ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΤΥΠΟΙ

Οι δύο συνιστώσες (X, Y) της δύναμης ανά μονάδα πλάτους που ασκείται σε αντικείμενο σε μόνιμη αστρόβιλη ροή ιδανικού ρευστού δίνονται από το **πρώτο θεώρημα του Blasius**:

$$X - iY = \frac{i\rho}{2}\int_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \quad (1)$$

Οπου ρ είναι η πυκνότητα του ρεστού, w το μιγαδικό δυναμικό της ροής, C μιά καμπύλη που περικλείει το αντικειμενο, $z = x + iy$, και $i = \sqrt{-1}$.

Η ροπή M_O ως προς την αρχή των αξόνων που ασκείται στο αντικείμενο από το ρευστό δίνεται από το **δεύτερο θεώρημα του Blasius**:

$$M_O = -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\{\int_C z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\} \quad (2)$$

Οπου $\mathrm{Re}\{A\}$ είναι το πραγματικό μέρος του A, και τα υπόλοιπα όπως στην εξίσωση (1).

Γιά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στις εξισώσεις (1) και (2) τα ακόλουθα στοιχεία από την θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων είναι χρήσιμα (γιά επεξηγήσεις, αποδείξεις, κλπ συμβουλευτείτε το βιβλίο σας από το μάθημα μιγαδικών συναρτήσεων):

Ορισμός 1¨Το σημείο $z = a$ λέγεται μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $f(z)$ αν η συνάρτηση είναι αναλυτική μιά περιοχή που περικλείει το σημείο a, αλλά όχι στο ίδιο το a.

Ορισμός 2 Το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο $z = a$ λέγεται πόλος της $f(z)$ τάξης n αν υπάρχει ακέραιος n τέτοιος ώστε να είναι πεπερασμένο το όριο

$$\lim_{z \to a}((z-a)^n f(z))$$

Θεώρημα του Cauchy: Αν η συνάρτηση $f(z)$ της μεταβλητής z είναι αναλυτική στο πεδίο που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη C έχουμε ότι

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad (3)$$

Θεώρημα των υπολοίπων: Αν η συνάρτηση $f(z)$ της μεταβλητής z είναι αναλυτική στο πεδίο που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη C εκτός από τα μεμονωμένα σημεία $z_k, k = 1, 2, \ldots N$ που είναι πόλοι της συνάρτησης έχουμε ότι:

$$\int_C f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Re}s\{f(z)\}|_{z=z_k} \quad (4)$$

Οπου $\operatorname{Re}s\{f(z)\}|_{z=z_k}$ συμβολίζει το υπόλοιπο της συνάρτησης $f(z)$ στον πόλο z_k.

Εστω τώρα ότι το σημείο $z=a$ είναι πόλος τάξης n της συνάρτησης $f(z)$. Ο υπολογισμός του υπολοίπου στον πόλο γίνεται με τον ακόλουθο γενικό τύπο:

$$\operatorname{Re}s\{f(z)\}|_{z=a} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right) \quad (5)$$

Το άθροισμα στο δεξιό μέλος της (4) υπολογίζεται δηλαδή με διαδοχικές εφαρμογές του τύπου (5).

Η ακόλουθη ειδική περίπτωση της εξίσωσης (4) απαντάται συχνά στον υπολογισμό δυνάμεων και ροπών, οπότε αξίζει να την αναφέρουμε χωριστά:

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = 0, \quad \alpha\nu \quad n \neq 1, \quad (6a)$$

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = 2i\pi, \quad \alpha\nu \quad n = 1 \quad (6b)$$

Οπου η καμπύλη C περικλείει το σημείο $z=a$. Αν η καμπύλη C δεν περικλείει το σημείο $z=a$ το αποτέλεσμα είναι μηδενικό γιά όλες τις τιμές του n λογω της (3)

.