ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Διδάσκοντες: Γ. Τριανταφύλλου και Κ. Μπελιμπασάκης (kbel@fluid.mech.ntua.gr)

Ροές με δυναμικό σε δύο και τρεις διαστάσεις.

Χρήση μιγαδικών συναρτήσεων, θεωρήματα Blasius.

Διδιάστατη ροή γύρω από υδροτομές.

Εξισώσεις στροβιλότητας. Νόμοι των στροβίλων.

Τριδιάστατη ροή γύρω από πτέρυγα: Δίνες ακροπτερυγίων, επαγόμενη αντίσταση.

Προσεγγιστικός υπολογισμός άνωσης και επαγόμενης αντίστασης με θεωρία φέρουσας γραμμής.

Δυνάμεις σε επιταχυνόμενα σώματα.

Γραμμική θεωρία κυματισμών στην επιφάνεια της θάλασσας.
Απλοί αρμονικοί κυματισμοί, εξίσωση διασποράς, ενέργεια κυματισμών.
Τρισδιάστατα κύματα και γενική κίνηση της θάλασσας.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ -- Θεμελιώδη πεδιακά μεγέθη. Βασικές παραδοχές

Το υλικό πεδίο ροής $\{\delta m\} = \{\delta m_{\boldsymbol{r}}(t),\ \ \boldsymbol{r} \in D(t)\}$, **ως σύνολο υλικών στοιχείων,** είναι ένα μηχανικό σύστημα και άρα διέπεται από τους γενικούς νόμους της μηχανικής.
Κάθε υλικό στοιχείο, χαρακτηρίζεται από

- Την ταχύτητα του $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t) = \boldsymbol{U}(x,y,z;t)$,

- Την πυκνότητά του $\rho = \rho(\boldsymbol{r};t) = \rho(x,y,z;t)$,

και άλλες ιδιότητες, οι οποίες δεν θα μας απασχολήσουν εδώ.
Πρέπει να τονισθεί ότι η ταχύτητα $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)$, η πυκνότητα $\rho(\boldsymbol{r};t)$ κ.λπ. αναφέρονται (από φυσική άποψη) στο υλικό σημείο $\delta m_{\boldsymbol{r}}(t)$, και όχι στο γεωμετρικό σημείο $\boldsymbol{r}$.

Γενικώς, πάνω στα υλικά στοιχεία αναπτύσσονται δυνάμεις με ένταση (ανά μονάδα μάζας)

$$\boldsymbol{F}_{\text{ολ}} = \boldsymbol{F}_{\text{ολ}}(\boldsymbol{r};t) = \boldsymbol{F}_{\text{ολ}}(x,y,z;t).$$

Οι δυνάμεις αυτές αποτελούνται τόσο από **εξωτερικές δυνάμεις** (ασκούμενες από διάφορα αίτια ανεξάρτητα του ρευστού), όσο και από **εσωτερικές δυνάμεις**, οφειλόμενες στην αλληλεπίδραση των υλικών στοιχείων του ρευστού:

$$\boldsymbol{F}_{\text{ολ}}(\boldsymbol{r};t)=\boldsymbol{F}_{\varepsilon\xi}(\boldsymbol{r};t)+\boldsymbol{F}_{\varepsilon\sigma}(\boldsymbol{r};t).$$

Συνήθως στη ρευστομηχανική λαμβάνουμε υπ’ όψιν μόνο την επιφανειακή αλληλεπίδραση των υλικών στοιχείων, οπότε οι **εσωτερικές δυνάμεις εκφράζονται με τη βοήθεια του τανυστή των τάσεων**

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\boldsymbol{r};t)=\sigma_{ij}(x,y,z;t),\, i,j=1,2,3,$$ σε κάθε σημείο του γεωμετρικού πεδίου ροής.

Οι γενικές εξισώσεις κίνησης οποιουδήποτε ρευστού διατυπώνονται με τη βοήθεια των ανωτέρω (και, σε ορισμένες περιπτώσεις, και άλλων) πεδιακών μεγεθών, και εκφράζουν τους ακόλουθους γενικούς φυσικούς νόμους:

- **Ισολογισμό της μάζας**
- **Ισολογισμό της ορμής**
- **Ισολογισμό της ενέργειας**
- **Ισολογισμό της στροφορμής**
- Ισολογισμό (ή ρυθμό αύξησης) της εντροπίας

του κάθε υλικού στοιχείου. Πέραν των ανωτέρω, απαιτούνται επίσης και

- **Καταστατικές εξισώσεις**

οι οποίες συνδέουν τις παραμορφώσεις (ή/και τους ρυθμούς των παραμορφώσεων) των υλικών στοιχείων με τις αναπτυσσόμενες εσωτερικές δυνάμεις, δηλαδή με τον τανυστή των τάσεων σ_{ij}.

Βασικές παραδοχές

Οι **βασικές παραδοχές**, οι οποίες θα καθορίσουν τη μορφή των εξισώσεων κίνησης του ρευστού που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, είναι οι ακόλουθες:

Το ρευστό θεωρείται

- **Υγρό**, και άρα μπορεί να έχει **ελεύθερη επιφάνεια**,
- **Ασυμπίεστο**, και μάλιστα έχει σταθερή πυκνότητα,
- **Μη-συνεκτικό**, οπότε οι εσωτερικές δυνάμεις οφείλονται μόνο σε ορθές τάσεις, δηλαδή $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker

Η κυριότερη συνέπεια των ανωτέρω παραδοχών είναι ότι

Οι θερμοδυναμικές ιδιότητες του ρευστού (θερμοκρασία, εντροπία) αποσυζεύγνυνται από τις μηχανικές ιδιότητές του, και **δεν χρειάζεται πλέον να ληφθούν υπ’ όψιν.**

Επίσης

- **Ο ισολογισμός της ενέργειας αναφέρεται μόνο στη μηχανική ενέργεια**, και είναι συνέπεια των εξισώσεων της ορμής (και όχι ανεξάρτητη εξίσωση).

- **Ο ισολογισμός της στροφορμής ισχύει ταυτοτικά**.

- **Οι παραδοχές του *ασυμπίεστου* και του *μη-συνεκτικού* αποτελούν *καταστατικές παραδοχές*,** οι οποίες υποκαθιστούν τις καταστατικές εξισώσεις.

Επομένως, οι φυσικές εξισώσεις που απομένουν να χρησιμο-ποιηθούν εν προκειμένω είναι μόνο οι εξής δύο:

- **Ισολογισμός της ορμής, και**
- **Ισολογισμός της μάζας,**

των υλικών στοιχείων του ρευστού. Αντιστοίχως, τα πεδιακά μεγέθη τα οποία ενδιαφέρουν και εμπλέκονται στις εξισώσεις αυτές είναι επίσης δύο:

- Η ταχύτητα $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t) = (u(\boldsymbol{r};t), v(\boldsymbol{r};t), w(\boldsymbol{r};t))$, και

- Η πίεση $p = p(\boldsymbol{r};t)$.

Τέλος, όσον αφορά τις εσωτερικές δυνάμεις (ανά μονάδα όγκου του ρευστού) έχουμε πλέον

$$\boldsymbol{F}_{\varepsilon\sigma}(\boldsymbol{r};t) = -\nabla p(\boldsymbol{r};t) \;\rightarrow\; \boldsymbol{F}_{o\lambda}(\boldsymbol{r};t) = -\nabla p(\boldsymbol{r};t) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r};t)$$

Γραμμές ροής του πεδίου ροής και τροχιές των υλικών στοιχείων του υγρού

Μία γραμμή ***γ***, κειμένη εντός του πεδίου ροής σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t_o, θα λέγεται ***γραμμή ροής*** αν, σε κάθε σημείο $\boldsymbol{r}$ αυτής $(\boldsymbol{r} \in \gamma)$, το διάνυσμα της πεδιακής ταχύτητας $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)$ εφάπτεται στη γ .

Ο ανωτέρω ορισμός οδηγεί στη σχέση

$$d\gamma \; || \; \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t),$$

όπου $d\gamma$ είναι το στοιχειώδες τόξο επί της γ . Η σχέση (1) γράφεται αναλυτικότερα στη μορφή

$$\frac{dx}{u(x,y,z;t=t_o)} = \frac{dy}{v(x,y,z;t=t_o)} = \frac{dz}{w(x,y,z;t=t_o)}.$$

Οι εξισώσεις (1΄) αποτελούν ένα σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να εκφράσουμε δύο από τις τρείς πεδιακές μεταβλητές x,y,z , ως συναρτήσεις της τρίτης.

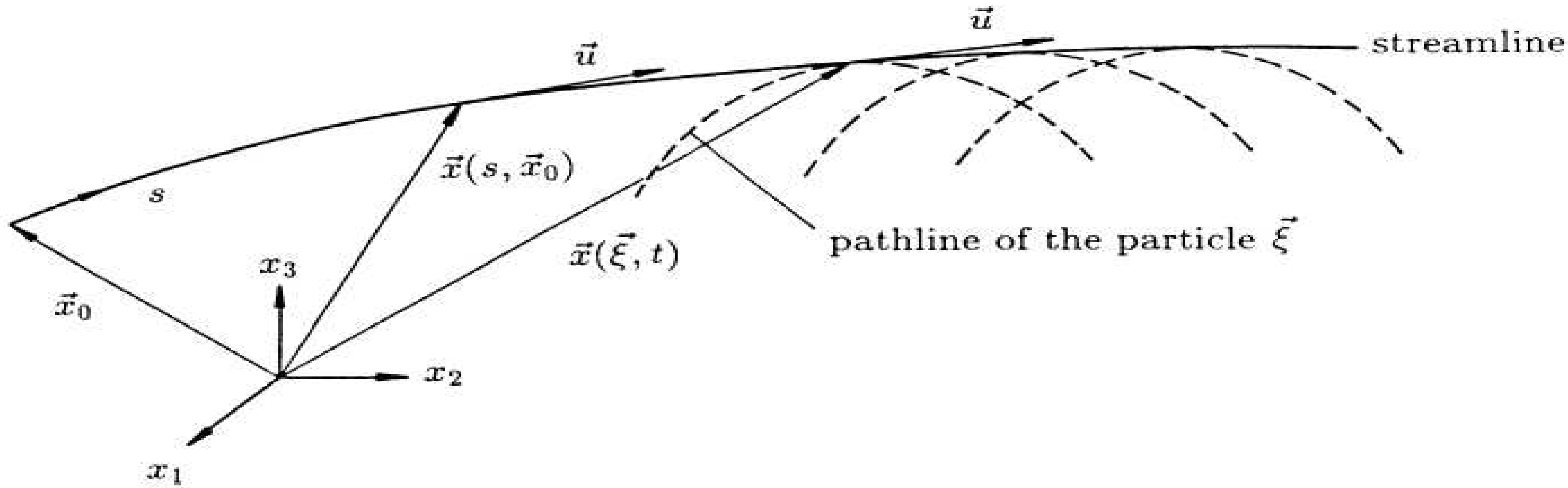
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x,y(x),z(x);t_o)}{u(x,y(x),z(x);t_o)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{w(x,y(x),z(x);t_o)}{u(x,y(x),z(x);t_o)}.$$

Εάν το πεδίο είναι μόνιμο, δηλαδή εάν $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$ για κάθε t, τότε προφανώς οι γραμμές ροής είναι ανεξάρτητες του χρόνου.

Εάν το πεδίο είναι μη-μόνιμο, τότε οι γραμμές ροής αλλάζουν από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις επιλύονται για κάθε χρονική στιγμή t, δηλαδή ο χρόνος θεωρείται ως μια παράμετρος από την οποία εξαρτώνται τόσο οι εξισώσεις, όσο και οι λύσεις τους:

$$y = y(x;t), z = z(x;t).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι γραμμές ροής δίδουν μια συνολική εικόνα του πεδίου ροής, σε κάθε χρονική στιγμή.



Τροχιές υλικών στοιχείων

Σε αντίθεση με τα ανωτέρω, ***η τροχιά ενός υλικού στοιχείου*** *του υγρού*, αναφέρεται σε συγκεκριμένο υλικό στοιχείο (και όχι στο πεδίο ροής γενικά), και ορίζεται, όπως και στην κλασσική μηχανική, ως το σύνολο των διαδοχικών θέσεων του υλικού στοιχείου δm_r στο χώρο, καθώς εξελίσσεται η ροή.

Ο ανωτέρω ορισμός οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση της τροχιάς του υλικού στοιχείου $\delta m_{\boldsymbol{r}}$:

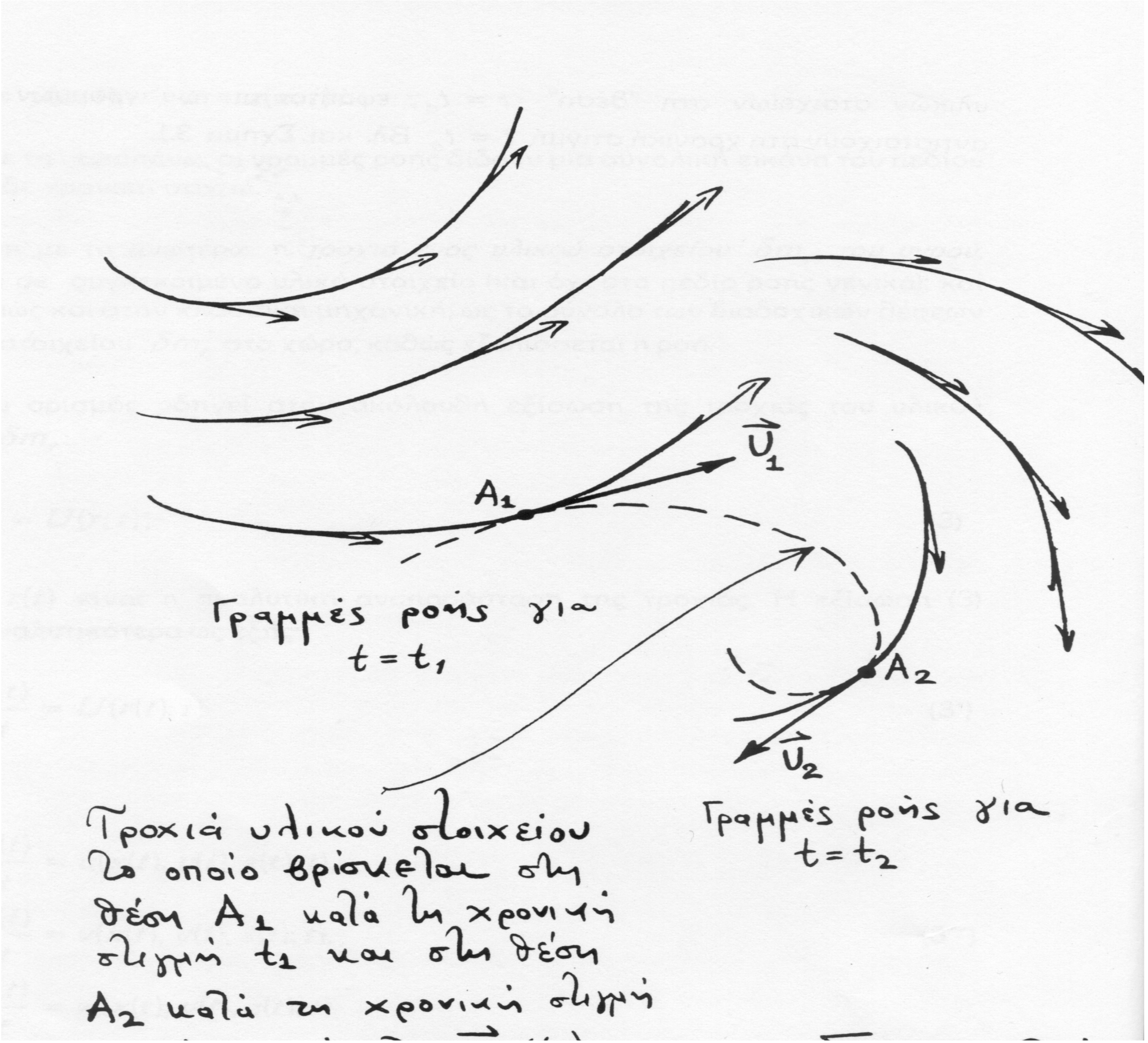
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t),$$

όπου $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ είναι η αναλυτική αναπαράσταση της τροχιάς. Η εξίσωση γράφεται αναλυτικότερα ως εξής:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(x(t),y(t),z(t);t), \qquad \frac{dy(t)}{dt} = v(x(t),y(t),z(t);t),$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = w(x(t),y(t),z(t);t).$$

Όταν η ροή είναι μόνιμη, οι τροχιές των υλικών στοιχείων του υγρού ταυτίζονται με τις γραμμές ροής. Όταν η ροή είναι μη-μόνιμη, τότε οι τροχιές είναι διαφορετικές από τις γραμμές ροής του πεδίου.
Πάντοτε όμως οι τροχιές των υλικών στοιχείων, εφάπτονται των γραμμών ροής που αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή $t = t_o$.

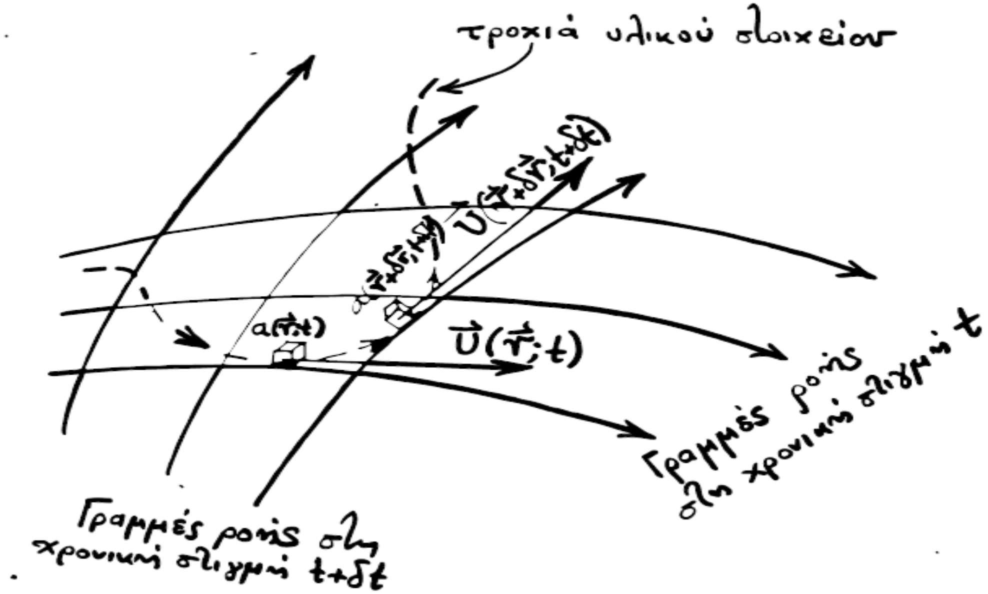

$\vec{U}_1$
A_1
Γραμμές ροής για
$t = t_1$
A_2
$\vec{U}_2$
Γραμμές ροής για
$t = t_2$
Τροχιά υλικού στοιχείου
το οποίο βρίσκεται στη
θέση A_1 κατά τη χρονική
στιγμή t_1 και στη θέση
A_2 κατά τη χρονική στιγμή

Χρονικός ρυθμός μεταβολής φυσικών χαρακτηριστικών του πεδίου ροής. Υλική παράγωγος

Έστω $a = a(\boldsymbol{r};t) = a(x,y,z;t)$ ένα οποιοδήποτε βαθμωτό φυσικό μέγεθος (π.χ. πίεση), το οποίο αναφέρεται στο υλικό στοιχείο $\delta m_{\boldsymbol{r}}(t)$, δηλ.στο υλικό στοιχείο που κατέχει τη θέση $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, τη χρονική στιγμή t. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το χρονικό ρυθμό μεταβολής του μεγέθους $a(\delta m_{\boldsymbol{r}}(t))$.

Μετά πάροδο χρόνου δt, το υλικό στοιχείο θα βρίσκεται στη θέση $\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r}$.

$$\delta m_{\boldsymbol{r}}(t) \xrightarrow{\delta t} \delta m_{\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}}(t+\delta t).$$



Κατά συνέπεια, ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους $a(\delta m_{\mathbf{r}}(t))$ (αναφερόμενου στο συγκεκριμένο υλικό στοιχείο δm) θα δίδεται από τη σχέση

$$\frac{Da(\mathbf{r};t)}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{a(\delta m_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}}(t+\delta t) - a(\delta m_{\mathbf{r}}(t))}{\delta t} =$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{a(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r};t+\delta t) - a(\mathbf{r};t)}{\delta t} =$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left(a(\mathbf{r};t) + \frac{\partial a(\mathbf{r};t)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{\partial a(\mathbf{r};t)}{\partial t}\delta t + \ldots - a(\mathbf{r};t) \right),$$

όπου $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} = \nabla$. Παίρνοντας το όριο για $\delta t \to 0$, η ανωτέρω σχέση γίνεται

$$\frac{Da(\mathbf{r};t)}{Dt} = \frac{\partial a(\mathbf{r};t)}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial a(\mathbf{r};t)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial a(\mathbf{r};t)}{\partial t} + \boldsymbol{U}(\mathbf{r};t) \cdot \nabla a(\mathbf{r};t).$$

Από την τελευταία βλέπουμε ότι ο **χρονικός ρυθμός μεταβολής βαθμωτών πεδιακών μεγεθών, αναφερόμενων στα υλικά στοιχεία του υγρού,** προκύπτει με εφαρμογή στο πεδιακό μέγεθος του διαφορικού τελεστή

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \left(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla\right)(\bullet)\,.$$

Ο διαφορικός τελεστής λέγεται ***υλική παράγωγος*** (*material derivative*).

Ο χρονικός ρυθμός μεταβολής διανυσματικού μεγέθους $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)$, αναφερόμενου στα υλικά στοιχεία του υγρού, βρίσκεται εύκολα, είτε εφαρμόζοντας τη σχέση σε κάθε συνιστώσα του . Το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{D\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)}{Dt} = \frac{\partial\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)}{\partial t} + \left(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)\,.$$

Μια πρώτη συνέπεια είναι ότι η επιτάχυνση του υλικού στοιχείου $\delta m_{\boldsymbol{r}}(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{D\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)}{Dt} = \frac{\partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)}{\partial t} + \left(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)\,.$$

Εξισώσεις κίνησης ασυμπίεστου μη-συνεκτικού υγρού

Οι θεμελιώδεις φυσικοί νόμοι που διέπουν την κίνηση του ασυμπίεστου, μη-συνεκτικού υγρού είναι: ο **ισολογισμός της ορμής (*εξισώσεις Euler*), και ο ισολογισμός της μάζας (*εξίσωση συνέχειας*).**

Εξισώσεις Euler: προκύπτουν με εφαρμογή του νόμου του Newton $\left(\boldsymbol{F} = m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} \right)$ σε κάθε υλικό στοιχείο του υγρού. Εάν $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ είναι ο όγκος του εξεταζόμενου υλικού στοιχείου (στοιχειώδους κύβου) και ρ η πυκνότητά του, τότε έχουμε

$$\rho \delta V \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\nabla p \delta V + \boldsymbol{F} \delta V ,$$

όπου $\boldsymbol{F}$ είναι η συνολική εξωτερική δύναμη ανά μονάδα όγκου που ασκείται στο στοιχειώδη κύβο. Διαιρώντας δια ρ παίρνουμε

$$\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\boldsymbol{F}}{\rho}, \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{U} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\boldsymbol{F}}{\rho}$$

Με τη βοήθεια της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}$

βρίσκουμε, θέτοντας $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{U} \rightarrow \nabla \boldsymbol{U}^2 = 2\boldsymbol{U} \times (\nabla \times \boldsymbol{U}) + 2(\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{U}$ και άρα

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{U} \times (\nabla \times \boldsymbol{U}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\boldsymbol{F}}{\rho}$$

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι οι εξωτερικές δυνάμεις ανά μονάδα μάζας $\rho^{-1}\boldsymbol{F} = \rho^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r};t)$ προκύπτουν από ένα *συντηρητικό πεδίο* και άρα εκφράζονται με τη βοήθεια ενός *δυναμικού* (δυναμικής ενέργειας)

$$\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r};t)}{\rho} = -\nabla\Omega(\boldsymbol{r};t).$$

Ειδικότερα, για τη μοντελοποίηση και μελέτη των υδάτινων επιφανειακών κυμάτων θεωρούμε ότι οι εξωτερικές δυνάμεις προέρχονται αποκλειστικά από ένα *ομογενές πεδίο βαρύτητας* (g)

$$\Omega = gz \quad \text{και άρα} \quad \nabla\Omega = g\boldsymbol{k}$$

Ο νόμος διατήρησης της ορμής γράφεται λοιπόν στη μορφή

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{U}\times(\nabla\times\boldsymbol{U}) = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Omega.$$

………………..**παραγωγή του Θεωρήματος του Bernoulli**.

Εξίσωση συνέχειας

Θεωρούμε ένα στοιχειώδη κύβο του υγρού ο οποίος, κατά τη χρονική στιγμή t, έχει πλευρές $\delta x(t), \delta y(t), \delta z(t)$ και όγκο $\delta V(t) = \delta x(t)\delta y(t)\delta z(t)$.

Δεδομένου ότι $\delta m = \rho \delta V(t)$ και $\rho = \rho_o = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$, ο ισολογισμός (εξίσωση διατήρης) της μάζας εκφράζεται από τη σχέση

$$\frac{D(\rho \delta V)}{Dt} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{D(\delta V)}{Dt} = 0.$$

Όμως, σύμφωνα με τη φυσική έννοια της υλικής παραγώγου (βλ. εδάφιο 4), θα είναι

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta V(t+\delta t) - \delta V(t)}{\delta t},$$

όπου $\delta V(t+\delta t)$ είναι ο όγκος του στοιχείου στο οποίο μετασχηματίζεται ο αρχικός στοιχειώδης κύβος, μετά πάροδο χρόνου δt. Σε πρώτη τάξη προσέγγισης ισχύει η σχέση

$$\delta V(t+\delta t) = \delta x(t+\delta t)\ \delta y(t+\delta t)\ \delta z(t+\delta t),$$

Όμως, το μήκος των ακμών $\delta x, \delta y, \delta z$, μεταβάλλεται αποκλειστικά και μόνο λόγω της διαφοράς των αντίστοιχων πεδιακών ταχυτήτων στα άκρα των ακμών. Οι διαφορές αυτές δίνονται, σε πρώτη τάξη, από

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x, \qquad \delta \upsilon = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\delta y, \qquad \delta w = \frac{\partial w}{\partial z}\delta z .$$

Με τη βοήθεια των ανωτέρω σχέσεων βρίσκουμε

$$\delta x(t+\delta t) = \delta x(t) + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x(t)\delta t = (1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t)\delta x(t),$$

$$\delta y(t+\delta t) = \delta y(t) + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\delta y(t)\delta t = (1+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\delta t)\delta y(t),$$

$$\delta z(t+\delta t) = \delta z(t) + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z(t)\delta t = (1+\frac{\partial w}{\partial z}\delta t)\delta z(t).$$

Κατά συνέπεια $$\delta V(t+\delta t) - \delta V(t) = (1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t)(1+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\delta t)(1+\frac{\partial w}{\partial z}\delta t)\delta V(t) \; - \; \delta V(t),$$

→ $$\delta V(t+\delta t) - \delta V(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta V(t)\delta t \; + \; \delta V(t) 0(\delta t^2)$$

→ $$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta V(t) = \nabla \cdot \boldsymbol{U}\delta V(t)$$

Άρα η **εξίσωση συνέχειας παίρνει τη μορφή** $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$.

Με τη βοήθεια της σχέσεως είναι πολύ εύκολο να διατυπώσουμε **την εξίσωση διατήρησης της μάζας** και στη γενική περίπτωση, όπου η πυκνότητα του υγρού μεταβάλλεται. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή η πρωτογενής εξίσωση διατήρησης της μάζας γράφεται στη μορφή

$$\frac{D\rho}{Dt}\delta V(t) + \rho \frac{D\delta V(t)}{Dt} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{\delta V(t)}\frac{D(\delta V(t))}{Dt} = 0 .$$

Εισάγοντας τη $\dfrac{D(\delta V)}{Dt} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\delta V(t) = \nabla \cdot \boldsymbol{U}\,\delta V(t)$ στην τελευταία παίρνουμε

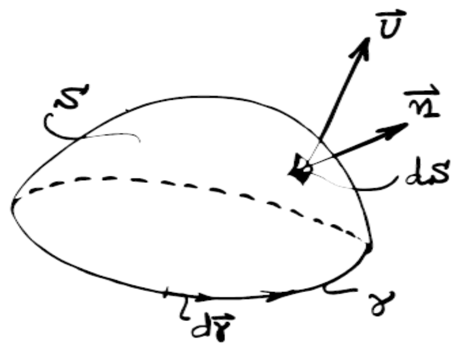
$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0$$

Συνέπειες των εξισώσεων κίνησης: Θεώρημα Kelvin, αστρόβιλη ροή, Θεώρημα Bernoulli

Στις εξισώσεις Euler περιέχεται η *στροβιλότητα* $rot\ \boldsymbol{U} = \nabla \times \boldsymbol{U}$ του πεδίου ροής. Το μέγεθος αυτό έχει πολύ μεγάλη φυσική σημασία, και χαρακτηρίζει σε μεγάλο βαθμό τη δυναμική συμπεριφορά του πεδίου ροής.

Κατ' αρχήν, μέσω του θεωρήματος του Stokes βλέπουμε ότι η στροβιλότητα $\nabla \times \boldsymbol{U}$ συνδέεται με την κυκλοφορία του πεδίου ταχύτητας $\boldsymbol{U}$ σε κλειστές καμπύλες

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n} ds = \oint_\ell \boldsymbol{U} \cdot d\ell$$



$$\iint_S (\nabla \times \vec{U}) \cdot \vec{n}\, ds = \oint_\gamma \vec{U} \cdot d\vec{\gamma}$$

Ένα άμεσο πόρισμα της σχέσης είναι ότι, σε ένα ομαλό πεδίο ροής, η στροβιλότητα είναι μηδέν αν και μόνον αν η κυκλοφορία κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης που βρίσκεται μέσα στο πεδίο είναι μηδέν.
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε

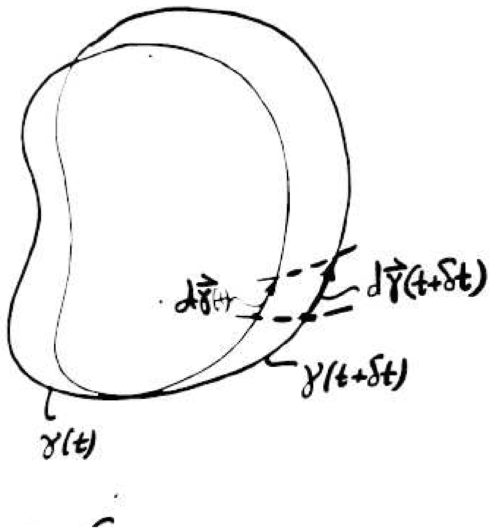
το ρυθμό μεταβολής της κυκλοφορίας κατά μήκος μιας *υλικής κλειστής καμπύλης* ℓ.

Θεώρημα Kelvin

Εάν ℓ είναι μια οποιαδήποτε υλική κλειστή καμπύλη, ευρισκόμενη εξ ολοκλήρου μέσα σε πεδίο ροής ρευστού το οποίο διέπεται από τις εξισώσεις Euler, με συντηρητικές εξωτερικές δυνάμεις $(\boldsymbol{F} = -\nabla \Omega)$, *τότε*

$$\frac{D}{Dt}\oint_{\ell} \boldsymbol{U} \cdot d\ell = 0 .$$

Δηλαδή, *η* ***τιμή της κυκλοφορίας κατά μήκος κάθε υλικής καμπύλης του πεδίου ροής διατηρείται σταθερή.***



Για να αποδείξουμε τη σχέση παρατηρούμε ότι $$\oint_{\ell} \boldsymbol{U} \cdot d\ell = \oint_{\ell} udx + \upsilon dy + wdz \, .$$

παρακολουθώντας την κίνηση των υλικών στοιχείων: $$\frac{D(udx)}{Dt} = \frac{Du}{Dt}dx + u\frac{D(dx)}{Dt} \, .$$

Όμως, βάσει των εξισώσεων Euler έχουμε $$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}p_{,x} - \Omega_{,x} \, .$$

Επειδή το στοιχείο $d\ell = (dx, dy, dz)$ κινείται μαζί με τα υλικά στοιχεία του ρευστού $\dfrac{D(dx)}{Dt} = du$

Ετσι $$\frac{D(udx)}{Dt} = \left(-\frac{1}{\rho}p_{,x} - \Omega_{,x}\right)dx + udu$$ Ομοίως $$\frac{D(\upsilon dy)}{Dt} = \left(-\frac{1}{\rho}p_{,y} - \Omega_{,y}\right)dy + \upsilon d\upsilon \, ,$$

και $$\frac{D(wdz)}{Dt} = \left(-\frac{1}{\rho}p_{,z} - \Omega_{,z}\right)dz + wdw \, .$$

Αθροίζοντας $$\frac{D}{Dt}\left(udx + \upsilon dy + wdz\right) \equiv \frac{D}{Dt}\left(\boldsymbol{U} \cdot d\ell\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\ell - \nabla \Omega \cdot d\ell + \frac{1}{2}d\boldsymbol{U}^2 \, .$$

Ολοκληρώνοντας κατά μήκος της καμπύλης ℓ, μεταξύ των σημείων A και B, βρίσκουμε

$$\frac{D}{Dt}\int_A^B \boldsymbol{U}\cdot d\ell = \left[-\frac{p}{\rho}-\Omega+\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^2\right]_A^B,$$

δεδομένου ότι $\nabla p\cdot d\ell = \partial p/\partial\ell$ είναι η παράγωγος της πίεσης κατά μήκος της καμπύλης ℓ, και ομοίως για το Ω.

Αν φανταστούμε τώρα ότι το σημείο B επανέρχεται στο A έχοντας διατρέξει την καμπύλη ℓ, τότε

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt}\oint_\ell \boldsymbol{U}\cdot d\ell = \left[-\frac{p}{\rho}-\Omega+\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^2\right]_A^A = 0,$$

Το γεγονός ότι το πεδίο εξωτερικών δυνάμεων είναι συντηρητικό, είναι ουσιώδες για την ισχύ του θεωρήματος του Kelvin.

Αστρόβιλη ροή, εξίσωση Laplace

Μια ροή (ένα πεδίο ροής) λέγεται *αστρόβιλη* (*αστρόβιλο*) αν ισχύει η σχέση $\nabla\times\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)=0$ παντού μέσα στο πεδίο.

Για ένα πεδίο ροής που διέπεται από τις εξισώσεις Euler με συντηρητικές εξωτερικές δυνάμεις, ισχύει η συνεπαγωγή

$$\nabla\times\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t=t_o)=0\Rightarrow\nabla\times\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)=0\,,\qquad \text{για κάθε } t.$$

Δηλαδή, *αν το πεδίο είναι αστρόβιλο σε μια χρονική στιγμή* $t=t_o$, *τότε θα παραμένει διαρκώς αστρόβιλο*.

Στη συνέχεια θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε αστρόβιλα πεδία ροής. Η χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε αστρόβιλου πεδίου είναι ότι μπορεί να αναπαρασταθεί ως κλίση (gradient) ενός βαθμωτού πεδίου.

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)=\nabla\,\Phi(\boldsymbol{r};t).$$

Αν θυμηθούμε τώρα την εξίσωση συνέχειας ομογενούς και ασυμπίεστου ρυστού (υγρού) $\nabla\cdot\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r};t)=0$,

$$\nabla\cdot(\nabla\,\Phi(\boldsymbol{r};t)\equiv\nabla^2\Phi(\boldsymbol{r};t)\equiv\Delta\Phi(\boldsymbol{r};t)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(\boldsymbol{r};t)=0.$$

Δηλαδή, *το δυναμικό* $\Phi(\boldsymbol{r};t)$ *κάθε αστρόβιλης και ασυμπίεστης ροής ικανοποιεί την εξίσωση* Laplace.

Θεώρημα Bernoulli

Στην περίπτωση αστρόβιλης ροής (η ιδιότητα του ασυμπίεστου δεν είναι σημαντική εν προκειμένω), οι εξισώσεις Euler μπορούν να ολοκληρωθούν ως προς την πίεση, οδηγώντας σε μια κλειστή έκφραση της τελευταίας συναρτήσεις του δυναμικού ταχύτητας.

$$\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla(\nabla\Phi)^2+\frac{\nabla p}{\rho}+\nabla\Omega=0 \quad\rightarrow\quad \nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2+\frac{p}{\rho}+\Omega\right)=0 .$$

Η τελευταία, ολοκληρωνόμενη κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης μέσα στο πεδίο ροής, μας δίνει

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2+\frac{p}{\rho}+\Omega=C=C(t) .$$

Η “σταθερά” $C=C(t)$ εξαρτάται από το χρόνο, και μπορεί πάντοτε να επανορισθεί

$$\Phi_1(\boldsymbol{r};t)=\Phi(\boldsymbol{r};t)+\int^t C(\tau)d\tau \quad\rightarrow\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2+\frac{p}{\rho}+\Omega=0 ,$$

και το δυναμικό $\Phi_1(\boldsymbol{r};t)$ είναι ισοδύναμο, με το αρχικό δυναμικό $\Phi(\boldsymbol{r};t)$, διότι $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=u$, κλπ.

Simple Examples of Potential Flows

In these indirect problems we shall first examine solutions in the form of polynomials. In this manner we are led to three solutions of particular importance: translation flows, plane two-dimensional, and rotationally symmetric stagnation point flows.

The potential of the *translational flow* is given by

$$\Phi = U_{\infty i} x_i = U_\infty x + V_\infty y + W_\infty z$$

is parallel to the x-axis, is

$$\Phi = U_\infty x \ ,$$

The polynomial

$$\Phi = \frac{1}{2}(a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2)$$

satisfies Laplace's equation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0\ ,$$

assuming the coefficients satisfy the condition

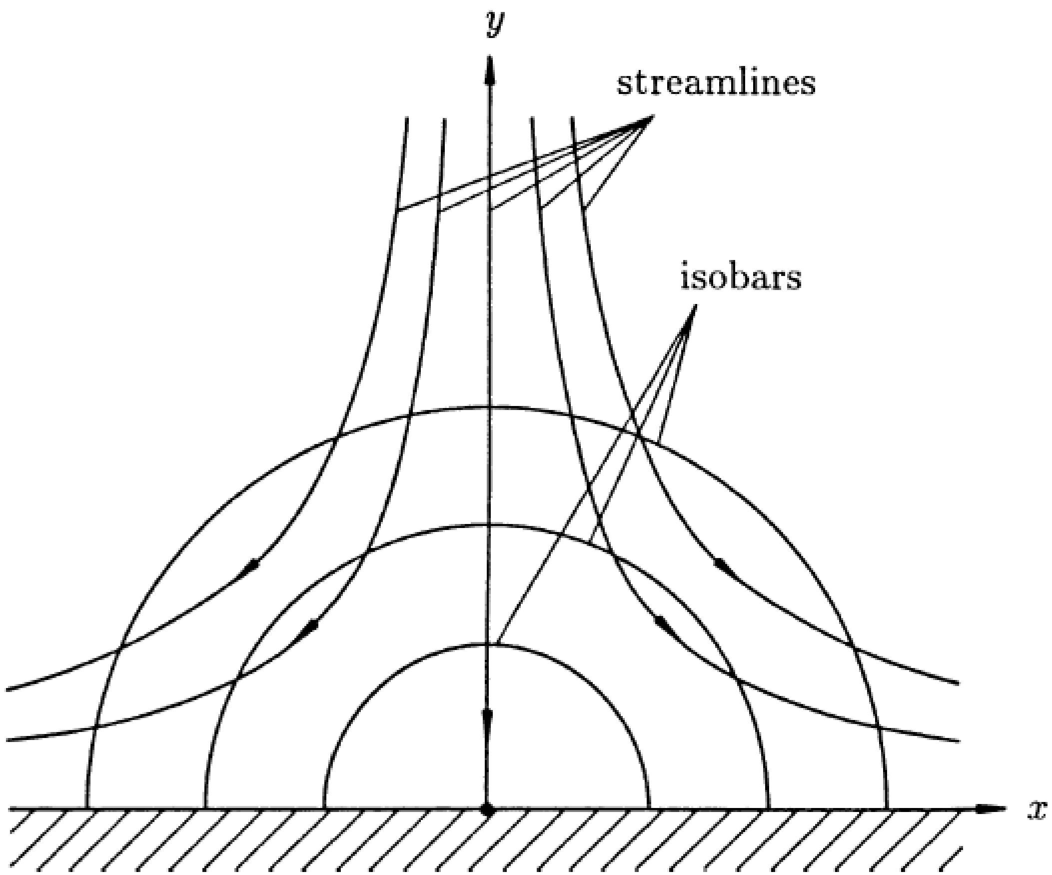
$$a + b + c = 0\ .$$

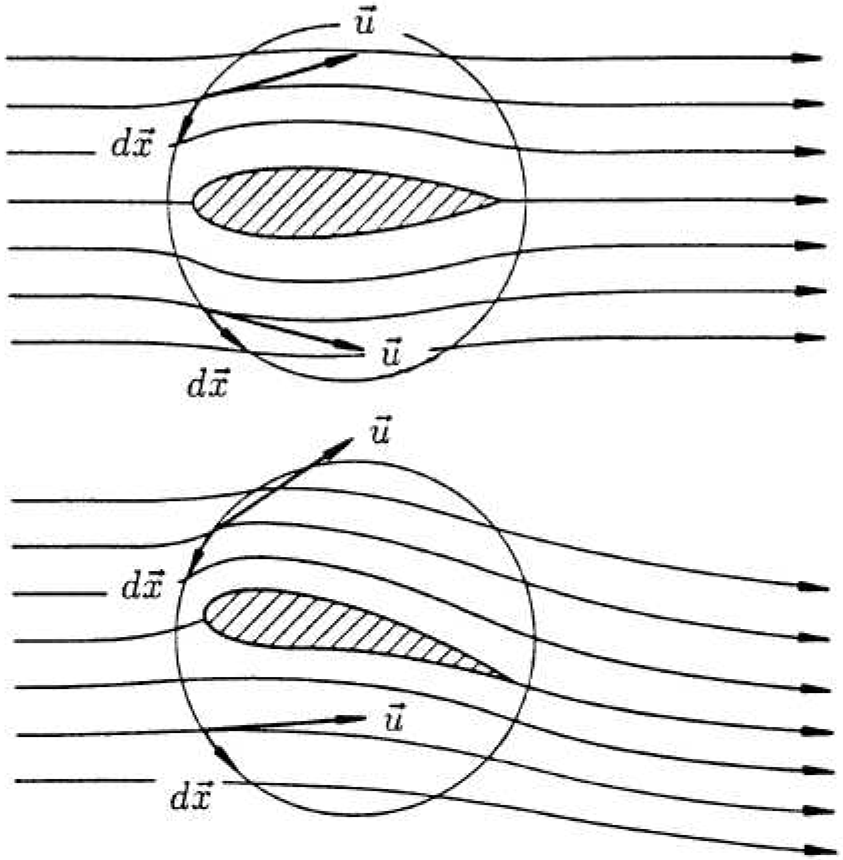
The choice $c = 0$, that is $a = -b$, leads to steady *plane stagnation point flow*:

$$\Phi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)\ ,$$

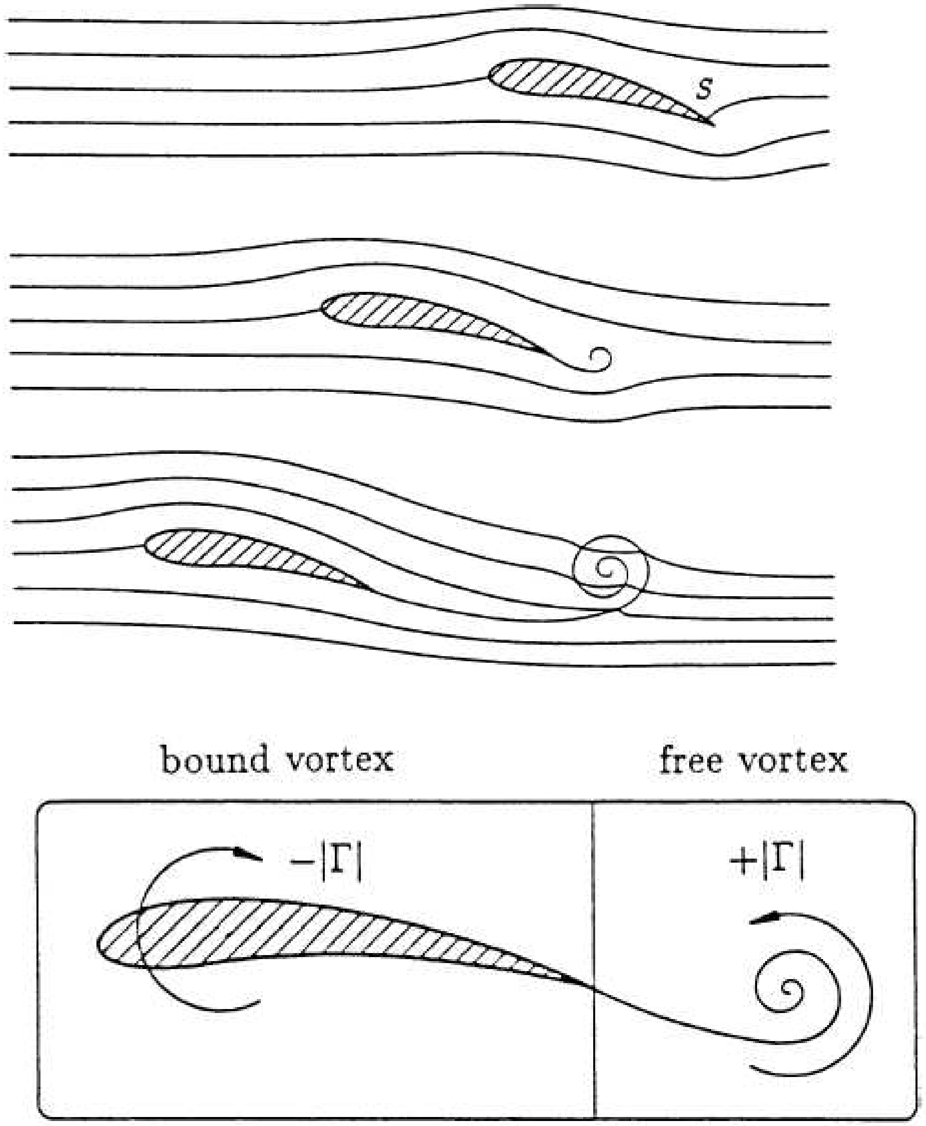
with the velocity components

$$u = ax\ ,$$
$$v = -ay\ ,$$
$$w = 0\ .$$


y
streamlines
isobars
x



$\vec{u}$
$d\vec{x}$
$\vec{u}$
$d\vec{x}$
$\vec{u}$
$d\vec{x}$
$\vec{u}$
$d\vec{x}$

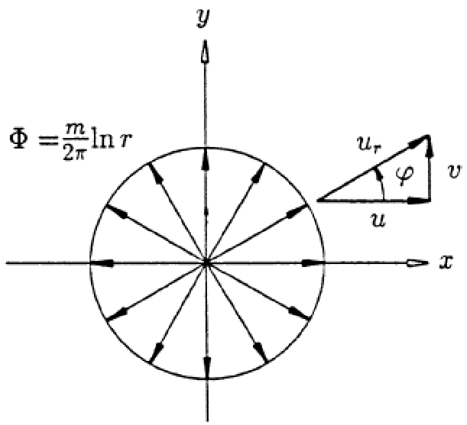

S
bound vortex
free vortex
$-|\Gamma|$
$+|\Gamma|$

Plane Potential Flows

$$\Phi = \frac{m}{2\pi} \ln r \ ,$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{m}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \ ,$$

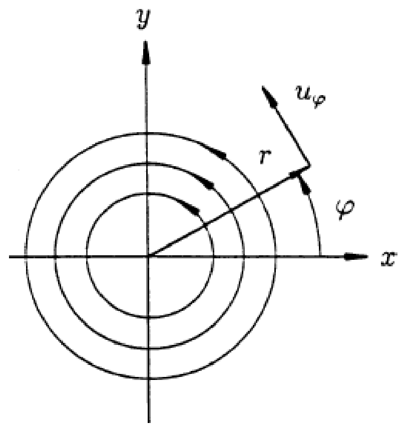
$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{m}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

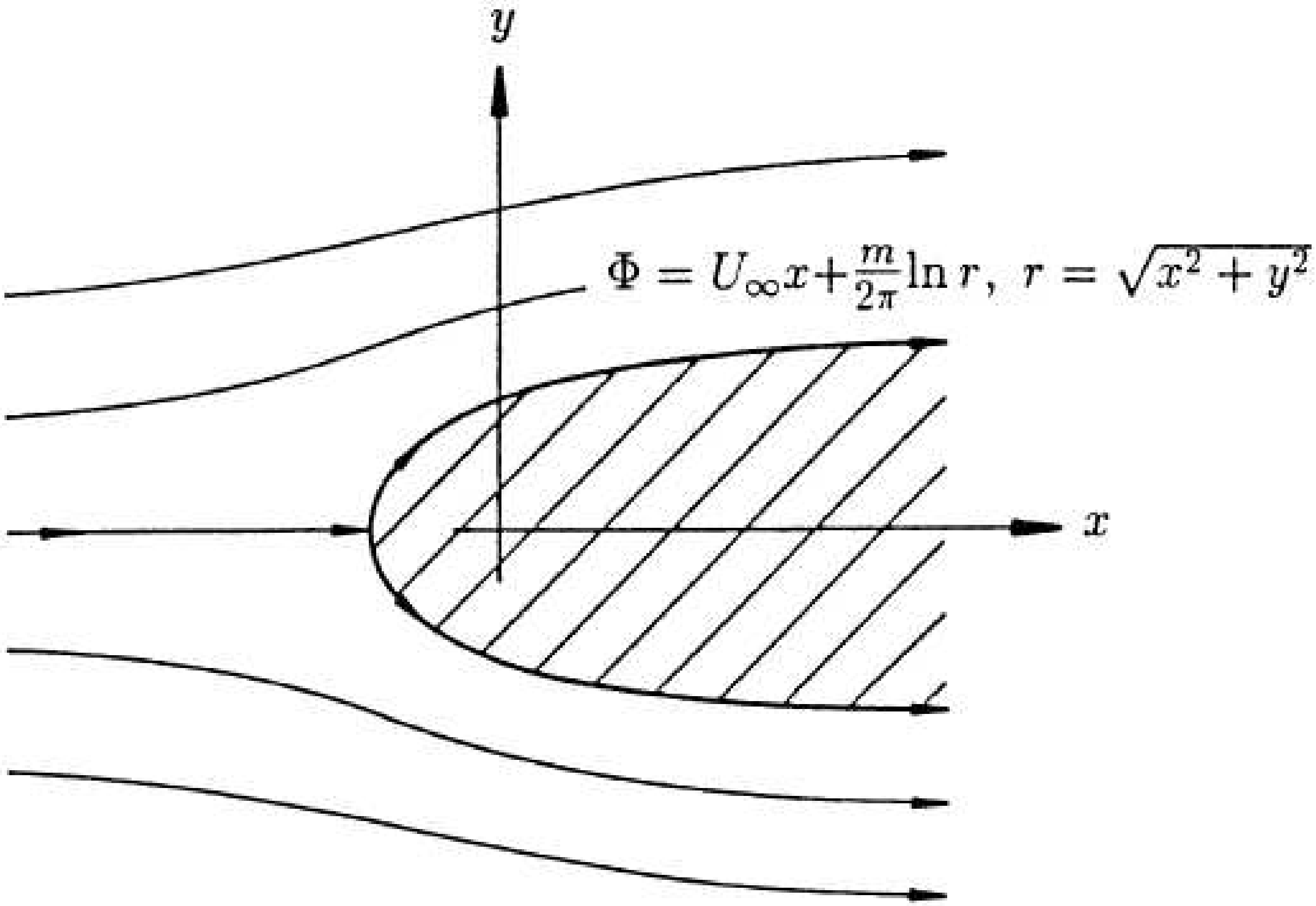


$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} \ .$$

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \ , \quad \text{and}$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \ .$$



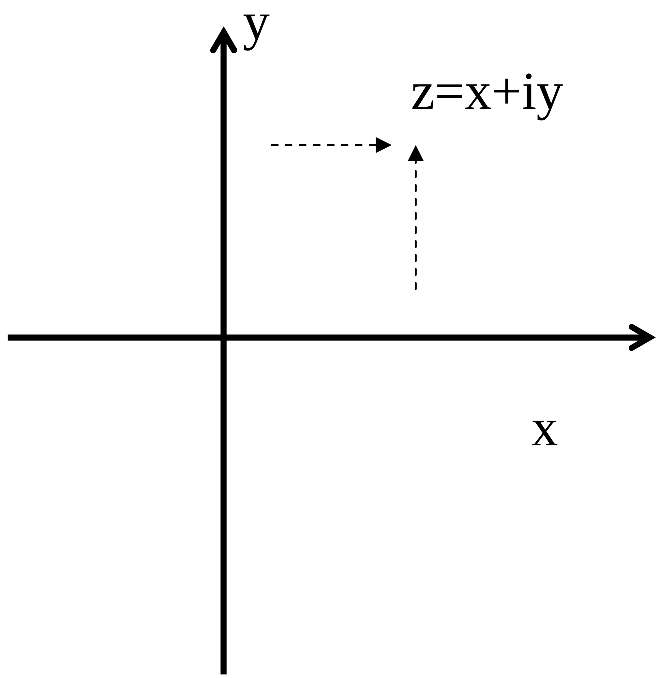

y
$\Phi = U_\infty x + \frac{m}{2\pi} \ln r, \ r = \sqrt{x^2 + y^2}$
x

$$z = x + \mathrm{i}\, y\,, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}\,.$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ (2D ΡΟΕΣ)

Μιγαδικές συναρτήσεις $$F(z) = \Phi(x, y) + \mathrm{i}\Psi(x, y),$$

Αναλυτικές $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$$



x-path $$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

z-path $$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial F}{\partial (\mathrm{i}\, y)}\,.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial F}{\partial y}$$

CAUCHY-RIEMANN

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = \nabla^2\Phi = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Delta\Psi = \nabla^2\Psi = 0$$