alpha$ , οπότε  $A_0 = \alpha$ ,  $A_1 = A_2 = \dots = 0$ . Οι εξισώσεις (2.70) και (2.71) δίνουν  $C_L = 2\pi\alpha$ ,  $C_M = -\pi\alpha/2$ .
2. Παραβολικό τόξο με μέγιστη κυρτότητα  $m = bc^2/8$  υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης:  $d\eta_m/dx = -bx = -b(c/2) \cos \theta$ , οπότε  $A_1 = bc/2$ ,  $A_0 = A_2 = A_3 = \dots = 0$ . Οι εξισώσεις (2.70) και (2.71) δίνουν  $C_L = (1/2)\pi bc$ ,  $C_M = 0$ .
3. Παραβολικό τόξο με μέγιστη κυρτότητα  $m = bc^2/8$  υπό γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ :  $d\eta_m/dx = -\alpha - bx = -\alpha - b(c/2) \cos \theta$ , οπότε  $A_0 = \alpha$ ,  $A_1 = bc/2$ ,  $A_2 = A_3 = \dots = 0$ . Οι εξισώσεις (2.70) και (2.71) δίνουν  $C_L = (1/2)\pi bc + 2\pi\alpha$ ,  $C_M = -\pi\alpha/2$ .

Άσκηση θεωρίας:

Να συζητήσετε τη συμπεριφορά της συνάρτησης πυκνότητας στροβιλότητας στο άκρο πρόσπτωσης της υδροτομής.

Λύση

Για  $\theta \rightarrow \pi$  η σειρά Fourier τείνει στο μηδέν, επομένως έχουμε ότι:

$$\gamma \sim -2UA_0 \tan \frac{\theta}{2}$$

Από την εξίσωση (2.68), χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής, έχουμε ότι:

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_m}{dx} d\theta = -\frac{dy_m}{dx}(\theta_c)$$

Όπου  $\theta_c$  είναι κάποια τιμή της μεταβλητής  $\theta$  στο διάστημα ολοκλήρωσης, δηλαδή  $0 < \theta_c < \pi$ .

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο συντελεστής  $A_0$  είναι ίσος με μία “μέση γωνία κλίσης”  $\beta$  που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\beta = -\frac{dy_m}{dx}(\theta_c)$$

Οπότε καταλήγουμε ότι, για  $\theta \rightarrow \pi$ , η συνάρτηση  $\gamma$  γράφεται ως εξής:

$$\gamma \sim -2U\beta \tan \frac{\theta}{2}$$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης  $\gamma$  δηλαδή είναι η ίδια με τη συνάρτηση  $\gamma$  μια επίπεδης πλάκας που έχει κλίση ως προς τη ροή ίση με μία μέση τιμή της γωνίας κλίσης της επαπτομένης κατά το μήκος της χορδής της υδροτομής. Στη ειδική περίπτωση που η μέση γραμμή κυρτότητας είναι ευθεία γραμμή (συμμετρική υδροτομή), η γωνία  $\beta$  είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ .



## 2.5 Ιδανική γωνία πρόσπτωσης

Εστω  $B_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  οι συντελεστές της σειράς Fourier για μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Σύμφωνα με το προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε ότι:

$$B_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_m}{dx} d\theta \quad (2.72)$$

$$B_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_m}{dx} \cos(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.21) στις (2.68), (2.69) βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση ανάμεσα στους συντελεστές  $A_n$  και  $B_n$ :

$$A_0 = B_0 + \alpha \quad (2.74)$$

$$A_n = B_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.75)$$

Από την εξίσωση (2.74) συμπεραίνουμε ότι, όταν η γωνία πρόσπτωσης πάρει την τιμή  $\alpha_i = -B_0$ , ο συντελεστής  $A_0$  μηδενίζεται. Επομένως, για  $\alpha = \alpha_i$ , η πυκνότητα στροβιλότητας μηδενίζεται στο άκρο πρόσπτωσης, δηλαδή η συνθήκη Kutta ικανοποιείται και στο άκρο πρόσπτωσης, με αποτέλεσμα η ροή να είναι απαλλαγμένη από το ανεπιθύμητο φαινόμενο των χαμηλών πιέσεων στο άκρο πρόσπτωσης. Γι' αυτό το λόγο η γωνία  $\alpha_i$ , που από τον ορισμό της είναι ιδιότητα της υδροτομής, λέγεται "ιδανική γωνία πρόσπτωσης".

Για υδροτομές που είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $y$ , η κλίση της μέσης γραμμής κυρτότητας  $d\eta_m/dx$  είναι περιττή συνάρτηση του  $x$ , οπότε από την εξίσωση (2.72) προκύπτει ότι ο συντελεστής  $B_0$  είναι ίσος με μηδέν. Επομένως για συμμετρικές υδροτομές (π.χ. η επίπεδη πλάκα) η ιδανική γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με μηδέν.

## Κεφάλαιο 3

# ΘΕΩΡΙΑ ΦΕΡΟΥΣΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

### 3.1 Στροβιλότητα

Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας πεδίου στροβιλότητας που θα χρησιμοποιήσουμε στην θεωρία φερουσών επιφανειών.

#### 3.1.1 Γενικά

Η *στροβιλότητα* της ροής  $\omega$  (vorticity) ορίζεται από την σχέση

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.1)$$

Όπου  $\mathbf{u}$  είναι η ταχύτητα του ρευστού. Από φυσικής πλευράς η στροβιλότητα είναι ίση με το διπλάσιο της γωνιακής ταχύτητας σωματιδίου ρευστού γύρω από το κέντρο μάζας του. Από τον ορισμό της στροβιλότητας έχουμε ότι:

$$\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (3.2)$$

Δηλαδή η στροβιλότητα είναι διάνυσμα με μηδενική απόκλιση (σωληνοειδές διάνυσμα).

Κατά αντιστοιχία με τις γραμμές ροής, ορίζουμε τις γραμμές στροβιλότητας (vortex lines), σαν γραμμές των οποίων η εφαπτομένη σε κάθε σημείο είναι παράλληλη προς το διάνυσμα της στροβιλότητας. Η επιφάνεια που δημιουργείται από όλες τις γραμμές στροβιλότητας που περνούν από τα σημεία μιάς καμπύλης  $C$  λέγεται *επιφάνεια στροβιλότητας* (vortex surface). Εάν η καμπύλη  $C$  είναι κλειστή, η επιφάνεια λέγεται *σωλήνας στροβιλότητας* (vortex tube).

Εστω μια οποιαδήποτε διατομή ενός σωλήνα στροβιλότητας που περατώνεται σε μια κλειστή καμπύλη  $C$ . Η *εκροή της στροβιλότητας* διαμέσου της επιφάνειας ορίζεται σαν το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\Gamma = \int_A \omega \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (3.3)$$

Όπου  $n$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την στοιχειώδη επιφάνεια  $dA$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.2) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εκροή είναι ανεξάρτητη από την διατομή. Πράγματι έστω ότι  $n' dA'$  και  $n'' dA''$  είναι απειροστά στοιχεία δύο επιφανειών  $A'$ ,  $A''$  που περατώνονται πάνω στον σωλήνα στροβιλότητας (όπου τα διανύσματα  $n'$ ,  $n''$  έχουν την ίδια φορά ως προς τον σωλήνα στροβιλότητας). Εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης στην όγκο που περικλείεται από τις δύο αυτές επιφάνειες και την επιφάνεια του σωλήνα στροβιλότητας που τις συνδέει. Επειδή πάνω στην τελευταία, έχουμε ότι  $\omega \cdot n = 0$ ,

$$\int_{A'} \omega' \cdot n' dA' - \int_{A''} \omega'' \cdot n'' dA'' = \int_V \nabla \cdot \omega dV = 0$$

Η ποσότητα  $\Gamma$  επειδή είναι ανεξάρτητη από την διατομή πάνω στην οποία υπολογίζεται λέγεται *ένταση* (strength) του σωλήνα στροβιλότητας. Συνέπεια της σταθερότητας της έντασης  $\Gamma$  είναι ότι ένας σωλήνας στροβιλότητας δεν μπορεί να σταματά ή να ξεκινά στο εσωτερικό του ρευστού. Οι σωλήνες στροβιλότητας επομένως ή είναι κλειστές επιφάνειες, ή τερματίζονται σε στερεά αντικείμενα, ή εκτείνονται ως το άπειρο. Αν το πεδίο στροβιλότητας καταλαμβάνει πεπερασμένο όγκο, μόνο τα δύο πρώτα ενδεχόμενα είναι δυνατά.

Στην ειδική περίπτωση που ο σωλήνας στροβιλότητας έχει απειροστή διατομή  $dA$ , μιλάμε για *νήμα στροβιλότητας* (vortex filament). Τότε η στροβιλότητα μπορεί να θεωρηθεί σταθερή πάνω στην διατομή και η ένταση είναι ίση με  $\omega dA$ , αφού το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι παράλληλο προς το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$ .

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes σε μιά οποιαδήποτε τομή του σωλήνα στροβιλότητας έχουμε ότι:

$$\Gamma = \int_A \omega \cdot n dA = \oint_C u \cdot l_0 ds \quad (3.4)$$

όπου  $C$  είναι η καμπύλη στην οποία περατώνεται η επιφάνεια και  $l_0$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που εφάπτεται στην καμπύλη  $C$ . Η ένταση του σωλήνα στροβιλότητας είναι κατά συνέπεια ίση με την κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε τομή του σωλήνα στροβιλότητας.

Γιά μη συνεκτικό ρευστό ισχύουν οι τρεις νόμοι του Helmholtz, που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

- Σωματίδια του ρευστού που έχουν αρχικά μηδενική στροβιλότητα έχουν πάντοτε μηδενική στροβιλότητα.
- Οι γραμμές στροβιλότητας είναι υλικές γραμμές (κινούνται με το ρευστό). Τα σωματίδια του ρευστού βρίσκονται επομένως πάντα στην ίδια γραμμή στροβιλότητας.
- Η ένταση των σωλήνων στροβιλότητας παραμένει σταθερή χρονικά.

Για μη συνεκτικό ρευστό ισχύει επίσης το θεώρημα του Kelvin:

- Η κυκλοφορία γύρω από μιά κλειστή υλική καμπύλη  $C$  παραμένει σταθερή χρονικά.

Το θεώρημα του Kelvin μπορεί βέβαια να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης, αλλά μπορεί να προκύψει και από τους νόμους του Helmholtz, δεν είναι δηλαδή ανεξάρτητο από αυτούς. Αυτό μπορούμε να το δούμε ακολουθώντας τον εξής συλλογισμό: Θεωρούμε τον σωλήνα στροβιλότητας που δημιουργείται από τις γραμμές στροβιλότητας που περνούν από όλα τα σημεία της καμπύλης  $C$  κάποια χρονική στιγμή  $t$ . Ως γνωστόν, η κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη  $C$  είναι ίση με την ένταση του σωλήνα στροβιλότητας. Από τον δεύτερο νόμο η τα σημεία της καμπύλης  $C$  θα βρίσκονται πάντοτε στον ίδιο σωλήνα στροβιλότητας. Επομένως, επειδή η ένταση του τελευταίου δεν αλλάζει χρονικά (3ος νόμος), και η κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη θα παραμένει σταθερή χρονικά.

### 3.1.2 Νόμος Biot-Savart

Ως γνωστόν οποιοδήποτε συνεχές διανυσματικό πεδίο μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα ενός διανυσματικού πεδίου μηδενικής απόκλισης και ενός πεδίου μηδενικής περιστροφής (αστρόβιλου). Εφαρμόζοντας αυτό το θεώρημα για την ταχύτητα του ρευστού έχουμε:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_i \quad (3.5)$$

όπου

$$\nabla \times \mathbf{u}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{u}_i$ , του οποίου η περιστροφή είναι ίση με την στροβιλότητα του πεδίου ροής, λέγεται *επαγόμενη ταχύτητα* (induced velocity).

Η επαγόμενη ταχύτητα μπορεί να προσδιοριστεί από την στροβιλότητα με την βοήθεια του νόμου Biot-Savart, (που παραθετούμε χωρίς απόδειξη):

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dV(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.6)$$

Όπου  $V$  είναι η περιοχή του πεδίου ροής μέσα στην οποία η στροβιλότητα έχει μη μηδενική τιμή. Η εξίσωση (3.6) λέγεται νόμος Biot-Savart κατ'αναλογία με τον ηλεκτρομαγνητισμό, όπου η ταχύτητα αναλογεί με την μαγνητική επαγωγή και η στροβιλότητα με το ηλεκτρικό ρεύμα. Η απόδειξη της (3.6) μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε βιβλίο διανυσματικής ανάλυσης.

Κατά την εφαρμογή του νόμου Biot-Savart η συνάρτηση που ολοκληρώνεται απειρίζεται για  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$  όταν το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα  $\mathbf{x}$  βρίσκεται μέσα στο πεδίο  $V$ . Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα κατά Riemann δεν ορίζεται και παίρνουμε την κύρια τιμή του ολοκληρώματος.

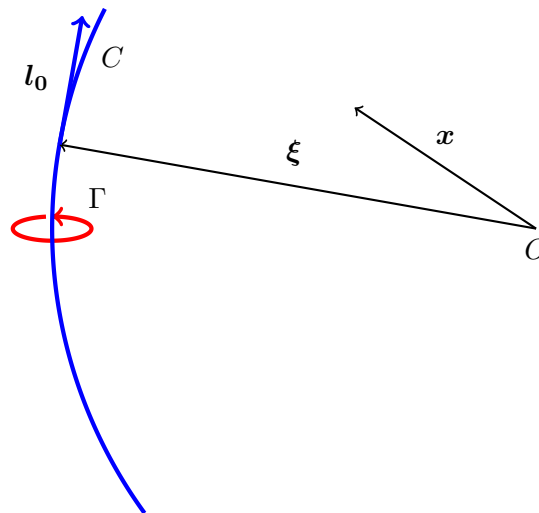
### 3.1.3 Ιδιόμορφη γραμμή δίνης

Πολλά πεδία ροής χαρακτηρίζονται από το ότι οι τιμές της στροβιλότητας σε μία περιοχή γύρω από μία καμπύλη είναι πολύ μεγαλύτερες από ότι στο υπόλοιπο ρευστό. Από φυσικής πλευράς αυτό σημαίνει ότι το ρευστό εκτελεί μία περιστροφική κίνηση γύρω από αυτή την καμπύλη (π.χ. ανεμοστρόβιλοι). Μία χρήσιμη μαθηματική εξιδανίκευση αυτής της ροής προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι ένα νήμα στροβιλότητας με συρρικνώνεται σε μία καμπύλη μηδενικής διατομής αλλά ότι η ένταση του νήματος  $\Gamma$  παραμένει σταθερή. Αυτή η οριακή διαδικασία συνεπάγεται ότι η στροβιλότητα είναι παντού μηδέν εκτός από την ίδια την καμπύλη όπου απειρίζεται. Μία τέτοια καμπύλη λέγεται *ιδιόμορφη γραμμή δίνης* (singular vortex line).

Η επαγόμενη ταχύτητα από ιδιόμορφη γραμμή δίνης έντασης  $\Gamma$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{l_0 \times (x - \xi)}{|x - \xi|^3} ds(\xi) \tag{3.7}$$

όπου  $C$  είναι ο άξονας της ιδιόμορφης γραμμής δίνης,  $l_0$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που εφάπτεται στον άξονα  $C$ , και το άκρο του διανύσματος  $\xi$  είναι πάνω στην καμπύλη  $C$ . Όταν το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα  $x$  βρίσκεται πάνω στον άξονα  $C$  το αριστερό μέλος της εξίσωσης λέγεται αυτο-επαγόμενη ταχύτητα (self-induced velocity). Η αυτο-επαγόμενη ταχύτητα προκαλεί παραμόρφωση της ιδιόμορφης γραμμής δίνης.



Σχήμα 3.1: Ιδιόμορφη γραμμή δίνης, σχήμα ορισμού

Η απόδειξη της (3.7) μπορεί να γίνει ως εξής: Εφαρμόζουμε τον νόμο Biot-Savart για ένα νήμα στροβιλότητας. Θεωρούμε πρώτα ότι το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα βρίσκεται πολύ μακριά από τον άξονα του νήματος, δηλαδή ότι είναι πολύ μεγαλύτερο από την εγκάρσια διάσταση του νήματος στροβιλότητας, οπότε η έκφραση  $x - \xi$  στην εξίσωση (3.6) μπορεί να αντικατασταθεί από  $x - \xi_C$ , όπου το άκρο του διανύσματος  $\xi_C$  βρίσκεται πάνω στον άξονα του νήματος στροβιλότητας. Τότε η (3.6) γράφεται ως εξής:

$$u_i = -\frac{1}{4\pi} \int_C \int_{\delta A} \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_C) \times \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dA d_s = -\frac{1}{4\pi} \int_C d_s \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_C) \times \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \times \int_{\delta A} \boldsymbol{\omega} dA$$

Όπου  $C$  είναι ο άξονας του νήματος,  $d_s$  είναι απειροστό μήκος πάνω στον άξονα και  $\delta A$  η διατομή του νήματος κάθετα προς τον άξονα. Δεδομένου ότι η τελευταία είναι μικρή, το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι σε κάθε σημείο παράλληλο προς την εφαπτομένη του άξονα  $C$ , και μπορούμε να γράψουμε ότι  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{l}_0$ , όπου  $\mathbf{l}_0$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στον άξονα  $C$ , και  $\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l}_0$ . Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$\int_{\delta A} \boldsymbol{\omega} dA = \int_{\delta A} \omega \mathbf{l}_0 dA = \mathbf{l}_0 \Gamma$$

Όπου  $\Gamma$  είναι η ένταση του νήματος στροβιλότητας. Θεωρώντας τώρα ότι  $\delta A \rightarrow 0$ , αλλά με  $\Gamma \rightarrow$  σταθερό παίρνουμε την εξίσωση (3.7).

Σημειώνουμε ότι στην ειδική περίπτωση που ο άξονας της δίνης  $C$  είναι ευθεία γραμμή η εξίσωση (3.7) μας δίνει το πεδίο ταχυτήτων επίπεδης σημειακής δίνης. Πράγματι χωρίς απώλεια γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε ο άξονας της δίνης να συμπίπτει με ένα από τους άξονες του συστήματος αναφοράς, π.χ. τον άξονα  $z$ . Τότε  $\xi = \eta = 0$ , και οι τρεις συνιστώσες της επαγόμενης ταχύτητας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-y) d\zeta}{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x d\zeta}{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$w = 0$$

Οι άνωτέρω σχέσεις είναι το πεδίο ταχυτήτων σημειακής δίνης στο επίπεδο  $x, y$ . Οι αυτοεπαγόμενες ταχύτητες (κυρια τιμή των άνωτέρω ολοκληρωμάτων όταν  $x = y = 0$ ) είναι μηδενικές. Αυτό προκύπτει θέτοντας  $x = y = 0$  πριν από την ολοκλήρωση.

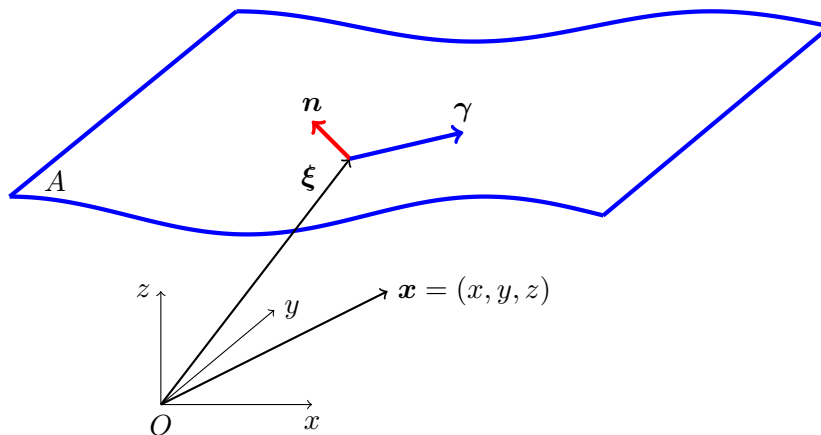
### 3.1.4 Ιδιόμορφα φύλλα στροβιλότητας

Ροές στις οποίες το μέτρο της στροβιλότητας είναι μεγάλο μόνο σε μιά περιοχή πολύ μικρού πάχους γύρω από μιά επιφάνεια  $A$  στον χώρο επίσης παρατηρούνται σε πολλές εφαρμογές, όπως η ροή γύρω από μιά πτέρυγα. Το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι κατ' ανάγκη παράλληλο προς την επιφάνεια  $A$ . Όπως κάναμε και με την ιδιόμορφη γραμμή δίνης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η περιοχή αυτή με μεγάλη στροβιλότητα συρρικνώνεται στην επιφάνεια  $A$ . Η επιφάνεια  $A$  λέγεται τότε ιδιόμορφο φύλλο δινών, ή *ιδιόμορφο φύλλο*

στροβιλότητας (singular vortex sheet). Η επαγόμενη ταχύτητα φύλλου δινών δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dA \quad (3.8)$$

Το διάνυσμα  $\boldsymbol{\gamma}$  είναι παράλληλο προς την επιφάνεια  $A$  (έχει διαστάσεις ταχύτητας) και λέγεται πυκνότητα στροβιλότητας του ιδιόμορφου φύλλου δινών. Η πυκνότητα στροβιλότητας είναι χαρακτηριστικό μέγεθος του ιδιόμορφου φύλλου στροβιλότητας και συνδέεται με την διαφορά της ταχύτητας του ρευστού στις δυο πλευρές του φύλλου στροβιλότητας.



Σχήμα 3.2: Σχήμα ορισμού για το ιδιόμορφο φύλλο στροβιλότητας.

Γιά την απόδειξη της (3.8) εργαζομαστε ως εξής: Θεωρούμε ότι η στροβιλότητα είναι μη μηδενική σε μία περιοχή πολύ μικρού πάχους γύρω από την επιφάνεια  $A$ . Το διάνυσμα της στροβιλότητας πρέπει να είναι παράλληλο προς την επιφάνεια  $A$ . Εστω  $\delta s$  το τοπικό πάχος της περιοχής μετρημένο κάθετα προς την επιφάνεια  $A$ . Εφαρμόζοντας την (3.6) έχουμε ότι η επαγόμενη ταχύτητα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{4\pi} \int_A \int_{\delta s} \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dA d\eta$$

Θεωρώντας ότι  $|\mathbf{x}|$  είναι πού μεγαλύτερο από το πάχος της περιοχής  $\delta s$ , μπορούμε να γράψουμε ότι  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_A$ , όπου το άκρο του διανύσματος  $\boldsymbol{\xi}_A$  βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια  $A$ . Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathbf{u}_i = -\frac{1}{4\pi} \int_A dA \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_A)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_A|^3} \times \int_{\delta s} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) d\eta$$

Τώρα αν πάρουμε το όριο όταν  $\delta s \rightarrow 0$ , αλλά κρατώντας τη ποσότητα  $\int_{\delta s} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) d\eta$  σταθερή, προκύπτει η εξίσωση (3.8).

Η ύπαρξη ενός ιδιόμορφου φύλλου δινών συνεπάγεται ασυνέχεια της συνιστώσας της ταχύτητας παράλληλης προς την επιφάνεια  $A$ . Εστω  $u_u$  η ταχύτητα του ρευστού στην άνω

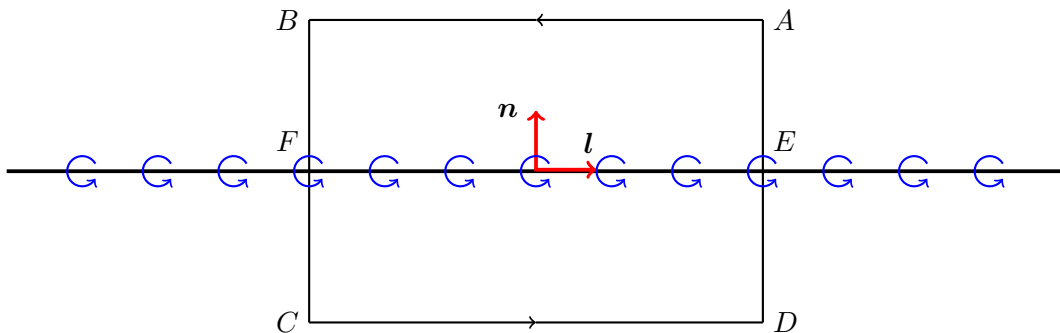
πλευρά της επιφάνειας, και  $u_l$  η ταχύτητα του ρευστού στην κάτω πλευρά της επιφάνειας  $A$ . Αποδεικνύεται ότι:

$$u_l - u_u = n \times \gamma \tag{3.9}$$

$$\gamma = (u_l - u_u) \times n \tag{3.10}$$

όπου  $n$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς το ιδιόμορφο φύλλο δινών. Επειδή οι όροι “άνω” και “κάτω” πλευρά της επιφάνειας μπορεί να φαίνονται λίγο ασαφείς, σημειώνουμε ότι η πηγαίνουμε από την κάτω προς την άνω πλευρά κινούμενοι κατά την φορά του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος  $n$ .

Η απόδειξη των (3.10), (3.9) μπορεί να γίνει σχετικά απλά χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.8) όταν το φύλλο δινών είναι επίπεδο (τότε είναι μιά απλή επέκταση των αντίστοιχων σχέσεων που είδαμε για κατανομές σημειακών δινών σε διδιάστατες ροές), αλλά κάπως πιο περίπλοκη όταν η επιφάνεια γίνει καμπύλη. Η απόδειξη στην γενική περίπτωση γίνεται ως εξής:



Σχήμα 3.3: Σχήμα για την απόδειξη των εξισώσεων (3.9), (3.10). Το απειροστό ορθογώνιο ABCD είναι κάθετο προς το φύλλο στροβιλότητας.

Θεωρούμε την κυκλοφορία γύρω από ένα απειροστό ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές AD και CB είναι κάθετες προς το φύλλο στροβιλότητας, και οι πλευρές AB, CD παράλληλες προς το φύλλο στροβιλότητας, όπως στο σχήμα. Το ορθογώνιο τέμνει το φύλλο δινών στα σημεία E και F. Επειδή οι διαστάσεις του ορθογώνιου είναι απειροστές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το τμήμα του φύλλου δινών που περικλείεται από το ABCD είναι επίπεδο και ότι η πυκνότητα στροβιλότητας είναι σταθερή πάνω σε αυτό. Παρομοίως η ταχύτητα του ρευστού μπορεί να θεωρηθεί σταθερή σε κάθε πλευρά του φύλλου δινών.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Stokes για το ορθογώνιο ABCD και έχουμε ότι:

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = u_l \cdot \mathbf{l}(DC) - u_u \cdot \mathbf{l}(AB) = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} dA = \gamma \cdot \mathbf{m}(EF)$$

Όπου  $u_u, u_l$  είναι η ταχύτητα του ρευστού στην άνω και κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας αντίστοιχα. Επίσης  $\mathbf{l}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στο φύλλο



στροβιλότητας που είναι παράλληλο με τις πλευρές AB και CD, και  $m$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια ABCD. Η φορά του διανύσματος  $l$  είναι τέτοια, ώστε τα  $(l, m, n)$  να σχηματίζουν δεξιόστροφη ορθοκανονική τριάδα. Σημειώνουμε ότι η μετάβαση από τη μιά μορφή του δεξιού μέλους στην άλλη μπορεί να αιτιολογηθεί πύο συστηματικά με την ίδια οριακή διαδικασία με την οποία αποδείξαμε τον τύπο της επαγόμενης ταχύτητας για φύλλο στροβιλότητας. Για το αριστερό μέλος παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα πάνω στην πλευρά EA αναιρείται από αυτό στην BF, και ομοίως το ολοκλήρωμα πάνω στην FC αναιρείται από αυτό στην DE.

Μετά την απλοποίηση  $(AB)=(CD)=(EF)$ , καταλήγουμε ότι:

$$(u_\ell - u_u) \cdot l = \gamma \cdot m$$

Βλέπουμε ότι στο φύλλο στροβιλότητας υπάρχει μιά ασυνέχεια της επαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας. Αν το ορθογώνιο είναι κάθετο προς το διάνυσμα της πυκνότητας στροβιλότητας  $\gamma$ , το διάνυσμα  $m$  είναι παράλληλο προς το διάνυσμα της πυκνότητας στροβιλότητας, και η ασυνέχεια της επαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας είναι ίση με το μέγεθος του διανύσματος της πυκνότητας στροβιλότητας  $\gamma$ . Αν το ορθογώνιο είναι παράλληλο προς το διάνυσμα  $\gamma$ , το διάνυσμα  $m$  είναι κάθετο προς το  $\gamma$ , και η ασυνέχεια της επαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας είναι ίση με μηδέν. Στη γενική περίπτωση η ασυνέχεια της επαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας είναι ίση με  $\gamma \cos \beta$ , όπου  $\beta$  είναι η γωνία ανάμεσα στα μοναδιαία διανύσματα  $\gamma$  και  $m$ . Λόγω της ασυμπίεστότητας του ρευστού η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι κάθετη στην επιφάνεια στροβιλότητας είναι συνεχής.

Επειδή τα διανύσματα  $l, m, n$  συνιστούν δεξιόστροφη ορθοκανονική τριάδα, έχουμε ότι:

$$n = l \times m \quad m = n \times l \quad l = m \times n \quad (3.11)$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$(u_\ell - u_u) \cdot l = \gamma \cdot (l \times n) = l \cdot (n \times \gamma)$$

Επειδή αυτό ισχύει για οποιαδήποτε κατεύθυνση του ορθογωνίου ABCD, και επομένως για οποιοδήποτε διάνυσμα  $m$ , προκύπτει η εξίσωση (3.9).

Η εξίσωση (3.10) προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (3.9) εξωτερικά με  $n$ , και χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διανυσματική ταυτότητα:

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \quad (3.12)$$

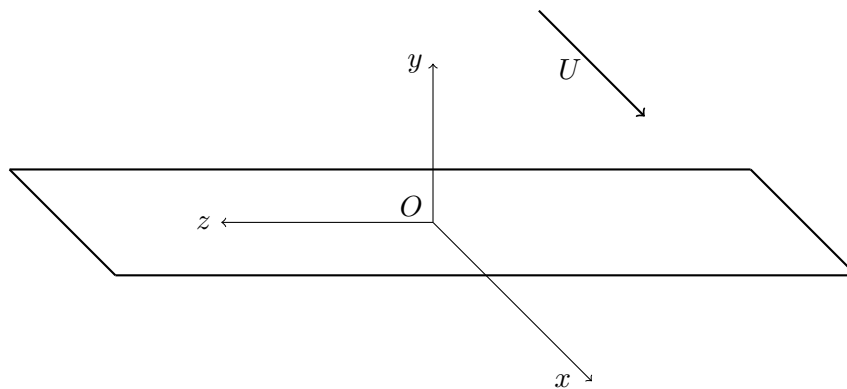
Γιά παράδειγμα θεωρούμε την περίπτωση της διανομής στροβιλότητας σε δισδιάστατη υδροτομή (που είδαμε στο κεφάλαιο υδροτομών). Εδώ έχουμε  $n = j$ ,  $\gamma = \gamma_z k$  οπότε η (3.9) δίνει  $u_\ell - u_u = \gamma_z i$ , επιβεβαιώνοντας το αποτέλεσμα που είχαμε βρει με διαφορετικό τρόπο στη θεωρία υδροτομών.

Σημειώνουμε ότι, στην ειδική περίπτωση που το φύλλο στροβιλότητας είναι επίπεδο με σταθερή ένταση, η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας στην άνω πλευρά του φύλλου είναι ίση και αντίθετη με την εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας στην κάτω πλευρά.

### 3.2 Θεωρία φερουσών επιφανειών

Φέρουσες επιφάνειες είναι λεπτές επιφάνειες με μικρή κυρτότητα, που αναπτύσσουν δυναμική άνωση. Οι φέρουσες επιφάνειες μπορεί να είναι σχεδόν επίπεδες, όπως το πηδάλιο του πλοίου, η στρεβλωμένες, όπως η πτέρυγα του αεροπλάνου.

Η υδροδυναμική θεωρία των φερουσών επιφανειών αποτελεί επέκταση της θεωρίας των λεπτών υδροτομών που είδαμε στα προηγούμενα. Επειδή η ροή γύρω από φέρουσα επιφάνεια είναι τριδιάστατη, δεν είναι δυνατή η χρήση της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων, η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην θεωρία των λεπτών υδροτομών.



Σχήμα 3.4: Σύστημα συντεταγμένων  $x, y, z$  για πτέρυγα.

Θεωρούμε ροή γύρω από πτέρυγα. Το σύστημα συντεταγμένων  $x, y, z$  ορίζεται με τον άξονα  $x$  παράλληλο προς την ροή, τον άξονα  $y$  κατακόρυφο και με διεύθυνση προς τα άνω, και με τον άξονα  $z$  κατά το άνοιγμα (span) της πτέρυγας. Όπως στις λεπτές υδροτομές ορίζουμε την ακμή πρόσπτωσης, την ακμή εκφυγής, το μέγιστο βέλος κυρτότητας και την γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ . Τα δύο ακραία σημεία της πτέρυγας λέγονται *ακροπτερύγια*, και η απόσταση ανάμεσά τους  $s$  λέγεται *άνοιγμα* (span). Ο λόγος  $AR$ :

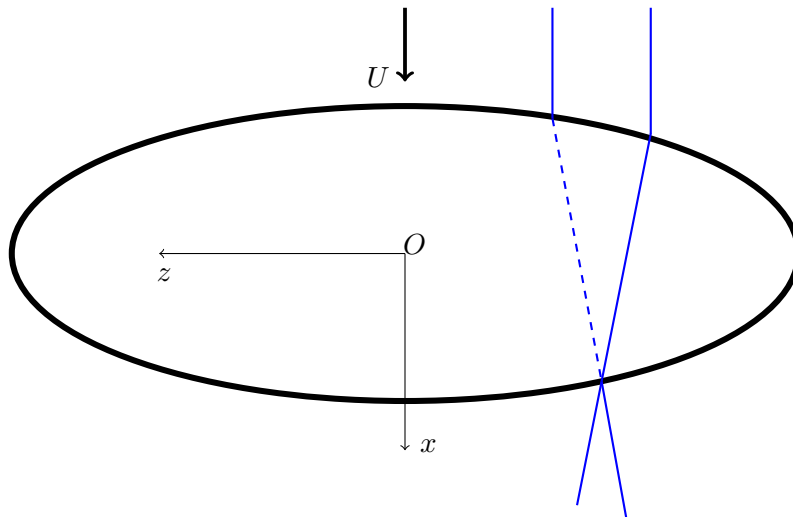
$$(AR) = \frac{s^2}{A} \quad (3.13)$$

όπου  $A$  είναι η επιφάνεια της πτέρυγας, λέγεται *λόγος επιμήκους* (aspect ratio). Στην ειδική περίπτωση που το σχήμα της πτέρυγας είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ο λόγος επιμήκους είναι ίσος προς τον λόγο του ανοίγματος προς την χορδή. Τέλος συμβολίζουμε με  $x_L(z)$  και  $x_T(z)$  τις προβολές της ακμής πρόσπτωσης και εκφυγής, αντίστοιχα, στο επίπεδο  $x - z$ .

Οι πτέρυγες είναι συνήθως συμμετρικές ως προς το επίπεδο  $z = 0$  και μπορούμε να επιλέξουμε σαν αρχή των αξόνων την προβολή του μέσου της χορδής της κεντρικής τομής της πτέρυγας. Αν τα μέσα όλων των προβολών της πτέρυγας βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, λέμε ότι η πτέρυγα είναι *ευθεία*, αλλιώς λάμε ότι η πτέρυγα έχει οριζόντια κλίση. Αν η γωνία πρόσπτωσης δεν παραμένει σταθερή κατά το άνοιγμα της πτέρυγας λέμε ότι η πτέρυγα έχει *συστροφή*.

### 3.2.1 Ροή ιδανικού ρευστού γύρω από πτέρυγα

Η βασική υδροδυναμική λειτουργία της πτέρυγας είναι η δημιουργία άνωσης (δηλ. δύναμης κάθετη προς την ταχύτητα της ροής). Κατά συνέπεια η κάτω πλευρά της πτέρυγας έχει μεγαλύτερη πίεση από την άνω πλευρά. Στο περίγραμμα της πτέρυγας, όπου η άνω και η κάτω πλευρά συναντώνται, οι πιέσεις των δύο πλευρών εξισώνονται.



Σχήμα 3.5: Σε ροή γύρω από πτέρυγα οι γραμμές ροής στρεβλώνονται προς το μέσο της πτέρυγας στην άνω πλευρά (συνεχής γραμμή), και προς το ακροπερύγιο στην κάτω πλευρά (διακεκομμένη γραμμή) της πτέρυγας.

Απαραίτητη συνθήκη για την δημιουργία άνωσης είναι η ροή να εγκαταλείπει την πτέρυγα ομαλά στο άκρο εκφυγής (όπως και στη θεωρία λεπτών υδροτομών). Όταν αυτό συμβαίνει (και μόνο τότε) ικανοποιητικά αποτελέσματα για τις δυνάμεις πάνω στην πτέρυγα μπορούν να παραχθούν με την θεωρία ιδανικού ρευστού. Όπως και στην διδιάστατη θεωρία λεπτών υδροτομών αναπτύσσεται υπερπίεση στην κάτω πλευρά της πτέρυγας και υποπίεση στην άνω πλευρά.

Το γεγονός όμως ότι η πτέρυγα έχει πεπερασμένο άνοιγμα συνεπάγεται ότι η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην άνω και στην κάτω πλευρά της πτέρυγας προκαλεί ροή γύρω από τα δύο ακροπερύγια με φορά από την κάτω πλευρά προς την άνω. Λόγω της ροής αυτής οι γραμμές ροής που περνούν από την γραμμή ανακοπής στην ακμή πρόσπτωσης παύουν να είναι παράλληλες προς την εξωτερική ροή. Οι γραμμές ροής στην άνω πλευρά της πτέρυγας αποκλίνουν προς το μέσο της πτέρυγας, ενώ οι γραμμές ροής στην κάτω πλευρά απόκλινουν προς τα ακροπερύγια. Οι απόκλίσεις αυτές είναι ισχυρότερες κοντά στα ακροπερύγια και ασθενέστερες κοντά στο μέσο της πτέρυγας.

Σε κάθε σημείο της ακμής εκφυγής καταλήγουν δύο γραμμές ροής οι οποίες προέρχονται από δύο διαφορετικά σημεία της ακμής προσπτώσεως. Η ταχύτητα του ρευστού στην μία γραμμή ροής έχει διαφορετική κατεύθυνση από την ταχύτητα στην άλλη γραμμή ροής. Κατά συνέπεια, παρότι οι δύο ταχύτητες έχουν το ίδιο μέτρο (από την αρχή του Bernoulli), στην ακμή εκφυγής ξεκινά μία επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας λόγω της διαφορετικής κατεύθυνσης των δύο ταχυτήτων. Η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού στην άνω πλευρά της επιφάνειας είναι διαφορετική από την ταχύτητα των σωματιδίων στην κάτω πλευρά της επιφάνειας. Η επιφάνεια αυτή λέγεται όπως είδαμε ιδιόμορφο

φύλλο δινών.

Η πτέρυγα συνοδεύεται δηλαδή από ένα ιδιόμορφο φύλλο δινών που ξεκινά από την ακμή εκφυγής και εκτείνεται θεωρητικά μέχρι το άπειρο. Το φύλλο δινών είναι ένα απλουστευμένο μοντέλο του ομόρρου της πτέρυγας, συμφωνο με το οποίο η ροή είναι αστρόβιλη παντού εκτός από το ίδιο το φύλλο δινών το οποίο έχει μηδενικό πάχος. Στην πραγματικότητα όμως, αμέσως μόλις τα σωματίδια του ρευστού εγκαταλείψουν την ακμή εκφυγής, οι τάσεις λόγω συνεκτικότητας του ρευστού εξομαλύνουν την ασυνέχεια της ταχύτητας, και ο ομόρρος της πτέρυγας (δηλαδή η περιοχή του ρευστού πίσω από την πτέρυγα όπου η στροβιλότητα δεν είναι μηδεν) έχει πεπερασμένο πάχος.

Το ιδιόμορφο φύλλο δινών αναδιπλώνεται λόγω υδροδυναμικής αστάθειας γύρω από τις γραμμές δινών των ακροπτερυγιών. Σχηματίζονται έτσι οι δύο δίνες ακροπτερυγιών οι οποίες αυξάνονται κατά την κατεύθυνση παράλληλα με την ροή καθώς όλο και μεγαλύτερο μέρος του φύλλου δινών αναδιπλώνεται γύρω τους. Συμφωνα με την θεωρία ιδανικού ρευστού το φύλλο στροβιλότητας με τις δίνες ακροπτερυγιών εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Στην πραγματικότητα βεβαία οι δίνες ακροπτερυγίου αλλά και το φύλλο στροβιλότητας εκμηδενίζονται βαθμιαία από τις δυνάμεις συνεκτικότητας του ρευστού.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ροής ιδανικού ρευστού γύρω από πτέρυγα περιλαμβάνει επίλυση της εξίσωσης του Laplace εκτός πτέρυγας και εκτός του φύλλου στροβιλότητας που ακολουθεί, ενώ πάνω στην πτέρυγα έχουμε την κινηματική οριακή συνθήκη:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.14)$$

όπου  $\mathbf{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην πτέρυγα. Επί πλέον έχουμε τη συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής, και τη συνθήκη ότι μακριά από την πτέρυγα και από το φύλλο στροβιλότητας που ακολουθεί έχουμε ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα  $U$ ,

Τώρα εκφράζουμε την οριακή συνθήκη (3.14) συναρτήσει των χαρακτηριστικών της πτέρυγας. Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε μιά επιφάνεια με εξίσωση  $f(x, y, z) = C$ , όπου  $C$  σταθερά, δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad (3.15)$$

Εστω  $y = y_u(x, z)$  η εξίσωση της άνω επιφάνειας της πτέρυγας, και  $y = y_\ell(x, z)$  η εξίσωση της κάτω επιφάνειας της πτέρυγας. Εφαρμόζοντας την (3.15) πρώτα για  $f(x, y, z) = y_u(x, z) - y = 0$ , και ύστερα για  $f(x, y, z) = y_\ell(x, z) - y = 0$ , καταλήγουμε στις εξής οριακές συνθήκες πάνω στην πτέρυγα:

$$v = u \frac{\partial y_u}{\partial x} + w \frac{\partial y_u}{\partial z} \quad y = y_u(x, z) \quad (3.16)$$

$$v = u \frac{\partial y_\ell}{\partial x} + w \frac{\partial y_\ell}{\partial z} \quad y = y_\ell(x, z) \quad (3.17)$$

Επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών δίνει το πεδίο ροής (και το φύλλο στροβιλότητας που ακολουθεί) και τις δυνάμεις που ασκούνται στη πτέρυγα.

### 3.2.2 Σχέση ανάμεσα στην πυκνότητα στροβιλότητας και στην διαφορά πίεσης για μόνιμη ροή

Θεωρούμε μια επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας σε παράλληλη ροή. Η επιφάνεια αυτή μπορεί να είναι ιδιόμορφο φύλλο δινών, οπότε η πίεση θα είναι συνεχής, η μπορεί να είναι λεπτή πλάκα, οπότε θα υπάρχει και διαφορά πίεσης ανάμεσα στις δύο πλευρές της επιφάνειας. Στο κεφάλαιο αυτό συζητάμε την σχέση ανάμεσα στην πυκνότητα στροβιλότητας και στην διαφορά πίεσης μιας επιφάνειας ασυνέχειας της ταχύτητας.

Παριστάνουμε με  $u_u$  την ταχύτητα του ρευστού στην άνω πλευρά και  $u_\ell$  την ταχύτητα του ρευστού στην κάτω πλευρά αντίστοιχα. Ορίζουμε την μέση ταχύτητα  $u_m$  και την διαφορά ταχυτήτων  $u_d$  από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_m = \frac{1}{2}(u_u + u_\ell) \quad (3.18)$$

$$u_d = u_u - u_\ell \quad (3.19)$$

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1, η ασυνέχεια της ταχύτητας στις δύο πλευρές μιας επιφάνειας στροβιλότητας συνδέεται με την επιφανειακή πυκνότητα στροβιλότητας  $\gamma$  με την σχέση (3.9). Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$u_d = \gamma \times n \quad (3.20)$$

όπου  $n$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς το ιδιόμορφο φύλλο στροβιλότητας. Εστω  $m$  το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς την μέση ταχύτητα (προφανώς  $m = u_m/|u_m|$ ). Ορίζουμε και το μοναδιαίο διάνυσμα  $l$  τέτοιο ώστε  $(m, n, l)$  να συνιστούν μια δεξιόστροφη τριάδα. Τότε έχουμε ότι:

$$l = m \times n \quad m = n \times l \quad n = l \times m \quad (3.21)$$

Τα διανύσματα  $u_u, u_\ell$  βρίσκονται σε επίπεδο που εφάπτεται της επιφάνειας στροβιλότητας, και επομένως στο ίδιο επίπεδο βρίσκονται και τα διανύσματα  $u_m$  και  $u_d$ . Από τον ορισμό της η πυκνότητα στροβιλότητας είναι βρίσκεται και αυτή στο ίδιο επίπεδο. Μπορούμε λοιπόν να αναλύσουμε την πυκνότητα στροβιλότητας σε μια συνιστώσα  $\gamma_f$  παράλληλη προς την μέση ταχύτητα και μια συνιστώσα  $\gamma_b$  κάθετη προς την μέση ταχύτητα:

$$\gamma = \gamma_f m + \gamma_b l \quad (3.22)$$

Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας και της διαφοράς ταχυτήτων έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_u = u_m + \frac{1}{2}u_d \quad (3.23)$$

$$\mathbf{u}_\ell = \mathbf{u}_m - \frac{1}{2}\mathbf{u}_d \quad (3.24)$$

Από όπου προκύπτει χρησιμοποιώντας την (3.20) ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_u - \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell &= 2\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_d = 2\mathbf{u}_m \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{n}) = \\ &= 2(\mathbf{n} \times \mathbf{u}_m) \cdot \boldsymbol{\gamma} = -2|\mathbf{u}_m| \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \\ &= -2|\mathbf{u}_m| \gamma_b \end{aligned} \quad (3.25)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τις (3.21), (3.22), και την ιδιότητα ότι η τράδα  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  δεν αλλάζει τιμή για κυκλική εναλλαγή των διανυσμάτων  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ .

Εφαρμόζουμε τώρα την εξίσωση Bernoulli, πρώτα ανάμεσα στο σημείο στην άνω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας και σε σημείο στο άπειρο, και ύστερα ανάμεσα στο σημείο στην κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας και σε σημείο στο άπειρο, και καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση για την διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην άνω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας:

$$p_\ell - p_u = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_u - \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell) = -\rho|\mathbf{u}_m| \gamma_b \quad (3.26)$$

Καταλήγουμε δηλαδή στο συμπέρασμα ότι η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην άνω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας είναι ανάλογη προς την συνιστώσα της πυκνότητας στροβιλότητας που είναι κάθετη προς την μέση ταχύτητα. Η συνιστώσα  $\gamma_b$  λεγεται *προσδεδεμένη πυκνότητα στροβιλότητας* (bound vorticity) και έχει μη μηδενική τιμή μόνο αν η επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας είναι η πτέρυγα. Αν η επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας είναι ιδιόμορφο φύλλο δινών, η συνθήκη συνέχειας της πίεσης στο φύλλο δινών επιβαλλει τον μηδενισμό της προσδεδεμένης πυκνότητας στροβιλότητας.

Η συνιστώσα  $\gamma_f$  λεγεται *ελευθερη στροβιλότητα* (free vorticity) και έχει μη μηδενική τιμή για οποιαδήποτε επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας.

### 3.2.3 Γραμμική θεωρία φερουσών επιφανειών

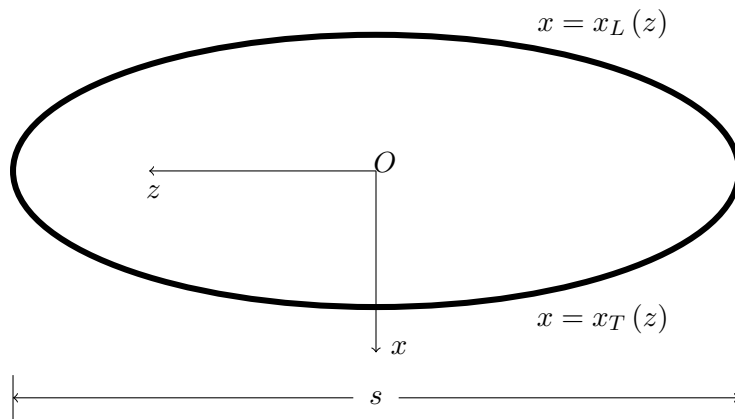
Στην γραμμική θεωρία φερουσών επιφανειών υποθέτουμε ότι: (1) Τα υδροδυναμικά μεγέθη πάνω στην πτέρυγα (ταχύτητες, πιέσεις) μπορούν να αντικατασταθούν με τις τιμές τους πάνω στο επίπεδο  $x - z$ . (2) Το ιδιόμορφο φύλλο δινών καταλαμβάνει μια γνωστή εκ των προτέρω θέση πίσω από την πτέρυγα, και ότι η θέση αυτή είναι ένα επίπεδο παράλληλο προς την ροή. (3) Υποθέτουμε επι πλεον ότι η μέση ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα της ροής, δηλαδή  $\mathbf{u}_m = U\mathbf{i}$ , όπου  $\mathbf{i}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο με τον άξονα των  $x$ . Το λάθος που εισαγεται με τις παραδοχές αυτές είναι τόσο μικρότερο όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος επιμήκους της πτέρυγας και όσο μικρότερη η γωνία πρόσπτωσης.

Γράφουμε το πεδίο ταχυτήτων (όπως είχαμε κάνει με τις υδροτομές) στη μορφή  $U + u, v, w$ , όπου  $u, v, w$  οφείλονται στην παρουσία της πτέρυγας. Σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάναμε (μικρή κυρτότητα, μικρό πάχος, μικρή γωνία κλίσης) τα  $u, v, w$  είναι πολύ μικρότερα από την ταχύτητα στο άπειρο  $U$ . Οπότε, πάντα σύμφωνα με τις παραδοχές, αγνοούμε γινόμενα μικρών όρων και εφαρμόζουμε την κινηματική οριακή συνθήκη στην προβολή της πτέρυγας στο επίπεδο  $x - z$ .

Η οριακή συνθήκη πάνω στην πτέρυγα γραμμικοποιείται ως εξής:

$$v_+ = U \frac{\partial y_u}{\partial x} \qquad v_- = U \frac{\partial y_\ell}{\partial x} \qquad (3.27)$$

Όπου  $v_+, v_-$  είναι αντίστοιχα η  $y$  συνιστώσα της ταχύτητας στην άνω και στην κάτω πλευρά της προβολής της πτέρυγας στο επίπεδο  $x - z$ , δηλαδή για  $y = 0+$ , και  $y = 0-$  αντίστοιχα. Η συνθήκη Kutta εφαρμόζεται πάνω στην προβολή του άκρου εκφυγής στο επίπεδο  $x - z$   $x = x_T(z)$ . Τα  $u, v, w$  τείνουν στο μηδέν μακριά από την πτέρυγα και το φύλλο στροβιλότητας.



Σχήμα 3.6: Προβολή της πτέρυγας στο επίπεδο  $x - z$ .

Όπως και με τις υδροτομές αναλύουμε το πρόβλημα σε δύο προβλήματα, ένα που ικανοποιεί την ακόλουθη οριακή συνθήκη πάνω στην πτέρυγα:

$$v_+ = -v_- = \frac{1}{2}U \left( \frac{\partial y_u}{\partial x} - \frac{\partial y_\ell}{\partial x} \right) \qquad (3.28)$$

Και ένα δεύτερο πρόβλημα που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$v_+ = v_- = \frac{1}{2}U \left( \frac{\partial y_u}{\partial x} + \frac{\partial y_\ell}{\partial x} \right) = U \frac{\partial y_m}{\partial x} \qquad (3.29)$$

Όπου  $y_m = (1/2)(y_u + y_\ell)$  είναι η μέση επιφάνεια κυρτότητας της πτέρυγας.

Η συνθήκη Kutta και η συνθήκη στο άπειρο παραμένουν και στα δύο προβλήματα όπως έχουν. Για τους ίδιους λόγους όπως και με τις υδροτομές θα μας απασχολήσει μόνο το δεύτερο πρόβλημα, και θα το επιλύσουμε με την βοήθεια μιάς κατανομής στροβιλότητας



στο επίπεδο  $x - z$ . Αντίθετα με το δισδιάστατο πρόβλημα της υδροτομής, όμως, τώρα υπάρχει και η ελεύθερη στροβιλότητα η οποία εκτείνεται πίσω από την πτέρυγα μέχρι το άπειρο.

Λόγω των παραδοχών (1) και (2), η ελευθερη στροβιλότητα έχει κατεύθυνση παράλληλη με τον άξονα των  $x$ , και η προσδεδεμένη στροβιλότητα έχει κατεύθυνση παράλληλη με τον άξονα των  $z$ . Μπορούμε να γραψουμε δηλαδή ότι  $\gamma_f = \gamma_x$  και ότι  $\gamma_b = \gamma_z$ .

Ως γνωστόν το διάνυσμα της στροβιλότητας έχει μηδενική απόκλιση. Για την πυκνότητα στροβιλότητας φύλλου στροβιλότητας που συμπίπτει με το επίπεδο  $x - z$  αυτό συνεπάγεται την ακόλουθη σχέση:

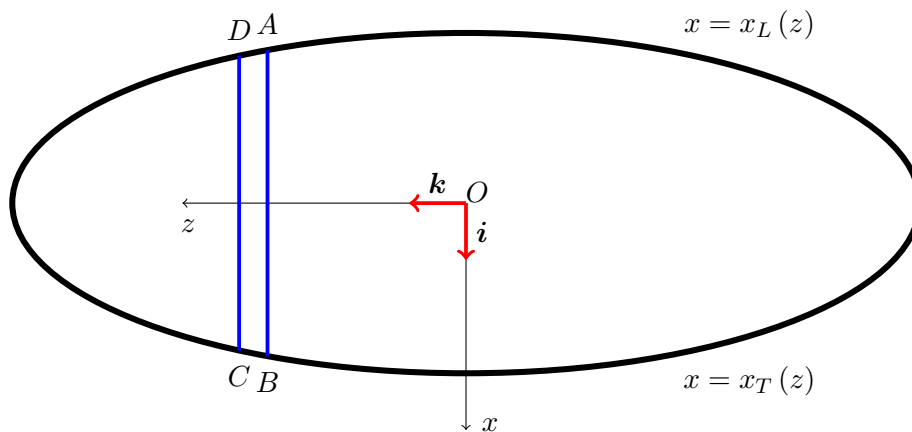
$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} = 0 \tag{3.30}$$

Αμεση συνέπεια της (3.30) και του θεωρήματος της απόκλισης είναι ότι:

$$\int_C \gamma \cdot n \, ds = 0 \tag{3.31}$$

Οπου  $C$  είναι μία οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη πάνω στο φύλλο στροβιλότητας και  $n$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην  $C$ .

Γιά το ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας που ακολουθεί την πτέρυγα  $\gamma_z = 0$ , οπότε η εξίσωση (3.30) συνεπάγεται ότι η πυκνότητα  $\gamma_x$  παραμένει σταθερή και ίση με την τιμή που έχει όταν εγκαταλείπει την πτέρυγα.



Σχήμα 3.7: Σχημα για την αποδειξη της σχέσης (3.34).

Θα δούμε τώρα την σχέση ανάμεσα σε προσδεδεμένη και στην ελεύθερη στροβιλότητα που αφήνει πίσω της η πτέρυγα και στην κυκλοφορία γύρω από μία τομή  $z = \text{σταθερό}$  της πτέρυγας. Θεωρούμε πάνω στην πτέρυγα μια λωρίδα ABCD απειροστού πλάτους  $\delta z$ , και εφαρμόζουμε την (3.31). Η πλευρά DA αποτελεί μέρος της ακμής πρόσπτωσης, και επομένως  $\gamma = 0$ . Η πλευρά BC αποτελεί μέρος της ακμής εκφυγής και επομένως  $\gamma = \gamma_x i$ . Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$\int_{x_L(z)}^{x_T(z)} \gamma_z \mathbf{d}x - \int_{x_L(z+\delta z)}^{x_T(z+\delta z)} \gamma_z \mathbf{d}x + \gamma_x(x_T(z), z)\delta z = 0 \quad (3.32)$$

Ορίζουμε την κυκλοφορία  $\Gamma(z)$  από τη σχέση:

$$\Gamma(z) = \int_{x_L(z)}^{x_T(z)} \gamma_z \mathbf{d}x \quad (3.33)$$

Οπότε η (3.32) γράφεται ως εξής:

$$\Gamma(z) - \Gamma(z + \delta z) + \gamma_x(x_T(z), z)\delta z = 0$$

Διαιρώντας με  $\delta z$  και παίρνοντας το όριο  $\delta z \rightarrow 0$  καταλήγουμε ότι:

$$\gamma_x(x_T(z), z) = -\frac{d\Gamma}{dz} \quad (3.34)$$

Η συνάρτηση  $\Gamma(z)$  που ορίσαμε είναι η κυκλοφορία γύρω από μιά τομή της πτέρυγας από ένα επίπεδο  $x = \text{σταθερό}$ . Η εξίσωση (3.34) μας δείχνει ότι η ελεύθερη στροβιλότητα στον ομόρρο της πτέρυγας είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της κυκλοφορίας γύρω από μιά τομή της πτέρυγας. Επομένως η ελεύθερη στροβιλότητα θα είναι μέγιστη στα δύο ακροπερύγια και ελάχιστη στην περιοχή γύρω από το μέσον της πτέρυγας. Φυσικά σε μιά δισδιάστατη γεωμετρία η κυκλοφορία είναι παντού η ίδια, οπότε η ελεύθερη στροβιλότητα μηδενίζεται.

Λόγω της γενικής σχέσης (3.9) και της υπόθεσης ότι η μέση ταχύτητα είναι ίση με  $U\mathbf{i}$ , οι τιμές των ταχυτήτων  $u, w$  στην πάνω και κάτω πλευρά του επιπέδου  $y = 0$  (με δείκτη + ή - αντίστοιχα) είναι:

$$u_{\pm} = \mp \frac{1}{2}\gamma_z \quad (3.35)$$

$$w_{\pm} = \pm \frac{1}{2}\gamma_x \quad (3.36)$$

Ενώ η  $y$ -συνιστώσα της ταχύτητας, που είναι συνεχής στο  $y = 0$ , δίνεται από την ακόλουθη σχέση (εξίσωση (3.8)):

$$v = v_b + v_f \quad (3.37)$$

Οπου  $v_b, v_f$  είναι, αντίστοιχα, οι επαγόμενες ταχύτητες από την προσδεδεμένη και την ελεύθερη στροβιλότητα, που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$v_b = \frac{1}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} d\zeta \int_{x_L(\zeta)}^{x_T(\zeta)} \frac{\gamma_z(\xi, \zeta)(x - \xi)}{((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\xi \quad (3.38)$$

$$v_f = -\frac{1}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} d\zeta \int_{x_L(\zeta)}^{\infty} \frac{\gamma_x(\xi, \zeta)(z - \zeta)}{((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\xi \quad (3.39)$$

Η εξίσωση (3.29) μαζί με τις (3.37), (3.38), (3.39), και με την (3.30) και τη συνθήκη Kutta στο  $x = x_T(z)$  ορίζουν ένα πρόβλημα για τις δύο συνιστώσες  $\gamma_x, \gamma_z$ , το οποίο μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά.

Είναι διδακτικό να θεωρήσουμε την περίπτωση λεπτής διδιάστατης υδροτομής. Στην περίπτωση αυτή  $x_L, x_T$  είναι σταθερές με  $c = x_T - x_L$ , όπου  $c$  είναι η χορδή, και είναι ανεξάρτητη του  $z$ . Επίσης η στροβιλότητα  $\gamma_z$  είναι ανεξάρτητη του  $z$ . Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = 0$$

Επειδή  $\gamma_x = 0$  στο άκρο πρόσπτωσης συμπεραίνουμε ότι είναι παντού μηδέν, και επομένως  $v_f = 0$ . Για το  $v_b$  έχουμε ότι:

$$v_b = \frac{1}{4\pi} \int_{x_L}^{x_T} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_z(\xi)(x - \xi)}{((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\zeta = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_L}^{x_T} \frac{\gamma_z(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

Όπου μεταχειριστήκαμε τον μετασχηματισμό  $\zeta = z + \psi|x - \xi|$ , και το ότι  $\int_{-\infty}^{\infty} (1/(1 + \psi^2)^{3/2}) d\psi = 2$ . Το πρόβλημα ανάγεται δηλαδή (μαζί με την συνθήκη Kutta) στο γραμμικό δισδιάστατο πρόβλημα ροής γύρω από λεπτή υδροτομή.

Επιστρέφοντας στο τριδιάστατο πρόβλημα, παρατηρούμε ότι, παρά την απλοποίηση που επέφερε η γραμμικοποίηση του προβλήματος, επίλυση των ανωτέρω εξισώσεων είναι δυνατή μόνο αριθμητικά. Αυτό έχει γίνει στο παρελθόν από διάφορους ερευνητές αλλά είναι πέρα από τα όρια του παρόντος μαθήματος. Θα συζητήσουμε μια απλούστερη θεωρία, την *θεωρία της φέρουσας γραμμής*, η οποία ανάγει το πρόβλημα της ροής γύρω από πτέρυγα στην επίλυση μιας σειράς διδιάστατων προβλημάτων ροής γύρω από λεπτές υδροτομές. Το βασικό πλεονέκτημα της θεωρίας αυτής είναι ότι καταλήγει σε απλές σχέσεις για την άνωση και την επαγόμενη αντίσταση, που δίνουν ταυτόχρονα και ικανοποιητική ακρίβεια. Η θεωρία της φέρουσας γραμμής αναπτύχθηκε από τον Prandtl.

### 3.2.4 Θεωρία της φέρουσας γραμμής

#### Γενικά

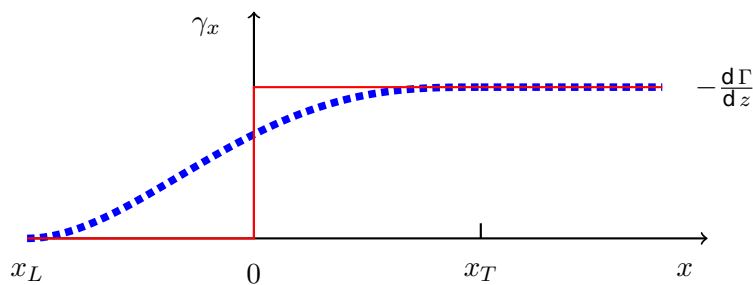
Θεωρούμε μια πτέρυγα με κατανομή κυκλοφορίας  $\Gamma(z)$  κατά το άνοιγμά της. Η θεωρία της φέρουσας γραμμής εισάγει τις εξής επιπλέον παραδοχές (επιπλέον από αυτές της γραμμικής θεωρίας):

Για τον υπολογισμό της επαγόμενης ταχύτητας από την προσδεσμένη στροβιλότητα σε τομή παράλληλη με το επίπεδο  $x - y$  υποθέτουμε ότι είναι ίση με την επαγόμενη ταχύτητα δισδιάστατης υδροτομής με χορδή ίση με την τοπική χορδή  $c = x_T(z) - x_L(z)$ . Εχουμε κατά συνέπεια ότι:

$$v_b(x, z) \approx -\frac{1}{2\pi} \int_{x_L}^{x_T} \frac{\gamma_z(\xi, z)}{\xi - x} d\xi \quad (3.40)$$

Για την υπολογισμό της επαγόμενης ταχύτητας από την ελευθερη στροβιλότητα, υποθέτουμε ότι η ελευθερη στροβιλότητα αποκτά απότομα την τελική της τιμή για θετικές τιμές του  $x$ , ενώ έχει μηδενική τιμή για αρνητικές τιμές του  $x$ , δηλαδή:

$$\gamma_x = \begin{cases} -\frac{d\Gamma}{dz}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.41)$$



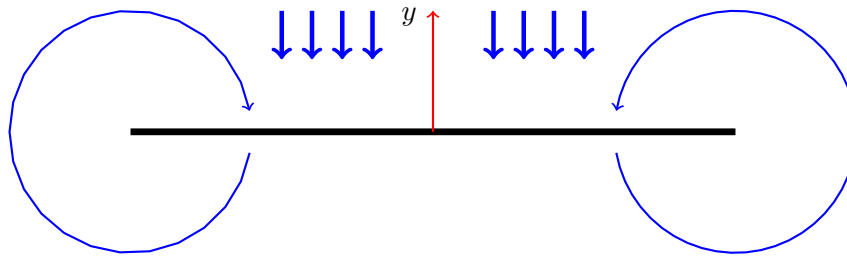
Σχήμα 3.8: Σχήμα για την μεταβολή της πυκνότητας στροβιλότητας  $\gamma_x$  σύμφωνα με τις παραδοχές της θεωρίας φέρουσας γραμμής. Διακεκομμένη μπλε γραμμή: Πραγματική μεταβολή. Κόκκινη συνεχής γραμμή: Εξίσωση (3.41).

Για την επαγόμενη ταχύτητα που υπολογίζεται με βάση την προηγούμενη παραδοχή υποθέτουμε επι πλεον ότι δεν μεταβάλλεται σημαντικά κατά το μήκος της χορδής. Μπορούμε να υποθέσουμε επομένως ότι η επαγόμενη ταχύτητα είναι σταθερή σε όλη την χορδή και ίση με την τιμή της στην θέση  $x = 0$ :

$$v_f(x, z) \approx v_f(0, z) \quad (3.42)$$

Η τελευταία παραδοχή σημαίνει ότι η μοναδικη επιδραση της ελευθερης στροβιλότητας είναι η εκτροπή της εξωτερικής ροής με την προσθηκη μιας μικρής συνιστώσας της ταχύτητας στην  $y$  κατεύθυνση  $v^*$  ίσης με την επαγόμενη ταχύτητα  $v_f(0, z)$ .

Η συνισταμένη εξωτερική ταχύτητα, που προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της εξωτερικής ροής  $U$  και της επαγόμενης ταχύτητας από την ελευθερη στροβιλότητα, έχει συνιστώσες κατά  $x, y, z$  αντίστοιχα  $U, v^*, 0$ . Επειδή  $|v^*| \ll U$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας της εξωτερικής ροής είναι ίσο με  $U$ , αλλά το διάνυσμα της είναι κεκλιμένο ως προς τον άξονα  $x$  κατά την γωνία εκτροπής  $\alpha^*$ :



Σχήμα 3.9: Σχηματική παράσταση του κατωρεύματος λόγω της στροβιλότητας στον ομόρρου της πτέρυγας. Το σχήμα παρουσιάζει μία όψη παρατηρητή που βρίσκεται πίσω από την πτέρυγα.

$$\alpha^* = -\frac{v^*}{U} \tag{3.43}$$

Το αρνητικό πρόσημο στην (3.43) χρησιμοποιείται για να έχουμε θετική γωνία εκτροπής. Επομένως η γωνία πρόσπτωσης της διατομής της πτέρυγας θα υποστεί μια μείωση και θα γίνει  $\alpha - \alpha^*$ . (Σημειώνουμε ότι η κάθετη επαγόμενη ταχύτητα  $v^*$  λεγεται κατώρευμα (downwash)).

Κατά συνέπεια έχουμε να λύσουμε μια σειρά από δισδιάστατα προβλήματα. Η δύναμη ανά μονάδα πλάτους στην πτέρυγα είναι ως γνωστόν ίση με  $-\rho U \Gamma(z)$ . (Η κυκλοφορία  $\Gamma$  λεγεται γι' αυτό τον λογο και «φόρτιση» της πτέρυγας). Οπότε η δύναμη,  $dL^*$ , σε μία απειροστή λωρίδα της πτέρυγας πλάτους  $dz$  είναι ίση με:

$$dL^* = -\rho U \Gamma(z) dz \tag{3.44}$$

Η δύναμη  $dL^*$  είναι κάθετη προς την συνισταμένη ταχύτητα  $U, v^*, 0$ . Αναλύουμε την δύναμη  $dL^*$  σε μια συνιστώσα κατά τον άξονα των  $y$ , που συμβολίζουμε με  $dL$ , και μια κατά τον άξονα των  $x$ , που συμβολίζουμε με  $dD_i$ . Προφανώς έχουμε ότι  $dL = dL^* \cos \alpha^*$ , και  $dD_i = dL^* \sin \alpha^*$ . Επειδή η γωνία εκτροπής είναι μικρή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$dL \approx dL^*, \quad dD_i \approx dL^* \alpha^* \tag{3.45}$$

Οπου η γωνία  $\alpha^*$  έχει εκφραστεί σε ακτίνια. Οι συνολικές δυνάμεις στην πτέρυγα θα υπολογιστούν ολοκληρώνοντας ως προς  $z$  τις εξισώσεις (3.45).

Η συνιστώσα  $L$ , που είναι κάθετη προς την ταχύτητα στο άπειρο, είναι η δυναμική άνωση, και η συνιστώσα  $D_i$ , που είναι παράλληλη προς την ταχύτητα στο άπειρο λεγεται επαγόμενη αντίσταση. Ενεργειακά η ύπαρξη της επαγόμενης αντίστασης εξηγείται από το ότι η ισχυς που παράγει η τελευταία διατίθεται για την κινητική ενέργεια του ρευστού που συνεπάγεται δημιουργία του φύλλου δινών πίσω από την πτέρυγα.

### Υπολογισμός της επαγόμενης ταχύτητας

Εφαρμόζοντας τις απλοποιητικές παραδοχές της θεωρίας φέρουσας γραμμής στην εξίσωση (3.39) η κάθετη επαγόμενη ταχύτητα λόγω της ελευθερης στροβιλότητας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{1}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} \frac{d\Gamma}{d\zeta} (z - \zeta) d\zeta \int_0^\infty \frac{1}{(\xi^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{1}{z - \zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (3.46)$$

Στην απόδειξη της (3.46) κάναμε την αντικατάσταση  $\xi = |z - \zeta| \psi$ , και χρησιμοποιήσαμε το ότι  $\int_0^\infty 1/(1 + \psi^2)^{3/2} d\psi = 1$ .

Για τον υπολογισμό του ανωτέρω ολοκληρώματος κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις:

$$z = \frac{s}{2} \cos \theta \quad \zeta = \frac{s}{2} \cos \phi \quad (3.47)$$

όπου  $\theta$  και  $\phi$  μεταβάλλονται μεταξύ 0 και  $\pi$ .

Με τις αντικαταστάσεις αυτές και, παρατηρώντας ότι  $(d\Gamma/d\zeta) d\zeta = (d\Gamma/d\phi) d\phi$ , έχουμε:

$$v_f = \frac{1}{2\pi s} \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\phi} \frac{1}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi \quad (3.48)$$

Θεωρώντας την κυκλοφορία  $\Gamma$  σαν συνάρτηση της μεταβλητής  $\phi$  μπορούμε να την παραστήσουμε με μια ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα 0 έως  $\pi$ :

$$\Gamma(\phi) = -2Us \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\phi \quad (3.49)$$

όπου  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  είναι οι συντελεστές της σειράς. Επιλέξαμε ημιτονική σειρά Fourier αντί για συνημιτονική επειδή η κυκλοφορία  $\Gamma$  μηδενίζεται στα δύο ακροπερύγια. Η ποσότητα  $2Us$  έχει εισαχθεί για να είναι οι συντελεστές της σειράς αδιάστατα μεγέθη. Οι συντελεστές συνδέονται με την κυκλοφορία με την σχέση:

$$a_n = -\frac{1}{\pi Us} \int_0^\pi \Gamma(\phi) \sin n\phi d\phi \quad (3.50)$$

Η κυκλοφορία  $\Gamma$  είναι άγνωστη, οπότε και οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι επίσης άγνωστοι. Σημειώνουμε ότι για πτέρυγες συμμετρικές ως προς το επίπεδο  $x - y$  η κυκλοφορία  $\Gamma$  είναι άρτια συνάρτηση του  $z$ :  $\Gamma(z) = \Gamma(-z)$ . Η σχέση συμμετρίας γράφεται συναρτήσει της μεταβλητής  $\theta$  στην μορφή:  $\Gamma(\theta) = \Gamma(\pi - \theta)$ . Επομένως από την εξίσωση

(3.50) βλέπουμε ότι η σειρά θα Fourier θα περιέχει μόνο τους συντελεστές περιττής τάξης.

Αντικαθιστούμε την έκφραση για την κυκλοφορία  $\Gamma$  στο ολοκλήρωμα για την επαγόμενη ταχύτητα και έχουμε:

$$\begin{aligned} v^* &= -\frac{U}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\phi \frac{1}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = -\frac{U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \int_0^\pi \frac{\cos n\phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \\ &= -U \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Γιά να καταλήξουμε στην εξίσωση (3.51) μεταχειριστήκαμε τα ολοκληρώματα Glauert, που είχαμε συναντήσει και στην θεωρία λεπτών υδροτομών:

$$G_n(\theta) = \int_0^\pi \frac{\cos n\phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (3.52)$$

Από το κατώρευμα  $v^*$  βρισκουμε και την γωνία εκτροπής της ροής  $\alpha^*$ :

$$a^* = -\frac{v^*}{U} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (3.53)$$

Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όταν  $a_n = 0$  για  $n \geq 2$ . Στην περίπτωση αυτή η μεταβολή της φόρτισης είναι ημιτονοειδής ως προς την μεταβλητή  $\theta$ , ή, ισοδύναμα, ελλειπτική ως προς την μεταβλητή  $z$ . Τότε οι εκφράσεις για την κάθετη επαγόμενη ταχύτητα και την γωνία εκτροπής απλοποιούνται ως εξής:

$$v^* = U a_1 = \text{σταθερή} \quad (3.54)$$

$$a^* = a_1 = \text{σταθερή} \quad (3.55)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η γωνία εκτροπής της ροής είναι στην περίπτωση ελλειπτικής φόρτισης σταθερή σε όλο το άνοιγμα της πτέρυγας.

### Υπολογισμός της δυναμικής άνωσης και της επαγόμενης αντίστασης

Η ολική άνωση βρίσκεται με ολοκλήρωση της τοπικής άνωσης ανά μονάδα πλάτους κατά το άνοιγμα της πτέρυγας:

$$\begin{aligned}
 L &= - \int_{-s/2}^{s/2} \rho U \Gamma \mathbf{d}z = -\rho U \frac{s}{2} \int_0^\pi \Gamma \sin \theta \mathbf{d}\theta = \\
 &= \rho U^2 s^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \sin \theta \mathbf{d}\theta
 \end{aligned}$$

Από που προκύπτει ότι:

$$L = \frac{\pi a_1}{2} \rho U^2 s^2 \quad (3.56)$$

καθώς μόνο ο όρος  $n = 1$  της σειράς δίνει μη μηδενικό ολοκλήρωμα.

Ο συντελεστής άνωσης της πτέρυγας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C_L = \frac{2L}{\rho U^2 A} = \pi a_1 \frac{s^2}{A} = \pi a_1 (AR) \quad (3.57)$$

όπου  $A$  είναι η επιφάνεια και  $(AR)$  είναι ο λόγος επιμήκους της πτέρυγας.

Η επαγόμενη αντίσταση της πτέρυγας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$D_i = \int_{-s/2}^{s/2} (\rho U \Gamma) \alpha^* \mathbf{d}z = \rho U^2 s^2 \int_0^\pi \left( \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\sin(m\theta)}{\sin \theta} \right) \mathbf{d}\theta$$

Αναπτύσσοντας το γινόμενο των δύο σειρών και, éναλλάσσοντας την ολοκλήρωση με την άθροιση, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned}
 D_i &= \rho U^2 s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n a_n a_m \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(m\theta) \mathbf{d}\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho U^2 s^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2
 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Όπου μεταχειριστήκαμε την σχέση:

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \mathbf{d}\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (3.59)$$

Ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης,  $C_{Di}$ , δίνεται από την εξίσωση:



$$C_{Di} = \frac{2D_i}{\rho U^2 A} = \pi a_1^2 (AR) \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{a_n^2}{a_1^2}\right) \quad (3.60)$$

Εκφράζουμε τον συντελεστή  $C_{Di}$  συναρτήσει του συντελεστή  $C_L$  και αντικαθιστώντας παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για τον συντελεστής επαγόμενης αντίστασης:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi (AR)} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{a_n^2}{a_1^2}\right) \quad (3.61)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι η ελλειπτική κατανομή της φόρτισης κατά το άνοιγμα δίνει τον ελάχιστο συντελεστή επαγόμενης αντίστασης για δεδομένο συντελεστή άνωσης. Η ελλειπτική φόρτιση είναι κατά συνέπεια η βέλτιστη.

### Συσχέτιση του τρισδιάστατου με τον δισδιάστατο συντελεστή άνωσης

Θεωρούμε πτέρυγα με σταθερή γωνία πρόσπτωσης σε όλο της το άνοιγμα. Μιά τέτοια πτέρυγα λεγεται ευθύγραμμη. Θεωρούμε επίσης ότι όλες οι τομές της πτέρυγας από επίπεδα  $z$ =σταθερό είναι γεωμετρικά όμοιες (δηλ. προέρχονται από την ίδια αδιαστατη διατομή), οπότε έχουν όλες την ίδια γωνία μηδενικής άνωσης  $\alpha_0$ . Σύμφωνα με τις υποθέσεις της θεωρίας φέρουσας γραμμής, η τοπική άνωση σε κάθε τομή της πτέρυγας μπορεί να υπολογιστεί από την δισδιάστατη θεωρία λεπτών υδροτομών, αλλά με την εξωτερική ροή τροποποιημένη κατά την γωνία  $\alpha^*$ .

Από την διδιάστατη θεωρία λεπτών υδροτομών ξέρουμε ότι ο τοπικός συντελεστής άνωσης  $C_{L\ell}$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C_{L\ell} = 2\pi(\alpha - \alpha_0 - a^*) = 2\pi\left(\alpha - \alpha_0 + \frac{v^*}{U}\right) \quad (3.62)$$

Επειδή η άνωση ανά μονάδα πλάτους είναι ίση με  $-\rho U \Gamma$  έχουμε την εναλλακτική έκφραση για τον τοπικό συντελεστή άνωσης:

$$C_{L\ell} = -\frac{2\rho U \Gamma}{\rho U^2 c} = -\frac{2\Gamma}{Uc} \quad (3.63)$$

όπου  $c(z)$  είναι η τοπική χορδή της πτέρυγας. Εξισώνουμε τις εκφράσεις στις (3.62), (3.63) και αντικαθιστούμε τις εκφράσεις για την φόρτιση και την γωνία εκτροπής από το προηγούμενο κεφάλαιο, και καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\frac{4s}{c} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) = 2\pi(\alpha - \alpha_0) - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \quad (3.64)$$

Ισοδύναμα η εξίσωση (3.64) γράφεται ως εξής:

$$4s \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \sin \theta + 2\pi c \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin(n\theta) = 2\pi c(\alpha - \alpha_0) \sin \theta \quad (3.65)$$

Η εξίσωση (3.65) ισοδυναμεί με ένα σύστημα από άπειρες γραμμικές εξισώσεις για τους συντελεστές  $a_n$ . Αν όμως κρατήσουμε τους  $N$  πρώτους όρους της σειράς Fourier, και εφαρμόσουμε την εξίσωση (3.64) σε  $N$  σημεία με συντεταγμένες  $z_i, i = 1, 2, \dots, N$  (και αντίστοιχα  $\theta_i, i = 1, 2, \dots, N$ ) θα έχουμε ένα σύστημα  $N$  γραμμικών εξισώσεων για τους  $N$  συντελεστές:

$$\sum_{n=1}^N (4s \sin \theta_i + 2\pi c_i n) \sin(n\theta_i) a_n = 2\pi(\alpha - \alpha_0) c_i \sin \theta_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.66)$$

Όπου  $c_i = c(z_i)$ . Το σύστημα (3.66) μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τις σπάνταρ μεθόδους της Γραμμικής Αλγεβρας.

Το πρόβλημα απλοποιείται πολύ για την περίπτωση που  $c = c_0 \sin \theta$ , όπου  $c_0$  είναι η μέγιστη χορδή της πτέρυγας. Όταν ισχύει αυτό έχουμε ότι  $c = c_0 \sin \theta = c_0 (1 - (2z/s)^2)^{1/2}$ , δηλαδή η πτέρυγα έχει ελλειπτικό σχήμα με άξονες  $c_0$  και  $s$ . Τότε η εξίσωση (3.64) γίνεται:

$$\frac{4s}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \sin \theta - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin(n\theta) \quad (3.67)$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των όρων  $\sin(n\theta)$  στα δύο μέλη και καταλήγουμε στις εξής σχέσεις:

$$\frac{4s}{c_0} a_1 = 2\pi(\alpha - \alpha_0 - a_1) \quad (3.68)$$

$$\frac{4s}{c_0} n a_n = n a_n \quad (3.69)$$

Από τις (3.68), (3.69) προκύπτει ότι:

$$a_n = \begin{cases} \frac{2\pi(\alpha - \alpha_0)}{4s/c_0 + 2\pi} & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases} \quad (3.70)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι, για το είδος της πτέρυγας που θεωρούμε σε αυτό το κεφάλαιο, ελλειπτικό σχήμα συνεπάγεται και ελλειπτική φόρτιση.

Αντικαθιστούμε την τιμή του  $a_1$  στην εξίσωση που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τον ολικό συντελεστή άνωσης  $C_L$  και καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση:

$$C_L = \frac{2\pi(\alpha - \alpha_0)}{1 + 2/(AR)} \quad (3.71)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι, επειδή η επιφάνεια  $A$  πτέρυγας ελλειπτικού σχήματος είναι ίση με  $\pi c_0 s/4$ , ο λόγος επιμήκους δίνεται από την σχέση:

$$(AR) = \frac{4}{\pi} \frac{s}{c_0} \quad (3.72)$$

Ο συντελεστής άνωσης τρισδιάστατης πτέρυγας είναι μικρότερος από τον συντελεστή της δισδιάστατης υδροτομής που αντιστοιχεί στην τομή της πτέρυγας. Η μείωση οφείλεται κατά κύριο λόγο στην ύπαρξη του κατωρεύματος, το οποίο δημιουργείται από το φύλλο στροβιλότητας που ακολουθεί την πτέρυγα.

Ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης μπορεί τώρα να υπολογιστεί από την εξίσωση (3.61).

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi (AR)} \quad (3.73)$$

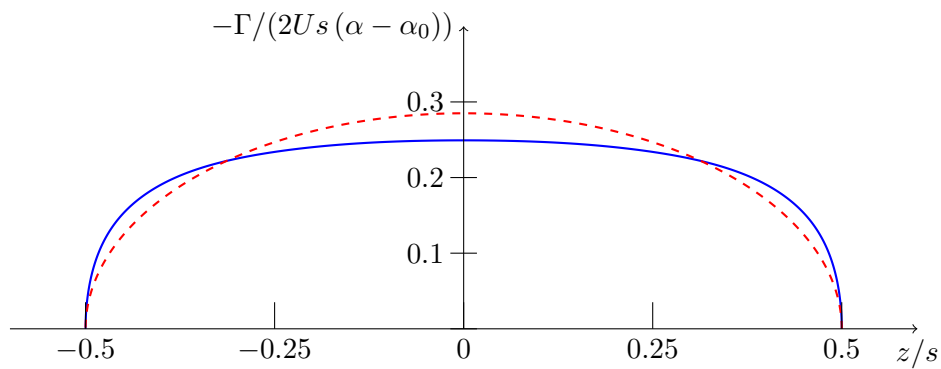
Η εξίσωση (3.73) δείχνει ότι ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης είναι ανάλογος με το τετράγωνο του συντελεστή άνωσης. Κατά συνέπεια αύξηση της άνωσης οδηγεί σε δυσανάλογη αύξηση της αντίστασης. Καθώς η γωνία πρόσπτωσης αυξάνει, η επαγόμενη αντίσταση ξεπερνά την αντίσταση λόγω τριβής και γίνεται η σημαντικότερη συνιστώσα της συνολικής αντίστασης.

Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις (3.71) και (3.73) ισχύουν με αρκετά καλή ακρίβεια και για μη ελλειπτικά σχήματα, όπου η φόρτιση δεν είναι ελλειπτική. Για παράδειγμα, για ορθογωνική πτέρυγα με λόγο επιμήκους ίσο με πέντε, η εξίσωση (3.71) προβλέπει συντελεστή άνωσης ίσο με  $4.48(\alpha - \alpha_0)$ , ενώ η «ακριβής τιμή», που προκύπτει από την αριθμητική επίλυση του συστήματος (3.66), είναι ίση με  $4.31(\alpha - \alpha_0)$ , έχουμε δηλαδή ένα λάθος γύρω στο 4%. Στο σχήμα 3.10 παρουσιάζεται η φόρτιση της ορθογωνικής πτέρυγας κατά το άνοιγμα της, όπως προκύπτει από την αριθμητική επίλυση του συστήματος (3.66) (συνεχής γραμμή), και όπως προκύπτει υποθέτοντας ελλειπτική φόρτιση (διακεκομμένη γραμμή). Όπως βλέπουμε, η φόρτιση στην ορθογωνική πτέρυγα παρουσιάζει μεγαλύτερες κλίσεις στις περιοχές κοντά στα ακροπερύγια απ' ό,τι η ελλειπτική φόρτιση, με αποτέλεσμα να υπάρχει μεγαλύτερη κίνηση του ρευστού γύρω από το ακροπερύγιο, και επομένως ισχυρότερες δίνες ακροπερυγίων. Σε αυτό οφείλεται η μειωμένη άνωση και αυξημένη επαγόμενη αντίσταση στην ορθογωνική πτέρυγα εν σχέσει με την ελλειπτική.

## ΑΣΚΗΣΗ

Γιά ελλειπτική φόρτιση να εκφραστεί η γωνία εκτροπής συναρτήσει του συντελεστή  $C_L$ .

## ΛΥΣΗ



Σχήμα 3.10: Φόρτιση ορθογωνικής πτέρυγας με λόγο επιμήκους ίσο με πέντε κατά το άνοιγμά της: “Ακριβής λύση” (συνεχής γραμμή), και προσεγγιστική λύση υποθέτοντας ελλειπτική φόρτιση (διακεκομμένη γραμμή).

Γιά ελλειπτική φόρτιση η γωνία εκτροπής είναι σταθερή σε όλο το άνοιγμα της πτέρυγας. Επομένως έχουμε ότι:

$$\alpha^* = \frac{D_i}{L} = \frac{C_{Di}}{C_L} = \frac{C_L}{\pi(AR)}$$

Η γωνία εκτροπής είναι δηλαδή κατ’ ευθείαν ανάλογη με τον συντελεστή άνωσης, και αντιστρόφως ανάλογη με τον λόγο επιμήκους της πτέρυγας.

## Κεφάλαιο 4

# ΘΕΩΡΙΑ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ

### 4.1 Εισαγωγή

Ενα από τα βασικά θέματα της ναυτικής υδροδυναμικής είναι τα θαλάσσια κύματα. Τα θαλάσσια κύματα που ενδιαφέρουν την ναυτική υδροδυναμική μεταδίδονται λόγω της δύναμης της βαρύτητας, γι' αυτό λέγονται και κύματα βαρύτητας. Τα κύματα βαρύτητας δημιουργούνται από την πνοή του ανέμου πάνω από την θάλασσα, και από την κίνηση των πλοίων επιφανείας, ή άλλων σωμάτων που κινούνται σε μικρό βάθος. Ο άνεμος είναι βέβαια η κυριότερη αιτία δημιουργίας κυματισμών στη θάλασσα. Η διαταραχή της θάλασσας είναι ανάλογη με την ένταση που έχει άνεμος, και αναφέρεται σαν “κατάσταση της θάλασσας” (sea state). Τα κύματα δεν σταματούν να υπάρχουν αμέσως μόλις σταματήσει ο άνεμος, αλλά συνεχίζουν να μεταδίδονται για αρκετό χρονικό διάστημα, μέχρι που να αποσβεσθούν. Η κατάσταση αυτή της θάλασσας αναφέρεται διεθνώς σαν swell.

Υπάρχουν και άλλες κατηγορίες θαλασσίων κυμάτων πολύ μεγαλύτερης κλίμακας, των οποίων η μετάδοση οφείλεται στην δράση της επιτάχυνσης Coriolis λόγω περιστροφής της γης, ή, κύματα ακόμα μεγαλύτερης κλίμακας, που επηρεάζονται από την έλξη άλλων ουρανίων σωμάτων (της σελήνης συγκεκριμένα). Από την άλλη πλευρά η μετάδοση θαλασσίων κυμάτων πολύ μικρότερης κλίμακας από τα κύματα βαρύτητας κυριαρχείται από τις δυνάμεις επιφανειακής τάσης. Στην συνέχεια του μαθήματος, όταν λέμε “θαλάσσια κύματα” θα εννοούμε τα κύματα βαρύτητας μόνο.

Τα θαλάσσια κύματα υπάγονται στα λεγόμενα επιφανειακά κύματα (interfacial waves), τα οποία δημιουργούνται στην διαχωριστική επιφάνεια δύο ρευστών, εν προκειμένω του νερού και του αέρα. Εχουμε δηλαδή να επιλύσουμε το συζευγμένο πρόβλημα κίνησης νερού και αέρα. Το πρόβλημα απαιτεί την παράλληλη επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes στο νερό και στον αέρα, και η σύζευξη γίνεται με την επιβολή των οριακών συνθηκών (κινηματική και δυναμική) στην διαχωριστική επιφάνεια.

Από δυναμικής πλευράς στην διαχωριστική επιφάνεια πρέπει η τάση του νερού,  $s_w$ , να είναι ίση με την τάση του αέρα,  $s_a$ . Εστω  $\sigma_w$  ο τανυστής τάσεων του νερού και  $\sigma_a$  ο τανυστής τάσεων του αέρα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy που εκφράζει την τάση πάνω σε επιφάνεια συναρτήσει του τανυστή των τάσεων, η δυναμική συνθήκη γράφεται ως εξής:

$$(\sigma_w - \sigma_a)n = 0 \quad (4.1)$$

Όπου  $n$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην διαχωριστική επιφάνεια.

Ως γνωστόν, ο τανυστής των τάσεων μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (4.2)$$

όπου  $p$  είναι η πίεση του ρευστού, που ορίζεται σαν ο μέσος όρος των τριών συνιστωσών του τανυστή που είναι πάνω στη διαγώνιο,  $\boldsymbol{\tau}$  ο τανυστής τάσεων τριβής, και  $\mathbf{I}$  ο μοναδιαίος τανυστής. Αντικαθιστώντας την (4.2) η εξίσωση (4.1) γράφεται ως εξής:

$$(\boldsymbol{\tau}_w - \boldsymbol{\tau}_a)\mathbf{n} - (p_w - p_a)\mathbf{n} = 0 \quad (4.3)$$

Εάν δεν υπάρχει ροή ανέμου, λόγω της μεγάλης διαφοράς πυκνότητας και συνεκτικότητας ανάμεσα στο νερό και στον αέρα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι τάσεις τριβής του αέρα είναι πολύ μικρότερες από τις τάσεις τριβής του νερού, και ότι οι μεταβολές της πίεσης του αέρα είναι αμελητέες. Υποθέτουμε δηλαδή ότι ο αέρας συμπεριφέρεται σαν ένα ακίνητο στρώμα ρευστού με σταθερή πίεση (την ατμοσφαιρική πίεση). Η ατμοσφαιρική πίεση θεωρείται σαν η πίεση αναφοράς, οπότε η τάση στην επιφάνεια του νερού είναι μηδενική και η επιφάνεια του νερού λέγεται ελεύθερη. Το νερό επομένως ικανοποιεί τις εξισώσεις συνεχείας και ορμής, την οριακή συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον βυθό της θάλασσας. Επομένως η εξίσωση (4.3) απλοποιείται ως εξής:

$$\boldsymbol{\tau}_w\mathbf{n} - (p_w - p_{at})\mathbf{n} = 0 \quad (4.4)$$

Από κινηματικής πλευράς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ελεύθερη επιφάνεια είναι μιά υλική επιφάνεια (αν εξαιρέσουμε το σημαντικό αλλά εξαιρετικά δύσκολο να περιγραφεί φαινόμενο της θραύσης κυμάτων), Η κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια επομένως μπορεί να παραχθεί από το γεγονός ότι η υλική παράγωγος της εξίσωσης της επιφάνειας είναι ίση με μηδέν.

Θεωρούμε σύστημα αξόνων  $x, y, z$ , όπου οι άξονες  $x, y$  είναι οριζόντιοι και ο  $z$  κατακόρυφος με φορά αντίθετη από την βαρύτητα. Το επίπεδο  $z = 0$  συμπίπτει με την θέση ισορροπίας της επιφάνειας της θάλασσας. Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας έχει την μορφή  $\eta(x, y, t) - z = 0$ , όπου  $\eta$  είναι η συνάρτηση που περιγράφει την μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας από την θέση ισορροπίας της. Γιά την κινηματική συθήκη λοιπόν θέτουμε:

$$\frac{D}{Dt} (\eta(x, y, t) - z) = 0 \quad (4.5)$$

Αυτό μας δίνει την ακόλουθη κινηματική οριακή συνθήκη:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad z = \eta \quad (4.6)$$

Οι εξισώσεις κίνησης με την οριακή συνθήκη μηδενικής ταχύτητας στον βυθό της θάλασσας και τις δύο συθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια (εξισώσεις (4.6) και (4.4)) συνιστούν την πλήρη διατύπωση του προβλήματος.

Η εμπειρία έχει δείξει ότι η κίνηση της θάλασσας για τις πολλές από τις συνήθεις εφαρμογές ναυτικής υδροδυναμικής μπορεί να περιγραφεί αγνοώντας τις δυνάμεις συνεκτικότητας, και υποθέτοντας ότι η ροή της θάλασσας είναι αστρόβιλη ροή με δυναμικό  $\phi: \nabla\phi = \mathbf{u}$ . Τότε το πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά καθώς, επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη, το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.7)$$

Στον πυθμένα  $z = -h(x, y)$  (οπου  $h$  είναι συνάρτηση των συντεταγμένων  $x$  και  $y$ ), αφού αγνοήσαμε το ιξώδες του νερού, έχουμε μόνο την συνθήκη μη διείσδυσης, δηλαδή ότι η συνιστώσα της ταχύτητας του νερού κάθετη προς τον πυθμένα είναι μηδενική. Αυτό δίνει την ακόλουθη συνθήκη Neumann για το δυναμικό  $\phi$ :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{z=-h} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (4.8)$$

Οπου  $\mathbf{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στον πυθμένα.

Η κινηματική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (4.6) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του δυναμικού της ροής ως εξής:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad z = \eta \quad (4.9)$$

Τέλος, αφού αγνοούμε τις τάσεις τριβής, η δυναμική συνθήκη (4.4) απλοποιείται σε  $p = p_{at}$ . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Bernoulli για μη μόνιμη ροή, και το γεγονός ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι πίεση αναφοράς, η δυναμική οριακή συνθήκη παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + gz = 0, \quad z = \eta \quad (4.10)$$

Ή ισοδύναμα

$$\eta = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 \right) \Big|_{z=\eta} \quad (4.11)$$

## 4.2 Γραμμική θεωρία

### 4.2.1 Γενικά

Λόγω της μη γραμμικότητας των οριακών συνθηκών (4.9) και (4.11), λύση του προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί μόνο αριθμητικά. Χρήσιμα αποτελέσματα για πρακτικές εφαρμογές μπορούν να αποκτηθούν χρησιμοποιώντας την πολύ απλούστερη γραμμική θεωρία κυματισμών. Η γραμμική θεωρία, παρά τις απλουστεύσεις της, δίνει αποτελέσματα σε πολύ καλή συμφωνία με πειράματα.

Η γραμμική θεωρία στηρίζεται σε δύο βασικές απλοποιητικές παραδοχές: (α) Το κύμα και το αντίστοιχο δυναμικό θεωρούνται μικρά, και γι αυτό στις οριακές συνθήκες κρατάμε μόνο όρους που είναι γραμμικοί ως προς  $\eta$  και  $\phi$  (β) Λόγω της μικρής ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας οι οριακές συνθήκες εφαρμόζονται στην μέση στάθμη θαλάσσης  $z = 0$ , αντί για την πραγματική θέση  $z = \eta$ .

Με βάση τις δυο παραδοχές οι γραμμικοποιημένες συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια είναι:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4.12)$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} \quad (4.13)$$

Αντικαθιστώντας την (4.13) στην (4.12) παίρνουμε μιά συνθήκη που περιλαμβάνει μόνο το δυναμικό:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (4.14)$$

Η οριακή συνθήκη στον βυθό (4.8) παραμένει όπως έχει.

Γιά την επίλυση του γραμμικοποιημένου προβλήματος χρειάζεται να επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace συν την οριακή συνθήκη στον βυθό, τις οριακές συνθήκες στην θέση ισορροπίας της επιφάνειας της θάλασσας, και τις οριακές συνθήκες πάνω σε άλλα αντικείμενα που τυχόν υπάρχουν (π.χ. το πλοίο).

### 4.2.2 Απλοί αρμονικοί κυματισμοί

#### Εξίσωση διασποράς

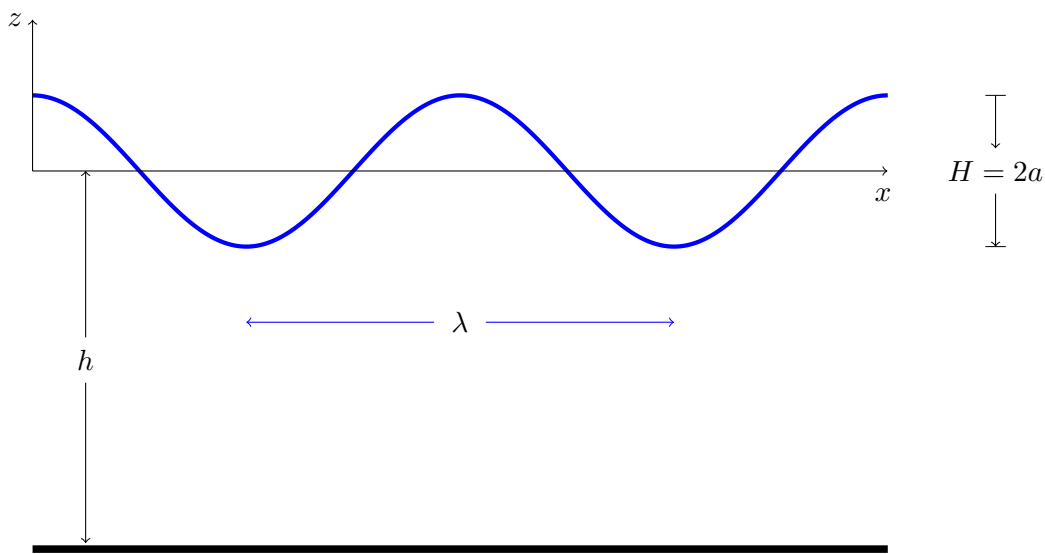
Θεωρούμε απλό αρμονικό κυματισμό με περίοδο  $T$  και μήκος κύματος  $\lambda$ , που μεταδίδεται σε θαλάσσιο νερό σταθερού βάρους  $h$ . Η κατεύθυνση μετάδοσης είναι παράλληλη με τον άξονα  $x$ . Η κυκλική συχνότητα  $\omega$  και ο κυματαριθμός του κυματισμού  $k$  ορίζονται από τις σχέσεις  $\omega = 2\pi/T$ , και  $k = 2\pi/\lambda$ . Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας έχει την μορφή:



$$\eta = a \cos(kx - \omega t) \tag{4.15}$$

Οπου  $a$  είναι το πλάτος ταλάντωσης του κύματος. Το ύψος του κύματος  $H$  ορίζεται σαν η κατακόρυφη απόσταση ανάμεσα σε μία κορυφή και μία κοιλάδα του κύματος. Για κυματισμούς του τύπου που περιγράφει η εξίσωση (4.15)  $H = 2a$ . Επειδή το βάθος είναι σταθερό, η οριακή συνθήκη (4.8) στον πυθμένα γνεται:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \tag{4.16}$$



Σχήμα 4.1: Σχήμα ορισμού για απλό αρμονικό κυματισμό

Λόγω της οριακής συνθήκης (4.12) το δυναμικό της ροής έχει την μορφή

$$\phi = \sin(kx - \omega t)F(z) \tag{4.17}$$

Οπου  $F$  είναι κάποια συνάρτηση που θα προσδιορίσουμε τώρα.

Αντικαθιστώντας την (4.17) στην εξίσωση του Laplace βρίσκουμε ότι η συνάρτηση  $F$  είναι λύση της ακόλουθης κοινής διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - k^2 F = 0 \tag{4.18}$$

Η κινηματική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (4.12) και η οριακή συνθήκη στον πυθμένα (4.16) γίνονται αντίστοιχα:

$$\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=0} = a\omega \quad (4.19)$$

$$\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=-h} = 0 \quad (4.20)$$

Η διαφορική εξίσωση (4.18) ικανοποιείται από οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων  $\exp(\pm kz)$ . Επιλέγουμε τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό, ο οποίος ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στον πυθμένα (4.20):

$$F(z) = A \cosh(k(z+h)) \quad (4.21)$$

Όπου  $A$  σταθερά. Η κινηματική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (4.19) δίνει την ακόλουθη έκφραση για τη σταθερά  $A$ :

$$A = \frac{a\omega}{k \sinh(kh)} \quad (4.22)$$

Κατά συνέπεια το δυναμικό της ροής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\phi = \frac{a\omega}{k \sinh(kh)} \cosh(k(z+h)) \sin(kx - \omega t) \quad (4.23)$$

Οι ταχύτητες που προκαλεί το κύμα είναι περιοδικές χρονικά, όπως φαίνεται με παραγωγή του δυναμικού στην εξίσωση (4.23):

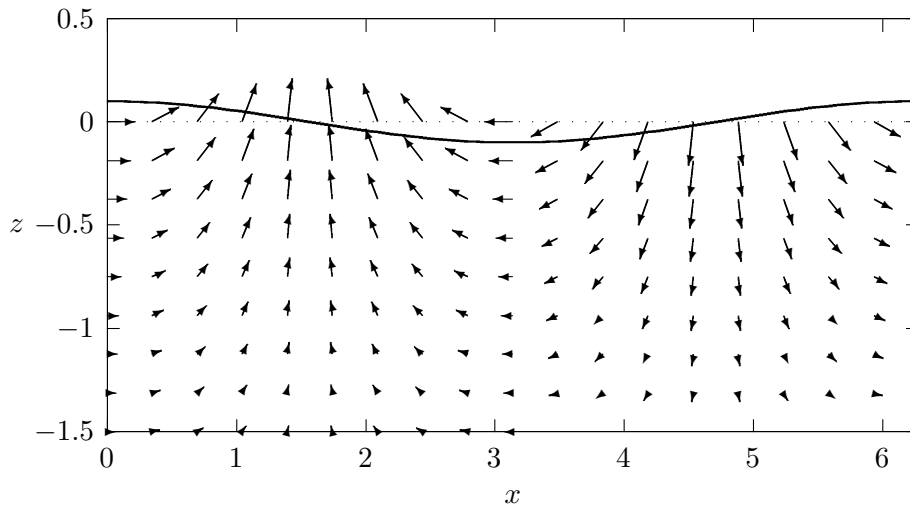
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{a\omega}{\sinh(kh)} \cosh(k(z+h)) \cos(kx - \omega t) \quad (4.24)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{a\omega}{\sinh(kh)} \sinh(k(z+h)) \sin(kx - \omega t) \quad (4.25)$$

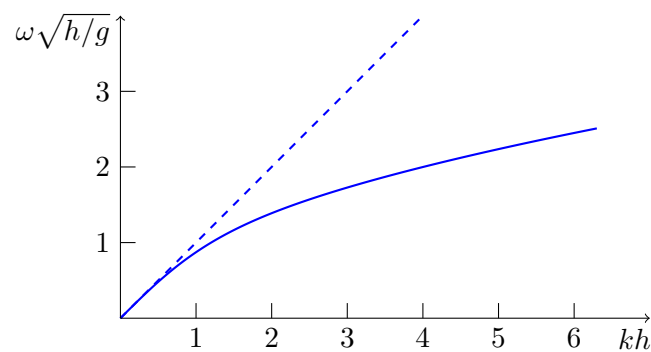
Όπως φαίνεται από τις (4.24), (4.25) η συνιστώσα  $u$  είναι σε φάση με την μετατόπιση της επιφάνειας της θάλασσας, ενώ η συνιστώσα  $w$  έχει διαφορά φάσης  $90^\circ$  με την επιφάνεια της θάλασσας. Αυτό επαληθεύεται στο Σχήμα 4.2, όπου φαίνονται τα διανύσματα της ταχύτητας σε διάφορα σημεία κάτω από το κύμα.

Μέχρι τώρα δεν μεταχειριστήκαμε την δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια (εξίσωση (4.13), ή ισοδύναμα την εξίσωση (4.14)). Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.23) στην εξίσωση (4.13) (ή, ισοδύναμα, στην (4.14)) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (4.26)$$



Σχήμα 4.2: Διανύσματα της ταχύτητας σε διάφορα σημεία κάτω από κύμα με πλάτος ταλάντωσης  $a = 0.07$  και αριθμό κύματος  $k = 1$ , σε θάλασσα βάθους  $h = 2$ . Η μετατόπιση της επιφάνειας της θάλασσας καθώς και η μέση θέση της επιφάνειας σημειώνονται επίσης



Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση της εξίσωσης διασποράς. Συνεχής γραμμή: Εξίσωση (4.26), διακεκομμένη γραμμή: Εξίσωση διασποράς ρηχού νερού (4.29).

Η εξίσωση (4.26) συνδέει την συχνότητα και τον αριθμό κύματος και είναι η **εξίσωση διασποράς** (dispersion relation) των θαλασσιών κυμάτων. Η εξίσωση διασποράς είναι η φυσική συνθήκη για την μετάδοση ενός κυματισμού στην επιφάνεια του νερού.

Ο λόγος  $c = \omega/k$  λέγεται ταχύτητα μετάδοσης ή ταχύτητα φάσης του κυματισμού, επειδή περιγράφει την ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται η φάση του κύματος  $kx - \omega t = k(x - ct)$ :

$$c = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad (4.27)$$

Για μεγάλα βάθη εν σχέσει με το μήκος του κύματος ( $kh \gg 1$ ) έχουμε ότι  $\tanh(kh) \approx 1$ , οπότε η (4.26) παίρνει την μορφή:

$$\omega^2 = gk \quad (4.28)$$

Αντίθετα για μικρά βάθη εν σχέσει με το μήκος του κύματος ( $kh \ll 1$ ) έχουμε ότι  $\tanh(kh) \approx kh$ , οπότε η (4.26) παίρνει την μορφή:

$$\omega^2 = ghk^2 \quad (4.29)$$

Η εξίσωση (4.28) ισχύει με καλή προσέγγιση για  $kh > 3.14$ , δηλαδή για  $h/\lambda > 0.5$ , ενώ η εξίσωση (4.29) ισχύει για  $kh < 0.1$ , δηλαδή  $\lambda/h > 62$ .

Για μεγάλα μήκη κύματος (εξίσωση (4.29)) παρατηρούμε ότι η ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού είναι ίση με  $\pm\sqrt{gh}$ , δηλαδή είναι ανεξάρτητη του κυματαριθμού. Για μικρά μήκη κύματος (εξ. (4.28)) η ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού είναι ίση με  $\pm\sqrt{g/k}$ , δηλαδή η ταχύτητα μετάδοσης είναι ανάλογη με την ρίζα του μήκους κύματος. Στην γενική περίπτωση (εξ. (4.26)), λόγω της ανισότητας  $\tanh x < x$ , έχουμε την ακόλουθη σχέση για την ταχύτητα μετάδοσης:

$$\frac{\omega}{k} < \sqrt{gh} \quad (4.30)$$

Τα κύματα που ικανοποιούν την (4.28) λέγονται κύματα σε βαθύ νερό, ενώ αυτά που ικανοποιούν την (4.29) λέγονται κύματα σε ρηχό νερό. Φυσικά οι όροι «βαθύ» ή «ρηχό» νερό είναι σχετικοί και έχουν να κάνουν με το πως συγκρίνεται το μήκος του κύματος με το βάθος της θάλασσας. Έτσι ακόμα και στο βαθύτερο σημείο της θάλασσας το νερό φαίνεται ρηχό για τα σεισμικά κύματα που έχουν πολύ μεγάλο μήκος κύματος, ενώ στα κύματα που δημιουργεί ένα μοντέλο σε δεξαμενή το νερό της δεξαμενής φαίνεται βαθύ.

Αντίστοιχα, σε βαθύ νερό η έκφραση για το δυναμικό παίρνει την ακόλουθη κάπως απλούστερη μορφή:

$$\phi = \frac{a\omega}{k} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad (4.31)$$

Σε ρηχό νερό  $kh \rightarrow 0$  έχουμε ότι  $\cosh(k(z+h)) \approx 1$ ,  $\sinh(kh) \approx kh$ , οπότε μεταχειριζόμενοι ότι για ρηχό νερό  $\omega/k = \sqrt{gh}$ , βρίσκουμε ότι η ροή τείνει σε μία μονοδιάστατη ροή παράλληλη με τον άξονα των  $x$ :

$$\phi = \frac{ag}{\omega} \sin(kx - \omega t) \quad (4.32)$$

Η προσέγγιση του δυναμικού για ρηχό νερό (4.32) δεν εξαρτάται από το  $z$ , οπότε ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace μόνο προσεγγιστικά, με την έννοια ότι, επειδή το μήκος κύματος είναι μεγάλο, ο αριθμός κύματος είναι μικρός, οπότε  $\nabla^2 \phi = \partial^2 \phi / \partial x^2 = -k^2 \phi \approx 0$ . Το δυναμικό (4.32) δεν χρησιμοποιείται για τα κύματα του ρηχού νερού, αλλά μεταχειριζόμαστε κατ'ευθείαν τις εξισώσεις του Euler.

### Τροχιές σωματιδίων

Σύμφωνα με την γραμμική θεωρία κυματισμών η μέση ταχύτητα της ροής είναι παντού ίση με μηδέν, και κατά συνέπεια τα σωματίδια του νερού εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από την θέση ισορροπίας τους.

Εστω  $(x, z)$  η θέση του σωματιδίου όταν δεν υπάρχει κύμα ( $a = 0$ ), και  $(x + \xi, z + \zeta)$  η στιγμιαία θέση του σωματιδίου όταν υπάρχει κύμα. Εξ ορισμού τα  $(\xi, \zeta)$  ικανοποιούν τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{a\omega}{\sinh(kh)} \cosh(k(z + \zeta + h)) \cos(k(x + \xi) - \omega t) \quad (4.33)$$

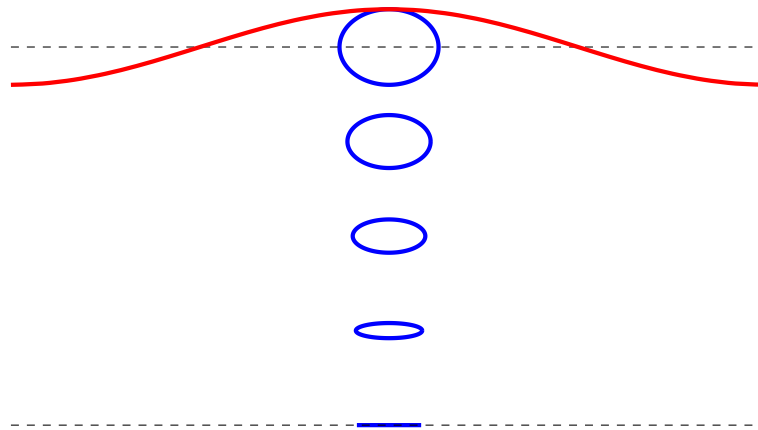
$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{a\omega}{\sinh(kh)} \sinh(k(z + \zeta + h)) \sin(k(x + \xi) - \omega t) \quad (4.34)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές ως προς  $\xi$  και  $\zeta$ , και κατά συνέπεια η επίλυση τους είναι δυσχερής. Σε συνέπεια με τις παραδοχές της γραμμικής θεωρίας όμως μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μετατοπίσεις των σωματιδίων είναι μικρές, και κατά συνέπεια μπορούμε να αγνοήσουμε τα  $(\xi, \zeta)$  όπου εμφανίζονται στο δεξιό μέλος. Οι εξισώσεις τότε ολοκληρώνονται άμεσα ως προς χρόνο και έχουμε ότι:

$$\xi = -a \frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (4.35)$$

$$\zeta = a \frac{\sinh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad (4.36)$$

Βλέπουμε επομένως ότι τα σωματίδια διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές με μεγάλο ημιάξονα παράλληλο με τον άξονα  $x$  και ίσο με  $a \cosh(k(z+h))/\sinh(kh)$ , και μικρό ημιάξονα



Σχήμα 4.4: Τροχιές σωματιδίων σε διάφορα βάθη κάτω από απλό αρμονικό κυματισμό.

παράλληλο με τον άξονα  $z$  και ίσο με  $a \sinh(k(z+h))/\sinh(kh)$ . Όσο το βάθος αυξάνει ο μικρός άξονας της έλλειψης μειώνεται, και όταν γίνει ίσο με το βάθος της θάλασσας, ο μικρός άξονας της έλλειψης μηδενίζεται. Τροχιές σωματιδίων κάτω από αρμονικό κύμα απεικονίζονται στο σχήμα 4.4.

Είναι διδακτικό να θεωρήσουμε την μορφή των τροχιών στις δυο οριακές περιπτώσεις του βαθιού και του ρηχού νερού. Στο βαθύ νερό  $kh \rightarrow \infty$  και οι δύο ημιάξονες γίνονται ίσοι με  $a \exp(kz)$ , δηλαδή οι τροχιές γίνονται κύκλοι με ακτίνα που μειώνεται εκθετικά με το βάθος. Σε βάθος μεγαλύτερο από το μισό μήκος κύματος τα σωματίδια του νερού κινούνται ελάχιστα και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παραμένουν ακίνητα. Στο ρηχό νερό, όπου  $kh \rightarrow 0$ , ο μεγάλος ημιάξονας τείνει στην τιμή  $agk/\omega^2 = a/kh$ , ενώ ο μικρός άξονας τείνει στο μηδέν. Το πέρασμα δηλαδή ενός κύματος μεγάλου μήκους προκαλεί μία γραμμική ταλάντωση των σωματιδίων του ρευστού στην  $x$  κατεύθυνση με το ίδιο πλάτος ταλάντωσης σε όλο το βάθος του ρευστού.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτά ισχύουν με βάση την γραμμική θεωρία των κυματισμών. Στην πραγματικότητα, λόγω των μη γραμμικών όρων στις οριακές συνθήκες, η μέση ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού στην κατεύθυνση  $x$  (περιγραφή Lagrange) έχει μη μηδενική τιμή. Αποδεικνύεται ότι η μέση ταχύτητα είναι ανάλογη με  $a^2$ , είναι επομένως πολύ μικρότερη από την στιγμιαία ταχύτητα, και δικαιολογημένα αγνοείται στην γραμμική θεωρία. Η μέση ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού είναι όμως πολύ σημαντική για γεωφυσικά φαινόμενα, επειδή προκαλεί μία μέση μεταφορά μάζας νερού παράλληλα με την κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος. Η κίνηση αυτή είναι γνωστή σαν μετατόπιση του Stokes (Stokes drift).

### Γραμμές ροής κάτω από απλό αρμονικό κυματισμό

Η ροή κάτω από απλό αρμονικό κυματισμό δεν είναι μόνιμη, οπότε οι γραμμές ροής είναι τελείως διαφορετικές από τις τροχιές των σωματιδίων. Για να προσδιορίσουμε τις γραμμές ροής χρειάζεται να προσδιορίσουμε την ροϊκή συνάρτηση  $\psi$ . Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Cauchy-Riemann που συνδέουν τη ροϊκή συνάρτηση με το δυναμικό της ροής:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το δυναμικό (εξίσωση (4.23)) εύκολα προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για τη ροϊκή συνάρτηση:

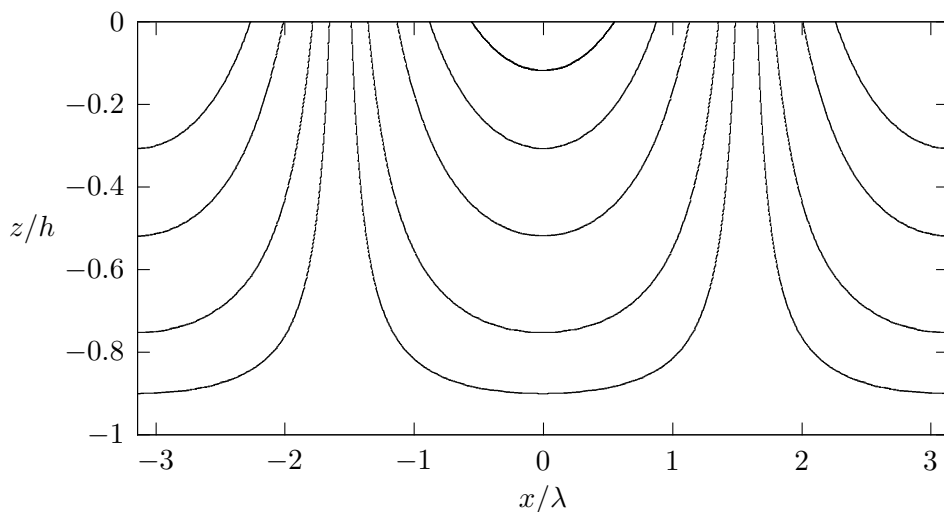
$$\psi = -\frac{a\omega}{k \sinh(kh)} \sinh(k(z+h)) \cos(kx - \omega t) \quad (4.37)$$

Επομένως οι γραμμές ροής περιγράφονται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\cos(kx - \omega t) \sinh(k(z+h)) = C \quad (4.38)$$

Όπου  $C$  μια αυθαίρετη σταθερά. Για διάφορες τιμές της σταθεράς  $C$  προκύπτει η οικογένεια των γραμμών ροής.

Οι γραμμές ροής για  $t = 0$  φαίνονται στο σχήμα 4.5. Η ομοιότητα του σχήματος αυτού με το σχήμα 4.2 που δείχνει το διάνυσμα της ταχύτητας κάτω από το κύμα είναι εμφανής. Σημειώνουμε ότι οι γραμμές ροής μεταβάλλονται χρονικά, αλλά η μεταβολή γίνεται με περιοδικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, μετά από χρόνο  $t$  η φάση του κύματος θα είναι ίση με  $kx - \omega t = k(x - x_t)$ , όπου  $x_t = t\omega/k$ . Αν μετατοπίσουμε επομένως την αρχή των αξόνων κατά  $x_t$ , αναγόμενα στο σχήμα 4.5. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι σε χρόνο  $t$  οι γραμμές ροής του σχήματος 4.5 θα έχουν απλά υποστεί μια παράλληλη μετατόπιση κατά το μήκος  $x_t$ . Επειδή στο σχήμα 4.5 η συντεταγμένη  $x$  είναι αδιαστατοποιημένη ως προς το μήκος κύματος  $\lambda$ , θα έχουμε μια μετατόπιση  $x_t/\lambda = t/T$ , όπου  $T$  είναι η περίοδος του κύματος.



Σχήμα 4.5: Γραμμές ροής κάτω από απλό αρμονικό κυματισμό για  $t = 0$ .

### Ενέργεια απλών αρμονικών κυματισμών

Η ενέργεια ανά μονάδα πλάτους της ροής,  $E_T$ , είναι ίση με το ολοκλήρωμα της μηχανικής ενέργειας (κινητική συν δυναμική) από τον πυθμένα μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια:

$$E_T = \int_{-h}^{\eta} \rho \left( \frac{1}{2} | \mathbf{u} |^2 + gz \right) dz \quad (4.39)$$

Ορίζουμε τώρα την ενέργεια ανά μονάδα πλάτους λόγω του κυματισμού, και θα την συμβολίζουμε με  $E$ , την ποσότητα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από την  $E_T$  την δυναμική ενέργεια που έχει η ακίνητη θάλασσα, γιατί η τελευταία υπάρχει πάντοτε και δεν οφείλεται στην παρουσία του κύματος:

$$E = \int_{-h}^{\eta} \rho \left( \frac{1}{2} | \mathbf{u} |^2 + gz \right) dz - \int_{-h}^{\eta} \rho gz dz \quad (4.40)$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα ως προς  $z$  στην (4.40) και βρίσκουμε ότι αυτή απλοποιείται ως εξής:

$$E = \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{1}{2} | \mathbf{u} |^2 dz + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \quad (4.41)$$

Η ποσότητα  $E$  λέγεται πυκνότητα ενεργείας του κυματισμού (αν και για συντομία την αναφέρουμε συχνά απλώς σαν ενέργεια).

Αντίστοιχα, η ροή ενεργείας διά μέσου επιφανείας κάθετης προς την κατεύθυνση μετάδοσης του κύματος δίνεται, όπως είδαμε στο προηγούμενο εξάμηνο όταν κάναμε τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο, από την ακόλουθη σχέση:

$$S = \int_{-h}^{\eta} \left( p + \rho \frac{1}{2} | \mathbf{u} |^2 + \rho gz \right) u dz \quad (4.42)$$

Οι ορισμοί (4.41) και (4.42) ισχύουν για οποιαδήποτε μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Θα υπολογίσουμε τώρα τις εκφράσεις (4.41) και (4.42) για απλό αρμονικό κύμα. Μας ενδιαφέρουν η μέση τιμή της ενέργειας και η μέση τιμή της ροής ενεργείας, δηλαδή ο μέσος όρος σε μία περίοδο ταλάντωσης. Θα συμβολίζουμε την μέση τιμή μιας ποσότητας με μία παύλα πάνω από το σύμβολο της ποσότητας. Δηλαδή η μέση τιμή μίας ποσότητας  $A$ , συμβολίζεται με  $\overline{A}$ , και ορίζεται ως εξής:

$$\overline{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A dt \quad (4.43)$$

Γιά τον υπολογισμό των μέσων τιμών μεγεθών που συνδέονται με κυματικά φαινόμενα θα χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες γνωστές σχέσεις, τις οποίες απλά υπενθυμίζουμε:

$$\overline{\cos \theta} = \overline{\sin \theta} = 0, \quad \overline{\cos^2 \theta} = \overline{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \quad (4.44)$$

Η μεταβλητή  $\theta = kx - \omega t$  είναι η φάση του κύματος.



Ξεκινάμε με την δυναμική ενέργεια  $E_p$  (δεύτερος όρος στην εξίσωση (4.41)):

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g a^2 \cos^2 \theta \quad (4.45)$$

Η μέση δυναμική ενέργεια είναι επομένως ίση με

$$\bar{E}_p = \frac{1}{4} \rho g a^2 \quad (4.46)$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας  $E_k$  (πρώτος όρος στην εξίσωση (4.41)). Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άνω όριο ολοκλήρωσης από  $\eta$  σε μηδέν, γιατί η διαφορά που θα προκύψει μετά την ολοκλήρωση θα είναι ανάλογη με  $a^3$ . Επομένως έχουμε:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^0 \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) dz = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^0 (F^2 k^2 \cos^2 \theta + F'^2 \sin^2 \theta) dz \quad (4.47)$$

Στην ανωτέρω εξίσωση ένας τόνος υποδηλώνει παραγωγή ως προς  $z$ . Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες τον τελευταίο όρο ως προς  $z$  και έχουμε ότι:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho (FF' |_{-h}^0 \sin^2 \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \int_{-h}^0 k^2 F^2 dz) \quad (4.48)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.22) και (4.26) βρίσκουμε ότι η μέση κινητική ενέργεια κυματισμού δίνεται από την σχέση:

$$\bar{E}_k = \frac{1}{4} \rho (FF' |_{-h}^0 = \frac{1}{4} \rho a^2 \omega^2 \frac{\cos(kh)}{k \sinh(kh)} = \frac{1}{4} \rho g a^2 \quad (4.49)$$

Συγκρίνοντας την (4.49) με την (4.46) βλέπουμε ότι η μέση κινητική ενέργεια είναι ίση με την μέση δυναμική ενέργεια. Σημειώνουμε ότι αυτή η ισότητα ισχύει πάντοτε για μικρές ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων γύρω από τη θέση ισορροπίας τους.

Η συνολική μέση ενέργεια του κυματισμού είναι τελικά ίση με:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (4.50)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε την μέση ροή ενεργείας για απλό αρμονικό κυματισμό. Χρησιμοποιώντας την αρχή του Bernoulli για μη μόνιμη ροή, η εξίσωση (4.42) για αστρόβιλη ροή γράφεται ως εξής:

$$S = - \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \quad (4.51)$$

Με τις παραδοχές της γραμμικής θεωρίας, η εξίσωση ροής ενεργείας για αστρόβιλη ροή (4.51) γράφεται ως εξής:

$$S = - \int_{-h}^0 \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz \quad (4.52)$$

Αντικαθιστούμε τώρα την έκφραση για το δυναμικό και ολοκληρώνουμε όπως και για την ενέργεια από τον πυθμένα μέχρι την μέση στάθμη:

$$S = \rho \omega k \sin^2 \theta \int_{-h}^0 F^2(z) dz \quad (4.53)$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4.53) την έκφραση (4.21) για το  $F$  και καταλήγουμε μετά την ολοκλήρωση ότι:

$$S = \frac{1}{2} \rho a^2 \frac{\omega^3}{k \sinh^2(kh)} \sin^2 \theta \left( h + \frac{1}{k} \cosh(kh) \sinh(kh) \right) \quad (4.54)$$

Για την απόδειξη της (4.54) μεταχειριστήκαμε την ακόλουθη σχέση:

$$\int_{-h}^0 \cosh^2(kh) dz = \frac{1}{2} \left( h + \frac{1}{k} \cosh(kh) \sinh(kh) \right)$$

Επομένως η μέση ροή ενεργείας δίνεται από την σχέση:

$$\bar{S} = \frac{1}{4} \rho a^2 \frac{\omega^3}{k^2 \sinh^2(kh)} (kh + \cosh(kh) \sinh(kh)) \quad (4.55)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση διασποράς (4.26) ξαναγράφουμε την (4.55) ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{4} \rho a^2 \frac{\omega g}{k \sinh(kh) \cosh(kh)} (kh + \cosh(kh) \sinh(kh)) = \\ &= \bar{E} \frac{\omega}{2k \sinh(kh) \cosh(kh)} (kh + \cosh(kh) \sinh(kh)) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Αν και μπορεί να μη φαίνεται με την πρώτη ματιά, ο όρος που πολλαπλασιάζει τη μέση ενέργεια είναι ίσος με την παράγωγο της συχνότητας ως προς τον αριθμό κύματος  $d\omega/dk$ . Αυτό μπορούμε να το δούμε παραγωγίζοντας την εξίσωση διασποράς (4.26) ως προς  $k$ , οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
2\omega \frac{d\omega}{dk} &= g(\tanh(kh) + kh \frac{1}{\cosh^2(kh)}) = \\
&= \frac{g}{\cosh^2(kh)} (kh + \cosh(kh) \sinh(kh)) = \\
&= \frac{\omega^2}{k \cosh(kh) \sinh(kh)} (kh + \cosh(kh) \sinh(kh))
\end{aligned}$$

Απ' όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο:

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{2k \sinh(kh) \cosh(kh)} (kh + \cosh(kh) \sinh(kh)) = c_g \quad (4.57)$$

Η ποσότητα  $c_g = d\omega/dk$  έχει διαστάσεις ταχύτητας, και λέγεται “ομαδική ταχύτητα” (group velocity).

Κατά συνέπεια η εξίσωση (4.56) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\bar{S} = \bar{E} \frac{d\omega}{dk} \quad (4.58)$$

Από φυσικής πλευράς η εξίσωση (4.58) δείχνει ότι η ομαδική ταχύτητα μπορεί να οριστεί σαν η ταχύτητα ροής της ενεργείας του κυματισμού.

Στο όριο του ρηχού νερού ( $kh \rightarrow 0$ ), η εξίσωση (4.57) γίνεται:

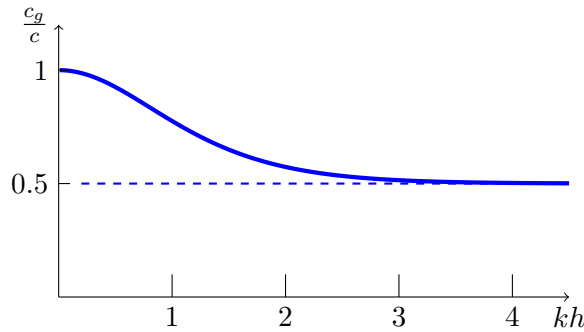
$$c_g = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \quad (4.59)$$

Στο όριο του βαθιού νερού ( $kh \rightarrow \infty$ ), η εξίσωση (4.57) γίνεται:

$$c_g = \frac{\omega}{2k} \quad (4.60)$$

Δηλαδή στο ρηχό νερό η ομαδική ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού, ενώ στο βαθύ νερό είναι ίση με το μισό της ταχύτητας μετάδοσης. Η μεταβολή του λόγου της ομαδικής ταχύτητας διά της ταχύτητας μετάδοσης συναρτήσει του αριθμού κύματος φαίνεται στο σχήμα 4.6. Για  $kh > 3$  ο λόγος  $c_g/c$  πλησιάζει την τιμή 0.5 που αντιστοιχεί σε νερό με άπειρο βάθος.

Σημειώνουμε ότι όπως φαίνεται από το σχήμα, και μπορεί να επαληθευθεί αναλυτικά από την (4.57), η ομαδική ταχύτητα είναι μικρότερη ή ίση από την ταχύτητα μετάδοσης (το ίσον ισχύει στο όριο του ρηχού νερού) και μεγαλύτερη η ίση από το μισό της ταχύτητας μετάδοσης (το ίσον ισχύει στο όριο του βαθιού νερού)



Σχήμα 4.6: Μεταβολή του λόγου  $c_g/c$  συναρτήσει της μεταβλητής  $kh$

### Στάσιμοι κυματισμοί

Στάσιμοι κυματισμοί προκύπτουν από την υπέρθεση δύο κυματισμών με τον ίδιο αριθμό κύματος και το ίδιο πλάτος ταλάντωσης αλλά με αντίθετη φορά μετάδοσης. Αυτό μπορεί να συμβεί, για παράδειγμα, από την ανάκλαση κύματος σε κατακόρυφο λείο τοίχο.

Ας θεωρήσουμε επομένως την υπέρθεση δύο κυματισμών με αριθμό κύματος  $k$ , συχνότητα  $\omega$  και πλάτος ταλάντωσης  $a$ , αλλά με αντίθετη φορά μετάδοσης. Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) + a \cos(kx + \omega t) = 2a \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (4.61)$$

Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας έχει τη μορφή μιάς ταλάντωσης επάνω-κάτω, χωρίς οριζόντια μετάδοση. Το δυναμικό της ροής προκύπτει από την υπέρθεση των δυναμικών των δύο κυματισμών:

$$\begin{aligned} \phi &= a \frac{\omega \cosh(k(z+h))}{k \sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) - a \frac{\omega \cosh(k(z+h))}{k \sinh(kh)} \sin(kx + \omega t) = \\ &= -2a \frac{\omega \cosh(k(z+h))}{k \sinh(kh)} \cos(kx) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Σημειώνουμε ότι το αρνητικό πρόσημο στην πρώτη γραμμή της (4.62) προκύπτει από το γεγονός ότι ο δεύτερος κυματισμός έχει αρνητική συχνότητα επειδή μεταδίδεται παράλληλα με την αρνητική κατεύθυνση του άξονα  $x$ .

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.62) ως προς  $x$  και  $z$  βρίσκουμε ότι οι ταχύτητες του ρευστού λόγω του στάσιμου κυματισμού δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$u = 2a\omega \frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \sin(kx) \sin(\omega t) \quad (4.63)$$

$$w = 2a\omega \frac{\sinh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \cos(kx) \sin(\omega t) \quad (4.64)$$

Παρατηρούμε ότι για τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $\sin(kx) = 0$  (δηλαδή για  $kx = n\pi$ , όπου  $n$  ακέραιος), η συνιστώσα  $u$  μηδενίζεται σε όλο το βάθος της ροής για οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Άρα το δυναμικό (4.62) παριστάνει την ανάκλαση κυματισμού σε κατακόρυφο τοίχο που βρίσκεται σε μιά από αυτές τις τιμές.

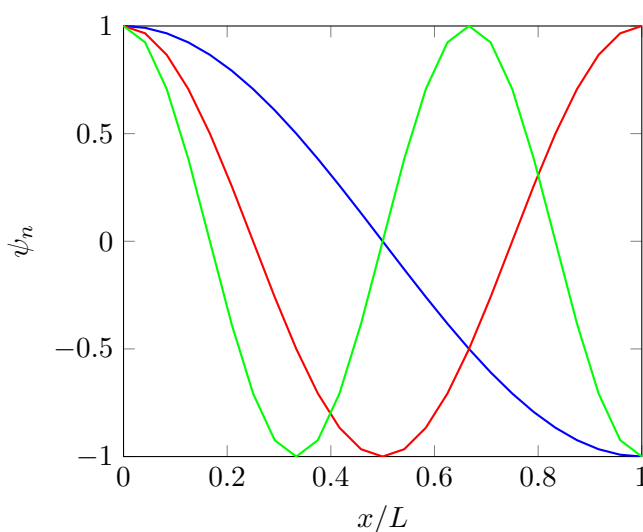
Αντίστοιχα, αν θεωρήσουμε δύο κατακόρυφους τοίχους σε απόσταση  $L$  μεταξύ τους, όπου μπορούμε χωρίς απώλεια γενικότητας να θεωρήσουμε ότι ο ένας τοίχος καταλαμβάνει τη θέση  $x = 0$ , το δυναμικό (4.62) περιγράφει τη ροή που αντιστοιχεί σε στάσιμο κυματισμό αρκεί  $\sin(kL) = 0$ . Αυτό σημαίνει ότι οι ακόλουθες τιμές του αριθμού κύματος  $k$  είναι δυνατές:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.65)$$

Οι εξίσωση (4.65) ορίζει τις ιδιομορφές του συστήματος  $\psi_n(x)$ , οι οποίες έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\psi_n(x) = \cos(n\pi x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.66)$$

Οι ιδιοσυχνότητες, δηλαδή οι συχνότητες των ιδιομορφών,  $\omega_n$ , μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από την εξίσωση διασποράς. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιομορφές και τις ιδιοσυχνότητες μιας δεξαμενής με βάθος  $h$  και μήκος  $L$ .



Σχήμα 4.7: Πρώτες τρεις ιδιομορφές για δεξαμενή μήκους  $L$ :  $n = 1$  (μπλε γραμμή),  $n = 2$  (κόκκινη γραμμή),  $n = 3$  (πράσινη γραμμή)

Η ταλάντωση της επιφάνειας του νερού με την ιδιομορφή τάξης  $n$  δίνεται από τη σχέση:

$$\eta_n(x, t) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos(\omega_n t) \quad (4.67)$$

Όπου  $A_n$  σταθερά. Γενικότερες ταλαντώσεις της επιφάνειας του νερού μπορούν να περιγραφούν με υπέρθεση πολλών ιδιομορφών.

### 4.2.3 Κύματα πάνω από ομοιόμορφη ροή

Συχνά σε πρακτικές εφαρμογές χρειάζεται να θεωρήσουμε μετάδοση κυματισμών πάνω από ρευστό που κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα. Αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε επειδή υπάρχει κάποιο θαλάσσιο ρεύμα με σταθερή ταχύτητα (μάλλον σπάνια περίπτωση), ή, συνθηθέστερα, γιατί εργαζόμαστε σε σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα, π.χ. το σύστημα αναφοράς πάνω στο πλοίο, οπότε στο δικό μας σύστημα αναφοράς η θάλασσα φαίνεται να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Το πρόβλημα της μετάδοσης κυματισμών πάνω από ομοιόμορφη ροή επιλύεται με αλλαγή του συστήματος αναφοράς, που το ανάγει στο πρόβλημα μετάδοσης κυματισμών πάνω από ακίνητο νερό.

Συμβολίζουμε με  $x', y', z'$  το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η θάλασσα φαίνεται να κινείται με ταχύτητα  $U$  παράλληλη με τον άξονα  $x'$ . Θα ονομάζουμε το σύστημα αυτό «κινούμενο». Εστω  $x, y, z$  το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η θάλασσα έχει μηδενική μέση ταχύτητα, το οποίο θα ονομάζουμε «ακίνητο». Υποθέτοντας ότι το πλοίο κινείται με θετική ταχύτητα, τα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x' = x + Ut, \quad y' = y, \quad z' = z \quad t' = t \quad (4.68)$$

Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς ισχύουν προφανώς οι εξισώσεις (4.15), (4.23) και (4.26) για απλούς αρμονικούς κυματισμούς.

Επανερχόμαστε στο κινούμενο σύστημα αναφοράς αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.68) οπότε η εξίσωση (4.15) γράφεται ως εξής:

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) = a \cos(kx' - (\omega + kU)t') = a \cos(kx' - \omega' t') \quad (4.69)$$

Όπου  $\omega'$  είναι συχνότητα του κυματισμού στο κινούμενο σύστημα αναφοράς που δίνεται από την σχέση:

$$\omega' = \omega + kU \quad (4.70)$$

Τα  $\omega$  και  $k$  συνδέονται με την εξίσωση διασποράς στο ακίνητο σύστημα αναφοράς (4.26). Κατά συνέπεια η εξίσωση διασποράς στο κινούμενο σύστημα αναφοράς έχει την εξής μορφή:

$$(\omega' - kU)^2 = gk \tanh(kh) \quad (4.71)$$

Σημειώνουμε ότι αν η θάλασσα στο κινούμενο σύστημα αναφοράς φαίνεται να κινείται με ταχύτητα  $U$ , αυτό συμβαίνει επειδή ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα  $-U$ . Για παράδειγμα, αν η θάλασσα κινείται προς την θετική κατεύθυνση, ο παρατηρητής κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, και η ταχύτητα του θα είναι αντίρροπη με την ταχύτητα

κυμάτων που έχουν θετικό  $\omega$ , και ομόρροπη με την ταχύτητα κυμάτων που έχουν αρνητικό  $\omega$ . Οπότε, ως προς τον συγκεκριμένο παρατηρητή, τα κύματα με θετικό  $\omega$  έχουν αυξημένη ταχύτητα μετάδοσης κατά  $U$ , ενώ τα κύματα με αρνητικό  $\omega$  έχουν μειωμένη ταχύτητα μετάδοσης κατά  $U$ .

Επομένως η εξίσωση (4.70) μπορεί να ερμηνευτεί και ως εξής: Παρατηρητής κινούμενος με ταχύτητα  $U$  βλέπει συχνότητα κύματος μεγαλύτερη από τον ακίνητο παρατηρητή (μεγαλύτερη κατά το ποσό  $kU$ ), εάν η ταχύτητα του είναι αντίρροπη με την ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού. Ο παρατηρητής βλέπει μικρότερη συχνότητα (πάλι κατά  $kU$ ), αν η ταχύτητα του είναι ομόρροπη με την ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού. Αν η ταχύτητα του είναι ίση την ταχύτητα μετάδοσης του κυματισμού ο παρατηρητής βλέπει μόνιμη ροή. Η μεταβολή αυτή της συχνότητας συναρτήσει της ταχύτητας του παρατηρητή εμφανίζεται σε όλα τα κυματικά φαινόμενα και λέγεται **φαινόμενο Doppler ή μετατόπιση Doppler** (Doppler shift).

Το δυναμικό της ροής στο κινούμενο σύστημα,  $\phi'(x', z', t')$ , προκύπτει από τη σχέση:

$$\phi' = U x' + \frac{a(\omega' - kU)}{k \sinh(kh)} \cosh(k(z' + h)) \sin(kx' - \omega' t') \quad (4.72)$$

Ο πρώτος όρος στην (4.72) είναι το δυναμικό της ομοιόμορφης ροής με ταχύτητα  $U$ , και ο δεύτερος όρος το δυναμικό λόγω της παρουσίας του κύματος στην επιφάνεια.

Γιά γενικότερες κινήσεις της θάλασσας (δηλαδή όχι κατ' ανάγκην απλή αρμονική) μπορούμε να μετασχηματίσουμε όλο το πρόβλημα συννοριακών τιμών στο κινούμενο σύστημα αναφοράς. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης έχουμε ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + U \frac{\partial}{\partial x'} \quad (4.74)$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν τον μετασχηματισμό (4.73) στην εξίσωση του Laplace και στις οριακές συνθήκες του προβλήματος βρίσκουμε ότι η εξίσωση Laplace και η οριακή συνθήκη στον πυθμένα παραμένουν αμετάβλητες. Οι δύο οριακές συνθήκες (4.12) και (4.14) στην ελεύθερη επιφάνεια, όμως, που περιέχουν παραγώγιση ως προς χρόνο, παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t'} + U \frac{\partial \eta}{\partial x'} \quad (4.75)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} + U \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 \phi' + g \frac{\partial \phi'}{\partial z'} = 0 \quad z = 0 \quad (4.76)$$

Σημειώνουμε ότι τα ίδια αποτελέσματα μπορούν να παραχθούν με κατ' ευθείαν γραμμικοποίηση του προβλήματος γύρω από την ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα  $U$ .

### 4.3 Γενική κίνηση της θάλασσας

#### 4.3.1 Υπέρθωση απλών αρμονικών κυματισμών σε νερό σταθερού βάθους

Γενικά η κίνηση της θάλασσας δεν είναι μιά απλή αρμονική ταλάντωση χρονικά, ούτε διδιάστατη όπως στην εξιδανικευμένη περίπτωση του απλού αρμονικού κυματισμού. Περίπλοκες κινήσεις όμως μπορούν να περιγραφούν με υπέρθεση πολλών αρμονικών κυματισμών, όπως θα εξηγήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Επειδή τα κύματα που θα υπερθέσουμε θα μεταδίδονται σε πολλές διαφορετικές κατευθύνσεις και θα έχουν διαφορετικές φάσεις, ξεκινάμε με μιά γενίκευση του απλού αρμονικού κυματισμού που είδαμε στο κεφάλαιο 2.2, επιτρέποντας στον κυματισμό να μεταδίδεται υπό γωνία  $\theta$  ως προς τον άξονα  $x$ , και να έχει μιά διαφορά φάσης  $\beta$  από το συνημίτονο. Για να περιγράψουμε μαθηματικά ένα τέτοιο κυματισμό θεωρούμε σύστημα αξόνων  $\xi, \nu, \zeta$  όπου ο άξονας  $\zeta$  συμπίπτει με τον άξονα  $z$ , ο άξονας  $\xi$  έχει γωνία κλίσης  $\theta$  ως προς τον άξονα  $x$ , και ο άξονας  $\nu$  είναι κάθετος στους  $\xi, \zeta$ .

Ως προς το νέο σύστημα ισχύει η έκφραση (4.15) με την προσθήκη της διαφοράς φάσης ως προς το συνημίτονο:

$$\eta = a \cos(k\xi - \omega t + \beta) \quad (4.77)$$

Εξ ορισμού η μεταβλητή  $\xi$  συνδέεται με τις συντεταγμένες  $x, y$  με την ακόλουθη σχέση:

$$\xi = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (4.78)$$

Οπότε στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας γράφεται ως εξής:

$$\eta = a \cos(k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t + \beta) \quad (4.79)$$

Στην άθροιση πολλών αρμονικών κυματισμών με διαφορετική φάση διευκολύνει η χρήση μιγαδικών μεταβλητών. Γι αυτό τον λόγο ξαναγράφουμε την (4.79) στην ακόλουθη μορφή:

$$\eta = \operatorname{Re}[A \exp(i k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t)] \quad (4.80)$$

Όπου  $i = \sqrt{-1}$ ,  $A = a \exp(i\beta)$ , και  $\operatorname{Re}[f]$  συμβολίζει το πραγματικό μέρος της μιγαδικής μεταβλητής  $f$ .

Το δυναμικό της ροής που αντιστοιχεί στην (4.80) είναι:

$$\phi = -\operatorname{Re}\left[i A \frac{\omega \cos(k(z+h))}{k \sinh(kh)} \exp(i k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t)\right] \quad (4.81)$$



Το δυναμικό (4.81) περιέχει και τις τρεις συντεταγμένες  $x, y, z$ , επομένως και οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας  $u, v, w$  είναι μη μηδενικές. Η ροή είναι βέβαια ψευδο-τρισεδιάστατη, επειδή μια απλή περιστροφή των αξόνων την κάνει δισεδιάστατη. Υπέρθυση όμως δύο, ή και περισσότερων κυματισμών που μεταδίδονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις δημιουργεί τρισεδιάστατη ροή.

Θεωρούμε τώρα  $N$  κύματα που μεταδίδονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Το υπ' αριθμόν  $j$  κύμα μεταδίδεται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία  $\theta_j$  με τον άξονα  $x$ , έχει κυματαριθμό  $k_j$ , συχνότητα  $\omega_j$ , τα οποία φυσικά συνδέονται με την εξίσωση διασποράς, πλάτος ταλάντωσης  $a_j$  και διαφορά φάσης  $\beta_j$ . Οπότε θέτοντας  $A_j = a_j \exp(i\beta_j)$ , η κίνηση της επιφάνειας της θάλασσας εξ αιτίας της ταυτόχρονης παρουσίας αυτών των  $N$  κυματισμών δίνεται από την σχέση:

$$\eta = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^N A_j \exp(i k_j (x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) - \omega_j t) \right] \quad (4.82)$$

Μιά παρόμοια άθροιση των δυναμικών των κυμάτων δίνει το συνολικό δυναμικό της ροής.

$$\phi = - \operatorname{Re} \left[ i \sum_{j=1}^N A_j \frac{\omega \cos(k_j(z+h))}{k_j \sinh(kh)} \exp(i k_j (x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) - \omega_j t) \right] \quad (4.83)$$

Σημειώνουμε ότι η κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας που περιγράφεται από την (4.82) δεν είναι περιοδική, εκτός από την πολύ ειδική περίπτωση που οι  $N$  συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια της ίδιας θεμελιώδους συχνότητας. Επίσης η ροή στην θάλασσα δεν είναι δισεδιάστατη εκτός αν όλες οι γωνίες  $\theta_j$  είναι ίσες μεταξύ τους, ή αν διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του  $\pi$ .

Η πιό γενική κίνηση της θάλασσας μπορεί να περιγραφεί θεωρώντας άπειρα κύματα. Ο αριθμός κύματος είναι συνάρτηση της συχνότητας μέσω της εξίσωσης διασποράς, ενώ το πλάτος ταλάντωσης, και η διαφορά φάσης είναι συναρτήσεις της συχνότητας και της κατεύθυνσης μετάδοσης του κυματισμού. Το άθροισμα στην εξίσωση (4.82) αντικαθίσταται από διπλή ολοκλήρωση ως προς  $\omega$  και  $\theta$ :

$$\eta = \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi A(\omega, \theta) \exp(i k(\omega)(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t) d\theta \right] \quad (4.84)$$

Η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί εναλλακτικά να γραφτεί σαν διπλό ολοκλήρωμα ως προς  $k$  και  $\theta$ , έχοντας την συχνότητα σαν συνάρτηση του  $k$  μέσω της εξίσωσης διασποράς, και το πλάτος ταλάντωσης (που θα το συμβολίσουμε με  $B(k, \theta)$  προς αποφυγή σύγχυσης με την (4.84)) συνάρτηση των  $k$  και  $\theta$ . Τότε αντί για την εξίσωση (4.84) έχουμε ότι:

$$\eta = \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty dk \int_0^\pi B(k, \theta) \exp(i k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega(k)t) d\theta \right] \quad (4.85)$$

Οι δύο εκφράσεις (4.84) και (4.85) είναι τελείως ισοδύναμες. Βασική προϋπόθεση για να υπάρχουν τα ολοκλήρωμα είναι ότι η συνάρτηση  $A$  στην (4.84) (ή αντίστοιχα η

συνάρτηση  $B$  στην (4.85)) πρέπει να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη ως προς  $\omega$  και  $\theta$  (η αντίστοιχα ως προς  $k$  και  $\theta$ ).

Η κίνηση της θάλασσας λόγω ανεμογενών κυματισμών είναι τόσο περίπλοκη που η συνάρτηση στην εξίσωση (4.84) (ή στην (4.85)) είναι γνωστή μόνο στοχαστικά. Τότε και η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να υπολογιστεί μόνο στοχαστικά, και μιλάμε πλέον για τυχαίους κυματισμούς.

### 4.3.2 Ομάδες κυμάτων

Ένα απλό αρμονικό κύμα που να εκτείνεται επ' άπειρον δεν συναντάται ποτέ στην πραγματικότητα. Αυτό που συναντάται όμως συχνά και που μοιάζει με αρμονικό κύμα είναι μιά ομάδα κυμάτων των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν κατά λίγο μόνο (το ίδιο φυσικά ισχύει και για τους αριθμούς κύματος).

Μαθηματικά μιά ομάδα κυμάτων μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση (4.84), με τη συνάρτηση  $A$  στο ολοκλήρωμα θα έχει μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα  $(\omega_0 - \epsilon, \omega_0 + \epsilon)$ , όπου  $\omega_0$  είναι η βασική συχνότητα και  $\epsilon \ll \omega_0$ . Ας θεωρήσουμε μιά τέτοια ομάδα, και για απλότητα θα υποθέσουμε ότι τα κύματα μεταδίδονται όλα στην ίδια διεύθυνση, οπότε έχουμε μόνο ολοκλήρωση ως προς  $\omega$ :

$$\eta = \text{Re} \left[ \int_{\omega_0 - \epsilon}^{\omega_0 + \epsilon} A(\omega) \exp(i(k(\omega)x - \omega t)) d\omega \right] \quad (4.86)$$

Η (4.86) γράφεται τώρα ως εξής:

$$\eta = \text{Re} \left[ \exp(i(k(\omega_0)x - \omega_0 t)) F(x, t) \right] \quad (4.87)$$

Όπου η συνάρτηση  $F(x, t)$  ορίζεται ως εξής:

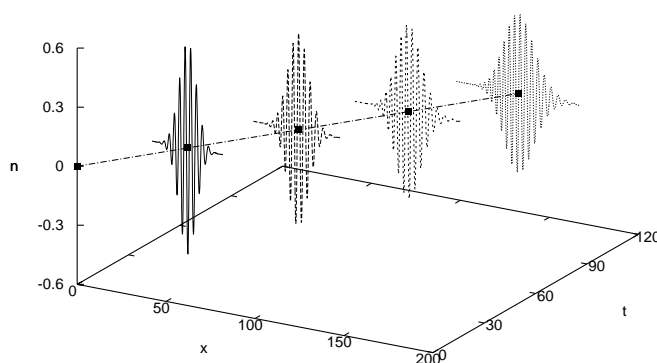
$$F(x, t) = \int_{\omega_0 - \epsilon}^{\omega_0 + \epsilon} A(\omega) \exp(i((k(\omega)x - k(\omega_0)x) - (\omega - \omega_0)t)) d\omega \quad (4.88)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει ένα βασικό κύμα με συχνότητα  $\omega_0$  και κυματαριθμό  $k(\omega_0)$ , το οποίο όμως πολλαπλασιάζεται με μιά συνάρτηση (την  $F(x, t)$ ), έχει δηλαδή όπως λέμε μιά «διαμόρφωση». Επειδή το εύρος διακύμανσης συχνοτήτων και κυματαριθμών είναι μικρό βλέπουμε ότι η συνάρτηση διαμόρφωσης στην (4.88) μεταβάλλεται αργά όταν:

$$\frac{x}{t} \approx \frac{\omega - \omega_0}{k(\omega) - k(\omega_0)} \approx c_g \quad (4.89)$$

Επομένως ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται με ταχύτητα ίση με την ομαδική ταχύτητα του κύματος, δηλαδή  $x = c_g t$ , βλέπει την συνάρτηση διαμόρφωσης σχεδόν σταθερή (αργά μεταβαλλόμενη χρονικά), βλέπει δηλαδή βασικά μια απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα  $\omega_0$ . Συμπεραίνουμε ότι η ομάδα κυματισμών μεταδίδεται με την ομαδική ταχύτητα, και όχι με την ταχύτητα φάσης του βασικού κύματος.

Αυτό απεικονίζεται στην εικόνα 4.8, όπου μιά δισδιάστατη ομάδα κυματισμών σε βαθύ νερό απεικονίζεται για διάφορες χρονικές στιγμές. Η εικόνα έχει προκύψει με αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος στην εξίσωση (4.86) με  $f(\omega) = \exp(-(\omega - \omega_0)^2/0.1)$ , όπου  $\omega_0 = 4.5$  είναι η συχνότητα του βασικού κύματος. Με την πάροδο του χρόνου η έκταση της ομάδας αυξάνει και το ύψος μειώνεται. Η έκταση της ομάδας αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο, ενώ για  $t \rightarrow \infty$  το ύψος μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Ένας παρατηρητής με ταχύτητα ίση με την ομαδική ταχύτητα του βασικού κύματος με αριθμό κύματος βλέπει σε κάθε στιγμή το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.



Σχήμα 4.8: Διαδοχικά στιγμιότυπα (για  $t = 60, 90, 120, 180$ ) μιάς ομάδας κυματισμών σε βαθύ νερό με βασικό κύμα που έχει συχνότητα  $\omega_0 = 4.5$ . Η ευθεία γραμμή που ξεκινά από την αρχή των αξόνων δείχνει την τροχιά παρατηρητή που κινείται με ταχύτητα ίση με την ομαδική ταχύτητα του βασικού κύματος. Ο παρατηρητής αυτός βλέπει σε κάθε στιγμή το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.

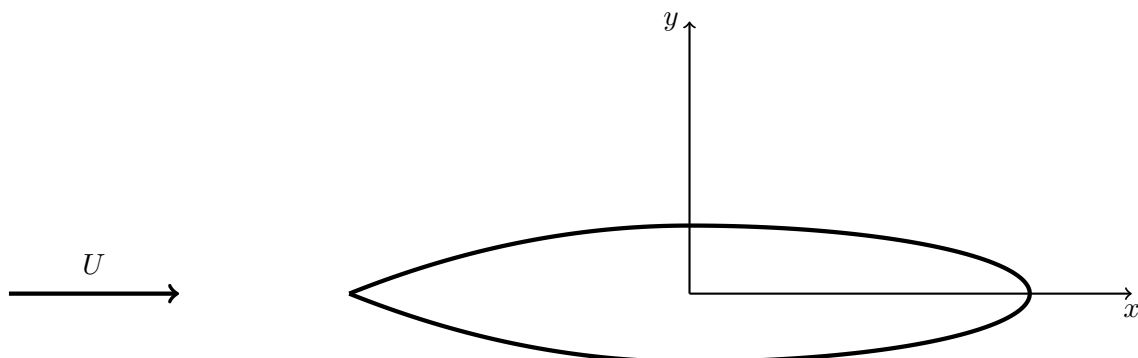
## 4.4 Κύματα πλοίου σε βαθύ νερό

### 4.4.1 Γενικά

Τα πλοία που κινούνται με σταθερή ταχύτητα δημιουργούν ένα πολύ χαρακτηριστικό σύστημα κυμάτων, που αποτελείται από δύο οικογένειες κυμάτων: Τα αποκλίνοντα κύματα (diverging waves) που μεταδίδονται υπό γωνία προς την πορεία του πλοίου, και τα εγκάρσια (transverse waves) που μεταδίδονται παράλληλα με την πορεία του πλοίου. Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που δημιουργεί το πλοίο με βάση την γραμμική θεωρία κυματισμών. Θα υποθέσουμε ότι το βάθος της θάλασσας είναι αρκετό ώστε να ισχύει η εξίσωση διασποράς για βαθύ νερό.

### 4.4.2 Γραμμική θεωρία κυμάτων πλοίου

Θεωρούμε πλοίο που κινείται με σταθερή ταχύτητα  $U$ . Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων με άξονες  $x, y$  οριζόντιους και τον άξονα  $z$  κατακόρυφο με φορά αντίθετη προς τη φορά της βαρύτητας. Θεωρούμε ότι το πλοίο κινείται κατά μήκος του άξονα  $x$  προς την αρνητική κατεύθυνση. Στο σύστημα αναφοράς του πλοίου, που παριστάνουμε με  $x', y', z'$ , η θάλασσα κινείται παράλληλα με τον θετικό άξονα  $x$  με σταθερή ταχύτητα  $U$  (Σχήμα 4.9)



Σχήμα 4.9: Σχήμα ορισμού του συστήματος αναφοράς του πλοίου

Μακριά από το πλοίο, όπου το πλοίο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα “σημείο”, η παραμόρφωση της επιφάνειας της θάλασσας μπορεί να παρασταθεί σαν ένα άθροισμα απλών αρμονικών κυμάτων διαφόρων συχνοτήτων, κατευθύνσεων και πλατών ταλάντωσης. Στο σύστημα αναφοράς  $(x', y', z')$  που κινείται με το πλοίο τα κύματα έχουν την εξής μορφή:

$$\eta = \text{Re}[A \exp(i k(\omega)(x' \cos \theta + y' \sin \theta) - (\omega - kU \cos \theta)t)] \quad (4.90)$$

Όπου  $(\omega, k)$  συνδέονται με την εξίσωση διασποράς ακίνητου παρατηρητή.

Για ένα πλοίο που κινείται για πολλή ώρα με σταθερή ταχύτητα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα κύματα εμφανίζονται αμετάβλητα χρονικά, επειδή τα πιο γρήγορα ή τα πιο αργά κύματα θα έχουν προσπεράσει το πλοίο, ή θα έχουν μείνει πολύ πίσω του, αντίστοιχα. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται με το ότι η μετατόπιση της επιφάνειας του νερού

(εξίσωση (4.90)) δεν θα εξαρτάται από τον χρόνο. Αυτό συμβαίνει μόνο για τα κύματα που ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\omega = kU \cos \theta \quad (4.91)$$

Η εξίσωση διασποράς για κύματα σε βαθύ νερό δίνει  $\omega^2 = kg$ . Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4.91) και βρίσκουμε ότι:

$$\omega = \frac{g}{U \cos \theta} \quad (4.92)$$

$$k = \frac{g}{U^2 \cos^2 \theta} \quad (4.93)$$

Τα κύματα με μέγιστο μήκος κύματος επομένως είναι τα κύματα που ακολουθούν την πορεία του πλοίου:  $\theta = 0$ . Αυτά λέγονται εγκάρσια κύματα επειδή οι κορυφές τους είναι κάθετες προς την πορεία του πλοίου, και έχουν μήκος  $2\pi U^2/g$ . Καθώς η γωνία μετάδοσης μεταβάλλεται από 0 σε  $\pi/2$  το μήκος κύματος μειώνεται και τείνει στο μηδέν.

Επομένως το σύστημα κυμάτων που δημιουργεί το πλοίο αποτελείται από άθροισμα κυμάτων που ικανοποιούν τις (4.92), (4.93). Αθροίζουμε κυματισμούς προς όλες τις κατευθύνσεις πίσω από το πλοίο, η γωνία μετάδοσης των κυματισμών μεταβάλλεται από  $-\pi/2$  σε  $3\pi/2$ , οπότε στο σύστημα αναφοράς που κινείται με το πλοίο έχουμε ότι:

$$\eta = \text{Re} \left[ \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} A(\theta) \exp(i k(\theta)(x' \cos \theta + y' \sin \theta)) d\theta \right] \quad (4.94)$$

Ως προς ακίνητο παρατηρητή με σύστημα αναφοράς  $(x, y, z)$  η εξίσωση (4.94) παίρνει την μορφή:

$$\eta(x, y, t) = \text{Re} \left[ \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} A(\theta) \exp(i k(\theta)\xi - \omega(\theta)t) d\theta \right] \quad (4.95)$$

Όπου  $\xi = (x \cos \theta + y \sin \theta)$ , ο αριθμός κύματος  $k$  δίνεται από την (4.93) και η συχνότητα  $\omega$  από την εξίσωση διασποράς. Όπως είπαμε όταν συζητούσαμε για τις ομάδες κυματισμών οι κορυφές των κυματισμών βρίσκονται στην θέση  $\xi/t = d\omega/dk$ , ή ισοδύναμα  $d(k\xi - \omega t)/dk = 0$ . Στο σύστημα αναφοράς του πλοίου αυτή η σχέση μετασχηματίζεται ως εξής:

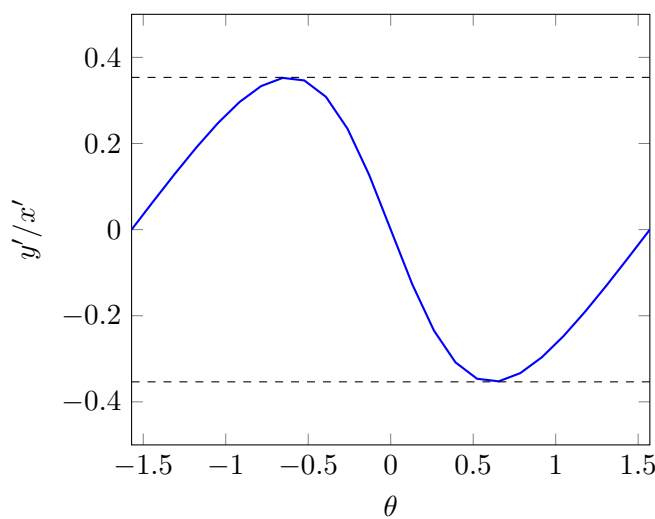
$$\frac{d}{dk} (k(x' \cos \theta + y' \sin \theta)) = 0 \quad (4.96)$$

Επειδή ο αριθμός κύματος  $k$  είναι συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  λόγω της (4.93), η εξίσωση (4.96) ισοδυναμεί με:

$$\frac{d}{d\theta}(k(x' \cos \theta + y' \sin \theta)) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{g}{U^2 \cos^2 \theta}(x' \cos \theta + y' \sin \theta)\right) = 0 \quad (4.97)$$

Η ισοδυναμία της (4.97) με την (4.96) ισχύει για όλες τις τιμές της γωνίας  $\theta$ , εκτός από τα σημεία όπου ισχύει ότι  $d k / d \theta = 0$ . Τέτοια σημεία είναι όμως μεμονωμένα, και μπορούν να αγνοηθούν. Από την (4.97), αφού κάνουμε τις παραγωγίσεις ως προς  $\theta$ , βρίσκουμε ότι:

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin^2 \theta} \quad (4.98)$$



Σχήμα 4.10: Γραφική παράσταση της εξίσωσης (4.98) στο διάστημα  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ . Οι δύο διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στις τιμές  $y'/x' = \pm 1/2^{3/2}$ .

Στο σχήμα 4.10 έχει γίνει γραφική παράσταση της (4.98). Όπως βλέπουμε, για  $\theta$  μεταξύ  $-\pi/2$  και  $\pi/2$  το δεξιό μέλος της (4.98) μεταβάλλεται μεταξύ  $-(1/2^{3/2})$  και  $(1/2^{3/2})$ . Αυτό συνεπάγεται ότι οι κορυφές των κυμάτων βρίσκονται μέσα στον τομέα του επιπέδου που ορίζεται από τις δύο ευθείες  $y/x = \pm(1/2^{3/2})$ . Οι δύο αυτές ευθείες περνούν από την αρχή των αξόνων και έχουν κλίση  $-(1/2^{3/2})$ , σχηματίζουν δηλαδή γωνίες  $\tan \alpha = \pm(1/2^{3/2})$  με τον άξονα των  $x$ . (Αρα  $\alpha = \pm 19^\circ 28'$ ). Το σύστημα κυμάτων που ακολουθεί το πλοίο, αποτελούμενο από εγκάρσια και αποκλίνοντα κύματα, λέγεται **σύστημα κυμάτων Kelvin**. Το σύστημα κυμάτων Kelvin βρίσκεται μέσα σε μιά “σφήνα” γωνίας  $2\alpha = 38^\circ 56'$ . Η γωνία  $2\alpha$  λέγεται γωνία του Kelvin.

Χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες η εξίσωση (4.98) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\sin 2\theta}{3 - \cos 2\theta} \quad (4.99)$$

Κατά συνέπεια έχουμε την ακόλουθη σχέση ανάμεσα στις γωνίες  $\theta$  και  $\beta$ :

$$\sin(2\theta - \beta) = 3 \sin \beta \quad (4.100)$$

Όπου η γωνία  $\beta$  ορίζεται από την σχέση  $\tan \beta = y'/x'$ . Η εξίσωση (4.100) έχει λύση ως προς  $\theta$  μόνο για  $|\sin \beta| \leq 1/3$ , δηλαδή για  $x', y'$  που βρίσκονται μέσα στην γωνία Kelvin. Όταν αυτό ικανοποιείται προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1}{2}(\arcsin(3 \sin \beta) + \beta) \quad (4.101)$$

Όταν το σημείο  $(x', y')$  βρίσκεται πάνω στα όρια της γωνίας Kelvin, όταν δηλαδή  $\sin \beta = 1/3$ , η εξίσωση (4.101) μας δίνει την ακόλουθη τιμή για τη γωνία μετάδοσης των κυματισμών  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \quad (4.102)$$

Σημειώνουμε ότι, όταν  $\sin \beta = 1/3$ ,  $\beta = \alpha$ . Επομένως, εκφράζοντας τις γωνίες σε μοίρες, η γωνία μετάδοσης των αποκλιόντων κυματισμών είναι  $\theta = 0.955 \text{ rad}$  ( $54^\circ 43'$ ). Όταν  $\sin \beta = -1/3$ , λόγω συμμετρίας έχουμε ότι  $\theta = -0.955 \text{ rad}$ . Τέλος, για τα σημεία πάνω στον άξονα των  $x'$  ( $\beta = 0$ ) έχουμε ότι  $\theta = 0$  (εγκάρσια κύματα).

Η εξίσωση των κορυφών των κυμάτων στο σύστημα αναφοράς του πλοίου προκύπτει από το ότι η φάση πάνω στις κορυφές είναι σταθερά, οπότε από την εξίσωση (4.97) έχουμε:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta}(x' \cos \theta + y' \sin \theta) = C \quad (4.103)$$

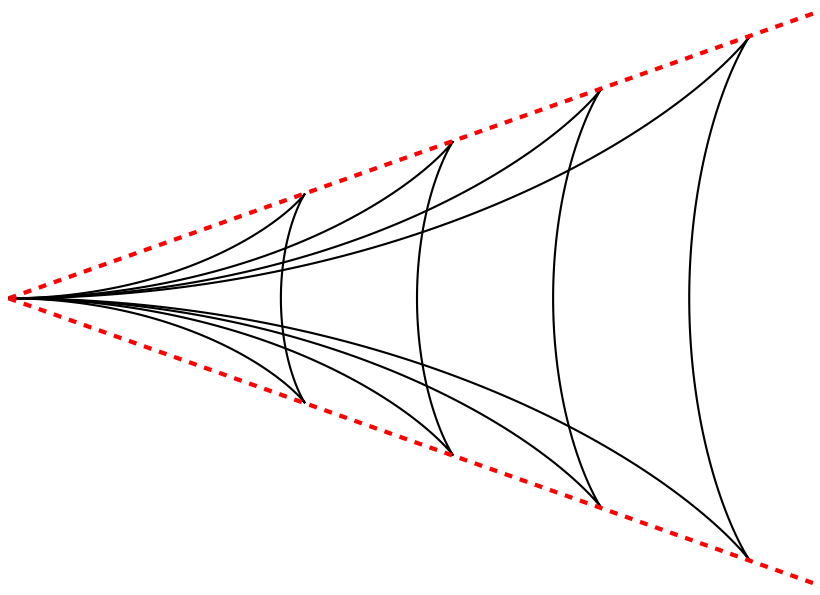
Όπου  $C$  σταθερά. Συνδυάζοντας την εξίσωση (4.103) με την (4.99) παίρνουμε την ακόλουθη παραμετρική έκφραση για τις κορυφές των κυμάτων:

$$x' = C(3 - \cos(2\theta)) \cos \theta \quad (4.104)$$

$$y' = -C \sin(2\theta) \cos \theta \quad (4.105)$$

Για διάφορες τιμές της  $C$ , μεταβάλλοντας την γωνία  $\theta$  από  $-\pi/2$  έως  $\pi/2$ , παίρνουμε από τις εξισώσεις (4.104) και (4.105) μία απεικόνιση των κορυφών των σημαντικών κυμάτων. Όπως φαίνεται αμέσως από τις εξισώσεις (4.104) και (4.105) οι καμπύλες των κορυφών των κυμάτων είναι γεωμετρικά όμοιες μεταξύ τους.

Γραφική παράσταση των (4.104) και (4.105) για διάφορες τιμές της σταθεράς  $C$  γίνεται στο Σχήμα 4.11. Τα κύματα βρίσκονται πράγματι μέσα στην νοητή "σφήνα" που σχηματίζουν οι δύο ευθείες με κλίση  $\alpha = \pm 19^\circ 28'$  ως προς τον άξονα των  $x$  (Οι κόκκινες διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 4.11).



Σχήμα 4.11: Κορυφές των εγκάρσιων και των διαμήκων κυμάτων πίσω από σημειακή διαταραχή που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (εξισώσεις (4.104) και (4.105)). Οι κόκκινες διακεκομμένες γραμμές σχηματίζουν την γωνία Kelvin

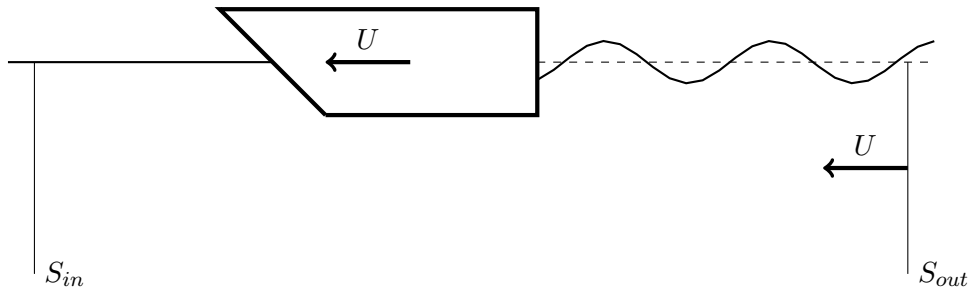
Φωτογραφίες των κυμάτων πλοίων σε βαθύ νερό (σε κάποια απόσταση πίσω από το πλοίο) επιβεβαιώνουν αρκετά ικανοποιητικά τις προβλέψεις της γραμμικής θεωρίας. Βέβαια οι ίδιες φωτογραφίες δείχνουν κοντά στο πλοίο σημαντική παρουσία αφρού, που είναι μείγμα αέρα-νερού. Η δημιουργία αφρού δεν μπορεί να προβλέφθει από την γραμμική θεωρία κυματισμών, αλλά ούτε και από οποιαδήποτε άλλη θεωρία που υποθέτει ότι η ελεύθερη επιφάνεια είναι υλική επιφάνεια.

#### 4.4.3 Αντίσταση πλοίου λόγω κυματισμών

Οι κυματισμοί που δημιουργεί το πλοίο δημιουργούν μία επί πλέον συνιστώσα της αντίστασης του πλοίου, επί πλέον δηλαδή από την αντίσταση τριβής και μορφής, που λέγεται αντίσταση λόγω κυματισμών. Για χαμηλές τιμές του αριθμού Froude του πλοίου η αντίσταση λόγω κυματισμών είναι η λογότερο σημαντική συνιστώσα. Καθώς ο αριθμός Froude αυξάνεται η σημασία της αντίστασης λόγω κυματισμών αυξάνεται. Για ταχύπλοα σκάφη η αντίσταση λόγω κυματισμών είναι η πιό σημαντική συνιστώσα της αντίστασης του πλοίου.

Η αντίσταση λόγω κυματισμών μπορεί να υπολογισθεί με ολοκλήρωση των δυνάμεων λόγω πιέσεων πάνω στην βυθισμένη επιφάνεια του πλοίου. Η κατανομή πιέσεων πάνω στο πλοίο βρίσκεται από την εξίσωση Bernoulli, αφού πρώτα επιλυθεί το πρόβλημα προσδιορισμού του δυναμικού της ροής γύρω από το πλοίο. Εναλλακτικά η αντίσταση λόγω κυματισμών μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει του ύψους και της κατεύθυνσης μετάδοσης των κυματισμών μακριά από το πλοίο. Αυτή η έκφραση προκύπτει με εφαρμόζοντας τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο σε κατάλληλο όγκο ελέγχου, όπως θα εξηγήσουμε τώρα.





Σχήμα 4.12: Σχήμα ορισμού του όγκου ελέγχου για την εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου. Η επιφάνεια πολύ μπροστά από το πλοίο είναι ακίνητη, ενώ η επιφάνεια πολύ πίσω από το πλοίο κινείται με την ταχύτητα του πλοίου

Θεωρούμε ένα όγκο ελέγχου που περικλείεται από δύο επίπεδα κάθετα προς τον άξονα των  $x =$ , ένα ακίνητο πολύ μπροστά από το πλοίο, και ένα πολύ πίσω από το πλοίο που να κινείται με ταχύτητα  $U$ . Στην  $y$  κατεύθυνση ο όγκος εκτείνεται από το πλην άπειρο έως το συν άπειρο, και στην  $z$  κατεύθυνση ο όγκος εκτείνεται από το πλην άπειρο έως το  $z = 0$ .

Εφαρμόζουμε τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο σε αυτό τον όγκο ελέγχου και έχουμε ότι:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - S_{in} + S_{out} = -F_w U \tag{4.106}$$

Όπου  $E$  είναι η ενέργεια του ρευστού μέσα στον όγκο,  $S_{in}$  η εισροή ενεργείας διά μέσου της επιφανείας μπροστά από το πλοίο,  $S_{out}$  η εκροή ενεργείας διά μέσου της επιφανείας πίσω από το πλοίο, και  $F_w$  είναι η αντίσταση λόγω κυματισμών. Οι υπόλοιπες πλευρές του όγκου (δηλαδή τα δύο επίπεδα στο  $y \rightarrow \pm\infty$ , και το επίπεδο στο  $z \rightarrow -\infty$ ) έχουν μηδέν εκροή, επειδή εκεί το ρευστό είναι ακίνητο.

Η ενέργεια του ρευστού στον όγκο που επιλέξαμε είναι σταθερή, και η εισροή ενεργείας μηδενική αφού το ρευστό μπροστά από το πλοίο δεν κινείται. Για την εκροή ενεργείας μέσα από την κινούμενη επιφάνεια ελέγχου πίσω από το πλοίο σκεφτόμαστε ως εξής: Ο κυματισμός που μεταδίδεται υπό γωνία  $\theta$  έχει πυκνότητα ενεργείας  $(1/2)\rho g |A|^2$ , όπου  $A$  είναι συνάρτηση της γωνίας  $\theta$ . Η ομαδική ταχύτητα  $c_g$  του κυματισμού σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την πορεία του πλοίου. Άρα η συνιστώσα της ομαδικής ταχύτητας κατά τον άξονα είναι ίση με  $c_g \cos \theta$ , και επομένως η εκροή ενεργείας ανά μονάδα πλάτους μέσα από την κινούμενη επιφάνεια ελέγχου είναι ίση με  $(1/2)\rho g |A|^2 (c_g \cos \theta - U)$ . Η συνολική εκροή ενεργείας προκύπτει με άθροιση (ολοκλήρωση) των εκροών σε όλο το πλάτος:

$$S_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \rho g |A|^2 (c_g \cos \theta - U) dy \tag{4.107}$$

Επειδή έχουμε βαθύ νερό η ομαδική ταχύτητα είναι ίση με το μισό της ταχύτητας φάσης, δηλαδή  $c_g = (1/2)U \cos \theta$ .

Αντικαθιστούμε την (4.107) στην (4.106) και προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2} \rho g \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \left( \frac{U}{2} \cos \theta - U \right) dy = -F_w U \tag{4.108}$$

Κατά συνέπεια έχουμε την ακόλουθη έκφραση για την αντίσταση του πλοίου λόγω κυματισμών:

$$F_w = \frac{1}{2} \rho g \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos \theta\right) dy \quad (4.109)$$

Η συνάρτηση  $|A|$  τείνει στο μηδέν έξω από τη γωνία Kelvin,  $y = \pm 1/(2\sqrt{2})x$ , οπότε το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (4.109) συγκλίνει.

Γιά να προσδιοριστεί θεωρητικά η αντίσταση λόγω κυματισμών απαιτείται να επιλυθεί πρώτα το πρόβλημα αστρόβιλης ροής γύρω από το πλοίο, να υπολογιστεί στην συνέχεια η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας που προκαλεί (δηλαδή η συνάρτηση  $|A|$  αλλά και η γωνία μετάδοσης  $\theta$ ), ώστε να υπολογιστεί τελικά το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (4.109).