

Υπολογιστική Γεωτεχνική

9^ο Εξάμηνο Πολιτικών Μηχανικών

Επίλυση Μή–Γραμμικών Προβλημάτων

Π.Δ. ή Π.Σ.

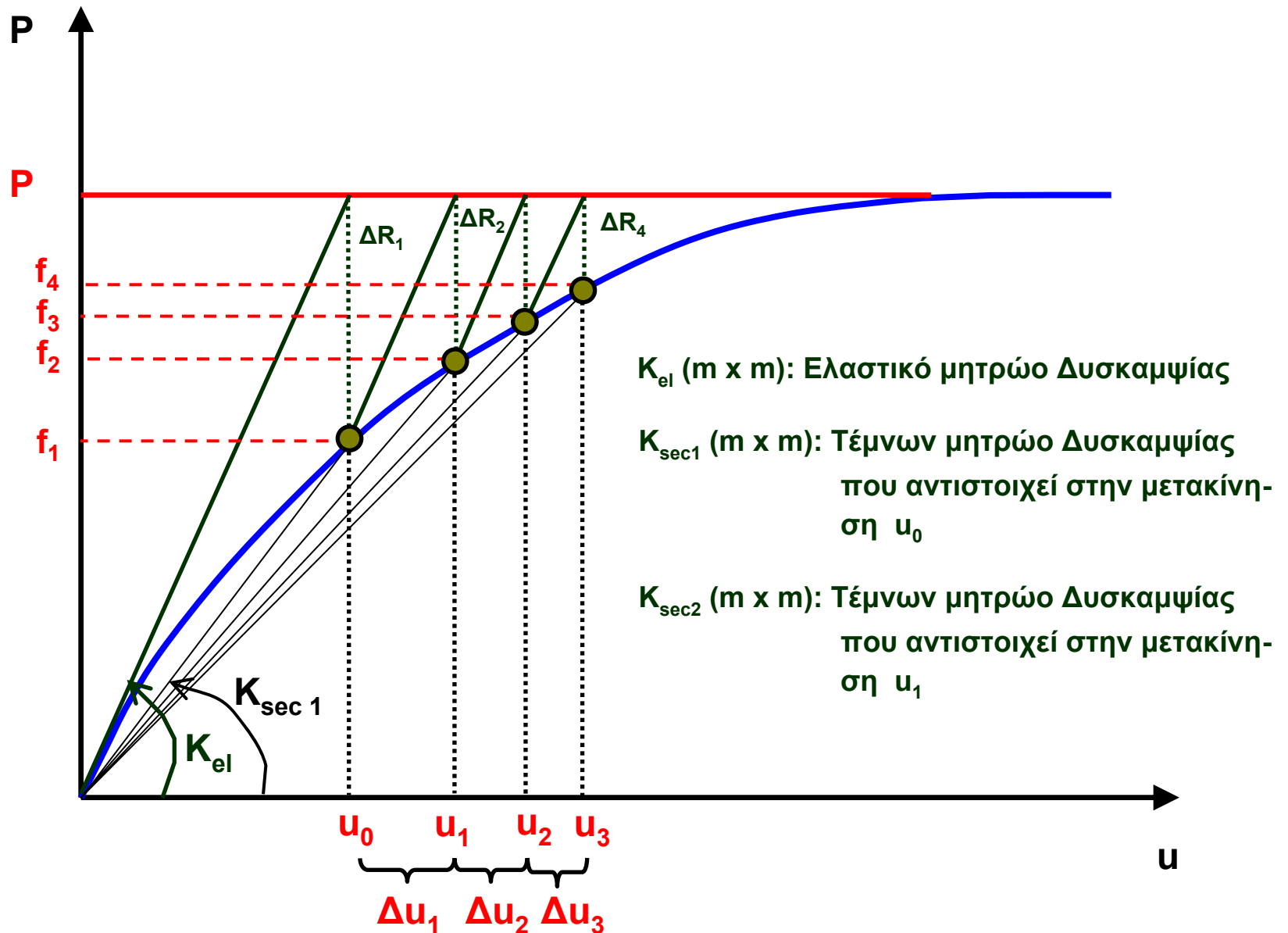
Διδάσκων

Νίκος Γερόλυμος

Δεκέμβριος 2012

1. Modified Newton-Raphson Method

Επαναληπτική Μέθοδος: Newton-Raphson με Ελαστικό Μητρώο Δυσκαμψίας



1. Αρχικός Υπολογισμός

$$u_0 = K_{el}^{-1} P$$

$$f_1 = K_{sec1} u_0$$

$$\Delta R_1 = P - f_1$$

2. 1^η Επανάληψη

$$\Delta u_1 = K_{el}^{-1} \Delta R_1$$

$$u_1 = u_0 + \Delta u_1$$

$$f_2 = K_{sec2} u_1$$

$$\Delta R_2 = P - f_2$$

3. 2^η Επανάληψη

$$\Delta u_2 = K_{el}^{-1} \Delta R_2$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_2$$

$$f_3 = K_{sec3} u_2$$

$$\Delta R_3 = P - f_3$$

4. 3^η Επανάληψη

..... K.O.K.

n^η Επανάληψη

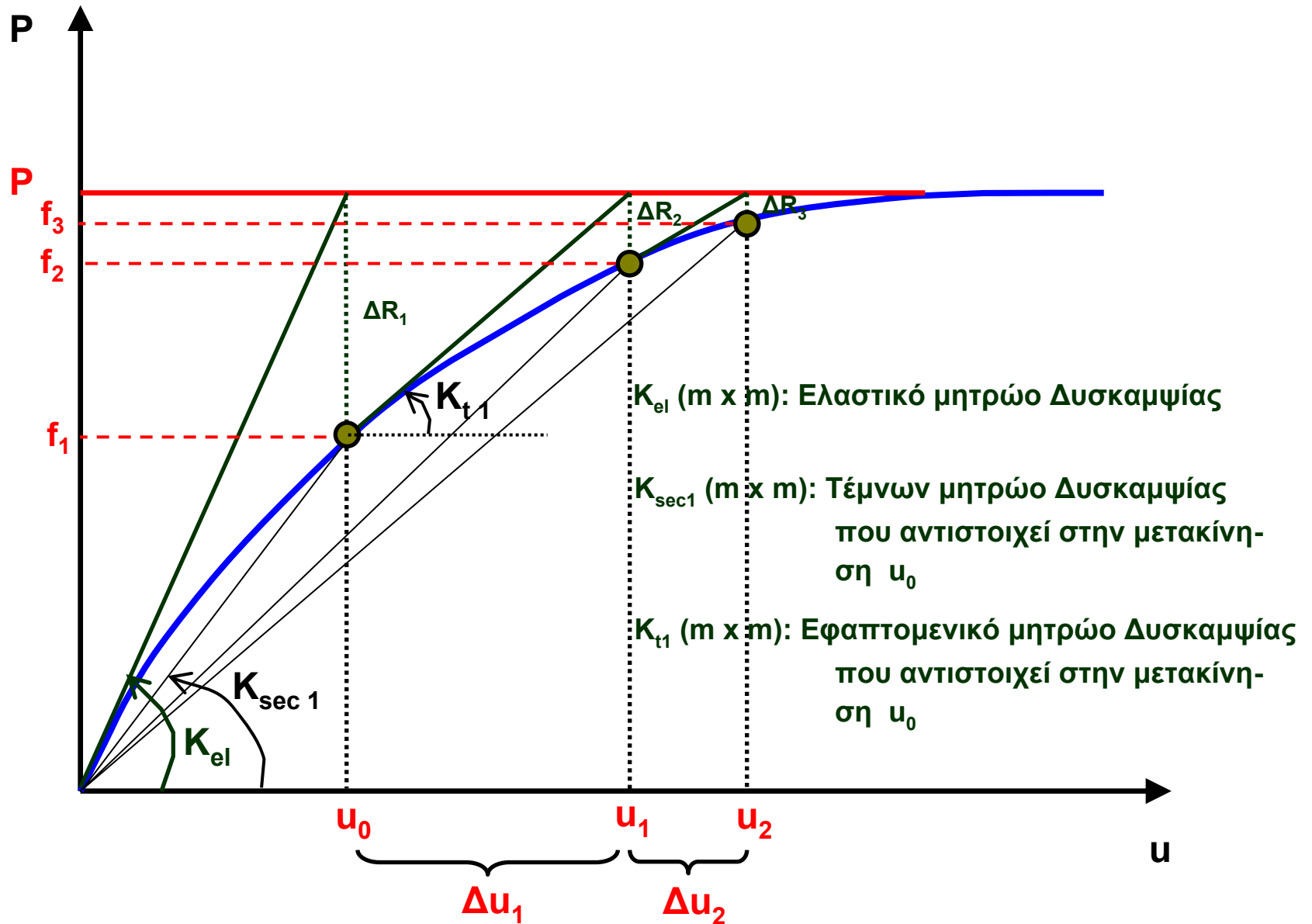
Συνεχίζουμε μέχρις ότου το σφάλμα **Error** είτε σε όρους παραμένουσας δύναμης **ΔR**, είτε σε όρους επαυξητικής μετακίνησης **Δu**, γίνει μικρότερο από μία επιθυμητή τιμή **Tol**, συνήθως της τάξης του $10^{-4} - 10^{-6}$:

$$Error = \sqrt{(\Delta R_n^1)^2 + (\Delta R_n^2)^2 + (\Delta R_n^3)^2 + \dots + (\Delta R_n^m)^2} < Tol \quad \text{ή}$$

$$Error = \sqrt{(\Delta u_n^1)^2 + (\Delta u_n^2)^2 + (\Delta u_n^3)^2 + \dots + (\Delta u_n^m)^2} < Tol$$

2. Newton-Raphson Method

Επαναληπτική Μέθοδος: Newton-Raphson με Εφαπτομενικό Μητρώο Δυσκαμψίας



1. Αρχικός Υπολογισμός

$$u_0 = K_{el}^{-1} P$$

$$f_1 = K_{sec1} u_0$$

$$\Delta R_1 = P - f_1$$

2. 1^η Επανάληψη

$$\Delta u_1 = K_{t1}^{-1} \Delta R_1$$

$$u_1 = u_0 + \Delta u_1$$

$$f_2 = K_{sec2} u_1$$

$$\Delta R_2 = P - f_2$$

3. 2^η Επανάληψη

$$\Delta u_2 = K_{t2}^{-1} \Delta R_2$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_2$$

$$f_3 = K_{sec3} u_2$$

$$\Delta R_3 = P - f_3$$

4. 3^η Επανάληψη

..... K.O.K.

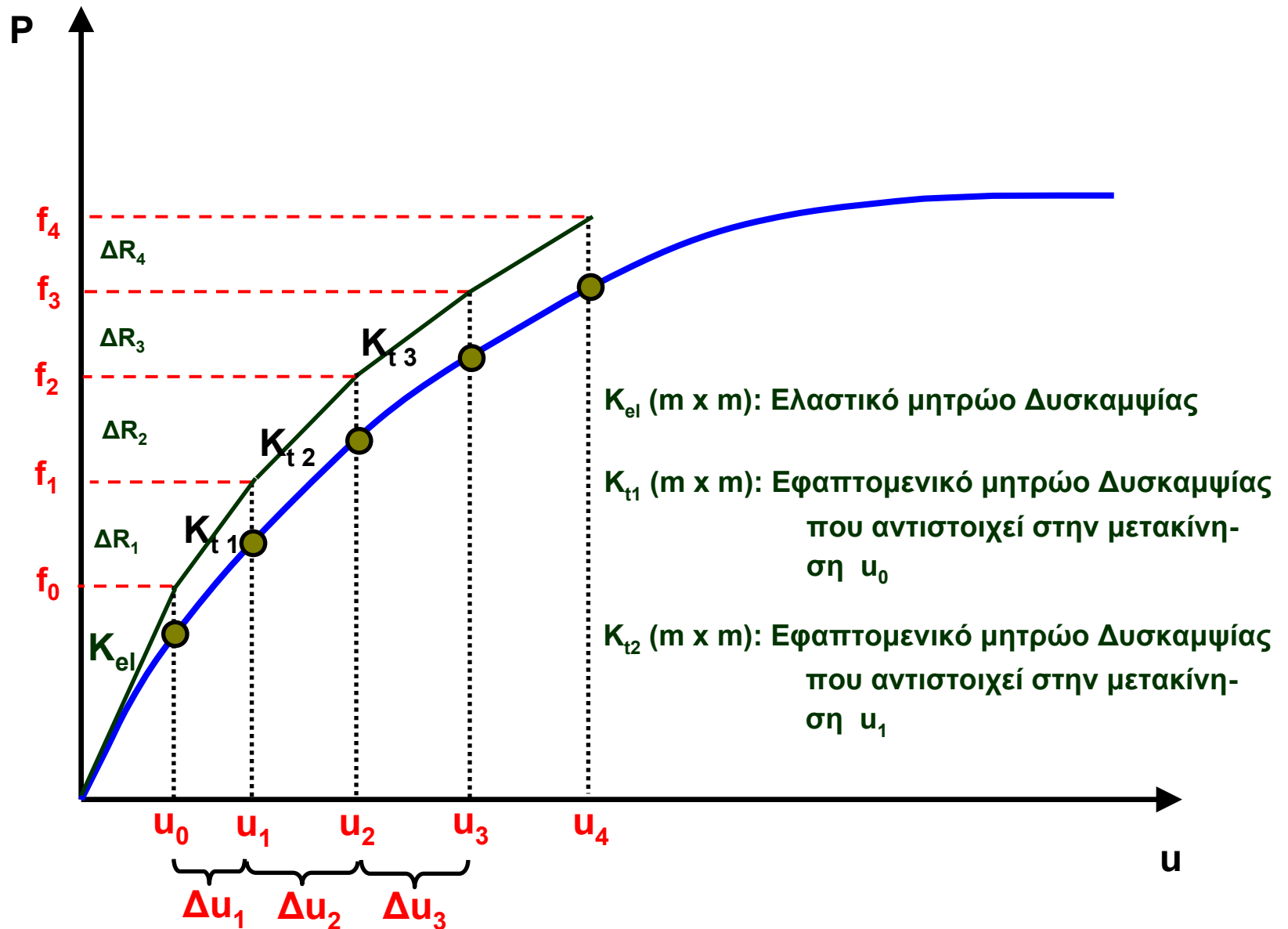
n^η Επανάληψη

Συνεχίζουμε μέχρις ότου το σφάλμα **Error** είτε σε όρους παραμένουσας δύναμης **ΔR**, είτε σε όρους επαυξητικής μετακίνησης **Δu**, γίνει μικρότερο από μία επιθυμητή τιμή **Tol**, συνήθως της τάξης του $10^{-4} - 10^{-6}$:

$$Error = \sqrt{(\Delta R_n^1)^2 + (\Delta R_n^2)^2 + (\Delta R_n^3)^2 + \dots + (\Delta R_n^m)^2} < Tol \quad \text{ή}$$

$$Error = \sqrt{(\Delta u_n^1)^2 + (\Delta u_n^2)^2 + (\Delta u_n^3)^2 + \dots + (\Delta u_n^m)^2} < Tol$$

3. Euler Method Επauξητική Μέθοδος Euler



1. Αρχικός Υπολογισμός

$$u_0 = K_{el}^{-1} f_0$$

2. 1^η Επανάληψη

$$\Delta R_1 = f_1 - f_0$$

$$\Delta u_1 = K_{t1}^{-1} \Delta R_1$$

$$u_1 = u_0 + \Delta u_1$$

3. 2^η Επανάληψη

$$\Delta R_2 = f_2 - f_1$$

$$\Delta u_2 = K_{t2}^{-1} \Delta R_2$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_2$$

4. 3^η Επανάληψη

..... K.O.K.

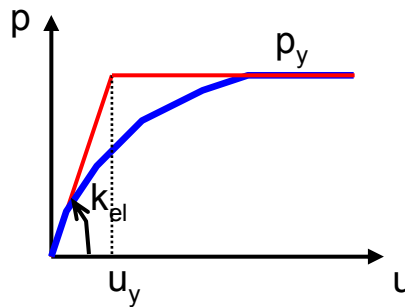
4. n^η Επανάληψη

..... K.O.K.

Η μέθοδος αυτή δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για πολύ μικρά βήματα φορτίου $\Delta \mathbf{R}$, συνήθως της τάξεως του $< \mathbf{P} / 1000$, όπου P το συνολικό επιβαλλόμενο φορτίο.

Επιλύεται το πρόβλημα του πασσάλου (διαμέτρου d , και καμπτικής δυσκαμψίας $E_p I_p$) επί ελατηριωτού εδάφους τύπου Winkler για επιβολή συγκεντρωμένης ροπής M_0 στην κεφαλή του, με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, για 5, 8, και 11 κόμβους.

Το προσομοίωμα των 11 κόμβων χρησιμοποιείται στην συνέχεια για την επίλυση με ανελαστικά εδαφικά ελατήρια, με τις δύο επαναληπτικές μεθόδους τύπου Newton-Raphson. Η σχέση δύναμης (ανά μονάδα μήκους) – μετακίνησης των οποίων δίνεται από την σχέση:

$$p = p_y \left(1 - e^{-\frac{|u|}{u_y}} \right) \text{sign}(u)$$


Όπου p_y η μέγιστη εδαφική αντίδραση, η οποία για συνεκτικά εδάφη (αστράγγιστης διατμητικής αντοχής S_u) δίνεται από την σχέση:

$$p_y = 10 S_u d$$

Και u_y η χαρακτηριστική τιμή της μετακίνησης για την οποία ισχύει:

$$u_y = \frac{p_y}{k_{el}}$$

Όπου k_{el} η ελαστική δυστένεια των ελατηρίων (για μηδενική μετακίνηση)

Παρατηρήσεις

Αντίστοιχος εκθετικός νόμος μπορεί να υιοθετηθεί για την ανελαστική σχέση Ροπής - καμπυλότητας ($M - w$):

$$M = M_y \left(1 - e^{-\frac{|w|}{w_y}} \right) \text{sign}(w), \quad w_y = \frac{M_y}{E_p I_p}$$

Το Τέμνων μέτρο δυσκαμψίας των ελατηρίων k_{sec} εκφράζεται ως εξής:

$$k_{\text{sec}} = \frac{p_y}{|u|} \left(1 - e^{-\frac{|u|}{u_y}} \right)$$

και το εφαπτομενικό k_t ως:

$$k_t = k_{el} e^{-\frac{|u|}{u_y}}$$

Παρατηρήστε ότι τόσο το τέμνων όσο και το εφαπτομενικό μέτρο δυσκαμψίας είναι διαφορετικό για κάθε ελατήριο, μιάς και η κατανομή των μετακινήσεων κατά μήκος του πασσάλου δεν είναι ομοιόμορφη.