

ΘΕΩΡΙΑ ΦΕΡΟΥΣΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Γ. Σ. Τριανταφύλλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

2018

1 Στροβιλότητα

Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας πεδίου στροβιλότητας που θα χρησιμοποιήσουμε στην θεωρία φερουσών επιφανειών.

1.1 Γενικά

Η στροβιλότητα της ροής ω (vorticity) ορίζεται από την σχέση

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (1)$$

Οπου \mathbf{u} είναι η ταχύτητα του ρευστού. Από φυσικής πλευράς η στροβιλότητα είναι ίση με το διπλάσιο της γωνιακής ταχύτητας σωματιδίου ρευστού γύρω από το κέντρο μάζας του. Από τον ορισμό της στροβιλότητας έχουμε ότι:

$$\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

Δηλαδή η στροβιλότητα είναι διάνυσμα με μηδενική απόκλιση (σωληνοειδές διάνυσμα).

Κατά αντιστοιχία με τις γραμμές ροής, ορίζουμε τις γραμμές στροβιλότητας (vortex lines), σαν γραμμές των οποίων η εφαπτομένη σε κάθε σημείο είναι παράλληλη προς το διάνυσμα της στροβιλότητας. Η επιφάνεια που δημιουργείται από όλες τις γραμμές στροβιλότητας που περνούν από τα σημεία μιάς καμπύλης C λέγεται επιφάνεια στροβιλότητας (vortex surface). Εάν η καμπύλη C είναι κλειστή, η επιφάνεια λέγεται σωλήνας στροβιλότητας (vortex tube).

Εστω μια οποιαδήποτε διατομή ενός σωλήνα στροβιλότητας που περατώνεται σε μια κλειστή καμπύλη C . Η εκροή της στροβιλότητας διαμέσου της επιφάνειας ορίζεται σαν το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\Gamma = \int_A \omega \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (3)$$

Οπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την στοιχειώδη επιφάνεια dA . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η εκροή είναι ανεξάρτητη από την διατομή. Πράγματι έστω ότι $\mathbf{n}' \, dA'$ και $\mathbf{n}'' \, dA''$ είναι απειροστά στοιχεία δύο επιφανειών A' , A'' που περατώνονται πάνω στον σωλήνα στροβιλότητας (όπου τα διανύσματα \mathbf{n}' , \mathbf{n}'' έχουν την ίδια φορά ως προς τον σωλήνα στροβιλότητας). Εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης στην όγκο που περικλείεται από τις δύο αυτές επιφάνειες και την επιφάνεια του σωλήνα στροβιλότητας που τις συνδέει. Επειδή πάνω στην τελευταία, έχουμε ότι $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$,

$$\int_{A'} \omega' \cdot \mathbf{n}' \, dA' - \int_{A''} \omega'' \cdot \mathbf{n}'' \, dA'' = \int_V \nabla \cdot \omega \, dV = 0$$

Η ποσότητα Γ επειδή είναι ανεξάρτητη από την διατομή πάνω στην οποία υπολογίζεται λέγεται ένταση (strength) του σωλήνα στροβιλότητας. Συνέπεια της σταθερότητας της έντασης Γ είναι ότι ένας σωλήνας στροβιλότητας δεν μπορεί να σταματά ή να ξεκινά στο εσωτερικό του ρευστού. Οι σωλήνες στροβιλότητας επομένως ή είναι κλειστές επιφάνειες, ή τερματίζονται σε στερεά αντικείμενα, ή εκτείνονται ως το άπειρο. Αν το πεδίο στροβιλότητας καταλαμβάνει πεπερασμένο όγκο, μόνο τα δύο πρώτα ενδεχόμενα είναι δυνατά.

Στην ειδική περίπτωση που ο σωλήνας στροβιλότητας έχει απειροστή διατομή dA , μιλάμε για *νήμα στροβιλότητας* (vortex filament). Τότε η στροβιλότητα μπορεί να θεωρηθεί σταθερή πάνω στην διατομή και η ένταση είναι ίση με ωdA , αφού το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι παράλληλο προς το μοναδιαίο διάνυσμα n .

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes σε μία οποιαδήποτε τομή του σωλήνα στροβιλότητας έχουμε ότι:

$$\Gamma = \int_A \omega \cdot n \, dA = \oint_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{l}_0 \, ds \quad (4)$$

όπου C είναι η καμπύλη στην οποία περατώνεται η επιφάνεια και \mathbf{l}_0 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που εφάπτεται στην καμπύλη C . Η ένταση του σωλήνα στροβιλότητας είναι κατά συνέπεια ίση με την κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε τομή του σωλήνα στροβιλότητας.

Γιά μη συνεκτικό ρευστό ισχύουν οι τρεις νόμοι του Helmholtz, που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

- Σωματίδια του ρευστού που έχουν αρχικά μηδενική στροβιλότητα έχουν πάντοτε μηδενική στροβιλότητα.
- Οι γραμμές στροβιλότητας είναι υλικές γραμμές (κινούνται με το ρευστό). Τα σωματίδια του ρευστού βρίσκονται επομένως πάντα στην ίδια γραμμή στροβιλότητας.
- Η ένταση των σωλήνων στροβιλότητας παραμένει σταθερή χρονικά.

Για μη συνεκτικό ρευστό ισχύει επίσης το θεώρημα του Kelvin:

- Η κυκλοφορία γύρω από μία κλειστή υλική καμπύλη C παραμένει σταθερή χρονικά.

Το θεώρημα του Kelvin μπορεί βέβαια να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης, αλλά μπορεί να προκύψει και από τους νόμους του Helmholtz, δεν είναι δηλαδή ανεξάρτητο από αυτούς. Αυτό μπορούμε να το δούμε ακολουθώντας τον εξής συλλογισμό: Θεωρούμε τον σωλήνα στροβιλότητας που δημιουργείται από τις γραμμές στροβιλότητας που περνούν από όλα τα σημεία της καμπύλης C κάποια χρονική στιγμή t . Ως γνωστόν, η κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη C είναι ίση με την ένταση του σωλήνα στροβιλότητας. Από τον δεύτερο νόμο η τα σημεία της καμπύλης C θα βρίσκονται πάντοτε στον ίδιο σωλήνα στροβιλότητας. Επομένως, επειδή η ένταση του τελευταίου δεν αλλάζει χρονικά (3ος νόμος), και η κυκλοφορία γύρω από την καμπύλη θα παραμένει σταθερή χρονικά.

1.2 Νόμος Biot-Savart

Ως γνωστόν οποιοδήποτε συνεχές διανυσματικό πεδίο μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα ενός διανυσματικού πεδίου μηδενικής απόκλισης και ενός πεδίου μηδενικής περιστροφής (αστρόβιλου). Εφαρμόζοντας αυτό το θεώρημα για την ταχύτητα του ρευστού έχουμε:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_i \quad (5)$$

όπου

$$\nabla \times \mathbf{u}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

Το διανυσματικό πεδίο u_i , του οποίου η περιστροφή είναι ίση με την στροβιλότητα του πεδίου ροής, λέγεται *επαγόμενη ταχύτητα* (induced velocity).

Η επαγόμενη ταχύτητα μπορεί να προσδιοριστεί από την στροβιλότητα με την βοήθεια του νόμου Biot-Savart, (που παραθετούμε χωρίς απόδειξη):

$$u_i = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\omega(\xi) \times (x - \xi)}{|x - \xi|^3} dV(\xi) \quad (6)$$

Όπου V είναι η περιοχή του πεδίου ροής μέσα στην οποία η στροβιλότητα έχει μη μηδενική τιμή. Η εξίσωση (6) λέγεται νόμος Biot-Savart κατ'αναλογία με τον ηλεκτρομαγνητισμό, όπου η ταχύτητα αναλογεί με την μαγνητική επαγωγή και η στροβιλότητα με το ηλεκτρικό ρεύμα. Η απόδειξη της (6) μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε βιβλίο διανυσματικής ανάλυσης.

Κατά την εφαρμογή του νόμου Biot-Savart η συνάρτηση που ολοκληρώνεται απειρίζεται για $\xi = x$ όταν το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα x βρίσκεται μέσα στο πεδίο V . Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα κατά Riemann δεν ορίζεται και παίρνουμε την κύρια τιμή του ολοκληρώματος.

1.3 Ιδιόμορφη γραμμή δίνης

Πολλά πεδία ροής χαρακτηρίζονται από το ότι οι τιμές της στροβιλότητας σε μία περιοχή γύρω από μία καμπύλη είναι πολύ μεγαλύτερες από ότι στο υπόλοιπο ρευστό. Από φυσικής πλευράς αυτό σημαίνει ότι το ρευστό εκτελεί μία περιστροφική κίνηση γύρω από αυτή την καμπύλη (π.χ. ανεμοστρόβιλοι). Μία χρήσιμη μαθηματική εξιδανίκευση αυτής της ροής προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι ένα νήμα στροβιλότητας με συρρικνώνεται σε μία καμπύλη μηδενικής διατομής αλλά ότι η ένταση του νήματος Γ παραμένει σταθερή. Αυτή η οριακή διαδικασία συνεπάγεται ότι η στροβιλότητα είναι παντού μηδέν εκτός από την ίδια την καμπύλη όπου απειρίζεται. Μία τέτοια καμπύλη λέγεται *ιδιόμορφη γραμμή δίνης* (singular vortex line).

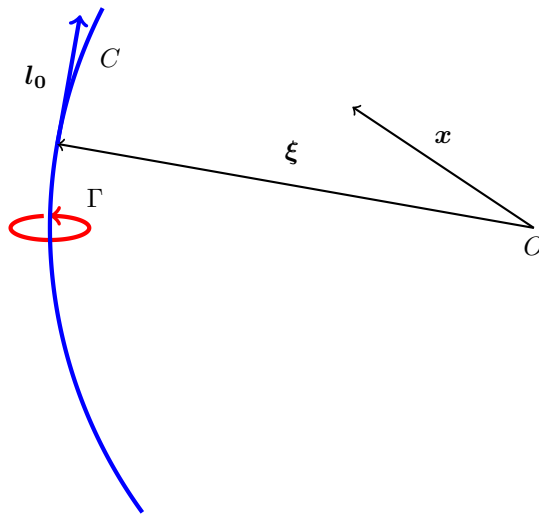
Η επαγόμενη ταχύτητα από ιδιόμορφη γραμμή δίνης έντασης Γ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$u_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{l_0 \times (x - \xi)}{|x - \xi|^3} ds(\xi) \quad (7)$$

όπου C είναι ο άξονας της ιδιόμορφης γραμμής δίνης, l_0 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που εφάπτεται στον άξονα C , και το άκρο του διανύσματος ξ είναι πάνω στην καμπύλη C . Όταν το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα x βρίσκεται πάνω στον άξονα C το αριστερό μέλος της εξίσωσης λέγεται αυτο-επαγόμενη ταχύτητα (self-induced velocity). Η αυτο-επαγόμενη ταχύτητα προκαλεί παραμόρφωση της ιδιόμορφης γραμμής δίνης.

Η απόδειξη της (7) μπορεί να γίνει ως εξής: Εφαρμόζουμε τον νόμο Biot-Savart για ένα νήμα στροβιλότητας. Θεωρούμε πρώτα ότι το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα βρίσκεται πολύ μακριά από τον άξονα του νήματος, δηλαδή ότι είναι πολύ μεγαλύτερο από την εγκάρσια διάσταση του νήματος στροβιλότητας, οπότε η έκφραση $x - \xi$ στην εξίσωση (6) μπορεί να αντικατασταθεί από $x - \xi_C$, όπου το άκρο του διανύσματος ξ_C βρίσκεται πάνω στον άξονα του νήματος στροβιλότητας. Τότε η (6) γράφεται ως εξής:

$$u_i = -\frac{1}{4\pi} \int_C \int_{\delta A} \frac{(x - \xi_C) \times \omega(\xi)}{|x - \xi|^3} dA ds = -\frac{1}{4\pi} \int_C ds \frac{(x - \xi_C) \times \omega(\xi)}{|x - \xi|^3} \times \int_{\delta A} \omega dA$$



Σχήμα 1: Ιδιόμορφη γραμμή δίνης, σχήμα ορισμού

Όπου C είναι ο άξονας του νήματος, d_s είναι απειροστό μήκος πάνω στον άξονα και δA η διατομή του νήματος κάθετα προς τον άξονα. Δεδομένου ότι η τελευταία είναι μικρή, το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι σε κάθε σημείο παράλληλο προς την εφαπτομένη του άξονα C , και μπορούμε να γράψουμε ότι $\omega = \omega l_0$, όπου l_0 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στον άξονα C , και $\omega = \omega \cdot l_0$. Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$\int_{\delta A} \omega dA = \int_{\delta A} \omega l_0 dA = l_0 \Gamma$$

Όπου Γ είναι η ένταση του νήματος στροβιλότητας. Θεωρώντας τώρα ότι $\delta A \rightarrow 0$, αλλά με $\Gamma \rightarrow$ σταθερό παίρνουμε την εξίσωση (7).

Σημειώνουμε ότι στην ειδική περίπτωση που ο άξονας της δίνης C είναι ευθεία γραμμή η εξίσωση (7) μας δίνει το πεδίο ταχυτήτων επίπεδης σημειακής δίνης. Πράγματι χωρίς απώλεια γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε ο άξονας της δίνης να συμπίπτει με ένα από τους άξονες του συστήματος αναφοράς, π.χ. τον άξονα z . Τότε $\xi = \eta = 0$, και οι τρεις συνιστώσες της επαγόμενης ταχύτητας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-y) d\zeta}{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x d\zeta}{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$w = 0$$

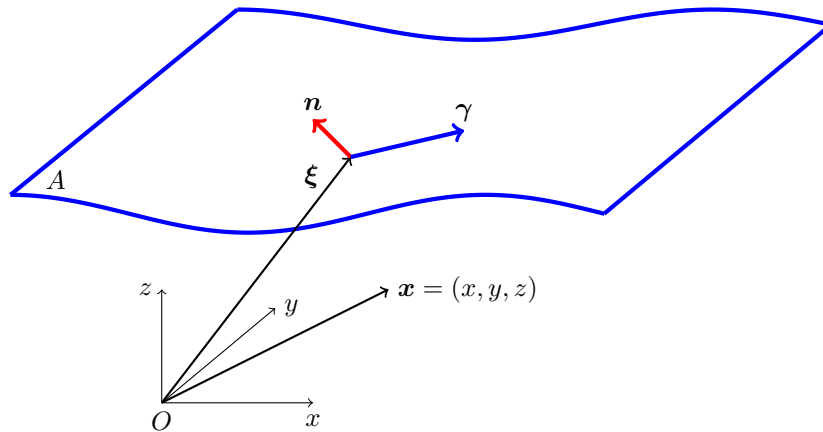
Οι άνωτέρω σχέσεις είναι το πεδίο ταχυτήτων σημειακής δίνης στο επίπεδο x, y . Οι αυτοεπαγόμενες ταχύτητες (κυρια τιμή των άνωτέρω ολοκληρωμάτων όταν $x = y = 0$) είναι μηδενικές. Αυτό προκύπτει θέτοντας $x = y = 0$ πριν από την ολοκλήρωση.

1.4 Ιδιόμορφα φύλλα στροβιλότητας

Ροές στις οποίες το μέτρο της στροβιλότητας είναι μεγάλο μόνο σε μία περιοχή πολύ μικρού πάχους γύρω από μία επιφάνεια A στον χώρο επίσης παρατηρούνται σε πολλές εφαρμογές, όπως η ροή γύρω από μία πτέρυγα. Το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι κατ' ανάγκη παράλληλο προς την επιφάνεια A . Όπως κάναμε και με την ιδιόμορφη γραμμική δίνη μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η περιοχή αυτή με μεγάλη στροβιλότητα συρρικνώνεται στην επιφάνεια A . Η επιφάνεια A λέγεται τότε ιδιόμορφο φύλλο δινών, ή *ιδιόμορφο φύλλο στροβιλότητας* (singular vortex sheet). Η επαγόμενη ταχύτητα φύλλου δινών δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dA \quad (8)$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\gamma}$ είναι παράλληλο προς την επιφάνεια A (έχει διαστάσεις ταχύτητας) και λέγεται πυκνότητα στροβιλότητας του ιδιόμορφου φύλλου δινών. Η πυκνότητα στροβιλότητας είναι χαρακτηριστικό μέγεθος του ιδιόμορφου φύλλου στροβιλότητας και συνδέεται με την διαφορά της ταχύτητας του ρευστού στις δυο πλευρές του φύλλου στροβιλότητας.



Σχήμα 2: Σχήμα ορισμού για το ιδιόμορφο φύλλο στροβιλότητας.

Γιά την απόδειξη της (8) εργαζομαστε ως εξής: Θεωρούμε ότι η στροβιλότητα είναι μη μηδενική σε μία περιοχή πολύ μικρού πάχους γύρω από την επιφάνεια A . Το διάνυσμα της στροβιλότητας πρέπει να είναι παράλληλο προς την επιφάνεια A . Εστω δs το τοπικό πάχος της περιοχής μετρημένο κάθετα προς την επιφάνεια A . Εφαρμόζοντας την (6) έχουμε ότι η επαγόμενη ταχύτητα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{4\pi} \int_A \int_{\delta s} \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dA d\eta$$

Θεωρώντας ότι $|\mathbf{x}|$ είναι πού μεγαλύτερο από το πάχος της περιοχής δs , μπορούμε να γράψουμε ότι $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_A$, όπου το άκρο του διανύσματος $\boldsymbol{\xi}_A$ βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια A . Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathbf{u}_i = -\frac{1}{4\pi} \int_A dA \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_A)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_A|^3} \times \int_{\delta s} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) d\eta$$

Τώρα αν πάρουμε το όριο όταν $\delta s \rightarrow 0$, αλλά κρατώντας τη ποσότητα $\int_{\delta s} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) d\eta$ σταθερή, προκύπτει η εξίσωση (8).

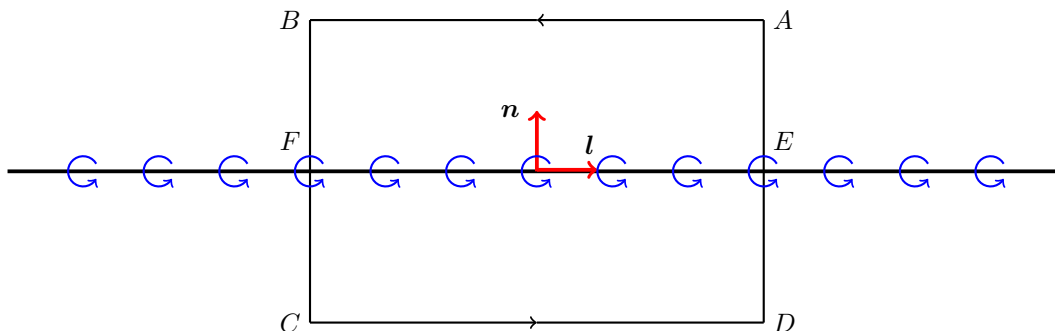
Η ύπαρξη ενός ιδιόμορφου φύλλου δινών συνεπάγεται ασυνέχεια της συνιστώσας της ταχύτητας παράλληλης προς την επιφάνεια A . Εστω u_u η ταχύτητα του ρευστού στην άνω πλευρά της επιφάνειας, και u_l η ταχύτητα του ρευστού στην κάτω πλευρά της επιφάνειας A . Αποδεικνύεται ότι:

$$u_l - u_u = n \times \gamma \quad (9)$$

$$\gamma = (u_l - u_u) \times n \quad (10)$$

όπου n είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς το ιδιόμορφο φύλλο δινών. Επειδή οι όροι “άνω” και “κάτω” πλευρά της επιφάνειας μπορεί να φαίνονται λίγο ασαφείς, σημειώνουμε ότι η πηγαίνουμε από την κάτω προς την άνω πλευρά κινούμενοι κατά την φορά του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος n .

Η απόδειξη των (10), (9) μπορεί να γίνει σχετικά απλά χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8) όταν το φύλλο δινών είναι επίπεδο (τότε είναι μιά απλή επέκταση των αντίστοιχων σχέσεων που είδαμε για κατανομές σημειακών δινών σε διδιάστατες ροές), αλλά κάπως πιο περίπλοκη όταν η επιφάνεια γίνει καμπύλη. Η απόδειξη στην γενική περίπτωση γίνεται ως εξής:



Σχήμα 3: Σχήμα για την απόδειξη των εξισώσεων (9), (10). Το απειροστό ορθογώνιο ABCD είναι κάθετο προς το φύλλο στροβιλότητας.

Θεωρούμε την κυκλοφορία γύρω από ένα απειροστό ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές AD και CB είναι κάθετες προς το φύλλο στροβιλότητας, και οι πλευρές AB, CD παράλληλες προς το φύλλο στροβιλότητας, όπως στο σχήμα. Το ορθογώνιο τέμνει το φύλλο δινών στα σημεία E και F. Επειδή οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι απειροστές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το τμήμα του φύλλου δινών που περικλείεται από το ABCD είναι επίπεδο και ότι η πυκνότητα στροβιλότητας είναι σταθερή πάνω σε αυτό. Παρομοίως η ταχύτητα του ρευστού μπορεί να θεωρηθεί σταθερή σε κάθε πλευρά του φύλλου δινών.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Stokes για το ορθογώνιο ABCD και έχουμε ότι:

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = u_l \cdot \mathbf{l}(DC) - u_u \cdot \mathbf{l}(AB) = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} dA = \gamma \cdot \mathbf{m}(EF)$$

Όπου u_u , u_l είναι η ταχύτητα του ρευστού στην άνω και κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας αντίστοιχα. Επίσης l είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στο φύλλο στροβιλότητας που είναι παράλληλο με τις πλευρές AB και CD, και m το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια ABCD. Η φορά του διανύσματος l είναι τέτοια, ώστε τα (l, m, n) να σχηματίζουν δεξιόστροφη

ορθοκανονική τριάδα. Σημειώνουμε ότι η μετάβαση από τη μιά μορφή του δεξιού μέλους στην άλλη μπορεί να αιτιολογηθεί πιό συστηματικά με την ίδια οριακή διαδικασία με την οποία αποδείξαμε τον τύπο της επαγόμενης ταχύτητας για φύλλο στροβιλότητας. Για το αριστερό μέλος παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα πάνω στην πλευρά EA αναιρείται από αυτό στην BF, και ομοίως το ολοκλήρωμα πάνω στην FC αναιρείται από αυτό στην DE.

Μετά την απλοποίηση $(AB)=(CD)=(EF)$, καταλήγουμε ότι:

$$(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_u) \cdot \mathbf{l} = \gamma \cdot m$$

Βλέπουμε ότι στο φύλλο στροβιλότητας υπάρχει μιά ασυνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας. Αν το ορθογώνιο είναι κάθετο προς το διάνυσμα της πυκνότητας στροβιλότητας γ , το διάνυσμα m είναι παράλληλο προς το διάνυσμα της πυκνότητας στροβιλότητας, και η ασυνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας είναι ίση με το μέγεθος του διανύσματος της πυκνότητας στροβιλότητας γ . Αν το ορθογώνιο είναι παράλληλο προς το διάνυσμα γ , το διάνυσμα m είναι κάθετο προς το γ , και η ασυνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας είναι ίση με μηδέν. Στη γενική περίπτωση η ασυνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας είναι ίση με $\gamma \cos \beta$, όπου β είναι η γωνία ανάμεσα στα μοναδιαία διανύσματα γ και m . Λόγω της ασυμπίεστότητας του ρευστού η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι κάθετη στην επιφάνεια στροβιλότητας είναι συνεχής.

Επειδή τα διανύσματα l, m, n συνιστούν δεξιόστροφη ορθοκανονική τριάδα, έχουμε ότι:

$$\mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{m} \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l} \quad \mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} \quad (11)$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$(\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_u) \cdot \mathbf{l} = \gamma \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{n}) = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{n} \times \gamma)$$

Επειδή αυτό ισχύει για οποιαδήποτε κατεύθυνση του ορθογωνίου ABCD, και επομένως για οποιοδήποτε διάνυσμα m , προκύπτει η εξίσωση (9).

Η εξίσωση (10) προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (9) εξωτερικά με n , και χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διανυσματική ταυτότητα:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (12)$$

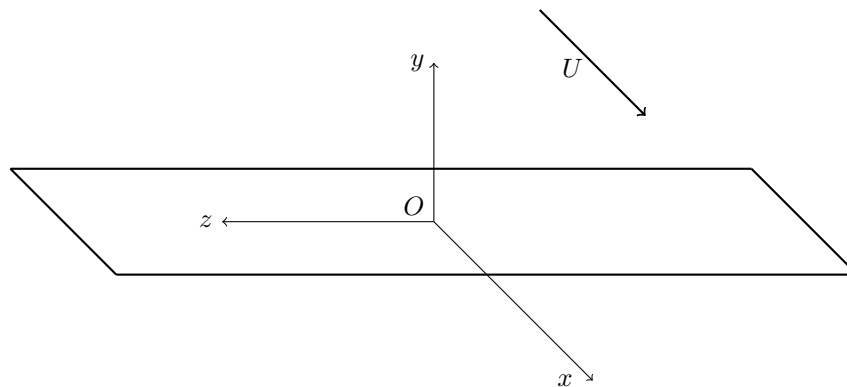
Για παράδειγμα θεωρούμε την περίπτωση της διανομής στροβιλότητας σε δισδιάστατη υδροτομή (που είδαμε στο κεφάλαιο υδροτομών). Εδώ έχουμε $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $\gamma = \gamma_z \mathbf{k}$ οπότε η (9) δίνει $\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_u = \gamma_z \mathbf{i}$, επιβεβαιώνοντας το αποτέλεσμα που είχαμε βρει με διαφορετικό τρόπο στη θεωρία υδροτομών.

Σημειώνουμε ότι, στην ειδική περίπτωση που το φύλλο στροβιλότητας είναι επίπεδο με σταθερή ένταση, η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας στην άνω πλευρά του φύλλου είναι ίση και αντίθετη με την εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας στην κάτω πλευρά.

2 Θεωρία φερουσών επιφανειών

Φέρουσες επιφάνειες είναι λεπτές επιφάνειες με μικρή κυρτότητα, που αναπτύσσουν δυναμική άνοση. Οι φέρουσες επιφάνειες μπορεί να είναι σχεδόν επίπεδες, όπως το πηδάλιο του πλοίου, η στρεβλωμένες, όπως η πτέρυγα του αεροπλάνου.

Η υδροδυναμική θεωρία των φερουσών επιφανειών αποτελεί επέκταση της θεωρίας των λεπτών υδροτομών που είδαμε στα προηγούμενα. Επειδή η ροή γύρω από φέρουσα επιφάνεια είναι τριδιάστατη, δεν είναι δυνατή η χρήση της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων, η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην θεωρία των λεπτών υδροτομών.



Σχήμα 4: Σύστημα συντεταγμένων x, y, z για πτέρυγα.

Θεωρούμε ροή γύρω από πτέρυγα. Το σύστημα συντεταγμένων x, y, z ορίζεται με τον άξονα x παράλληλο προς την ροή, τον άξονα y κατακόρυφο και με διεύθυνση προς τα άνω, και με τον άξονα z κατά το άνοιγμα (span) της πτέρυγας. Όπως στις λεπτές υδροτομές ορίζουμε την ακμή πρόσπτωσης, την ακμή εκφυγής, το μέγιστο βέλος κυρτότητας και την γωνία πρόσπτωσης α . Τα δύο ακραία σημεία της πτέρυγας λέγονται *ακροπτερύγια*, και η απόσταση ανάμεσά τους s λέγεται *άνοιγμα* (span). Ο λόγος AR :

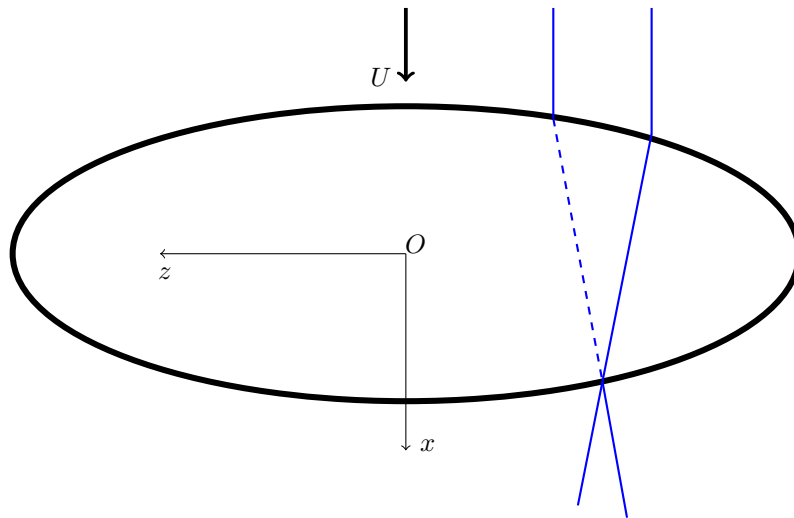
$$(AR) = \frac{s^2}{A} \quad (13)$$

όπου A είναι η επιφάνεια της πτέρυγας, λέγεται *λόγος επιμήκους* (aspect ratio). Στην ειδική περίπτωση που το σχήμα της πτέρυγας είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ο λόγος επιμήκους είναι ίσος προς τον λόγο του ανοίγματος προς την χορδή. Τέλος συμβολίζουμε με $x_L(z)$ και $x_T(z)$ τις προβολές της ακμής πρόσπτωσης και εκφυγής, αντίστοιχα, στο επίπεδο $x - z$.

Οι πτέρυγες είναι συνήθως συμμετρικές ως προς το επίπεδο $z = 0$ και μπορούμε να επιλέξουμε σαν αρχή των αξόνων την προβολή του μέσου της χορδής της κεντρικής τομής της πτέρυγας. Αν τα μέσα όλων των προβολών της πτέρυγας βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, λέμε ότι η πτέρυγα είναι *ευθεία*, αλλιώς λάμε ότι η πτέρυγα έχει οριζόντια κλίση. Αν η γωνία πρόσπτωσης δεν παραμένει σταθερή κατά το άνοιγμα της πτέρυγας λέμε ότι η πτέρυγα έχει *συστροφή*.

2.1 Ροή ιδανικού ρευστού γύρω από πτέρυγα

Η βασική υδροδυναμική λειτουργία της πτέρυγας είναι η δημιουργία άνοσης (δηλ. δύναμης κάθετη προς την ταχύτητα της ροής). Κατά συνέπεια η κάτω πλευρά της πτέρυγας έχει μεγαλύτερη πίεση από την άνω πλευρά. Στο περίγραμμα της πτέρυγας, όπου η άνω και η κάτω πλευρά συναντώνται, οι πιέσεις των δύο πλευρών εξισώνονται.



Σχήμα 5: Σε ροή γύρω από πτέρυγα οι γραμμές ροής στρεβλώνονται προς το μέσο της πτέρυγας στην άνω πλευρά (συνεχής γραμμή), και προς το ακροπτερύγιο στην κάτω πλευρά (διακεκομμένη γραμμή) της πτέρυγας.

Απαραίτητη συνθήκη για την δημιουργία άνωσης είναι η ροή να εγκαταλείπει την πτέρυγα ομαλά στο άκρο εκφυγής (όπως και στη θεωρία λεπτών υδροτομών). Όταν αυτό συμβαίνει (και μόνο τότε) ικανοποιητικά αποτελέσματα για τις δυνάμεις πάνω στην πτέρυγα μπορούν να παραχθούν με την θεωρία ιδανικού ρευστού, Όπως και στην διδιάστατη θεωρία λεπτών υδροτομών αναπτύσσεται υπερπίεση στην κάτω πλευρά της πτέρυγας και υποπίεση στην άνω πλευρά.

Το γεγονός όμως ότι η πτέρυγα έχει πεπερασμένο άνοιγμα συνεπάγεται ότι η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην άνω και στην κάτω πλευρά της πτέρυγας προκαλεί ροή γύρω από τα δύο ακροπτερύγια με φορά από την κάτω πλευρά προς την άνω. Λόγω της ροής αυτής οι γραμμές ροής που περνούν από την γραμμή ανακοπής στην ακμή πρόσπτωσης παύουν να είναι παράλληλες προς την εξωτερική ροή. Οι γραμμές ροής στην άνω πλευρά της πτέρυγας αποκλίνουν προς το μέσο της πτέρυγας, ενώ οι γραμμές ροής στην κάτω πλευρά απόκλινουν προς τα ακροπτερύγια. Οι απόκλίσεις αυτές είναι ισχυρότερες κοντά στα ακροπτερύγια και ασθενέστερες κοντά στο μέσο της πτέρυγας.

Σε κάθε σημείο της ακμής εκφυγής καταλήγουν δύο γραμμές ροής οι οποίες προέρχονται από δύο διαφορετικά σημεία της ακμής προσπτώσεως. Η ταχύτητα του ρευστού στην μία γραμμή ροής έχει διαφορετική κατεύθυνση από την ταχύτητα στην άλλη γραμμή ροής. Κατά συνέπεια, παρότι οι δύο ταχύτητες έχουν το ίδιο μέτρο (από την αρχή του Bernoulli), στην ακμή εκφυγής ξεκινά μία επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας λόγω της διαφορετικής κατεύθυνσης των δύο ταχυτήτων. Η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού στην άνω πλευρά της επιφάνειας είναι διαφορετική από την ταχύτητα των σωματιδίων στην κάτω πλευρά της επιφάνειας. Η επιφάνεια αυτή λέγεται όπως είδαμε ιδιόμορφο φύλλο δινών.

Η πτέρυγα συνοδεύεται δηλαδή από ένα ιδιόμορφο φύλλο δινών που ξεκινά από την ακμή εκφυγής και εκτείνεται θεωρητικά μέχρι το άπειρο. Το φύλλο δινών είναι ένα απλουστευμένο μοντελο του ομόρρου της πτέρυγας, συμφωνο με το οποίο η ροή είναι αστρόβιλη παντού εκτός από το ίδιο το φύλλο δινών το οποίο έχει μηδενικό πάχος. Στην πραγματικότητα όμως, αμέσως μόλις τα σωματίδια του ρευστού εγκαταλείψουν την ακμή εκφυγής, οι τάσεις λόγω συνεκτικότητας του ρευστού εξομαλύνουν την ασυνέχεια της ταχύτητας, και ο ομόρρος της πτέρυγας (δηλαδή η περιοχή του ρευστού πίσω από την πτέρυγα όπου η στροβιλότητα δεν είναι μηδεν) έχει πεπερασμένο παχος.

Το ιδιόμορφο φύλλο δινών αναδιπλώνεται λόγω υδροδυναμικής αστάθειας γύρω από τις γραμμές δινών των ακροπτερυγιων. Σχηματίζονται έτσι οι δύο δινες ακροπτερυγιων οι οποίες αυξάνονται

κατά την κατεύθυνση παράλληλα με την ροή καθώς όλο και μεγαλύτερο μέρος του φύλλου δινών αναδιπλώνεται γύρω τους. Συμφωνα με την θεωρία ιδανικού ρευστού το φύλλο στροβιλότητας με τις δινες ακροπτερυγιών εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Στην πραγματικότητα βεβαία οι δινες ακροπτερυγίου αλλά και το φύλλο στροβιλότητας εκμηδενίζονται βαθμιαία από τις δυνάμεις συνεκτικότητας του ρευστού.

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ροής ιδανικού ρευστού γύρω από πτέρυγα περιλαμβάνει επίλυση της εξίσωσης του Laplace εκτός πτέρυγας και εκτός του φύλλου στροβιλότητας που ακολουθεί, ενώ πάνω στην πτέρυγα έχουμε την κινηματική οριακή συνθήκη:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (14)$$

όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην πτέρυγα. Επί πλέον έχουμε τη συνθήκη Kutta στην ακμή εκφυγής, και τη συνθήκη ότι μακριά από την πτέρυγα και από το φύλλο στροβιλότητας που ακολουθεί έχουμε ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα U ,

Τώρα εκφράζουμε την οριακή συνθήκη (14) συναρτήσεως των χαρακτηριστικών της πτέρυγας. Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε μία επιφάνεια με εξίσωση $f(x, y, z) = C$, όπου C σταθερά, δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad (15)$$

Εστω $y = y_u(x, z)$ η εξίσωση της άνω επιφάνειας της πτέρυγας, και $y = y_\ell(x, z)$ η εξίσωση της κάτω επιφάνειας της πτέρυγας. Εφαρμόζοντας την (15) πρώτα για $f(x, y, z) = y_u(x, z) - y = 0$, και ύστερα για $f(x, y, z) = y_\ell(x, z) - y = 0$, καταλήγουμε στις εξής οριακές συνθήκες πάνω στην πτέρυγα:

$$v = u \frac{\partial y_u}{\partial x} + w \frac{\partial y_u}{\partial z} \quad y = y_u(x, z) \quad (16)$$

$$v = u \frac{\partial y_\ell}{\partial x} + w \frac{\partial y_\ell}{\partial z} \quad y = y_\ell(x, z) \quad (17)$$

Επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών δίνει το πεδίο ροής (και το φύλλο στροβιλότητας που ακολουθεί) και τις δυνάμεις που ασκούνται στη πτέρυγα.

2.2 Σχέση ανάμεσα στην πυκνότητα στροβιλότητας και στην διαφορά πίεσης για μόνιμη ροή

Θεωρούμε μια επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας σε παράλληλη ροή. Η επιφάνεια αυτή μπορεί να είναι ιδιόμορφο φύλλο δινών, οπότε η πίεση θα είναι συνεχής, η μπορεί να είναι λεπτή πλάκα, οπότε θα υπάρχει και διαφορά πίεσης ανάμεσα στις δύο πλευρές της επιφάνειας. Στο κεφάλαιο αυτό συζητάμε την σχέση ανάμεσα στην πυκνότητα στροβιλότητας και στην διαφορά πίεσης μιας επιφάνειας ασυνέχειας της ταχύτητας.

Παριστάνουμε με u_u την ταχύτητα του ρευστού στην άνω πλευρά και u_ℓ την ταχύτητα του ρευστού στην κάτω πλευρά αντίστοιχα. Ορίζουμε την μέση ταχύτητα u_m και την διαφορά ταχυτήτων u_d από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbf{u}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_u + \mathbf{u}_\ell) \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_u - \mathbf{u}_\ell \quad (19)$$

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1, η ασυνέχεια της ταχύτητας στις δύο πλευρές μιας επιφάνειας στροβιλότητας συνδέεται με την επιφανειακή πυκνότητα στροβιλότητας γ με την σχέση (9). Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$\mathbf{u}_d = \gamma \times \mathbf{n} \quad (20)$$

όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς το ιδιόμορφο φύλλο στροβιλότητας. Εστω \mathbf{m} το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς την μέση ταχύτητα (προφανώς $\mathbf{m} = \mathbf{u}_m / |\mathbf{u}_m|$). Ορίζουμε και το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{l} τέτοιο ώστε $(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l})$ να συνιστούν μια δεξιόστροφη τριάδα. Τότε έχουμε ότι:

$$\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l} \quad \mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{m} \quad (21)$$

Τα διανύσματα $\mathbf{u}_u, \mathbf{u}_\ell$ βρίσκονται σε επίπεδο που εφάπτεται της επιφάνειας στροβιλότητας, και επομένως στο ίδιο επίπεδο βρίσκονται και τα διανύσματα \mathbf{u}_m και \mathbf{u}_d . Από τον ορισμό της η πυκνότητα στροβιλότητας είναι βρίσκεται και αυτή στο ίδιο επίπεδο. Μπορούμε λοιπόν να αναλύσουμε την πυκνότητα στροβιλότητας σε μια συνιστώσα γ_f παράλληλη προς την μέση ταχύτητα και μια συνιστώσα γ_b κάθετη προς την μέση ταχύτητα:

$$\gamma = \gamma_f \mathbf{m} + \gamma_b \mathbf{l} \quad (22)$$

Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας και της διαφοράς ταχυτήτων έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbf{u}_u = \mathbf{u}_m + \frac{1}{2}\mathbf{u}_d \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_\ell = \mathbf{u}_m - \frac{1}{2}\mathbf{u}_d \quad (24)$$

Από όπου προκύπτει χρησιμοποιώντας την (20) ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_u - \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell &= 2\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_d = 2\mathbf{u}_m \cdot (\gamma \times \mathbf{n}) = \\ &= 2(\mathbf{n} \times \mathbf{u}_m) \cdot \gamma = -2|\mathbf{u}_m| \mathbf{l} \cdot \gamma = \\ &= -2|\mathbf{u}_m| \gamma_b \end{aligned} \quad (25)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τις (21), (22), και την ιδιότητα ότι η τριάδα $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ δεν αλλάζει τιμή για κυκλική εναλλαγή των διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Εφαρμόζουμε τώρα την εξίσωση Bernoulli, πρώτα ανάμεσα στο σημείο στην άνω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας και σε σημείο στο άπειρο, και ύστερα ανάμεσα στο σημείο στην κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας και σε σημείο στο άπειρο, και καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση για την διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην άνω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας:

$$p_\ell - p_u = \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u}_u \cdot \mathbf{u}_u - \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell) = -\rho |\mathbf{u}_m| \gamma_b \quad (26)$$

Καταλήγουμε δηλαδή στο συμπέρασμα ότι η διαφορά πίεσης ανάμεσα στην κάτω και στην άνω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας είναι ανάλογη προς την συνιστώσα της πυκνότητας στροβιλότητας που είναι κάθετη προς την μέση ταχύτητα. Η συνιστώσα γ_b λεγεται *προσδεδεμένη πυκνότητα στροβιλότητας* (bound vorticity) και έχει μη μηδενική τιμή μόνο αν η επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας είναι η πτέρυγα. Αν η επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας είναι ιδιόμορφο φύλλο δινών, η συνθήκη συνέχειας της πίεσης στο φύλλο δινών επιβαλλει τον μηδενισμό της προσδεδεμένης πυκνότητας στροβιλότητας.

Η συνιστώσα γ_f λεγεται *ελευθερη στροβιλότητα* (free vorticity) και έχει μη μηδενική τιμή για οποιαδήποτε επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας.

2.3 Γραμμική θεωρία φερουσών επιφανειών

Στην γραμμική θεωρία φερουσών επιφανειών υποθέτουμε ότι: (1) Τα υδροδυναμικά μεγέθη πάνω στην πτέρυγα (ταχύτητες, πιέσεις) μπορούν να αντικατασταθούν με τις τιμές τους πάνω στο επίπεδο $x-z$. (2) Το ιδιόμορφο φύλλο δινών καταλαμβάνει μια γνωστή εκ των προτέρω θέση πίσω από την πτέρυγα, και ότι η θέση αυτή είναι ένα επίπεδο παράλληλο προς την ροή. (3) Υποθέτουμε επι πλεον ότι η μέση ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα της ροής, δηλαδή $\mathbf{u}_m = U \mathbf{i}$, όπου \mathbf{i} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο με τον άξονα των x . Το λάθος που εισαγεται με τις παραδοχές αυτές είναι τόσο μικρότερο όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος επιμήκους της πτέρυγας και όσο μικρότερη η γωνία πρόσπτωσης.

Γράφουμε το πεδίο ταχυτήτων (όπως είχαμε κάνει με τις υδροτομές) στη μορφή $U + u, v, w$, όπου u, v, w οφείλονται στην παρουσία της πτέρυγας. Σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάναμε (μικρή κυρτότητα, μικρό πάχος, μικρή γωνία κλίσης) τα u, v, w είναι πολύ μικρότερα από την ταχύτητα στο άπειρο U . Οπότε, πάντα σύμφωνα με τις παραδοχές, αγνοούμε γινόμενα μικρών όρων και εφαρμόζουμε την κινηματική οριακή συνθήκη στην προβολή της πτέρυγας στο επίπεδο $x-z$.

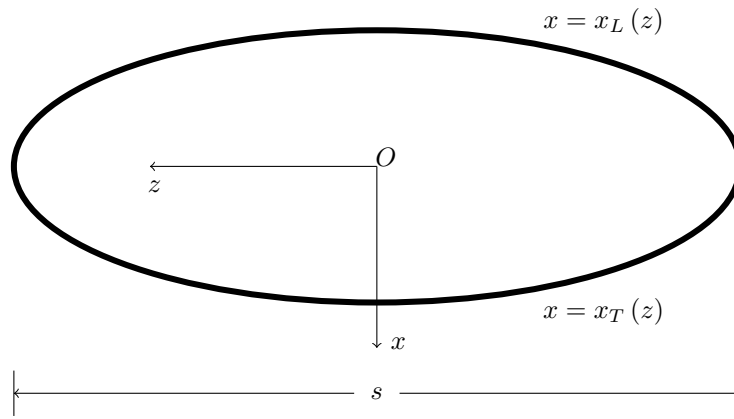
Η οριακή συνθήκη πάνω στην πτέρυγα γραμμικοποιείται ως εξής:

$$v_+ = U \frac{\partial y_u}{\partial x} \quad v_- = U \frac{\partial y_\ell}{\partial x} \quad (27)$$

Οπου v_+, v_- είναι αντίστοιχα η y συνιστώσα της ταχύτητας στην άνω και στην κάτω πλευρά της προβολής της πτέρυγας στο επίπεδο $x-z$, δηλαδή για $y = 0+$, και $y = 0-$ αντίστοιχα. Η συνθήκη Kutta εφαρμόζεται πάνω στην προβολή του άκρου εκφυγής στο επίπεδο $x-z$ $x = x_T(z)$. Τα u, v, w τείνουν στο μηδέν μακριά από την πτέρυγα και το φύλλο στροβιλότητας.

Όπως και με τις υδροτομές αναλύουμε το πρόβλημα σε δύο προβλήματα, ένα που ικανοποιεί την ακόλουθη οριακή συνθήκη πάνω στην πτέρυγα:

$$v_+ = -v_- = \frac{1}{2} U \left(\frac{\partial y_u}{\partial x} - \frac{\partial y_\ell}{\partial x} \right) \quad (28)$$



Σχήμα 6: Προβολή της πτέρυγας στο επίπεδο $x - z$.

Και ένα δεύτερο πρόβλημα που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$v_+ = v_- = \frac{1}{2}U \left(\frac{\partial y_u}{\partial x} + \frac{\partial y_\ell}{\partial x} \right) = U \frac{\partial y_m}{\partial x} \quad (29)$$

Οπου $y_m = (1/2)(y_u + y_\ell)$ είναι η μέση επιφάνεια κυρτότητας της πτέρυγας.

Η συνθήκη Kutta και η συνθήκη στο άπειρο παραμένουν και στα δύο προβλήματα όπως έχουν. Για τους ίδιους λόγους όπως και με τις υδροτομές θα μας απασχολήσει μόνο το δεύτερο πρόβλημα, και θα το επιλύσουμε με την βοήθεια μιάς κατανομής στροβιλότητας στο επίπεδο $x - z$. Αντίθετα με το δισδιάστατο πρόβλημα της υδροτομής, όμως, τώρα υπάρχει και η ελεύθερη στροβιλότητα η οποία εκτείνεται πίσω από την πτέρυγα μέχρι το άπειρο.

Λόγω των παραδοχών (1) και (2), η ελεύθερη στροβιλότητα έχει κατεύθυνση παράλληλη με τον άξονα των x , και η προσδεδεμένη στροβιλότητα έχει κατεύθυνση παράλληλη με τον άξονα των z . Μπορούμε να γράψουμε δηλαδή ότι $\gamma_f = \gamma_x$ και ότι $\gamma_b = \gamma_z$.

Ως γνωστόν το διάνυσμα της στροβιλότητας έχει μηδενική απόκλιση. Για την πυκνότητα στροβιλότητας φύλλου στροβιλότητας που συμπίπτει με το επίπεδο $x - z$ αυτό συνεπάγεται την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

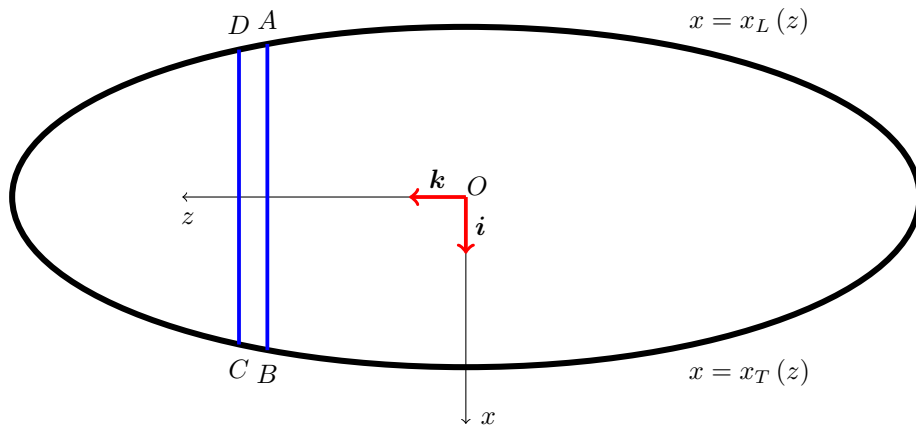
Άμεση συνέπεια της (30) και του θεωρήματος της απόκλισης είναι ότι:

$$\int_C \gamma \cdot n \, ds = 0 \quad (31)$$

Οπου C είναι μιά οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη πάνω στο φύλλο στροβιλότητας και n το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην C .

Γιά το ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας που ακολουθεί την πτέρυγα $\gamma_z = 0$, οπότε η εξίσωση (30) συνεπάγεται ότι η πυκνότητα γ_x παραμένει σταθερή και ίση με την τιμή που έχει όταν εγκαταλείπει την πτέρυγα.

Θα δούμε τώρα την σχέση ανάμεσα σε προσδεδεμένη και στην ελεύθερη στροβιλότητα που αφήνει πίσω της η πτέρυγα και στην κυκλοφορία γύρω από μιά τομή $z = \text{σταθερό}$ της πτέρυγας.



Σχήμα 7: Σχημα για την αποδειξη της σχέσης (34).

Θεωρούμε πάνω στην πτέρυγα μια λωρίδα ABCD απειροστού πλάτους δz , και εφαρμόζουμε την (31). Η πλευρά DA αποτελεί μέρος της ακμής πρόσπτωσης, και επομένως $\gamma = 0$. Η πλευρά BC αποτελεί μέρος της ακμής εκφυγής και επομένως $\gamma = \gamma_x i$. Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$\int_{x_L(z)}^{x_T(z)} \gamma_z \mathbf{d}x - \int_{x_L(z+\delta z)}^{x_T(z+\delta z)} \gamma_z \mathbf{d}x + \gamma_x(x_T(z), z)\delta z = 0 \quad (32)$$

Ορίζουμε την κυκλοφορία $\Gamma(z)$ από τη σχέση:

$$\Gamma(z) = \int_{x_L(z)}^{x_T(z)} \gamma_z \mathbf{d}x \quad (33)$$

Οπότε η (32) γράφεται ως εξής:

$$\Gamma(z) - \Gamma(z + \delta z) + \gamma_x(x_T(z), z)\delta z = 0$$

Διαιρώντας με δz και παίρνοντας το όριο $\delta z \rightarrow 0$ καταλήγουμε ότι:

$$\gamma_x(x_T(z), z) = -\frac{d\Gamma}{dz} \quad (34)$$

Η συνάρτηση $\Gamma(z)$ που ορίσαμε είναι η κυκλοφορία γύρω από μία τομή της πτέρυγας από ένα επίπεδο $x = \text{σταθερό}$. Η εξίσωση (34) μας δείχνει ότι η ελεύθερη στροβιλότητα στον ομόρρου της πτέρυγας είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της κυκλοφορίας γύρω από μία τομή της πτέρυγας. Επομένως η ελεύθερη στροβιλότητα θα είναι μέγιστη στα δύο ακροπετερύγια και ελάχιστη στην περιοχή γύρω από το μέσον της πτέρυγας. Φυσικά σε μία δισδιάστατη γεωμετρία η κυκλοφορία είναι παντού η ίδια, οπότε η ελεύθερη στροβιλότητα μηδενίζεται.

Λόγω της γενικής σχέσης (9) και της υπόθεσης ότι η μέση ταχύτητα είναι ίση με $U i$, οι τιμές των ταχυτήτων u, w στην πάνω και κάτω πλευρά του επιπέδου $y = 0$ (με δείκτη + ή - αντίστοιχα) είναι:

$$u_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \gamma_z \quad (35)$$

$$w_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \gamma_x \quad (36)$$

Ενώ η y -συνιστώσα της ταχύτητας, που είναι συνεχής στο $y = 0$, δίνεται από την ακόλουθη σχέση (εξίσωση (8)):

$$v = v_b + v_f \quad (37)$$

Όπου v_b, v_f είναι, αντίστοιχα, οι επαγόμενες ταχύτητες από την προσδεδεμένη και την ελεύθερη στροβιλότητα, που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$v_b = \frac{1}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} d\zeta \int_{x_L(\zeta)}^{x_T(\zeta)} \frac{\gamma_z(\xi, \zeta)(x - \xi)}{((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\xi \quad (38)$$

$$v_f = -\frac{1}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} d\zeta \int_{x_L(\zeta)}^{\infty} \frac{\gamma_x(\xi, \zeta)(z - \zeta)}{((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\xi \quad (39)$$

Η εξίσωση (29) μαζί με τις (37), (38), (39), και με την (30) και τη συνθήκη Kutta στο $x = x_T(z)$ ορίζουν ένα πρόβλημα για τις δύο συνιστώσες γ_x, γ_z , το οποίο μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά.

Είναι διδακτικό να θεωρήσουμε την περίπτωση λεπτής διαδιάστατης υδροτομής. Στην περίπτωση αυτή x_L, x_T είναι σταθερές με $c = x_T - x_L$, όπου c είναι η χορδή, και είναι ανεξάρτητη του z . Επίσης η στροβιλότητα γ_z είναι ανεξάρτητη του z . Κατά συνέπεια έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = 0$$

Επειδή $\gamma_x = 0$ στο άκρο πρόσπτωσης συμπεραίνουμε ότι είναι παντού μηδέν, και επομένως $v_f = 0$. Για το v_b έχουμε ότι:

$$v_b = \frac{1}{4\pi} \int_{x_L}^{x_T} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_z(\xi)(x - \xi)}{((x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} d\zeta = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_L}^{x_T} \frac{\gamma_z(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

Όπου μεταχειριστήκαμε τον μετασχηματισμό $\zeta = z + \psi |x - \xi|$, και το ότι $\int_{-\infty}^{\infty} (1/(1 + \psi^2))^{3/2} d\psi = 2$. Το πρόβλημα ανάγεται δηλαδή (μαζί με την συνθήκη Kutta) στο γραμμικό δισδιάστατο πρόβλημα ροής γύρω από λεπτή υδροτομή.

Επιστρέφοντας στο τριδιάστατο πρόβλημα, παρατηρούμε ότι, παρά την απλοποίηση που επέφερε η γραμμικοποίηση του προβλήματος, επίλυση των ανωτέρω εξισώσεων είναι δυνατή μόνο αριθμητικά. Αυτό έχει γίνει στο παρελθόν από διάφορους ερευνητές αλλά είναι πέρα από τα όρια του παρόντος μαθήματος. Θα συζητήσουμε μια απλούστερη θεωρία, την *θεωρία της φέρουσας γραμμής*, η οποία ανάγει το πρόβλημα της ροής γύρω από πτέρυγα στην επίλυση μιας σειράς διδιάστατων προβλημάτων ροής γύρω από λεπτές υδροτομές. Το βασικό πλεονέκτημα της θεωρίας αυτής είναι ότι καταλήγει σε απλές σχέσεις για την άνοση και την επαγόμενη αντίσταση, που δίνουν ταυτόχρονα και ικανοποιητική ακρίβεια. Η θεωρία της φέρουσας γραμμής αναπτύχθηκε από τον Prandtl.

2.4 Θεωρία της φέρουσας γραμμής

2.4.1 Γενικά

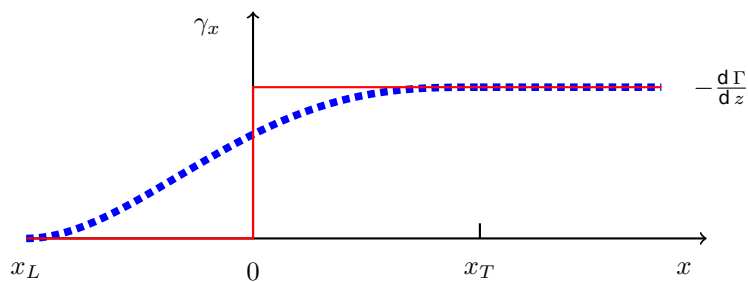
Θεωρούμε μια πτέρυγα με κατανομή κυκλοφορίας $\Gamma(z)$ κατά το άνοιγμά της. Η θεωρία της φέρουσας γραμμής εισάγει τις εξής επιπλέον παραδοχές (επιπλέον από αυτές της γραμμικής θεωρίας):

Για τον υπολογισμό της επαγόμενης ταχύτητας από την προσδεσμένη στροβιλότητα σε τομή παράλληλη με το επίπεδο $x-y$ υποθέτουμε ότι είναι ίση με την επαγόμενη ταχύτητα δισδιάστατης υδροτομής με χορδή ίση με την τοπική χορδή $c = x_T(z) - x_L(z)$. Εχουμε κατά συνέπεια ότι:

$$v_b(x, z) \approx -\frac{1}{2\pi} \int_{x_L}^{x_T} \frac{\gamma_z(\xi, z)}{\xi - x} d\xi \quad (40)$$

Για την υπολογισμό της επαγόμενης ταχύτητας από την ελευθερη στροβιλότητα, υποθέτουμε ότι η ελευθερη στροβιλότητα αποκτά απότομα την τελική της τιμή για θετικές τιμές του x , ενώ έχει μηδενική τιμή για αρνητικές τιμές του x , δηλαδή:

$$\gamma_x = \begin{cases} -\frac{d\Gamma}{dz}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (41)$$



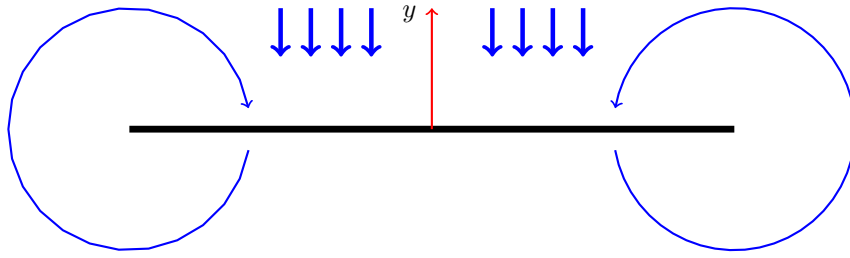
Σχήμα 8: Σχήμα για την μεταβολή της πυκνότητας στροβιλότητας γ_x σύμφωνα με τις παραδοχές της θεωρίας φέρουσας γραμμής. Διακεκομμένη μπλε γραμμή: Πραγματική μεταβολή. Κόκκινη συνεχής γραμμή: Εξίσωση (41).

Για την επαγόμενη ταχύτητα που υπολογίζεται με βάση την προηγούμενη παραδοχή υποθέτουμε επι πλεον ότι δεν μεταβάλλεται σημαντικά κατά το μήκος της χορδής. Μπορούμε να υποθέσουμε επομένως ότι η επαγόμενη ταχύτητα είναι σταθερή σε όλη την χορδή και ίση με την τιμή της στην θέση $x = 0$:

$$v_f(x, z) \approx v_f(0, z) \quad (42)$$

Η τελευταία παραδοχή σημαίνει ότι η μοναδικη επιδραση της ελευθερης στροβιλότητας είναι η εκτροπή της εξωτερικής ροής με την προσθηκη μιας μικρής συνιστώσας της ταχύτητας στην y κατεύθυνση v^* ίσης με την επαγόμενη ταχύτητα $v_f(0, z)$.

Η συνισταμένη εξωτερική ταχύτητα, που προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της εξωτερικής ροής U και της επαγόμενης ταχύτητας από την ελευθερη στροβιλότητα, έχει συνιστώσες



Σχήμα 9: Σχηματική παράσταση του κατωρεύματος λόγω της στροβιλότητας στον ομόρου της πτέρυγας. Το σχήμα παρουσιάζει μία όψη παρατηρητή που βρίσκεται πίσω από την πτέρυγα.

κατά x, y, z αντίστοιχα $U, v^*, 0$. Επειδή $|v^*| \ll U$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας της εξωτερικής ροής είναι ίσο με U , αλλά το διάνυσμα της είναι κεκλιμένο ως προς τον άξονα x κατά την γωνία εκτροπής α^* :

$$\alpha^* = -\frac{v^*}{U} \quad (43)$$

Το αρνητικό πρόσημο στην (43) χρησιμοποιείται για να έχουμε θετική γωνία εκτροπής. Επομένως η γωνία πρόσπτωσης της διατομής της πτέρυγας θα υποστεί μια μείωση και θα γίνει $\alpha - \alpha^*$. (Σημειώνουμε ότι η κάθετη επαγόμενη ταχύτητα v^* λεγεται κατώρευμα (downwash)).

Κατά συνέπεια έχουμε να λύσουμε μια σειρά από δισδιάστατα προβλήματα. Η δύναμη ανά μονάδα πλάτους στην πτέρυγα είναι ως γνωστόν ίση με $-\rho U \Gamma(z)$. (Η κυκλοφορία Γ λεγεται γι'αυτό τον λογο και «φόρτιση» της πτέρυγας). Οπότε η δύναμη, dL^* , σε μία απειροστή λωρίδα της πτέρυγας πλάτους dz είναι ίση με:

$$dL^* = -\rho U \Gamma(z) dz \quad (44)$$

Η δύναμη dL^* είναι κάθετη προς την συνισταμένη ταχύτητα $U, v^*, 0$. Αναλύουμε την δύναμη dL^* σε μια συνιστώσα κατά τον άξονα των y , που συμβολίζουμε με dL , και μια κατά τον άξονα των x , που συμβολίζουμε με dD_i . Προφανώς έχουμε ότι $dL = dL^* \cos \alpha^*$, και $dD_i = dL^* \sin \alpha^*$. Επειδή η γωνία εκτροπής είναι μικρή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$dL \approx dL^*, \quad dD_i \approx dL^* \alpha^* \quad (45)$$

Οπου η γωνία α^* έχει εκφραστεί σε ακτίνια. Οι συνολικές δυνάμεις στην πτέρυγα θα υπολογιστούν ολοκληρώνοντας ως προς z τις εξισώσεις (45).

Η συνιστώσα L , που είναι κάθετη προς την ταχύτητα στο άπειρο, είναι η δυναμική άνωση, και η συνιστώσα D_i , που είναι παράλληλη προς την ταχύτητα στο άπειρο λεγεται επαγόμενη αντίσταση. Ενεργειακά η ύπαρξη της επαγόμενης αντίστασης εξηγείται από το ότι η ισχυς που παράγει η τελευταία διατίθεται για την κινητική ενέργεια του ρευστού που συνεπάγεται δημιουργία του φύλλου δινών πίσω από την πτέρυγα.

2.4.2 Υπολογισμός της επαγόμενης ταχύτητας

Εφαρμόζοντας τις απλοποιητικές παραδοχές της θεωρίας φέρουσας γραμμής στην εξίσωση (39) η κάθετη επαγόμενη ταχύτητα λόγω της ελευθερης στροβιλότητας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$v_f = \frac{1}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} \frac{d\Gamma}{d\zeta}(z-\zeta) d\zeta \int_0^\infty \frac{1}{(\xi^2 + (z-\zeta)^2)^{3/2}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-s/2}^{s/2} \frac{d\Gamma}{d\zeta} \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \quad (46)$$

Στην απόδειξη της (46) κάναμε την αντικατάσταση $\xi = |z - \zeta| \psi$, και χρησιμοποιήσαμε το ότι $\int_0^\infty 1/(1 + \psi^2)^{3/2} d\psi = 1$.

Για τον υπολογισμό του ανωτέρω ολοκληρώματος κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις:

$$z = \frac{s}{2} \cos \theta \quad \zeta = \frac{s}{2} \cos \phi \quad (47)$$

όπου θ και ϕ μεταβάλλονται μεταξύ 0 και π .

Με τις αντικαταστάσεις αυτές και, παρατηρώντας ότι $(d\Gamma/d\zeta) d\zeta = (d\Gamma/d\phi) d\phi$, έχουμε:

$$v_f = \frac{1}{2\pi s} \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\phi} \frac{1}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi \quad (48)$$

Θεωρώντας την κυκλοφορία Γ σαν συνάρτηση της μεταβλητής ϕ μπορούμε να την παραστήσουμε με μια ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα 0 έως π :

$$\Gamma(\phi) = -2Us \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\phi \quad (49)$$

όπου $a_n, n = 1, 2, \dots$ είναι οι συντελεστές της σειράς. Επιλέξαμε ημιτονική σειρά Fourier αντί για συνημιτονική επειδή η κυκλοφορία Γ μηδενίζεται στα δύο ακροτερόγεια. Η ποσότητα $2Us$ έχει εισαχθεί για να είναι οι συντελεστές της σειράς αδιάστατα μεγέθη. Οι συντελεστές συνδέονται με την κυκλοφορία με την σχέση:

$$a_n = -\frac{1}{\pi Us} \int_0^\pi \Gamma(\phi) \sin n\phi d\phi \quad (50)$$

Η κυκλοφορία Γ είναι άγνωστη, οπότε και οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι επίσης άγνωστοι. Σημειώνουμε ότι για πτέρυγες συμμετρικές ως προς το επίπεδο $x - y$ η κυκλοφορία Γ είναι άρτια συνάρτηση του z : $\Gamma(z) = \Gamma(-z)$. Η σχέση συμμετρίας γράφεται συναρτήσεως της μεταβλητής θ στην μορφή: $\Gamma(\theta) = \Gamma(\pi - \theta)$. Επομένως από την εξίσωση (50) βλέπουμε ότι η σειρά θα Fourier θα περιέχει μόνο τους συντελεστές περιττής τάξης.

Αντικαθιστούμε την έκφραση για την κυκλοφορία Γ στο ολοκλήρωμα για την επαγόμενη ταχύτητα και έχουμε:

$$v^* = -\frac{U}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\phi \frac{1}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = -\frac{U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \int_0^\pi \frac{\cos n\phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi =$$

$$= -U \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (51)$$

Γιά να καταλήξουμε στην εξίσωση (51) μεταχειριστήκαμε τα ολοκληρώματα Glauert, που είχαμε συναντήσει και στην θεωρία λεπτών υδροτομών:

$$G_n(\theta) = \int_0^\pi \frac{\cos n\phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (52)$$

Από το κατώρευμα v^* βρισκουμε και την γωνία εκτροπής της ροής α^* :

$$a^* = -\frac{v^*}{U} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (53)$$

Οπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όταν $a_n = 0$ για $n \geq 2$. Στην περίπτωση αυτή η μεταβολή της φόρτισης είναι ημιτονοειδής ως προς την μεταβλητή θ , ή, ισοδύναμα, ελλειπτική ως προς την μεταβλητή z . Τότε οι εκφράσεις για την κάθετη επαγόμενη ταχύτητα και την γωνία εκτροπής απλοποιούνται ως εξής:

$$v^* = U a_1 = \text{σταθερή} \quad (54)$$

$$a^* = a_1 = \text{σταθερή} \quad (55)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η γωνία εκτροπής της ροής είναι στην περίπτωση ελλειπτικής φόρτισης σταθερή σε όλο το άνοιγμα της πτέρυγας.

2.4.3 Υπολογισμός της δυναμικής άνωσης και της επαγόμενης αντίστασης

Η ολική άνωση βρίσκεται με ολοκλήρωση της τοπικής άνωσης ανά μονάδα πλάτους κατά το άνοιγμα της πτέρυγας:

$$\begin{aligned} L &= - \int_{-s/2}^{s/2} \rho U \Gamma dz = -\rho U \frac{s}{2} \int_0^\pi \Gamma \sin \theta d\theta = \\ &= \rho U^2 s^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Από που προκύπτει ότι:

$$L = \frac{\pi a_1}{2} \rho U^2 s^2 \quad (56)$$

καθώς μόνο ο όρος $n = 1$ της σειράς δίνει μη μηδενικό ολοκλήρωμα.

Ο συντελεστής άνωσης της πτέρυγας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C_L = \frac{2L}{\rho U^2 A} = \pi a_1 \frac{s^2}{A} = \pi a_1 (AR) \quad (57)$$

όπου A είναι η επιφάνεια και (AR) είναι ο λόγος επιμήκους της πτέρυγας.

Η επαγόμενη αντίσταση της πτέρυγας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$D_i = \int_{-s/2}^{s/2} (\rho U \Gamma) \alpha^* dz = \rho U^2 s^2 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\sin(m\theta)}{\sin\theta} \right) d\theta$$

Αναπτύσσοντας το γινόμενο των δύο σειρών και, εναλλάσσοντας την ολοκλήρωση με την άθροιση, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} D_i &= \rho U^2 s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n a_n a_m \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho U^2 s^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^2 \end{aligned} \quad (58)$$

Όπου μεταχειριστήκαμε την σχέση:

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (59)$$

Ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης, C_{Di} , δίνεται από την εξίσωση:

$$C_{Di} = \frac{2D_i}{\rho U^2 A} = \pi a_1^2 (AR) \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{a_n^2}{a_1^2} \right) \quad (60)$$

Εκφράζουμε τον συντελεστή C_{Di} συναρτήσει του συντελεστή C_L και αντικαθιστώντας παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για τον συντελεστή επαγόμενης αντίστασης:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi (AR)} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{a_n^2}{a_1^2} \right) \quad (61)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι η ελλειπτική κατανομή της φόρτισης κατά το άνοιγμα δίνει τον ελάχιστο συντελεστή επαγόμενης αντίστασης για δεδομένο συντελεστή άνωσης. Η ελλειπτική φόρτιση είναι κατά συνέπεια η βέλτιστη.

2.4.4 Συσχέτιση του τρισδιάστατου με τον δισδιάστατο συντελεστή άνωσης

Θεωρούμε πτέρυγα με σταθερή γωνία πρόσπτωσης σε όλο της το άνοιγμα. Μιά τέτοια πτέρυγα λεγεται ευθύγραμμη. Θεωρούμε επίσης ότι όλες οι τομές της πτέρυγας από επίπεδα z =σταθερό είναι γεωμετρικά όμοιες (δηλ. προέρχονται από την ίδια αδιαστατη διατομή), οπότε έχουν όλες την ίδια γωνία μηδενικής άνωσης α_0 . Σύμφωνα με τις υποθέσεις της θεωρίας φέρουσας γραμμής, η τοπική άνωση σε κάθε τομή της πτέρυγας μπορεί να υπολογιστεί από την δισδιάστατη θεωρία λεπτών υδροτομών, αλλά με την εξωτερική ροή τροποποιημένη κατά την γωνία α^* .

Από την διδιάστατη θεωρία λεπτών υδροτομών ξέρουμε ότι ο τοπικός συντελεστής άνωσης $C_{L\ell}$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C_{L\ell} = 2\pi(\alpha - \alpha_0 - a^*) = 2\pi(\alpha - \alpha_0 + \frac{v^*}{U}) \quad (62)$$

Επειδή η άνωση ανά μονάδα πλάτους είναι ίση με $-\rho U\Gamma$ έχουμε την έναλλακτική έκφραση για τον τοπικό συντελεστή άνωσης:

$$C_{L\ell} = -\frac{2\rho U\Gamma}{\rho U^2 c} = -\frac{2\Gamma}{Uc} \quad (63)$$

όπου $c(z)$ είναι η τοπική χορδή της πτέρυγας. Εξισώνουμε τις εκφράσεις στις (62), (63) και αντικαθιστούμε τις εκφράσεις για την φόρτιση και την γωνία εκτροπής από το προηγούμενο κεφάλαιο, και καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\frac{4s}{c} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) = 2\pi(\alpha - \alpha_0) - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \quad (64)$$

Ισοδύναμα η εξίσωση (64) γράφεται ως εξής:

$$4s \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \sin\theta + 2\pi c \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin(n\theta) = 2\pi c (\alpha - \alpha_0) \sin\theta \quad (65)$$

Η εξίσωση (65) ισοδυναμεί με ένα σύστημα από άπειρες γραμμικές εξισώσεις για τους συντελεστές a_n . Αν όμως κρατήσουμε τους N πρώτους όρους της σειράς Fourier, και εφαρμόσουμε την εξίσωση (64) σε N σημεία με συντεταγμένες $z_i, i = 1, 2, \dots, N$ (και αντίστοιχα $\theta_i, i = 1, 2, \dots, N$) θα έχουμε ένα σύστημα N γραμμικών εξισώσεων για τους N συντελεστές:

$$\sum_{n=1}^N (4s \sin\theta_i + 2\pi c_i n) \sin(n\theta_i) a_n = 2\pi(\alpha - \alpha_0) c_i \sin\theta_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (66)$$

Όπου $c_i = c(z_i)$. Το σύστημα (66) μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τις σπάντα μεθόδους της Γραμμικής Αλγεβρας.

Το πρόβλημα απλοποιείται πολύ για την περίπτωση που $c = c_0 \sin\theta$, όπου c_0 είναι η μέγιστη χορδή της πτέρυγας. Όταν ισχύει αυτό έχουμε ότι $c = c_0 \sin\theta = c_0 (1 - (2z/s)^2)^{1/2}$, δηλαδή η πτέρυγα έχει ελλειπτικό σχήμα με άξονες c_0 και s . Τότε η εξίσωση (64) γίνεται:

$$\frac{4s}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) = 2\pi(\alpha - \alpha_0) \sin\theta - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin(n\theta) \quad (67)$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των όρων $\sin(n\theta)$ στα δύο μέλη και καταλήγουμε στις εξής σχέσεις:

$$\frac{4s}{c_0} a_1 = 2\pi(\alpha - \alpha_0 - a_1) \quad (68)$$

$$\frac{4s}{c_0} n a_n = n a_n \quad (69)$$

Από τις (68), (69) προκύπτει ότι:

$$a_n = \begin{cases} \frac{2\pi(\alpha - \alpha_0)}{4s/c_0 + 2\pi} & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases} \quad (70)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι, για το είδος της πτέρυγας που θεωρούμε σε αυτό το κεφάλαιο, ελλειπτικό σχήμα συνεπάγεται και ελλειπτική φόρτιση.

Αντικαθιστούμε την τιμή του a_1 στην εξίσωση που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τον ολικό συντελεστή άνωσης C_L και καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση:

$$C_L = \frac{2\pi(\alpha - \alpha_0)}{1 + 2/(AR)} \quad (71)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι, επειδή η επιφάνεια A πτέρυγας ελλειπτικού σχήματος είναι ίση με $\pi c_0 s/4$, ο λόγος επιμήκους δίνεται από την σχέση:

$$(AR) = \frac{4 s}{\pi c_0} \quad (72)$$

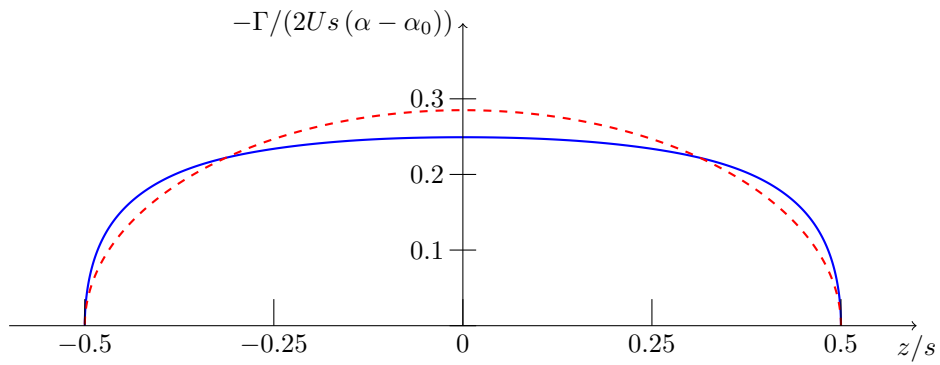
Ο συντελεστής άνωσης τρισδιάστατης πτέρυγας είναι μικρότερος από τον συντελεστή της διδιάστατης υδροτομής που αντιστοιχεί στην τομή της πτέρυγας. Η μείωση οφείλεται κατά κύριο λόγο στην ύπαρξη του κατωρεύματος, το οποίο δημιουργείται από το φύλλο στροβιλότητας που ακολουθεί την πτέρυγα.

Ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης μπορεί τώρα να υπολογιστεί από την εξίσωση (61).

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi (AR)} \quad (73)$$

Η εξίσωση (73) δείχνει ότι ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης είναι ανάλογος με το τετράγωνο του συντελεστή άνωσης. Κατά συνέπεια αύξηση της άνωσης οδηγεί σε δυσανάλογη αύξηση της αντίστασης. Καθώς η γωνία πρόσπτωσης αυξάνει, η επαγόμενη αντίσταση ξεπερνά την αντίσταση λόγω τριβής και γίνεται η σημαντικότερη συνιστώσα της συνολικής αντίστασης.

Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις (71) και (73) ισχύουν με αρκετά καλή ακρίβεια και για μη ελλειπτικά σχήματα, όπου η φόρτιση δεν είναι ελλειπτική. Για παράδειγμα, για ορθογωνική πτέρυγα με λόγο επιμήκους ίσο με πέντε, η εξίσωση (71) προβλέπει συντελεστή άνωσης ίσο με $4.48(\alpha - \alpha_0)$, ενώ η «ακριβής τιμή», που προκύπτει από την αριθμητική επίλυση του συστήματος (66), είναι ίση με $4.31(\alpha - \alpha_0)$, έχουμε δηλαδή ένα λάθος γύρω στο 4%. Στο σχήμα 10 παρουσιάζεται η φόρτιση της ορθογωνικής πτέρυγας κατά το άνοιγμα της, όπως προκύπτει από την αριθμητική επίλυση του συστήματος (66) (συνεχής γραμμή), και όπως προκύπτει υποθέτοντας ελλειπτική φόρτιση (διακεκομμένη γραμμή). Όπως βλέπουμε, η φόρτιση στην ορθογωνική πτέρυγα παρουσιάζει μεγαλύτερες κλίσεις στις περιοχές κοντά στα ακροπερύγια απ' ό,τι η ελλειπτική φόρτιση, με αποτέλεσμα να υπάρχει μεγαλύτερη κίνηση του ρευστού γύρω από το ακροπερύγιο, και επομένως ισχυρότερες δίνες ακροπερυγίων. Σε αυτό οφείλεται η μειωμένη άνωση και αυξημένη επαγόμενη αντίσταση στην ορθογωνική πτέρυγα εν σχέσει με την ελλειπτική.



Σχήμα 10: Φόρτιση ορθογωνικής πτέρυγας με λόγο επιμήκους ίσο με πέντε κατά το άνοιγμά της: “Ακριβής λύση” (συνεχής γραμμή), και προσεγγιστική λύση υποθέτοντας ελλειπτική φόρτιση (διακεκομμένη γραμμή).

ΑΣΚΗΣΗ

Γιά ελλειπτική φόρτιση να εκφραστεί η γωνία εκτροπής συναρτήσει του συντελεστή C_L .

ΛΥΣΗ

Γιά ελλειπτική φόρτιση η γωνία εκτροπής είναι σταθερή σε όλο το άνοιγμα της πτέρυγας. Επομένως έχουμε ότι:

$$\alpha^* = \frac{D_i}{L} = \frac{C_{Di}}{C_L} = \frac{C_L}{\pi(AR)}$$

Η γωνία εκτροπής είναι δηλαδή κατ’ ευθείαν ανάλογη με τον συντελεστή άνωσης, και αντιστρόφως ανάλογη με τον λόγο επιμήκους της πτέρυγας.