ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΔΑΦΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Υπολογιστική Γεωτεχνική

Γ. Γκαζέτας, Γ. Μπουκοβάλας,

Μ. Καββαδάς, Ν. Γερόλυμος

Επιμέλεια

Ν. Γερόλυμος

2009

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΔΑΦΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Υπολογιστική Γεωτεχνική

Γ. Γκαζέτας, Γ. Μπουκοβάλας,

Μ. Καββαδάς, Ν. Γερόλυμος

Επιμέλεια

Ν. Γερόλυμος

2009

9^o Εξάμηνο Πολιτικών Μηχανικών

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ

Διδάσκων: Νίκος Γερόλυμος, Λέκτορας

Διάρθρωση Ύλης Μαθήματος

1. Εισαγωγή: Εφαρμογές Αριθμητικών Μεθόδων (Πεπερασμένων Στοιχείων και Διαφορών) σε Δύσκολα Γεωτεχνικά Έργα

2. Ευστάθεια Πρανών με την Μέθοδο των λωρίδων

3. Εκμάθηση του Προγράμματος SLIDE. Μέρος Ι: Ευστάθεια Πρανών

4. Εκμάθηση του Προγράμματος SLIDE. Μέρος ΙΙ: Μέθοδοι Σταθεροποίησης Πρανών

5. Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών

6. Εφαρμογή της Μεθόδου των Π.Δ. στην Εγκάρσια Φόρτιση Πασσάλων Θεμελιώσεως

7. Απλά Εδαφικά Καταστατικά Προσομοιώματα (Mohr Coulomb, Duncan & Chang ….)

8. Εισαγωγικά Στοιχεία της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων

9. Εκμάθηση του Προγράμματος Π.Σ. PLAXIS2D

10. Επίλυση Τυπικών Προβλημάτων: Αριθμητικής Προσομοίωσης Εργαστηριακής Δοκιμής, Φέρουσας Ικανότητας Θεμελίου, Εκσκαφής και Αντιστήριξης

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ

Συνιστώμενη Βιβλιογραφία

1. Α. ΚΩΜΟΔΡΟΜΟΣ: *Υπολογιστική Γεωτεχνική Μηχανική: Αλληλεπίδραση Εδάφους–Κατασκευών*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2009.

2. Μ. ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗ: *Ανάλυση Φορέων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001.

3. D. M. WOOD: *Geotechnical Modelling*, Spon Press, Taylor & Francis Group, 2004

4. D. M. POTS & L. ZDRAVKOVIC: *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Theory*, Thomas Telford, 1999.

5. D. M. POTS & L. ZDRAVKOVIC: *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Applications*, Thomas Telford, 1999.

6. C. C. SPYRAKOS: *Finite Element Modeling in Engineering Practice*, Algor, Incorporated, 1996

7. I. M. SMITH: *Programming the Finite Element Method with Application to Geomechanics*, John Wiley & Sons, Inc., 1982.

8. C. S. DESAI & J. T. CHRISTIAN: *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, McGraw Hill, 1977.

9. P. TONG & J.N. ROSSETTOS: *Finite-Element Method, basic Technique and Implementation*, The MIT Press, 1977.

10. O. C. ZIENKIEWICZ: *The Finite Element Method*, McGraw Hill, 1977.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ

9^{ο} Εξάμηνο Πολιτικών Μηχανικών

Νίκος Γερόλυμος, Λέκτορας

Πρόλογος: Η εκρηκτική ανάπτυξη των υπολογιστών τις τελευταίες 3 περίπου δεκαετίες, συνοδεύθηκε από αντίστοιχη ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων στην επιστήμη του Μηχανικού. Σήμερα, πολύ λίγα προβλήματα της Γεωτεχνικής Μηχανικής επιλύονται με αναλυτικές ή εμπειρικές μεθόδους. Η επίλυση ακόμη και των πιο απλών από αυτά μπορεί να γίνει εξαιρετικά δυσχερής όταν στον υπολογισμό λαμβάνονται υπόψη: (α) η εδαφική ανομοιομορφία, (β) η ανελαστική συμπεριφορά των εδαφικών (και μη) υλικών, (γ) οι γεωμετρικές μή-γραμμικότητες, (δ) η πολύπλοκη γεωμετρία, και (στ) η κατασκευαστική ακολουθία του έργου. Για την ρεαλιστική ανάλυση των γεωτεχνικών προβλημάτων απαιτείται συχνά η εφαρμογή περίτεχνων υπολογιστικών μεθόδων ικανών να αντιμετωπίζουν συστηματικά όλες τις ανωτέρω δυσχέρειες.

Συνοπτική περιγραφή του μαθήματος:

Η μηχανική του συνεχούς μέσου στην Υπολογιστική Γεωτεχνική (θεωρία ελαστικότητας, κριτήρια αστοχίας). Συνήθη καταστατικά προσομοιώματα για την μη–γραμμική συμπεριφορά εδαφικού στοιχείου. Απλές αριθμητικές μέθοδοι: αριθμητική ανάλυση της ευστάθειας πρανούς με την μέθοδο των λωρίδων. Εισαγωγή στις μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων και Πεπερασμένων Διαφορών για την ανάλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών της Γεωτεχνικής. Εφαρμογή της μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων στην πράξη: προσομοίωση εργαστηριακών δοκιμών, φέρουσα ικανότητα και καθίζηση θεμελίου, ροή διαμέσου του εδάφους, βαθιές εκσκαφές και αντιστηρίξεις, στατική αλληλεπίδραση εδάφους – κατασκευής. Παραδείγματα από πραγματικά έργα.

Εφαρμογές Πεπερασμένων Στοιχείων
(καί Πεπερασμένων Διαφορών)
σε Δύσκολα Γεωτεχνικά Εργα

Ν. Γερόλυμος
Λέκτορας

Γ. Γκαζέτας
Καθηγητής

Συγγράμματα για Μεθοδική Μελέτη της Μεθόδου Π.Σ.

- Μ. Παπαδρακάκη (2001) : “Ανάλυση Φορέων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων”.
- D. Muir Wood (2004) : “Geotechnical Modelling”.
- D. M. Potts & L. Zdravkovic (1999) : “ Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering”. I : Theory. II: Applications
- I. M. Smith (1982) : “Programming the Finite Element Method with Applications to Geomechanics”.
- C. C. Spyrakos (1994) : “Finite Element Modeling in Engineering Practice”.

Δημοφιλή ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ στην Ελλάδα

- ABAQUS, NASTRAN, ANSYS, SAP, SOFISTIC, ADINA
- PLAXIS, FLAC, PHASES, QUAD4
- *NL-DYAS, NL-PILE, NL-CAISSON, DSC-LANDSLIDE , . . .*

Στόχοι Μαθήματος

- Παρουσίαση *Ποικίλων Εργων Γεωτεχνικής* *που έχουν επιλυθεί με Π.Σ. και Π.Δ.*
- Αδρή Επισκόπηση του *Τρόπου Προσομοίωσης*
- Ελεγχος της *Ορθότητας των Αναλύσεων*
- Μελέτη *Χαρακτηριστικών Αποτελεσμάτων*

Εμβάθυνση

Περιεχόμενα Εισαγωγής

1) Σύντομη Εισαγωγή περί Π.Σ.

2) Επισκόπηση **ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ σε ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΑ ΕΡΓΑ**

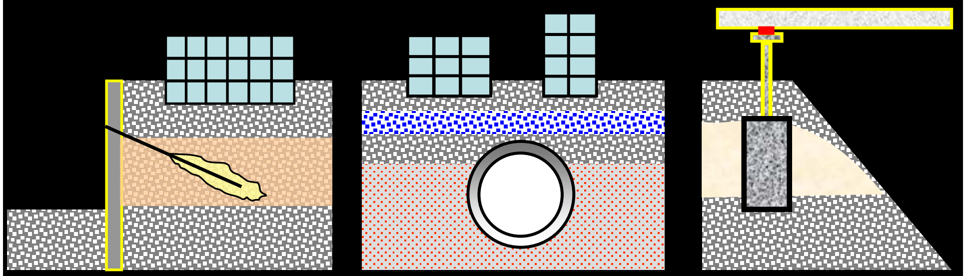
3) Αναλυτική Παρουσίαση **2** εξ' αυτών

Τα ΕΡΓΑ που θα παρουσιασθούν :

1) Σταθμός Μετρό Αγ. Αντωνίου *(Αντιστήριξη)*
2) Σταθμός Μετρό Αγ. Παρασκευή *(Αντιστήριξη)*
3) Φρέαρ Τελετής Ενάρξεως ΟΑΚΑ *(Αντιστήριξη)*
4) Γέφυρα Στέρνας *(Θεμελίωση)*
5) Γέφυρα Νέστου *(Θεμελίωση)*
6) Διεθνές Κέντρο Ραδιοτηλεόρασης *(Θεμελίωση)*
7) Αστοχία *"Δουκίσης Πλακεντίας"* *(Σήραγγα Μετρό)*
8) Φράγμα Αστερίου (Ευστάθεια Πρανών)
9) Σεισμική Απόκριση Κτιρίου ΥΠΕΘΟ *(Θεμελίωση + Σήραγγα)*

Γιατί Αριθμητική Επίλυση στην Γεωτεχνική ?

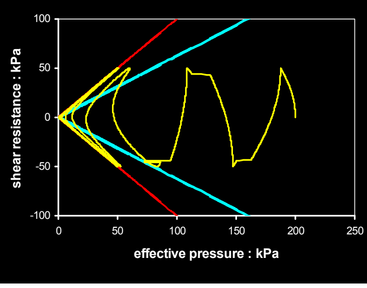
1. Γεωμετρία: *περίπλοκη*, σε 2 και 3 διαστάσεις

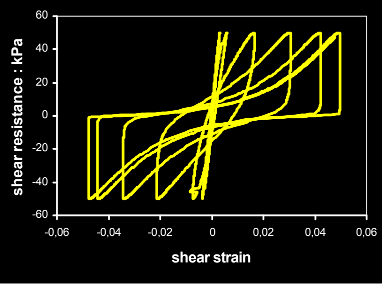


Γιατί Αριθμητική Επίλυση στην Γεωτεχνική ?

2. Μηχανική Συμπεριφορά Εδαφικού Στοιχείου

- *Ανελαστική,*
- *Ανισοτροπική*
- *Συνάρτηση προϊστορίας*

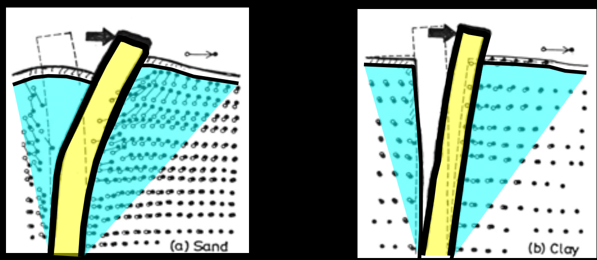




Γιατί Αριθμητική Επίλυση στην Γεωτεχνική ?

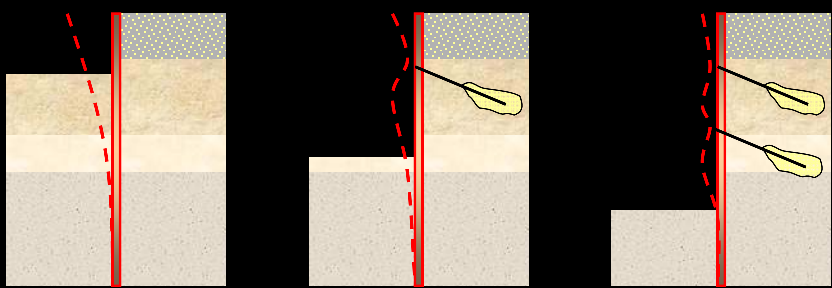
3. Συμπεριφορά Διεπιφανειών Εδάφους – Κατασκευής

- Ολίσθηση
- Αποκόληση
- Κρούση (σε δυναμικά προβλήματα)

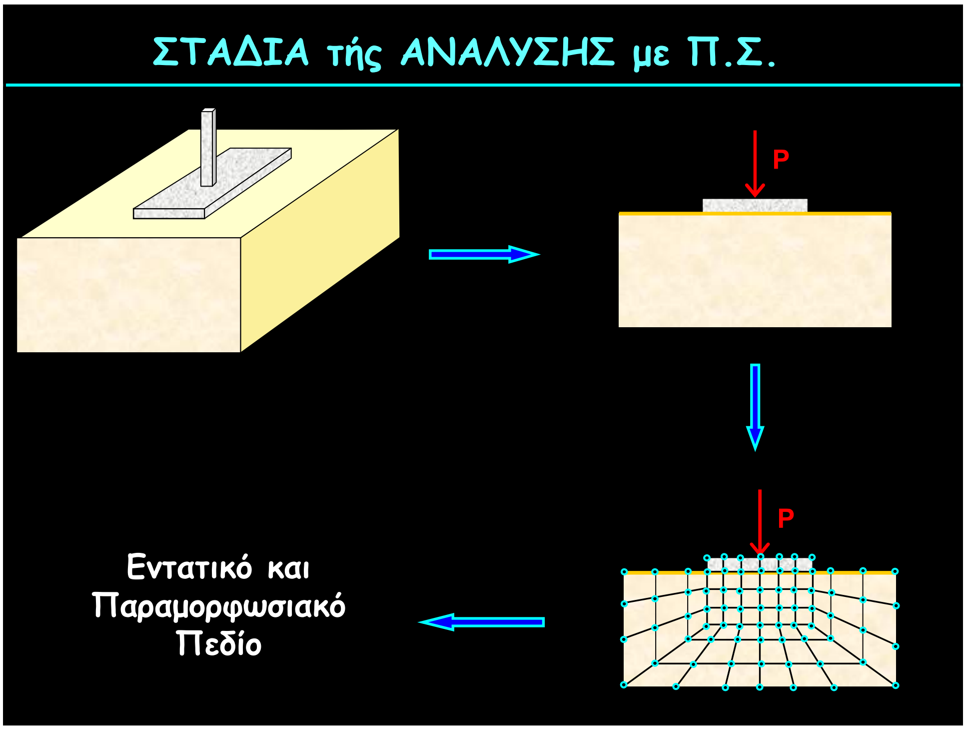


Γιατί Αριθμητική Επίλυση στην Γεωτεχνική ?

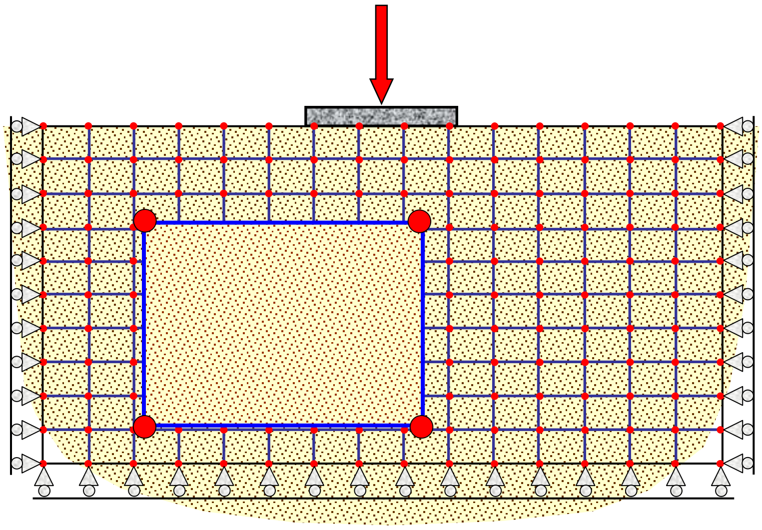
4. Ευαισθησία λύσεων στην Κατασκευαστική Διαδικασία (φάσεις κατασκευής)



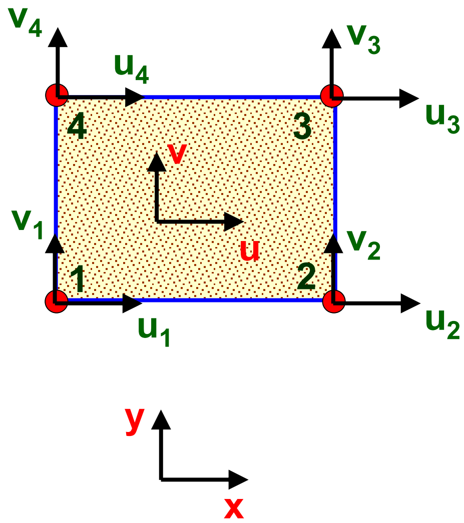

ΣΤΑΔΙΑ τής ΑΝΑΛΥΣΗΣ με Π.Σ.
Φυσικό
Πρόβλημα
"Αφαίρεση"
Απλοποιημένο
Προσομοίωμα
Προσομοίωση
Με Πεπερασμένα
Στοιχεία
ΕΠΙΛΥΣΗ
Με τον Υπολογιστή


ΣΤΑΔΙΑ τής ΑΝΑΛΥΣΗΣ με Π.Σ.
P
P
Εντατικό και
Παραμορφωσιακό
Πεδίο

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων



Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων



$$u\,(x,\,y) \;=\; \sum_{j=1}^{4} N_j(x,\,y)\,u_j$$

$$v\,(x,\,y) \;=\; \sum_{j=1}^{4} N_j(x,\,y)\,v_j$$

1. Επιλογή είδους στοιχείων

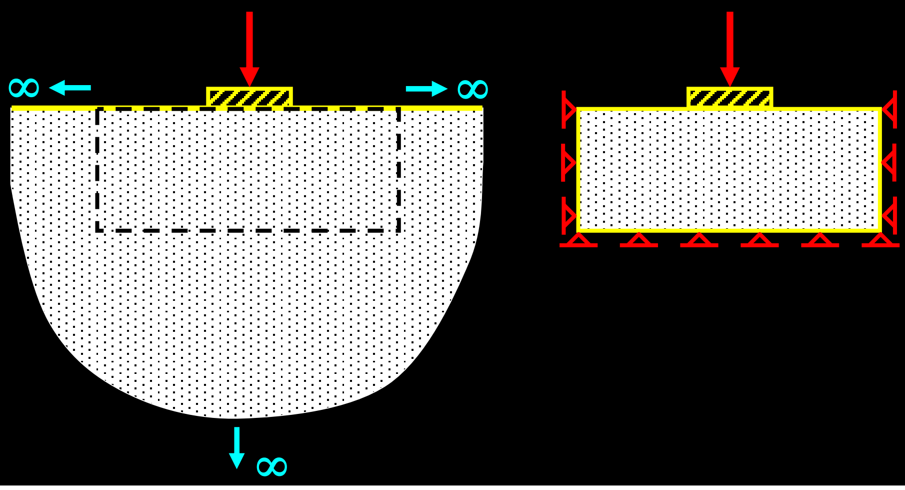
- SOLID (το παραμορφωτό στοιχείο του συνεχούς μέσου)
- BEAM , PLATE , SHELL , ...

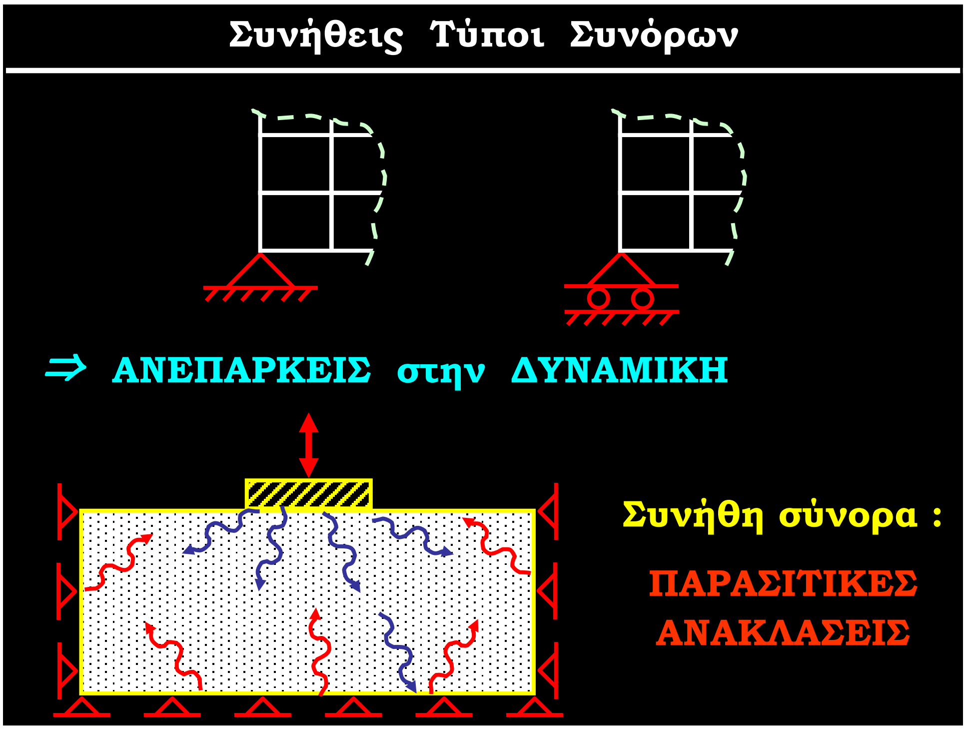
2. Διακριτοποίηση + Επιλογή τύπου

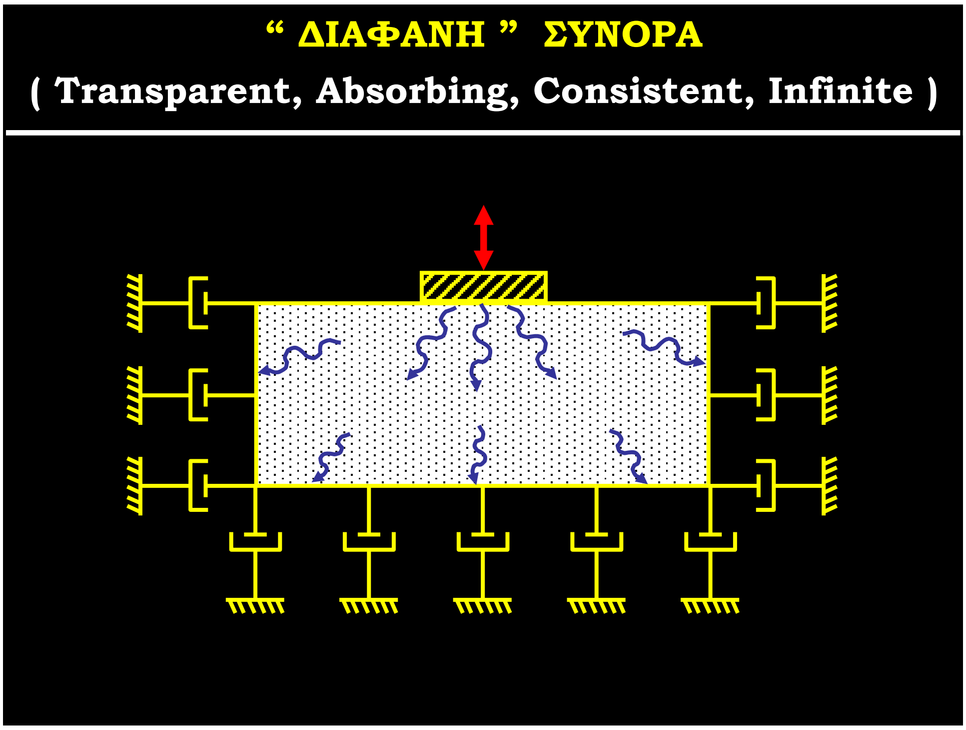
- Πυκνότητα δικτύου
- Σχήμα στοιχείων, σημεία ολοκληρώσεως, βαθμός πολυωνυμικής παρεμβολής

3. Επιλογή Τεχνητών Συνόρων

... Ανάγκη λόγω απεριόριστης έκτασης του εδαφικού χώρου

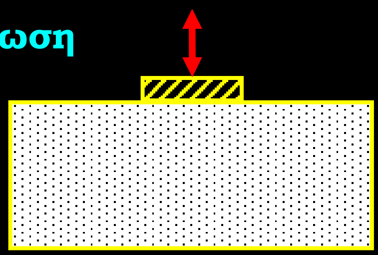



Συνήθεις Τύποι Συνόρων
⇒ ΑΝΕΠΑΡΚΕΙΣ στην ΔΥΝΑΜΙΚΗ
Συνήθη σύνορα :
ΠΑΡΑΣΙΤΙΚΕΣ
ΑΝΑΚΛΑΣΕΙΣ

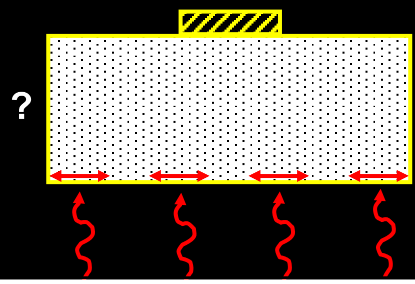

“ ΔΙΑΦΑΝΗ ” ΣΥΝΟΡΑ
(Transparent, Absorbing, Consistent, Infinite)

4. Επιβολή Φορτίσεως

(α) Απλή περίπτωση

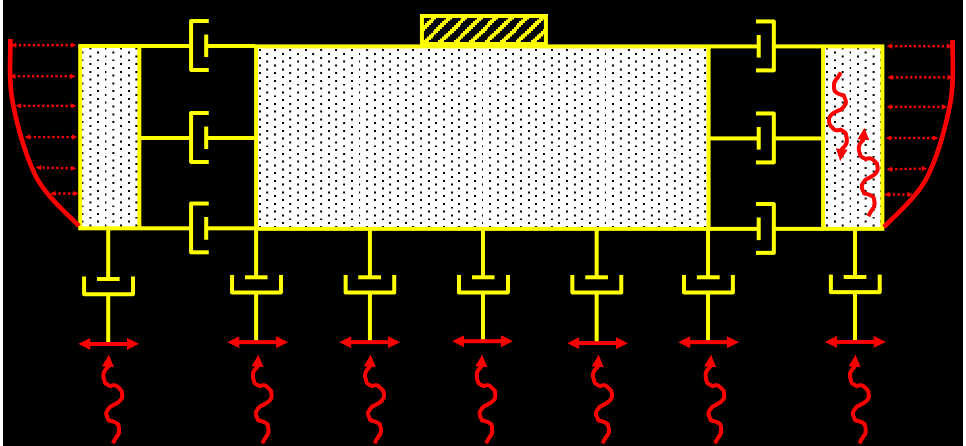


(β) Δύσκολη περίπτωση : ο σεισμός



ΕΙΔΙΚΑ ΣΥΝΟΡΑ " ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΠΕΔΙΟΥ "

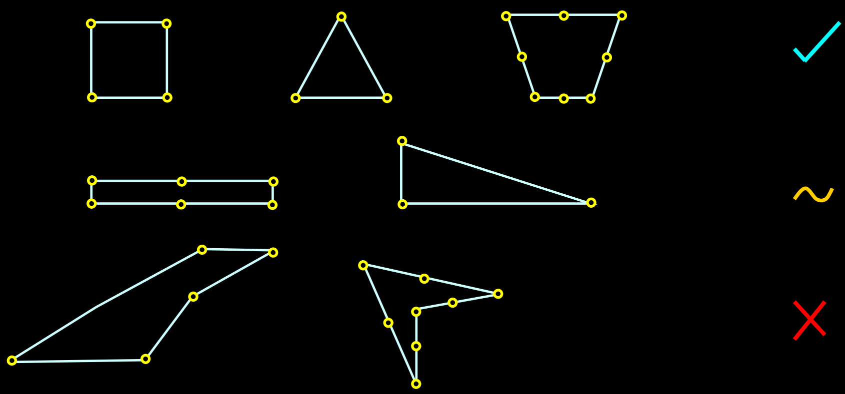
(Free – Field Boundaries)



Μερικές Οδηγίες για Ορθή Προσομοίωση

1. Αποφυγή στοιχείων κακής γεωμετρίας.

   Όχι επιμήκη στοιχεία (>4:1)



Μερικές Οδηγίες για Ορθή Προσομοίωση

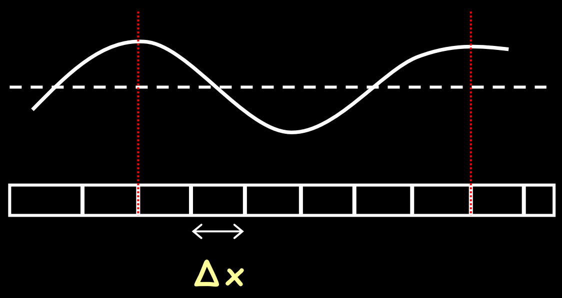
2. Ομοιομορφία – Πύκνωση στις *κρίσιμες* θέσεις

- Θέσεις Επιβολής Φορτίων
- Περιοχές Συγκέντρωσης Τάσεων
- Διεπιφάνειες Διαφορετικής Δυστμησίας

Μερικές Οδηγίες για Ορθή Προσομοίωση

3. Στην Δυναμική (= Κυματική):

τουλάχιστον 5 στοιχεία ανά 1 μήκος κύματος



$$\boxed{\Delta x < \lambda / 5 = V / (5 f)}$$

Ποιά είναι η *“ΑΚΡΙΒΕΙΑ”* της Μεθόδου

1) Πόσο ταιριάζει το **Προσομοίωμα** στο **Φυσικό Πρόβλημα** ;;

[Αναπόφευκτες οι Απλοποιητικές Παραδοχές...]

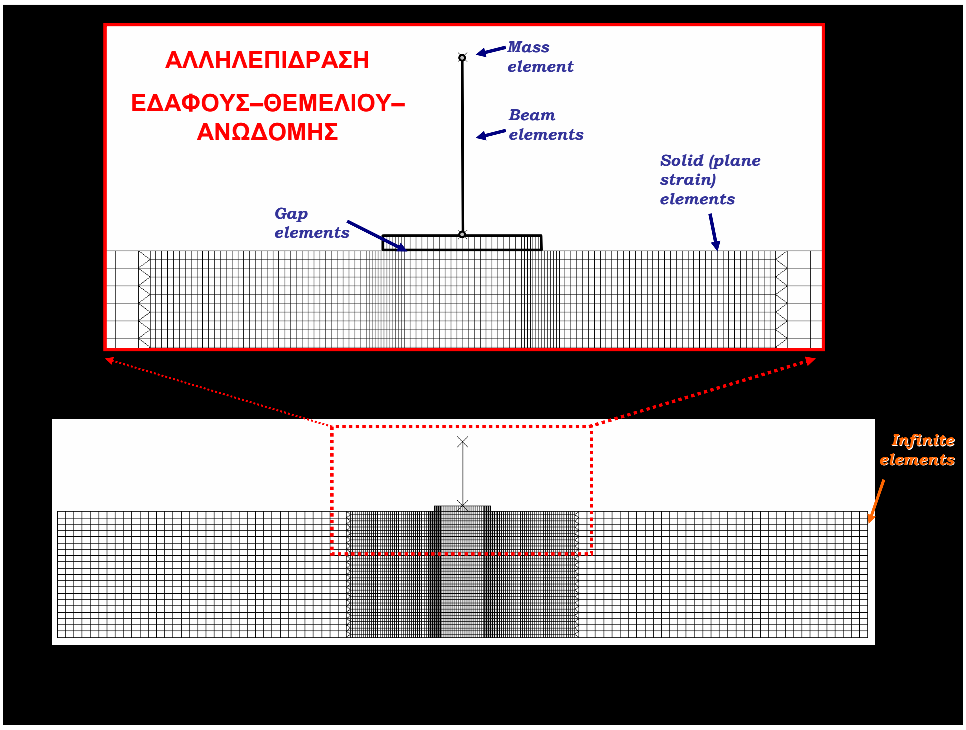
2) Πόσο Ορθή είναι η **Υλοποίηση** του **Προσομοιώματος** ;

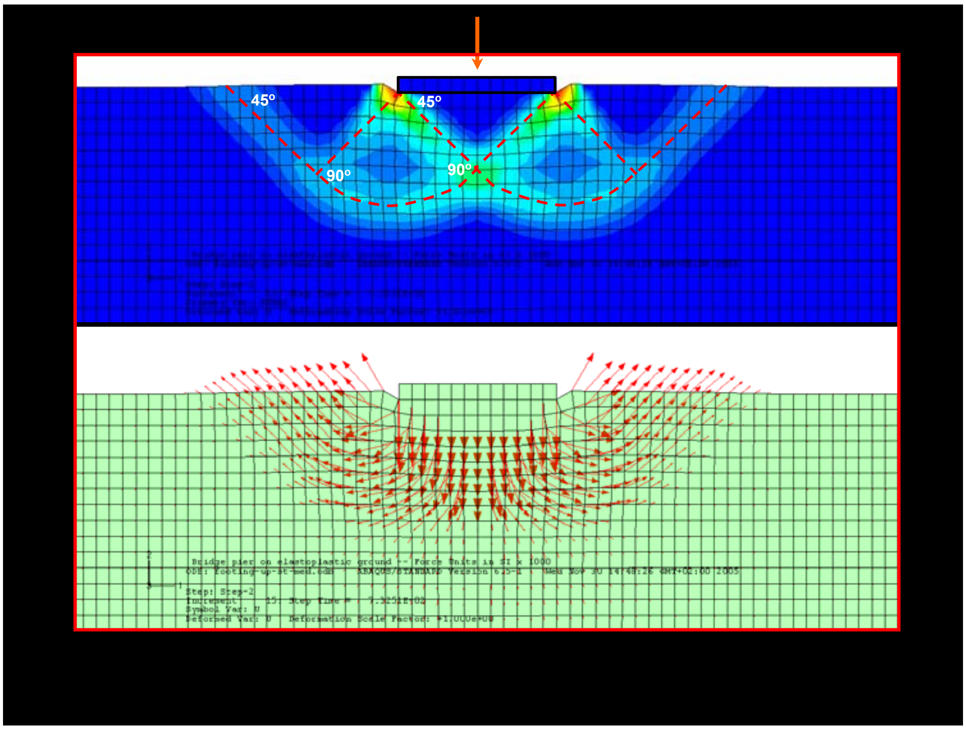
[Στοιχεία, Συνοριακές Συνθήκες, Φόρτιση.....]

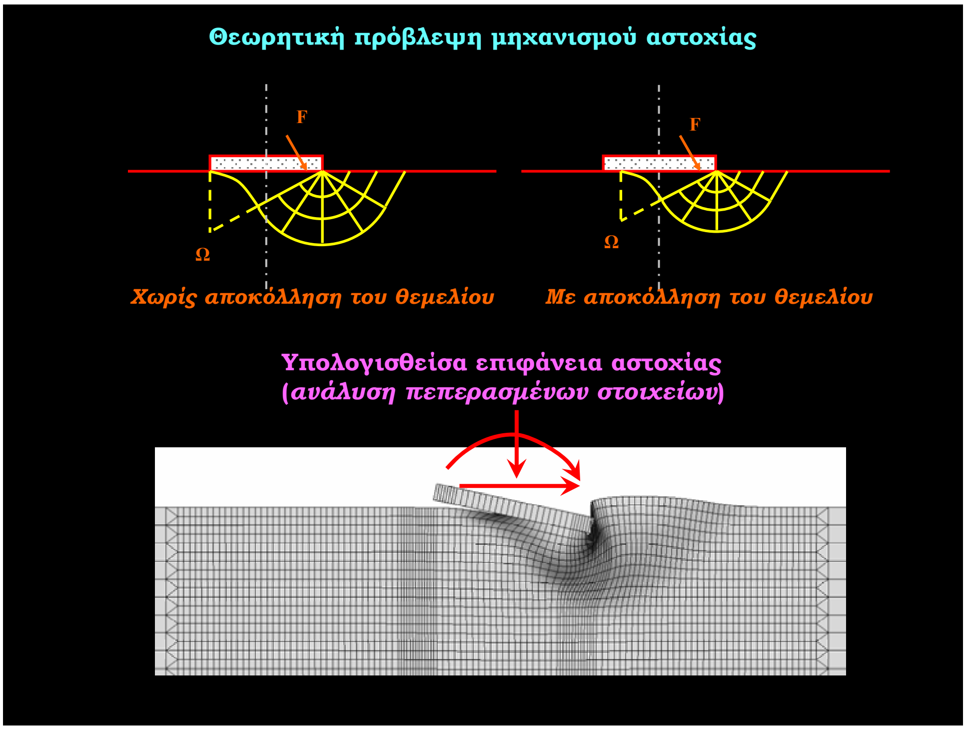
ΑΝΑΓΚΗ *(πολλαπλών)* ΕΛΕΓΧΩΝ !

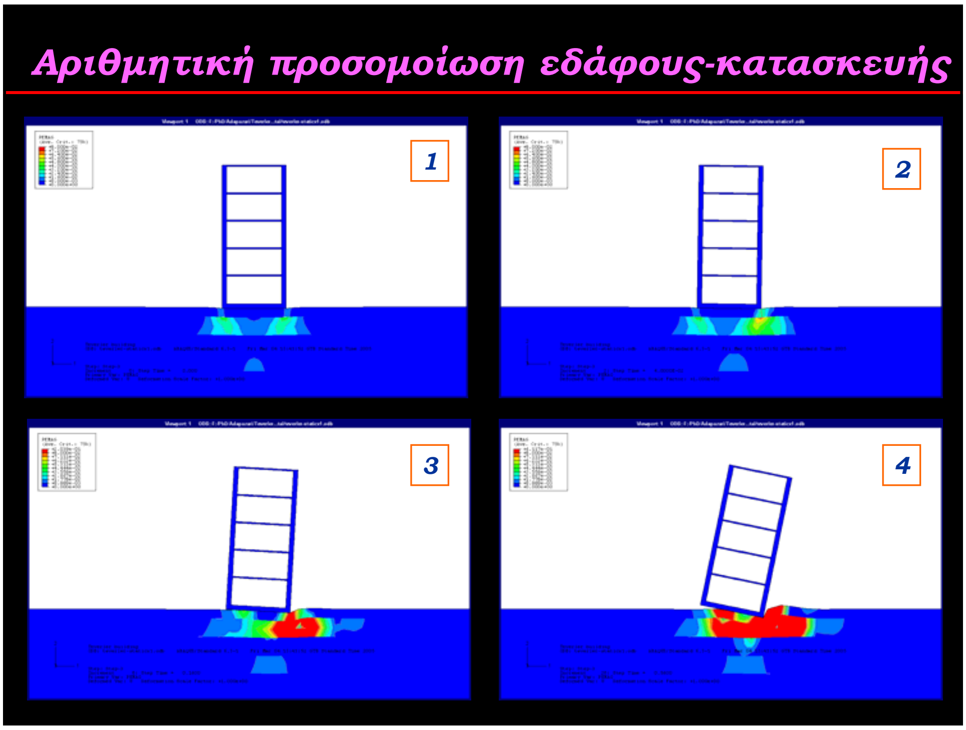
- Εύλογον των αποτελεσμάτων
  [μορφής, τάξης μεγέθους]
- Σύγκριση με Απλουστευμένες Αναλύσεις
  [ή , εάν υπάρχουν : Αναλυτικές Λύσεις]
- Βαθμονόμηση με Πειράματα ή
  Επιτόπου Μετρήσεις

Εφαρμογη σε Πρόβλημα Σεισμικής Αλληλεπίδρασης Εδάφους–Θεμελίου–Κατασκευής


ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ
ΕΔΑΦΟΥΣ–ΘΕΜΕΛΙΟΥ–ΑΝΩΔΟΜΗΣ
Mass element
Beam elements
Solid (plane strain) elements
Gap elements
Infinite elements


45°
45°
90°
90°

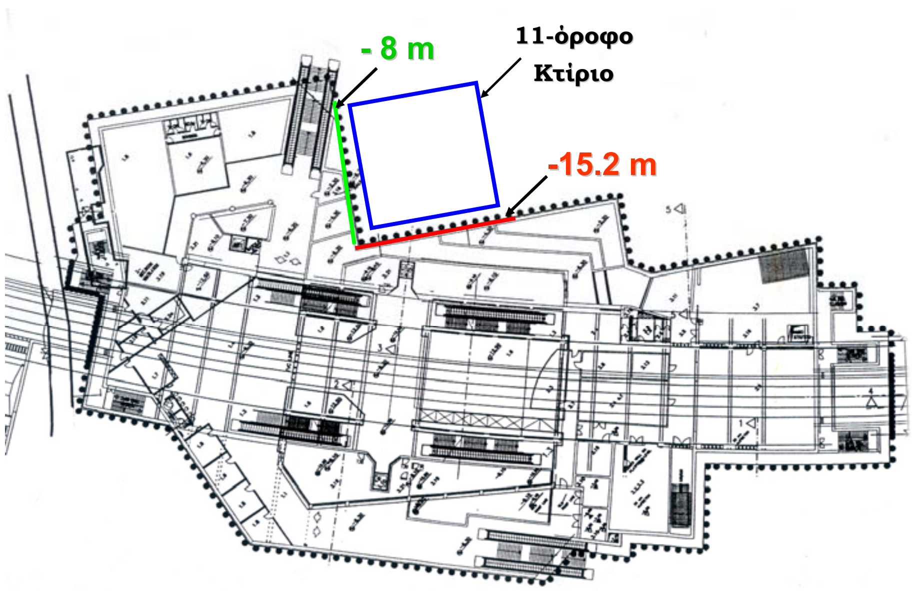




Nikos Gerolymos, Lecturer NTUA

Σταθμός ΜΕΤΡΟ ΑΓ. ΑΝΤΩΝΙΟΥ :
Προσωρινή Αντιστήριξη

Η Εκσκαφή του Σταθμού Αγ. Αντωνίου



Η Εκσκαφή του Σταθμού Αγ. Αντωνίου

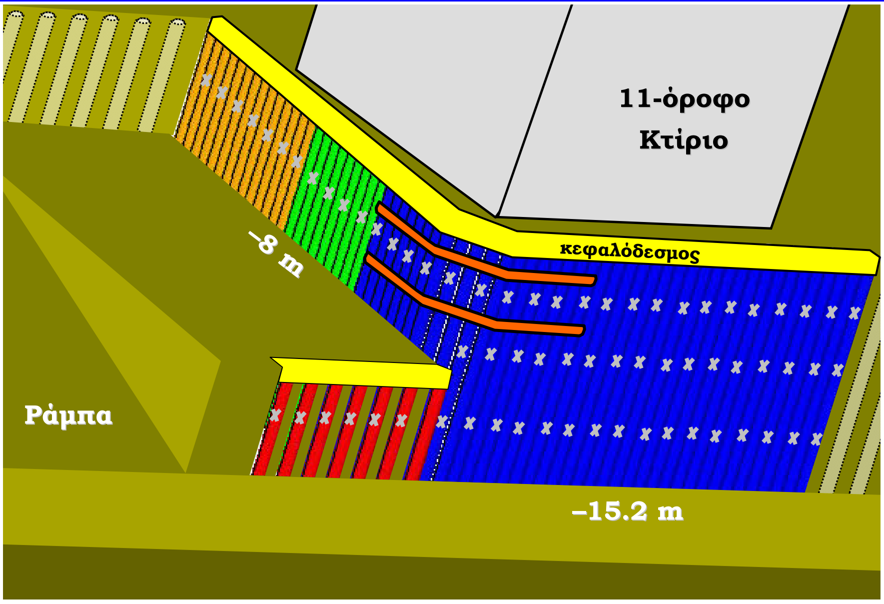
Η Εκσκαφή του Σταθμού Αγ. Αντωνίου

Αγ. Αντώνιος

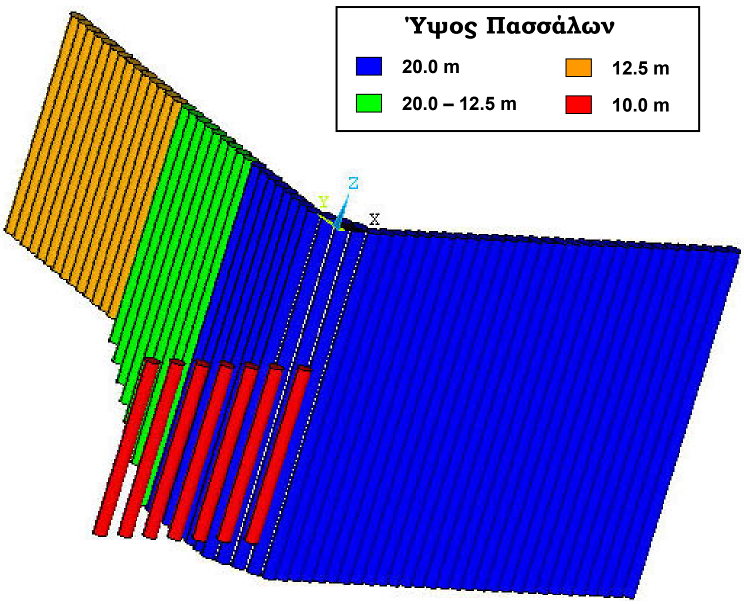
11-όροφο Κτίριο

φώτο μέσα από τον σταθμό

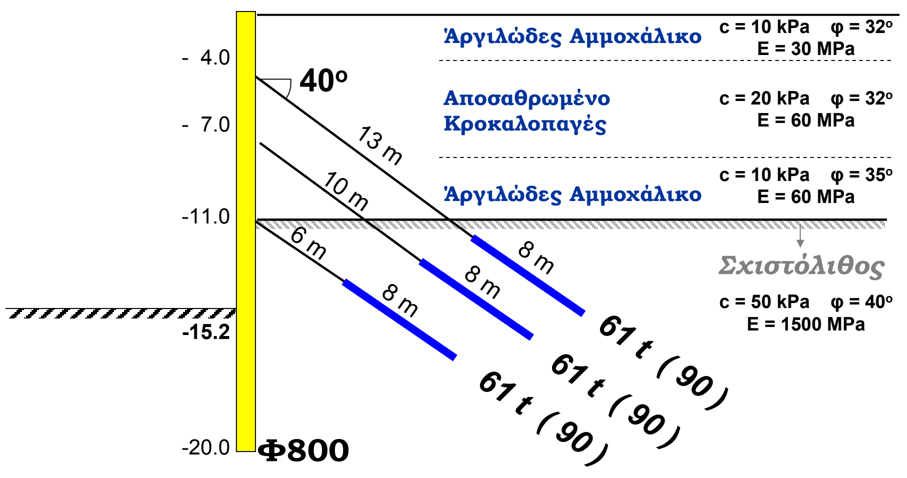
Η Εφαρμοσθείσα Λύση Αντιστήριξης : 3 – Δ



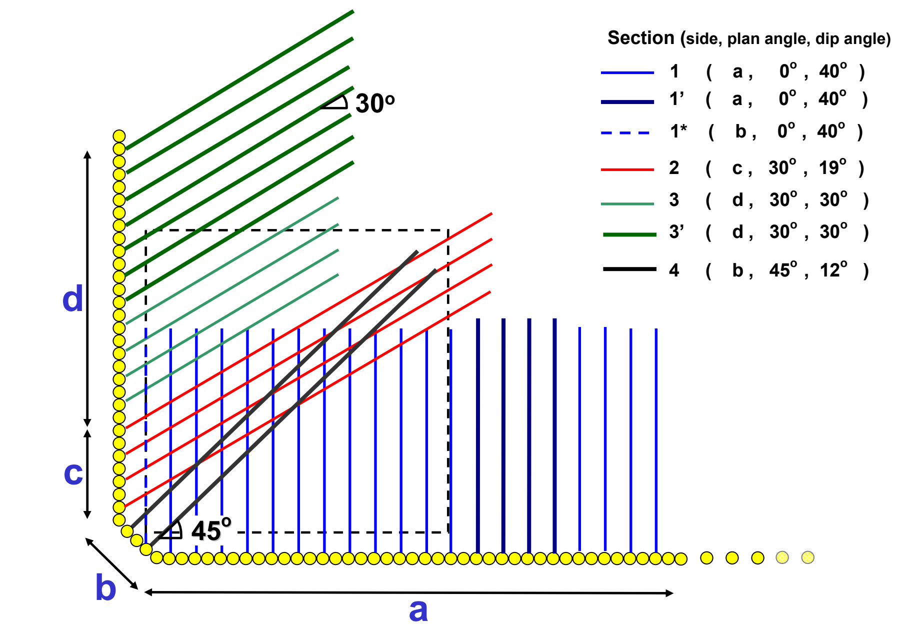
Η Εφαρμοσθείσα Λύση Αντιστήριξης : 3 – Δ



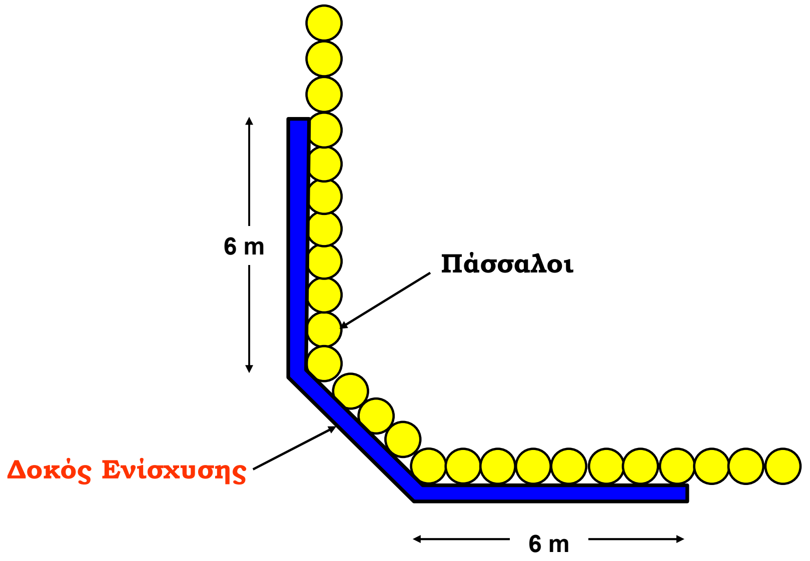
Η Εφαρμοσθείσα Λύση Αντιστήριξης : Τμήμα 1



Η Εφαρμοσθείσα Λύση Αντιστήριξης

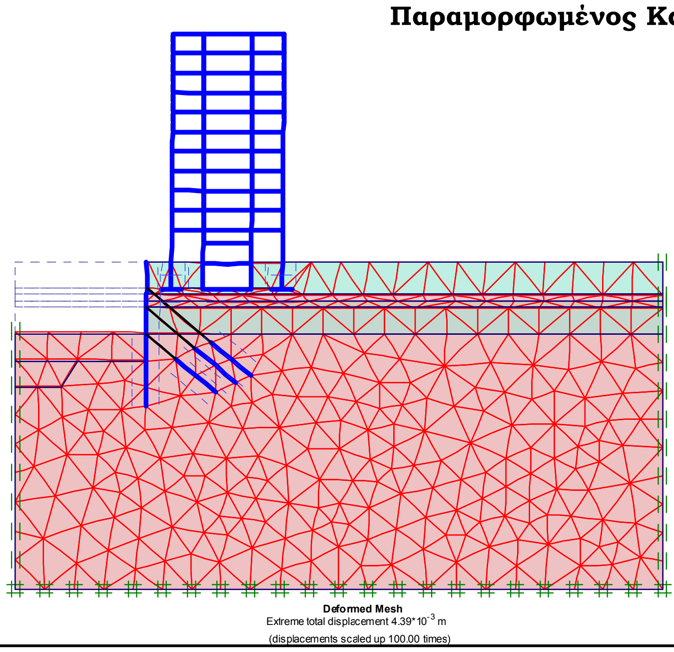


Η Ενίσχυση της Γωνίας

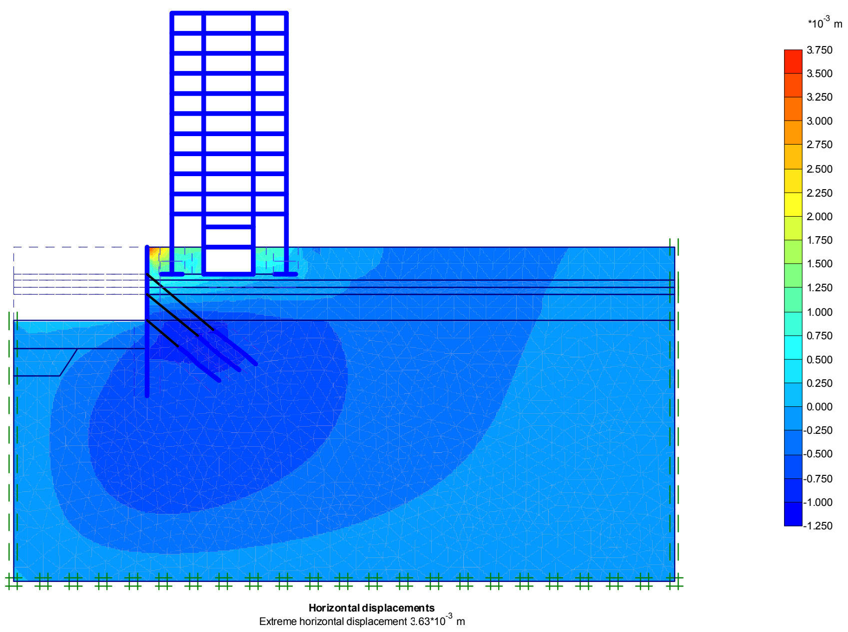


Στάδιο 6 : 3η Σειρά Αγκυρίων

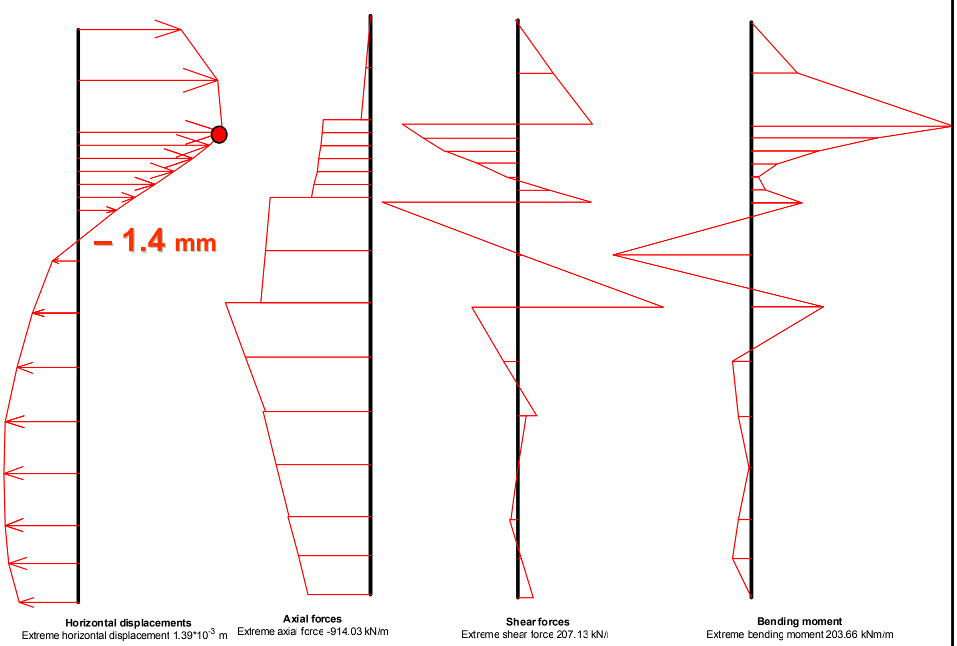
Παραμορφωμένος Κάνναβος Π.Σ.



Οριζόντιες Μετακινήσεις

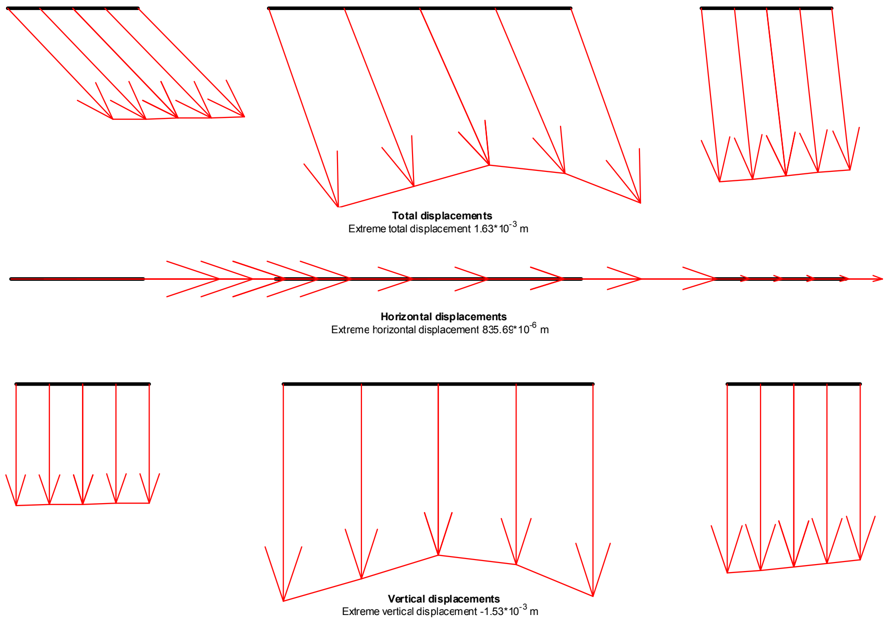


Οριζόντιες Μετακινήσεις και Εντατικά Μεγέθη Πασσάλων

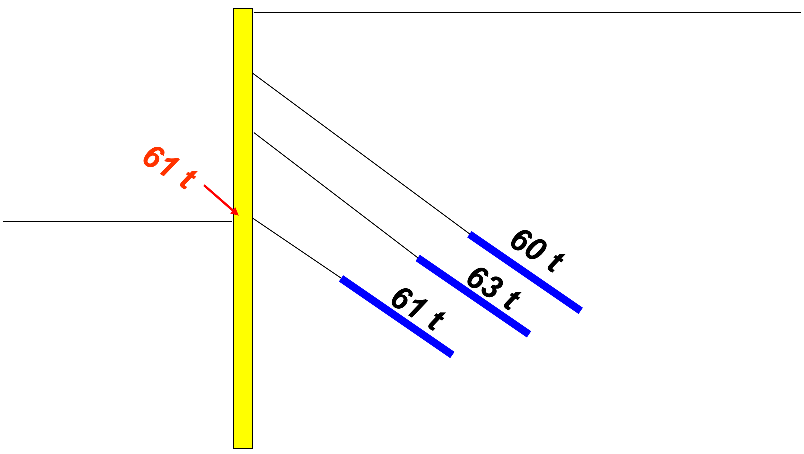


Nikos Gerolymos, Lecturer NTUA

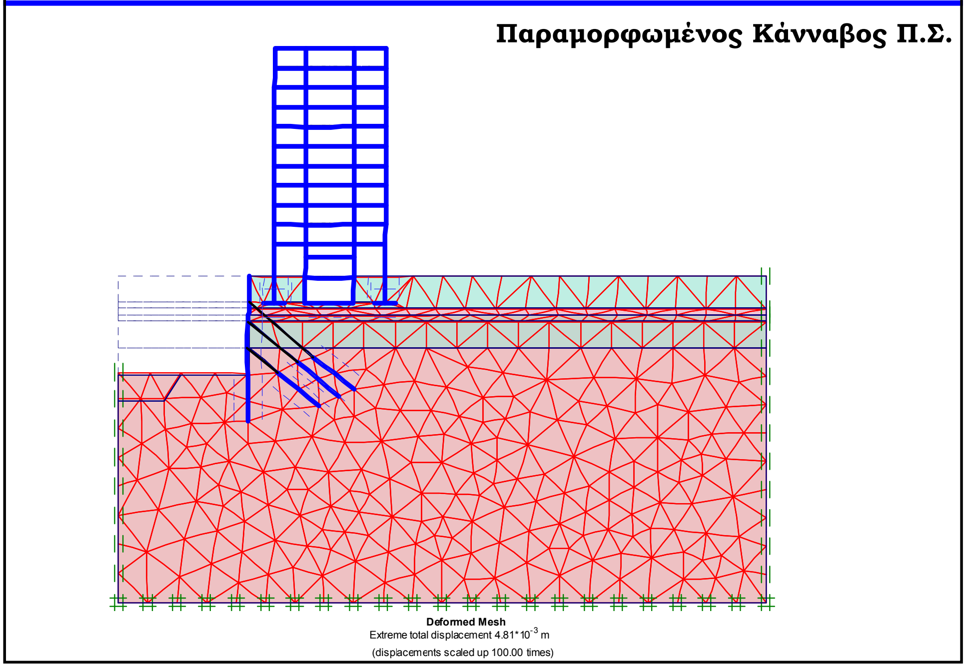
Μετακινήσεις Θεμελίωσης 11-ορόφου Κτιρίου

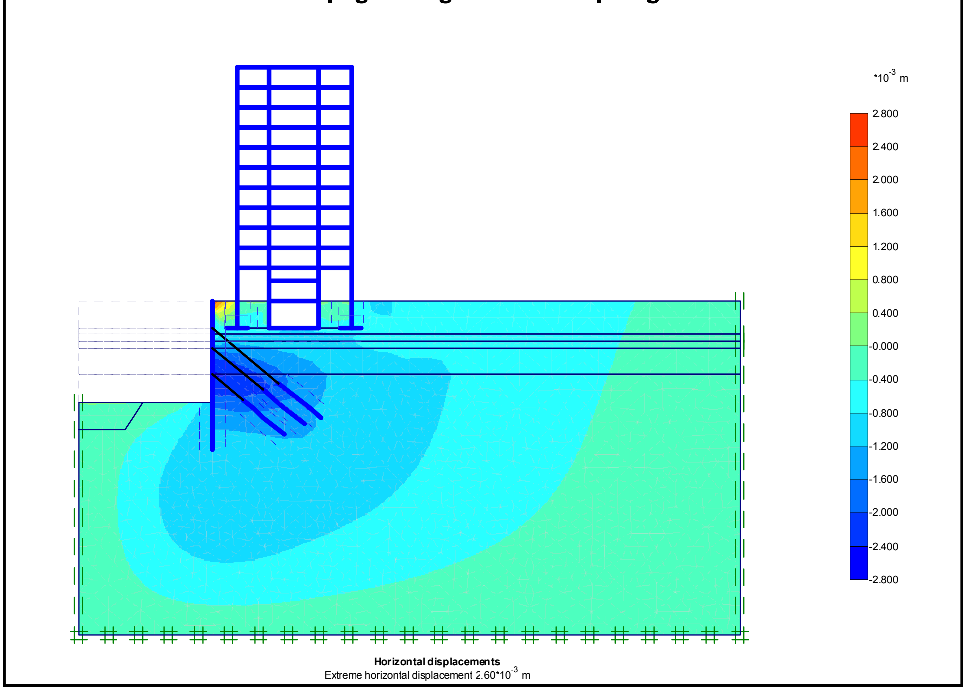


Δυνάμεις Προένταση Αγκυρίων



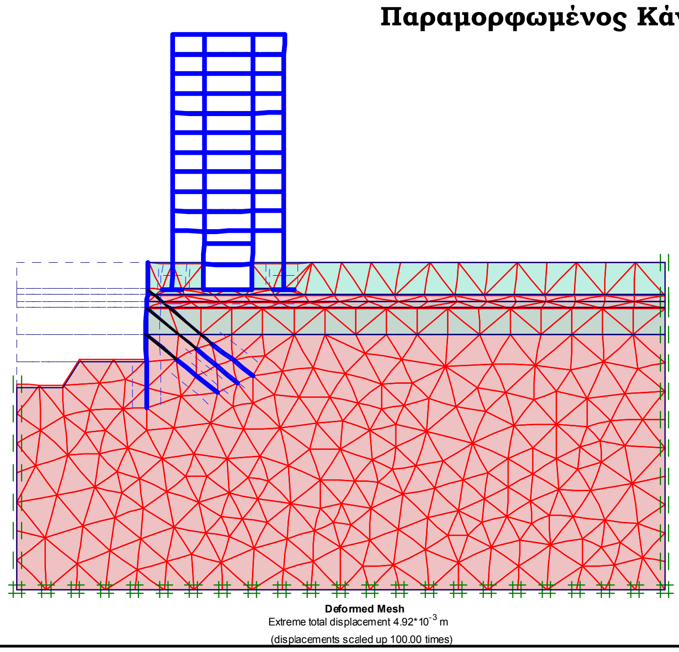
Στάδιο 7 : Εκσκαφή στα –15.2 m





Στάδιο 7 : Εκσκαφή στα –19.2 m

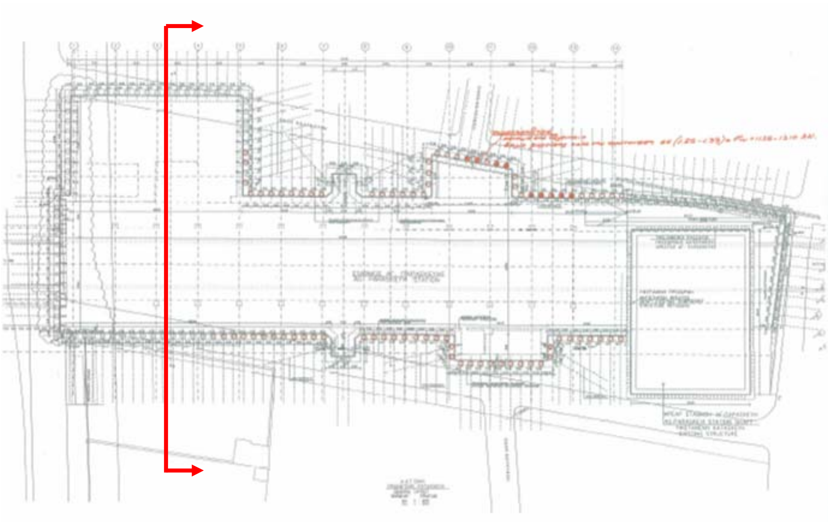
Παραμορφωμένος Κάνναβος Π.Σ.



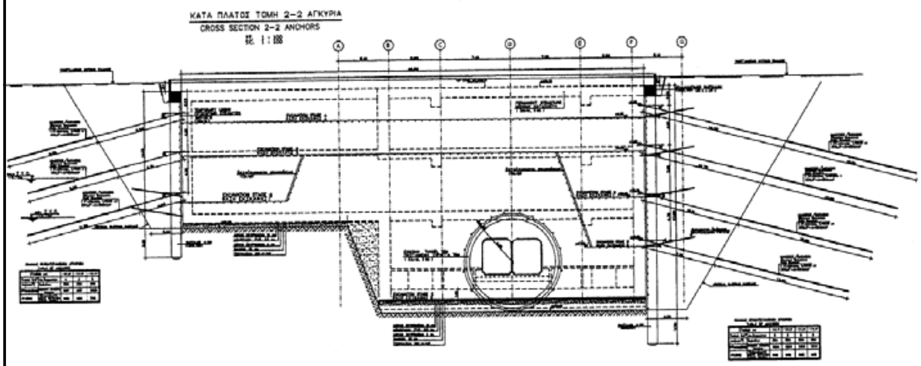
Σταθμός ΜΕΤΡΟ ΑΓ. ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ:
Προσωρινή Αντιστήριξη

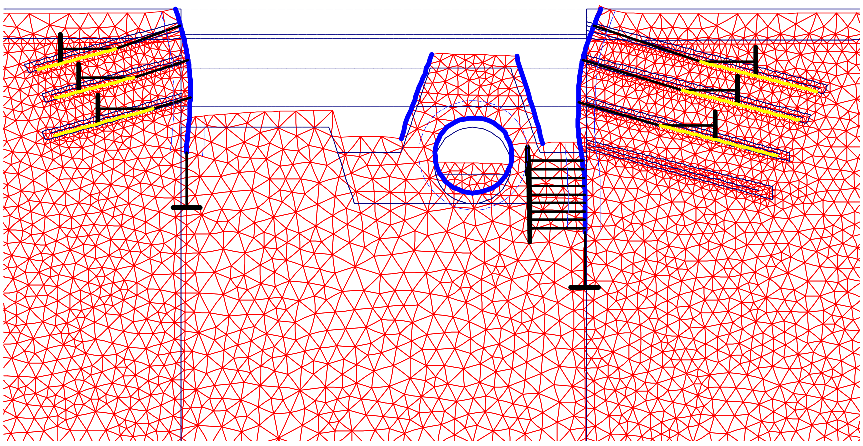

LIEBHERR
CAT

Κάτοψη του Σταθμού

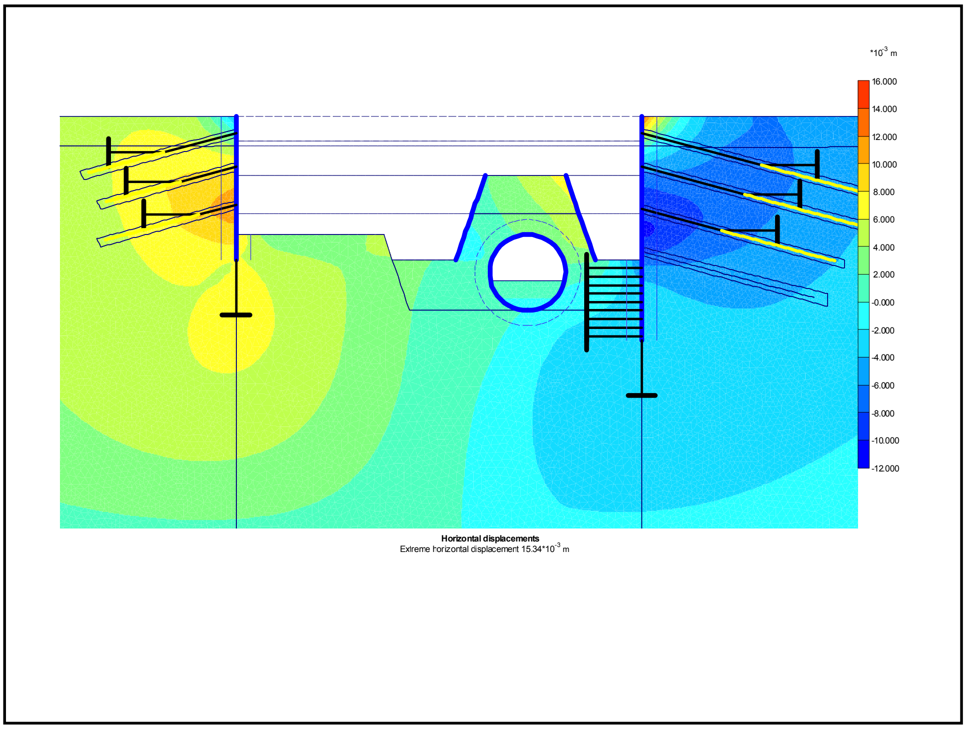


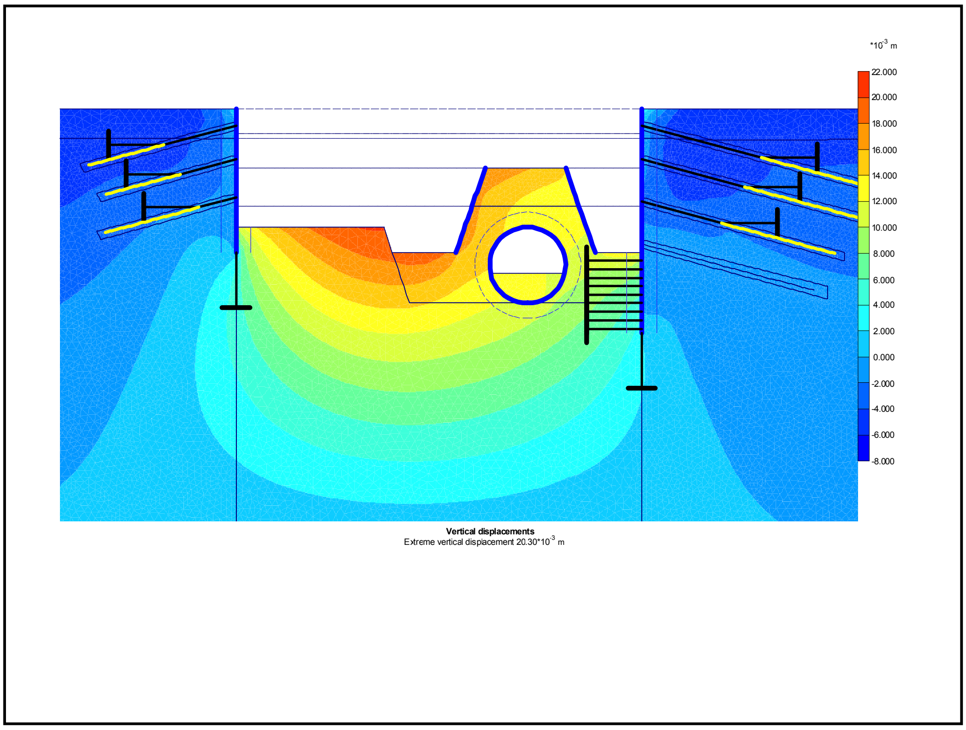
Τυπική διατομή του Σταθμού

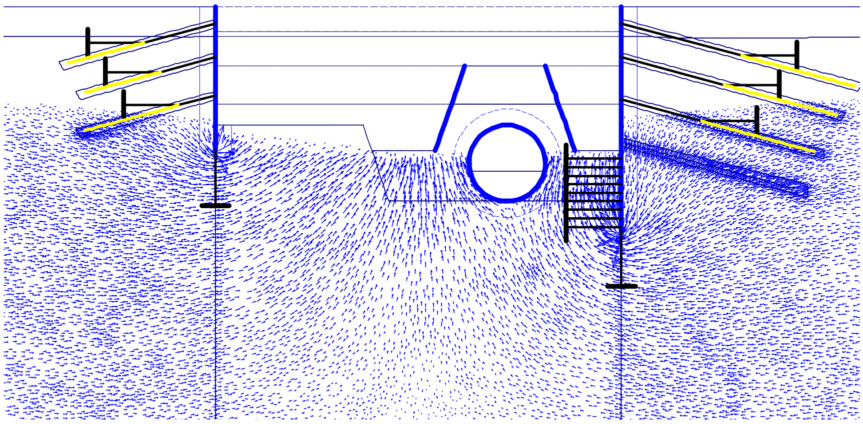




Deformed Mesh
Extreme total displacement 20.75*10^{-3} m
(displacements scaled up 100.00 times)

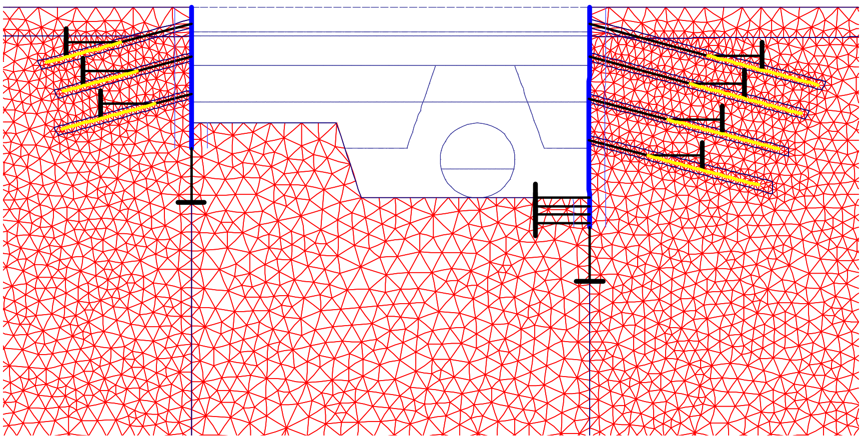

*10^-3 m
16.000
14.000
12.000
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
-0.000
-2.000
-4.000
-6.000
-8.000
-10.000
-12.000
Horizontal displacements
Extreme horizontal displacement 15.34*10^-3 m


*10^-3 m
22.000
20.000
18.000
16.000
14.000
12.000
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
0.000
-2.000
-4.000
-6.000
-8.000
Vertical displacements
Extreme vertical displacement 20.30*10^-3 m



Flow Field

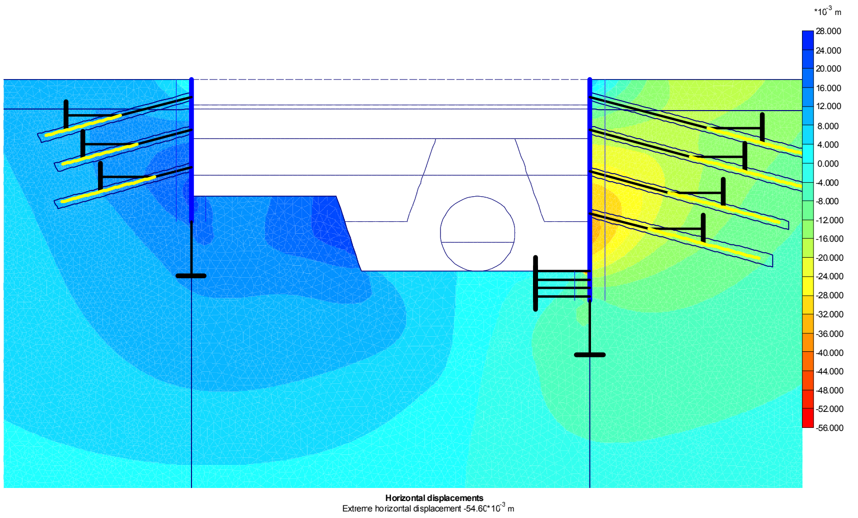
Extreme velocity $137.54*10^{-9}$ m/s Total discharge $970.18*10^{-9}$ $m^3/s/m$

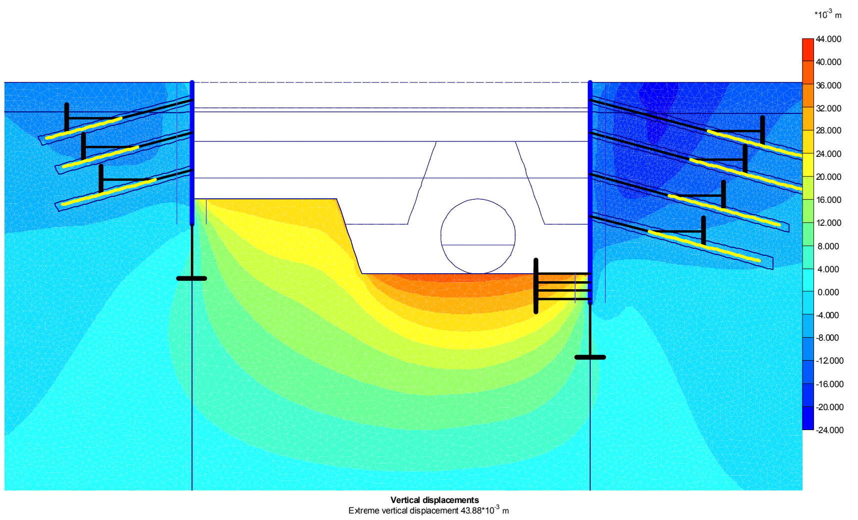


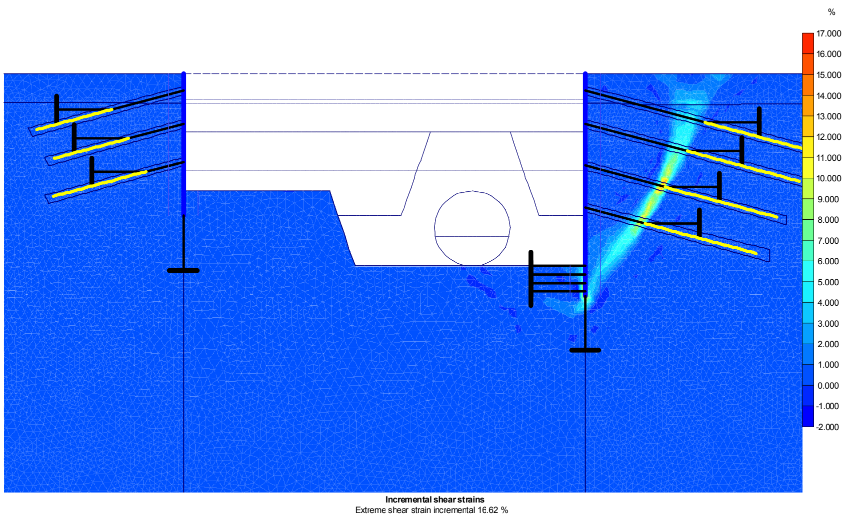
Deformed Mesh

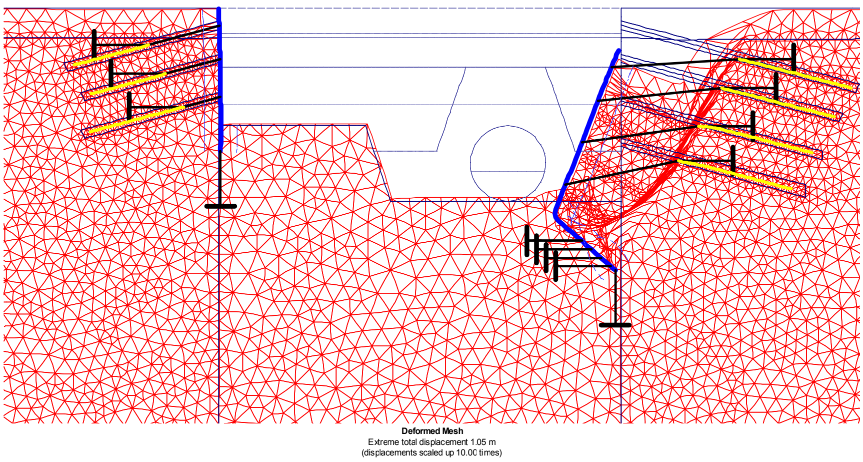
Extreme total displacement $64.88*10^{-3}$ m

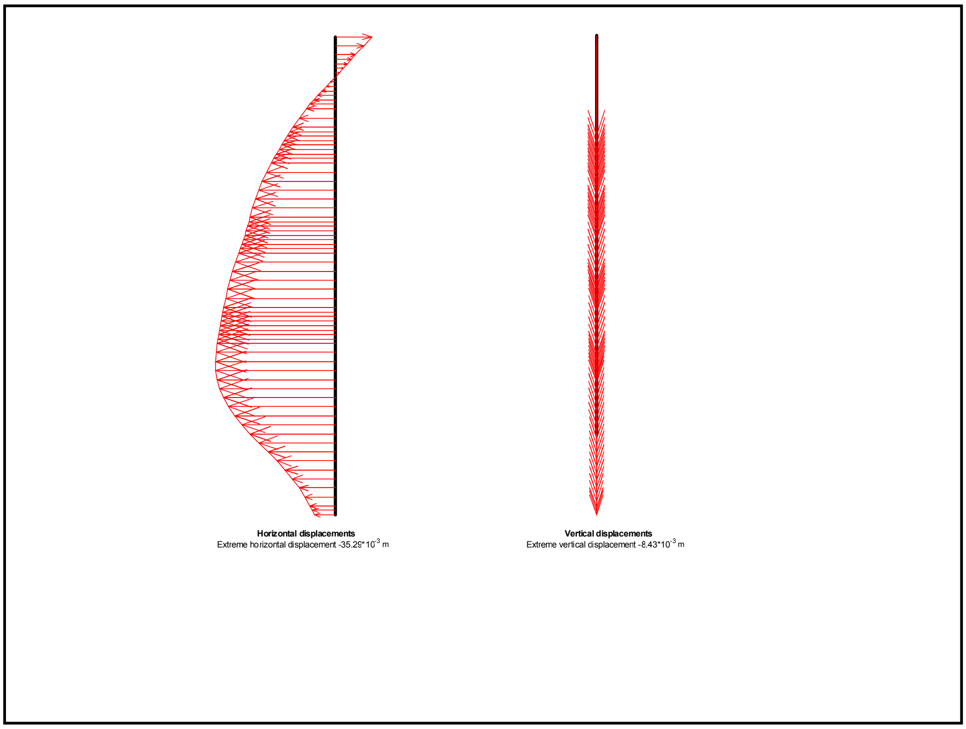
(displacements at true scale)

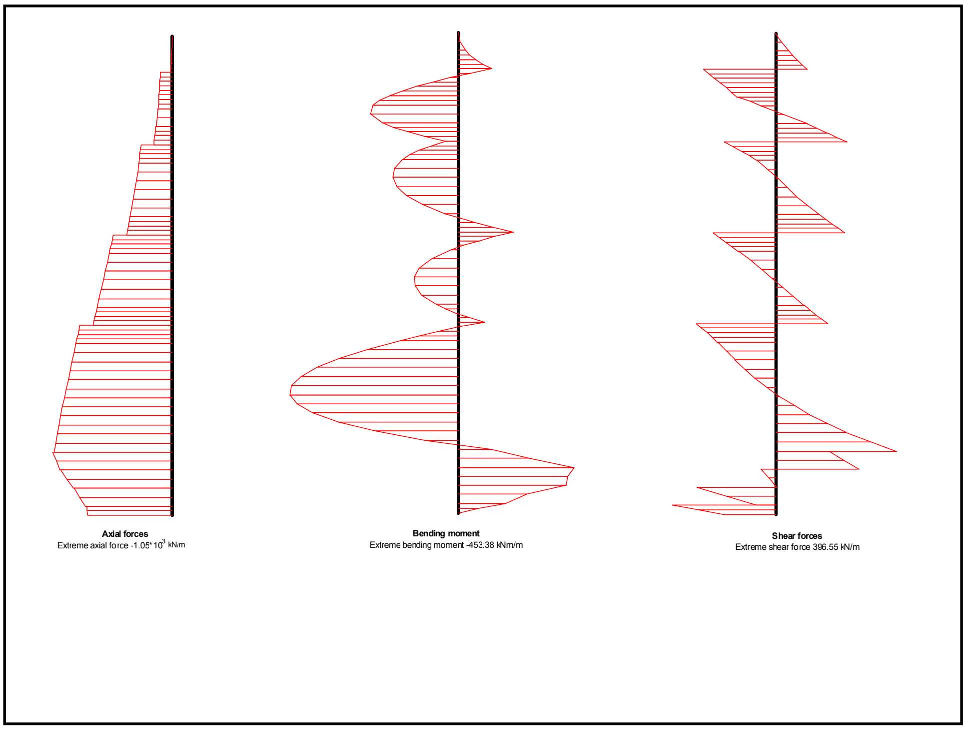

*10-3 m
28.000
24.000
20.000
16.000
12.000
8.000
4.000
0.000
-4.000
-8.000
-12.000
-16.000
-20.000
-24.000
-28.000
-32.000
-36.000
-40.000
-44.000
-48.000
-52.000
-56.000
Horizontal displacements
Extreme horizontal displacement -54.60*10-3 m

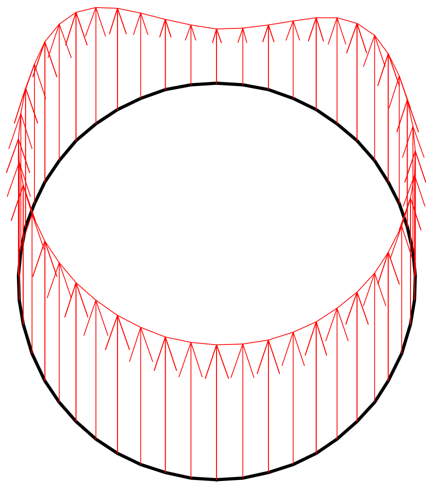

*10-3 m
44.000
40.000
36.000
32.000
28.000
24.000
20.000
16.000
12.000
8.000
4.000
0.000
-4.000
-8.000
-12.000
-16.000
-20.000
-24.000
Vertical displacements
Extreme vertical displacement 43.88*10-3 m


%
17.000
16.000
15.000
14.000
13.000
12.000
11.000
10.000
9.000
8.000
7.000
6.000
5.000
4.000
3.000
2.000
1.000
0.000
-1.000
-2.000
Incremental shear strains
Extreme shear strain incremental 16.62 %


Deformed Mesh
Extreme total displacement 1.05 m
(displacements scaled up 10.00 times)


Horizontal displacements
Extreme horizontal displacement -35.29*10^-3 m
Vertical displacements
Extreme vertical displacement -8.43*10^-3 m

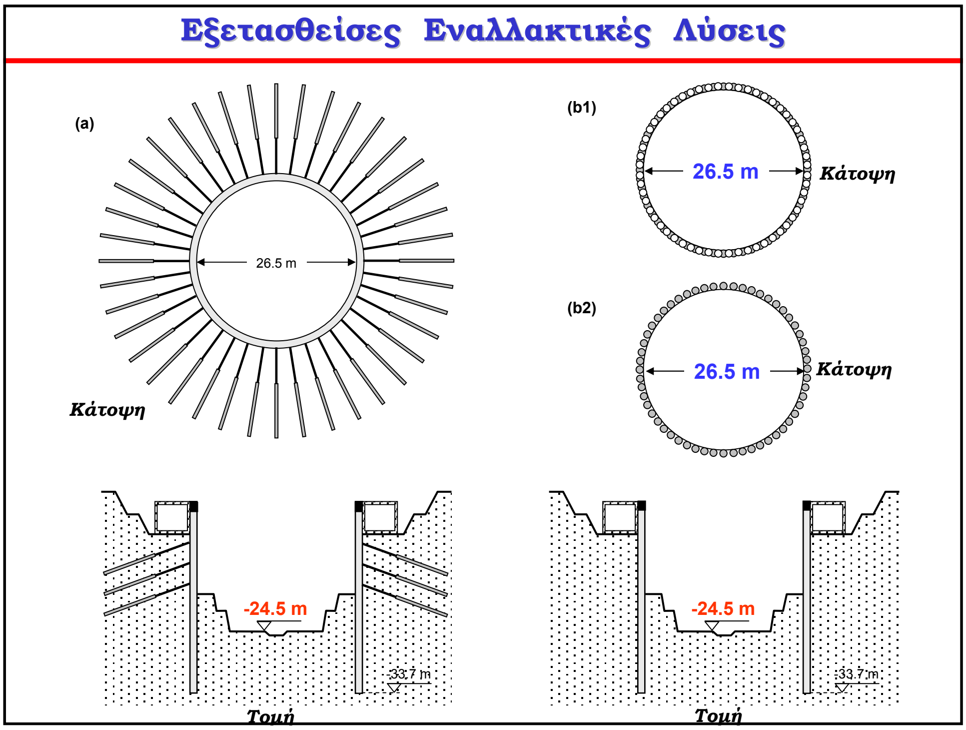

Axial forces
Extreme axial force -1.05*10^3 kN/m
Bending moment
Extreme bending moment -453.38 kNm/m
Shear forces
Extreme shear force 396.55 kN/m



Φρέαρ Τελετής Ενάρξεως ΟΑΚΑ

ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΙ ΑΓΩΝΕΣ ΑΘΗΝΑ 2004

13 Αυγούστου 2004



Εξετασθείσες Εναλλακτικές Λύσεις
(a)
26.5 m
Κάτοψη
(b1)
26.5 m
Κάτοψη
(b2)
26.5 m
Κάτοψη
-24.5 m
-33.7 m
Τομή
-24.5 m
-33.7 m
Τομή

Σύλληψη Κατασκευαστικής Λύσης

- **Δυσχέρεια Κατασκευής**

  Εδαφικές Συνθήκες : σχετικώς χαλαρό έδαφος έως τα –7.5 m

  \+ Υ.Ο στο –1 m

  Χρόνος Αποπεράτωσης: ΕΛΑΧΙΣΤΟΣ (3 μήνες περίπου)

- **Διαφραγματικός Τοίχος, Αγκύρια, και Αλληλοτεμνόμενοι Πάσσαλοι :** *ΑΠΟΡΡΙΠΤΟΝΤΑΙ*

- **Εφαρμοσθείσα Λύση**

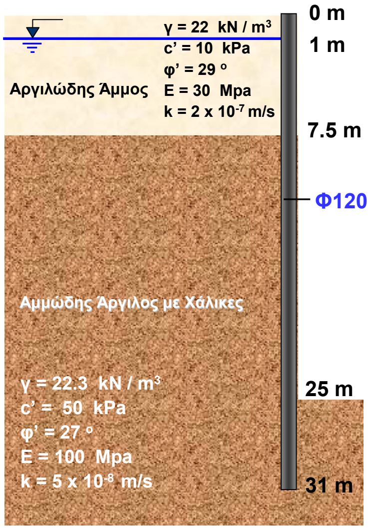
  Πάσσαλοι Φ120 σε αξονική απόσταση 1.5 m +

  Δύσκαμπτος Δακτυλιωτός Κεφαλόδεσμος Ω.Σ. +

  Εφαρμογή της Παρατηρησιακής Μεθόδου

  Παρακολούθηση, Πρόβλεψη μέτρων εκτάκτου ανάγκης

Εδαφικό Προφίλ



14 Οκτωβρίου 2003

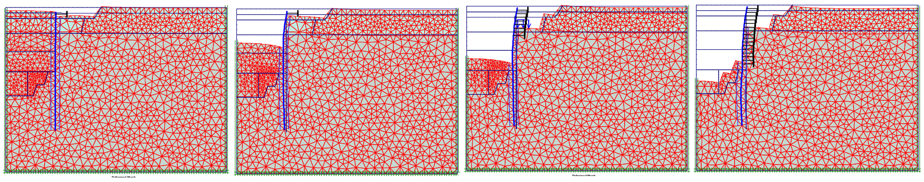
Διάτρηση του εδάφους και τοποθέτηση των μεταλλικών κλωβών των πασσάλων

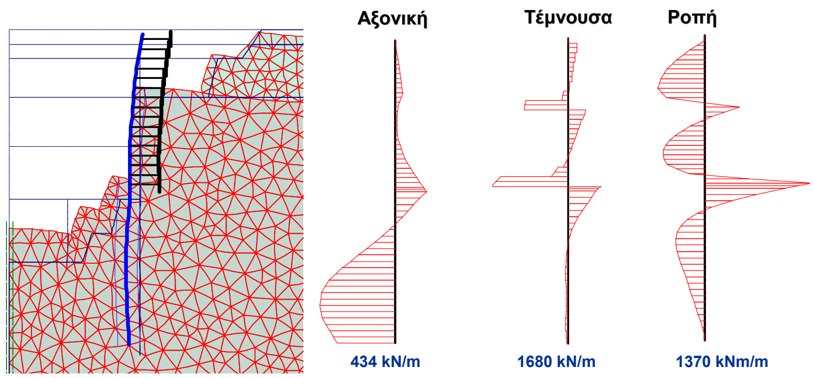
20 Οκτωβρίου 2003

Κατασκευή των πασσάλων στην περίμετρο της εκσκαφής εώς το βάθος των 31 m, και σε απόσταση 1.5 m

Το έδαφος θεμελιώσεως και αντιστηρίξεως

Προσομοίωση της Κατασκευαστικής Ακολουθίας με Π. Σ.

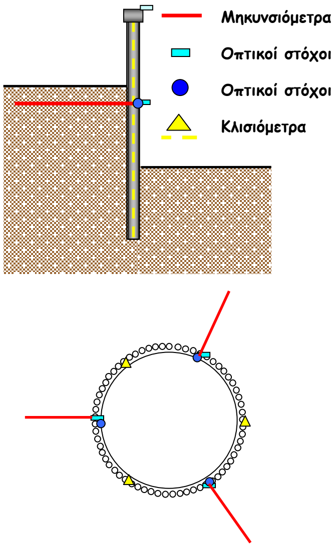




1 Δεκεμβρίου 2003

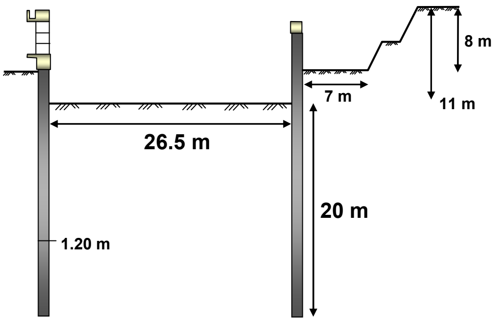
- Εσωτερική Εκσκαφή : - 9 m
- Εξωτερική Εκσκαφή : - 8 m

Το Σύστημα Ενόργανης Παρακολούθησης



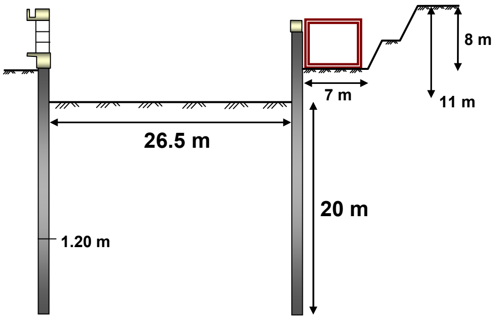
1 Δεκεμβρίου 2003

8 Δεκεμβρίου 2003



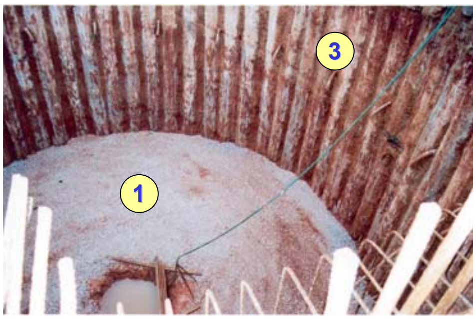
- Εσωτερική εκσκαφή : - 11m
- Τοποθέτηση στραγγιστηρίων : - 9 m

12 Δεκεμβρίου 2003



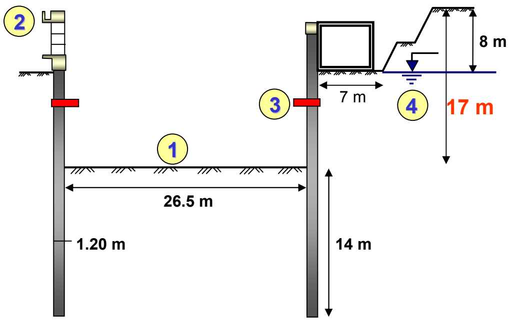
- Σκυροδέτηση Εξωτερικών Δεξαμενών

2 Ιανουαρίου 2004

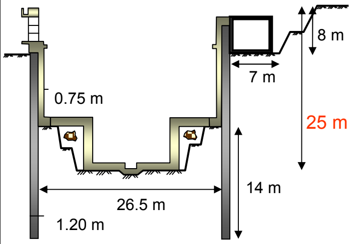


1. Εσωτερική εκσκαφή : - 17 m
2. Σκυροδέτηση του τελευταίου τμήματος του κεφαλόδεσμου :

   Εξασφάλιση Δακτυλιωτής Λειτουργίας
3. Στραγγιστήρια : - 9 m
4. Ταπείνωση στάθμης Υ.Ο. : - 8 m

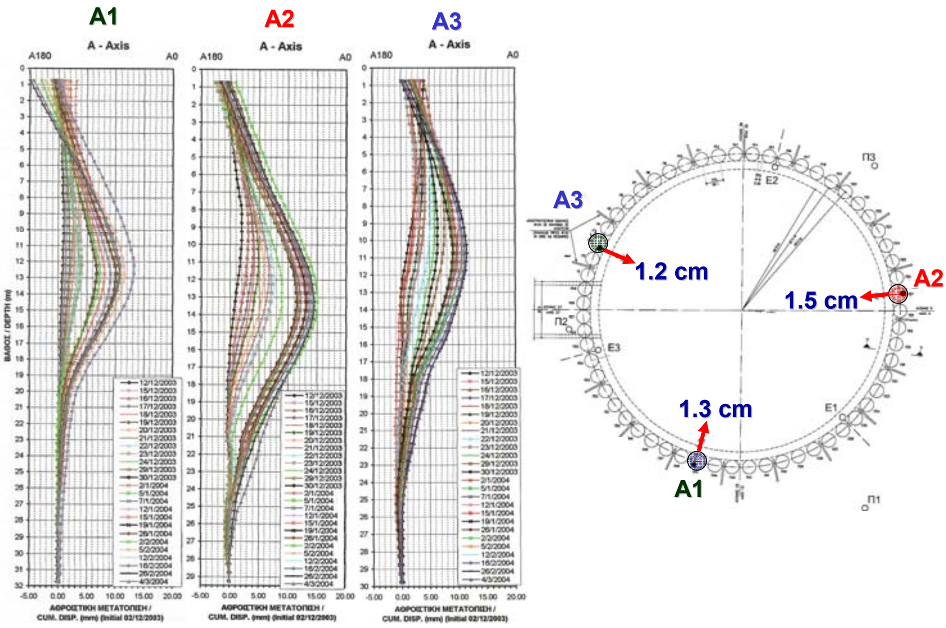


Απρίλιος 2004

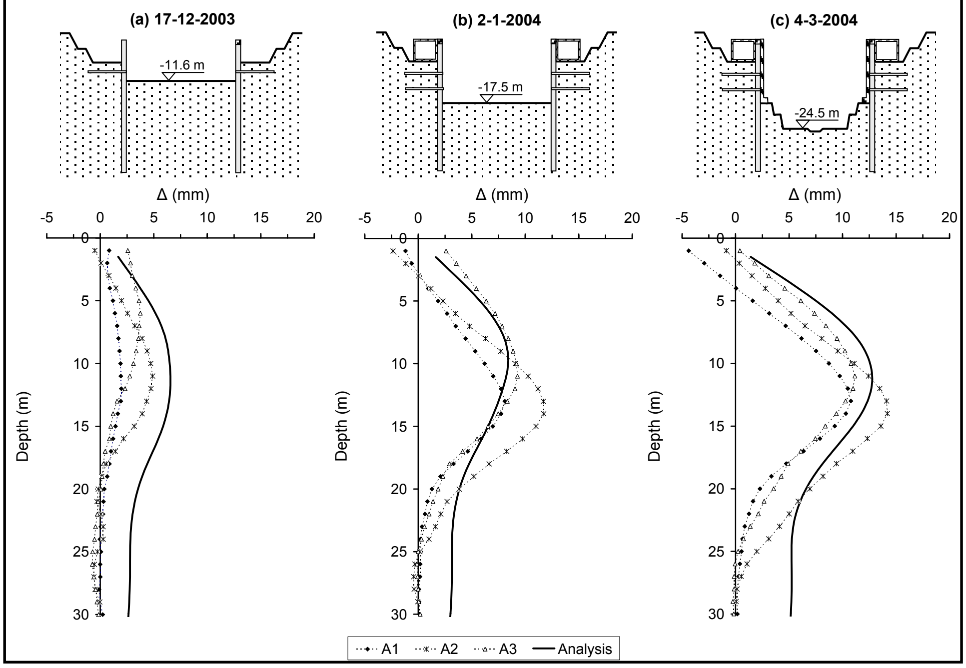


- Εσωτερική Εκσκαφή : - 25 m
- Σκυρ. Μόνιμης Επένδυσης

Χρονική Εξέλιξη Ακτινικών Μετακινήσεων από τα Αποκλισιόμετρα



Σύγκριση Αναλυτικής Πρόβλεψης με Μετρήσεις



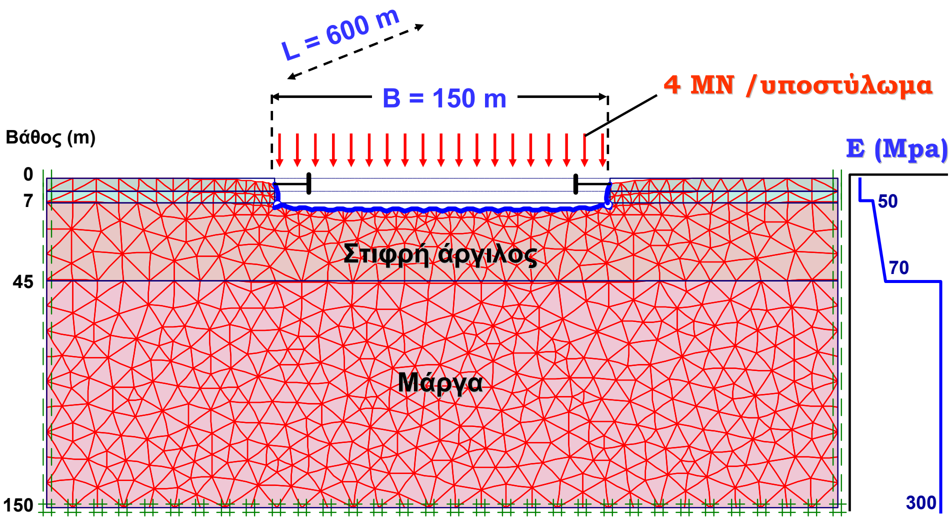
Θεμελίωση ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΡΑΔΙΟΤΗΛΕΟΡΑΣΗΣ “ I.B.C.”

ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΙ ΑΓΩΝΕΣ ΑΘΗΝΑ 2004

Θεμελίωση Ολυμπιακού Κέντρου Ραδιοτηλεόρασης (I.B.C.)

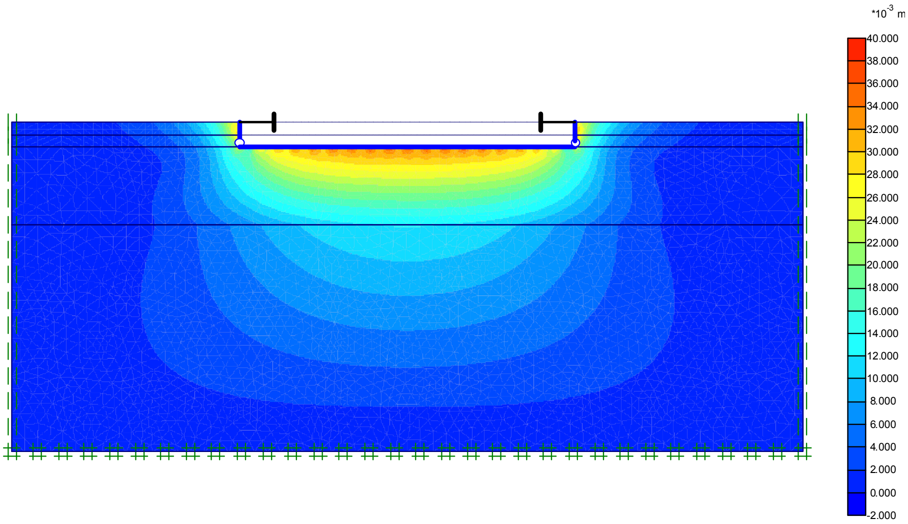
- Έδαφος : 0 – 7 m : Υλικά Επιχώσεων
  7 – 45 m : Στιφρή Άργιλος
  > 45 m : Μάργα
- Υπολογισμός Ολικών και Διαφορικών Καθιζήσεων
- 2-διάστατη Ανάλυση της Θεμελίωσης με Πεπερασμένα Στοιχεία
- 3-διάστατη Ανάλυση της Θεμελίωσης με Πεπερασμένα Στοιχεία :
  έλεγχος της επιρροής της ανισο-κατανομής των φορτίων

2-Δ Ανάλυση Επίπεδης Παραμόρφωσης



2-Δ Ανάλυση Επίπεδης Παραμόρφωσης

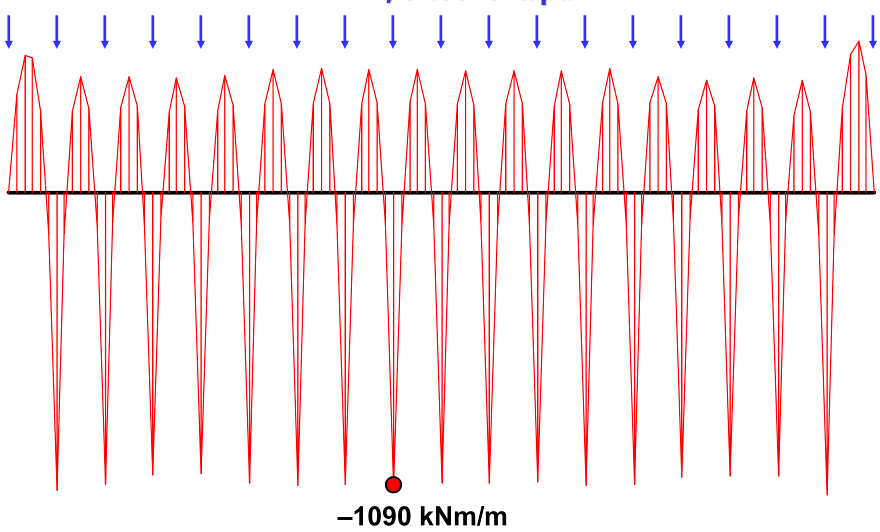
Ισοϋψείς ολικών Καθιζήσεων :



2-Δ Ανάλυση Επίπεδης Παραμόρφωσης

Καμπτικές Ροπές Εσχάρας Πεδιλοδοκών :

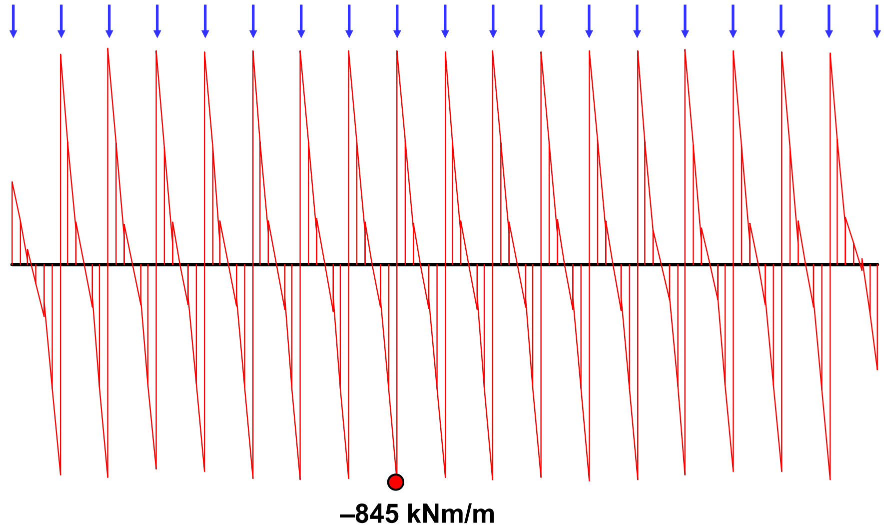
4 MN /υποστύλωμα



2-Δ Ανάλυση Επίπεδης Παραμόρφωσης

Τέμνουσες Εσχάρας Πεδιλοδοκών :

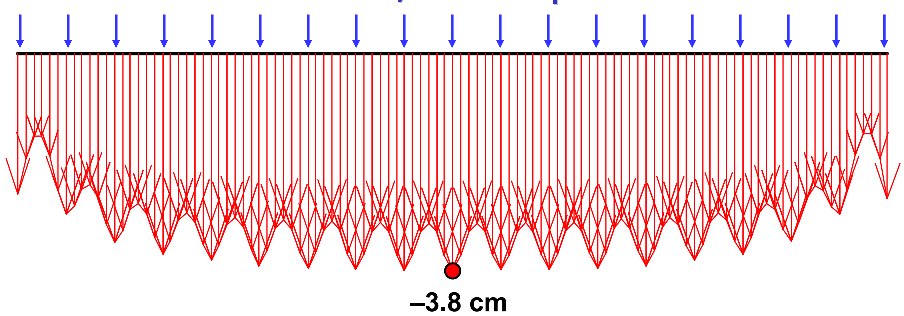
4 MN /υποστύλωμα



2-Δ Ανάλυση Επίπεδης Παραμόρφωσης

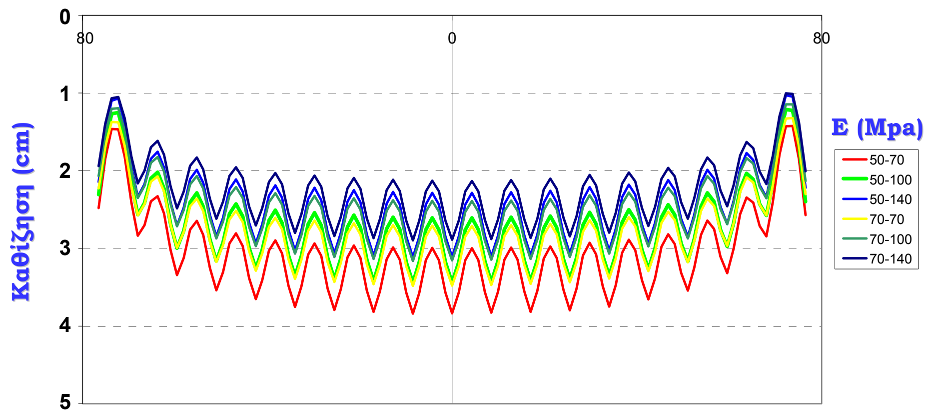
Καθίζηση Εσχάρας Πεδιλοδοκών :

4 MN /υποστύλωμα

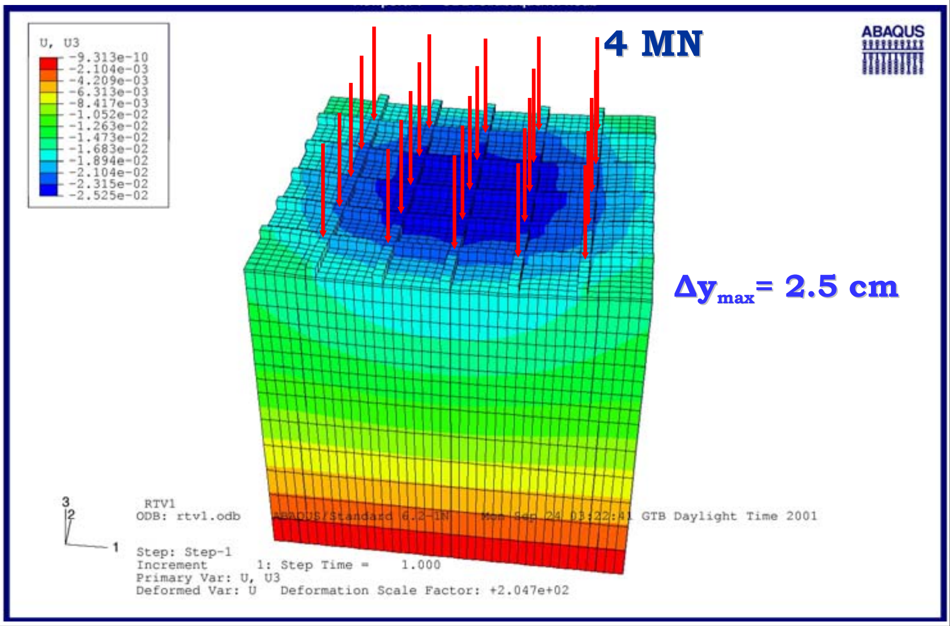


2-Δ Ανάλυση Επίπεδης Παραμόρφωσης

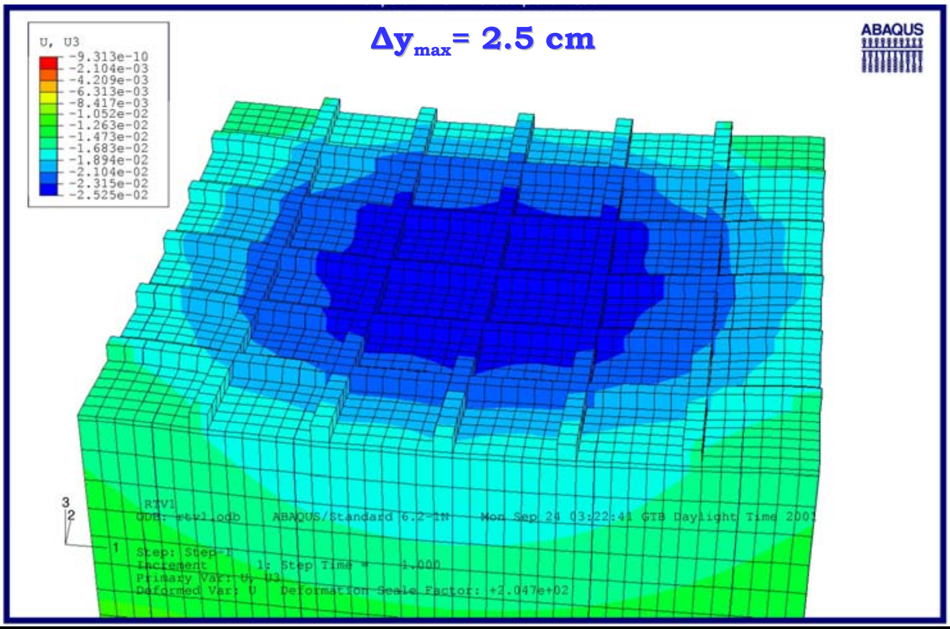
Παραμετρική Διερεύνηση : Διαγράμματα Καθιζήσεων



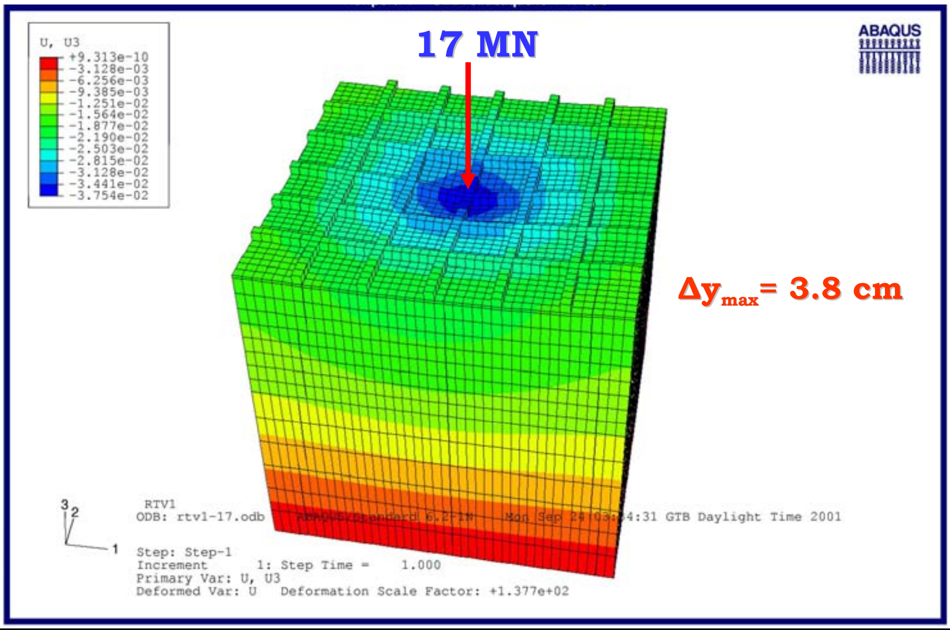
3-Δ Ανάλυση : Φορτίο 4 MN / υποστύλωμα



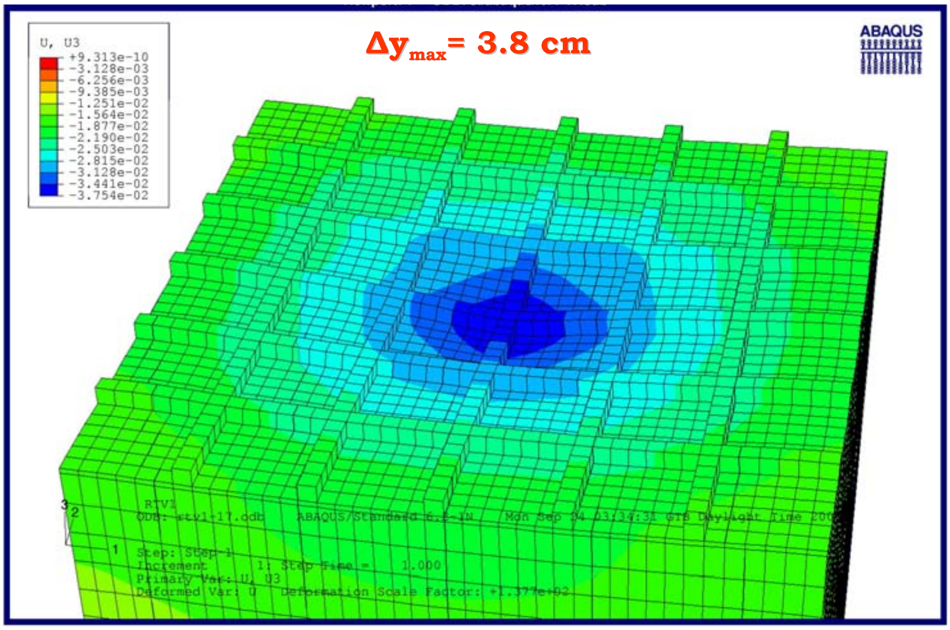
3-Δ Ανάλυση : Φορτίο 4 MN / υποστύλωμα



3-Δ Ανάλυση : Φορτίο 17 MN

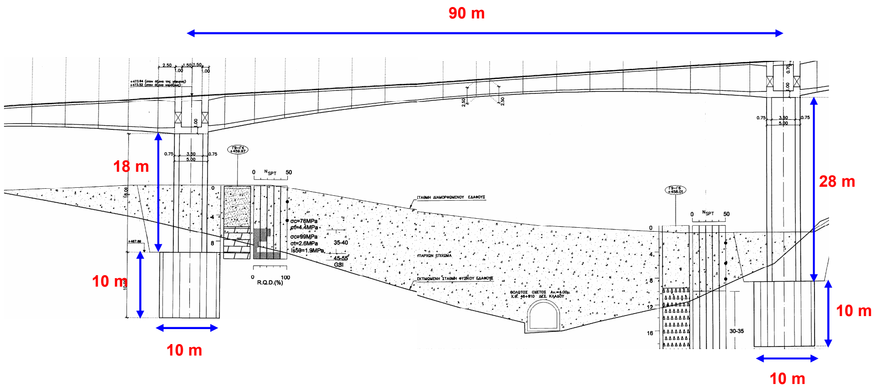


3-Δ Ανάλυση : Φορτίο 17 MN

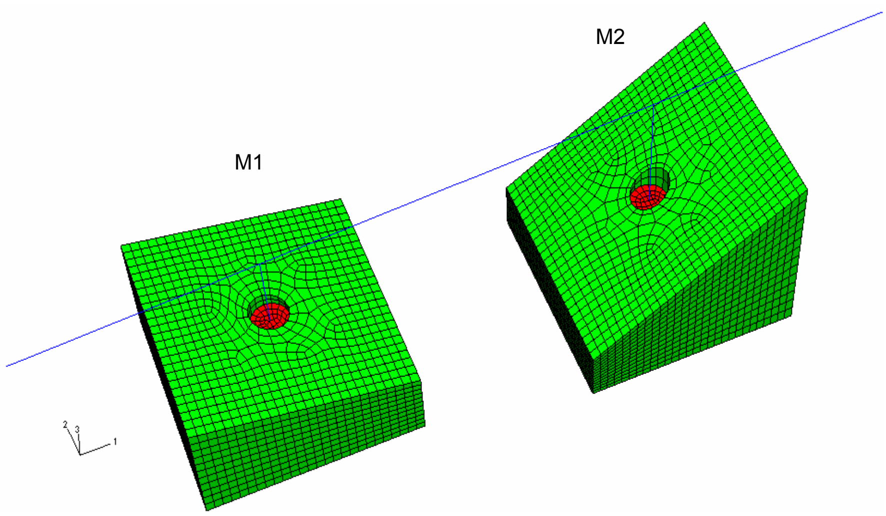


Γέφυρα Στέρνας

Σχεδιασμός Θεμελίωσης

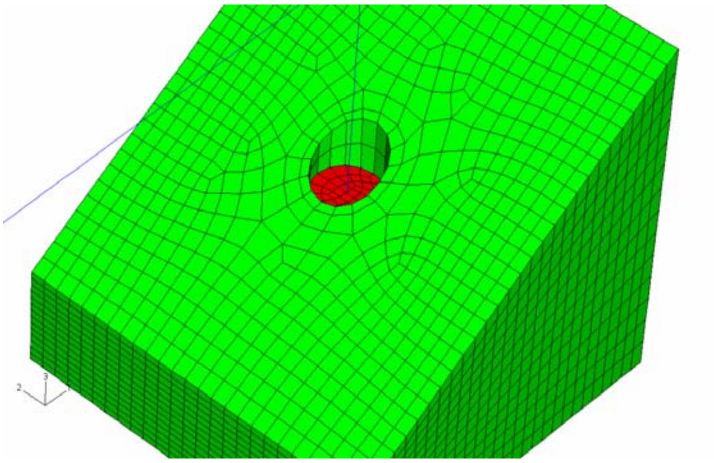


Σκαρηφηματική απεικόνηση της μηκοτομής της γέφυρας και του εδάφους θεμελίωσης

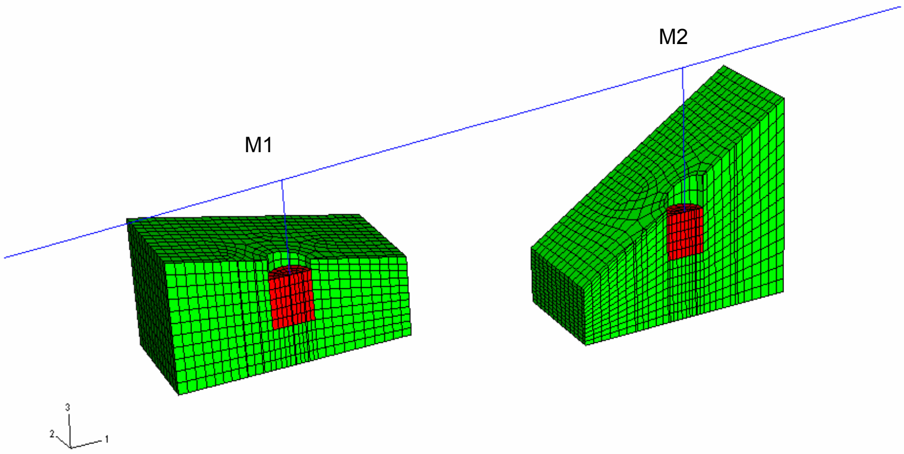


Το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων. Τα φρέατα και το έδαφος θεμελίωσης απεικονίζονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα αντιστοίχως, και ό φορέας της γέφυρας με μπλε.

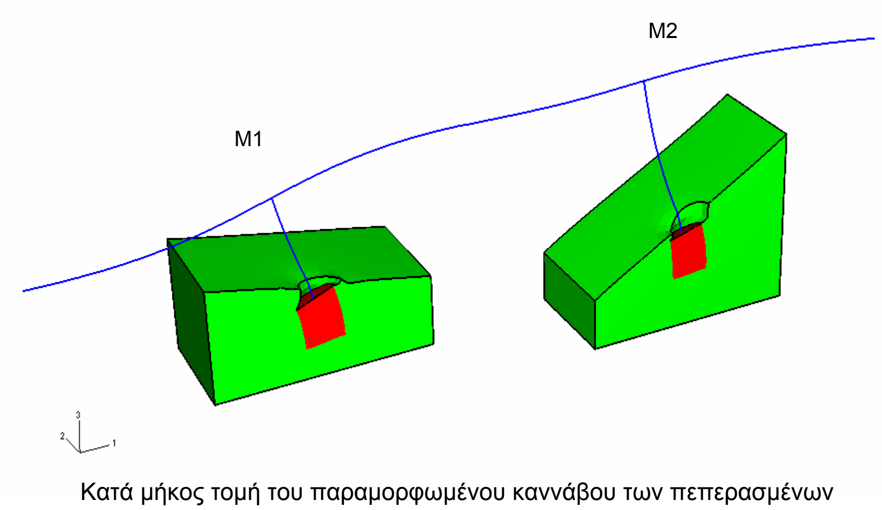
M2



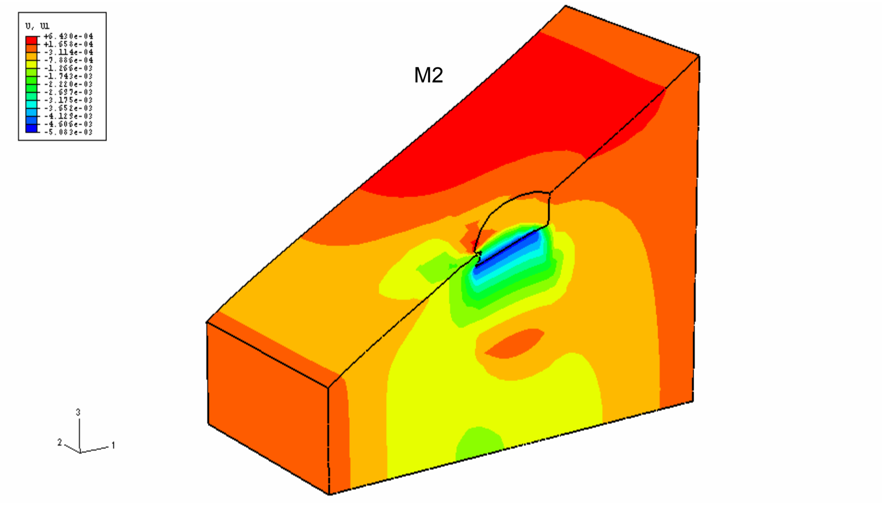
Το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων: Μεγέθυνση στην περιοχή θεμελίωσης του μεσοβάθρου Μ2. Το φρέαρ και το έδαφος θεμελίωσης απεικονίζονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα αντιστοίχως, και ό φορέας της γέφυρας με μπλε.



Το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων: Κατά μήκος τομή. Τα φρέατα και το έδαφος θεμελίωσης απεικονίζονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα αντιστοίχως, και ό φορέας της γέφυρας με μπλε.

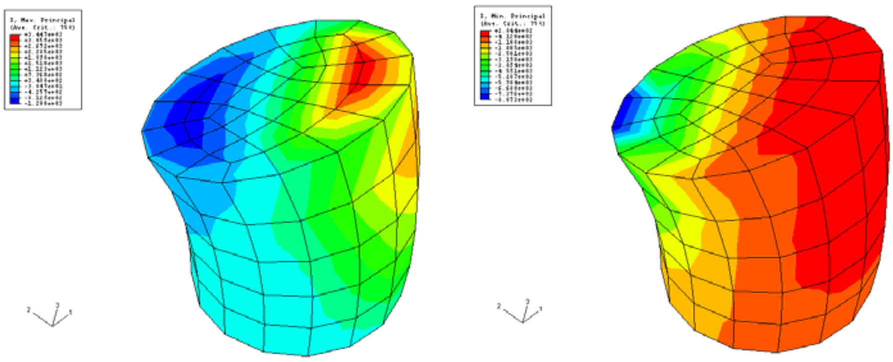


Κατά μήκος τομή του παραμορφωμένου καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων στο τελευταίο στάδιο της αριθμητικής ανάλυσης για την φόρτιση σχεδιασμού. Ο συντελεστής μεγέθυνσης είναι ίσος με 350. Τα φρέατα και το έδαφος θεμελίωσης απεικονίζονται με κόκκινο και πράσινο χρώμα αντιστοίχως, και ό φορέας της γέφυρας με μπλε.



Σχήμα 6.13: Κατά μήκος τομή του παραμορφωμένου καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων και ισουψείς των μετακινήσεων κατά την διαμήκη διεύθυνση, στο τελευταίο στάδιο της αριθμητικής ανάλυσης για την φόρτιση σχεδιασμού (συντελεστής μεγέθυνσης = 350): Μεγέθυνση στην περιοχή θεμελίωσης του μεσοβάθρου Μ2. Η μέγιστη μετακίνηση του φρέατος είναι 5 mm.

M2



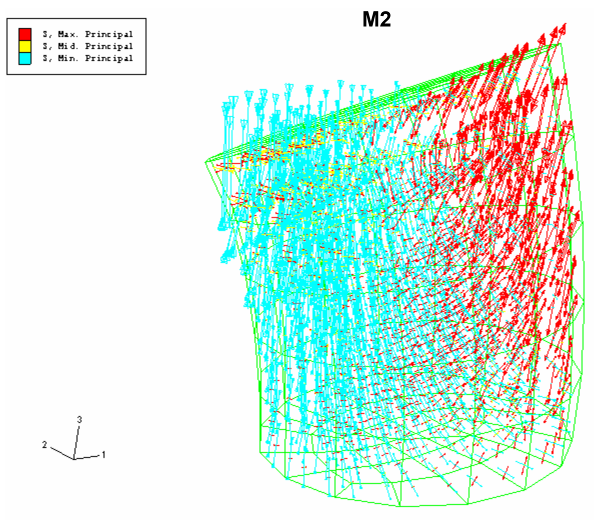
Μέγιστη Κύρια τάση (εφελκυσμός)

3.45 MPa

Ελάχιστη Κύρια τάση (Θλίψη)

8.07 MPa

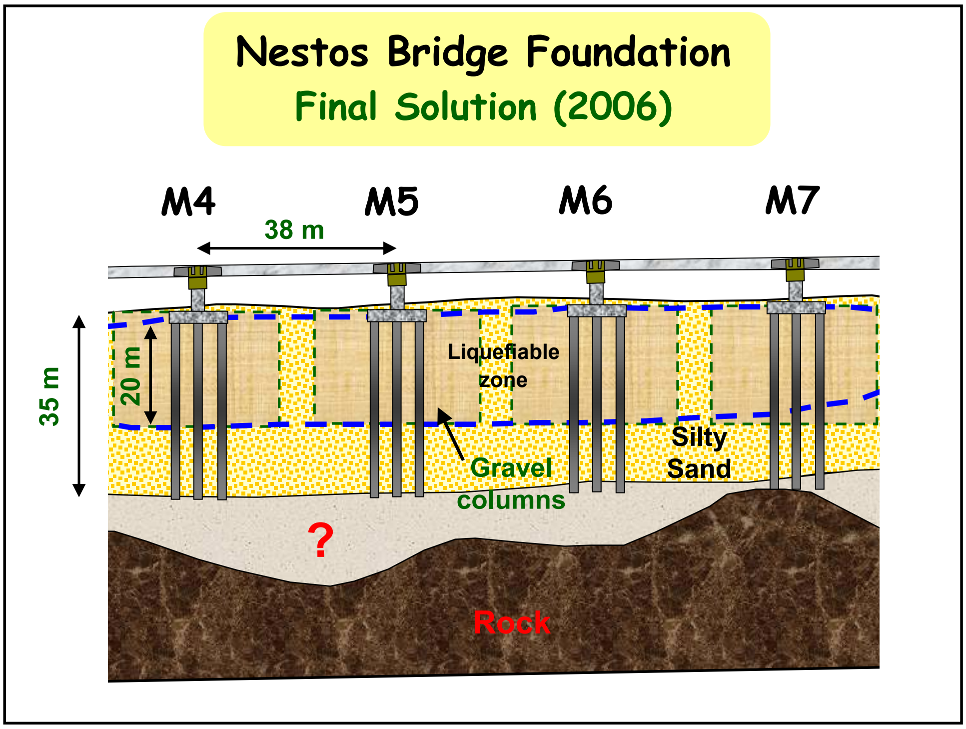
Σχήμα 6.19: Ισουψείς των κυρίων τάσεων στο φρέαρ του μεσοβάθρου Μ2, στο τελευταίο στάδιο της αριθμητικής ανάλυσης για την φόρτιση σχεδιασμού (συντελεστής μεγέθυνσης = 300). Η μέγιστη κύρια τάση (Εφελκυσμός) είναι 3.45 MPa, και η ελάχιστη κύρια τάση (Θλίψη) είναι 8.07 MPa.

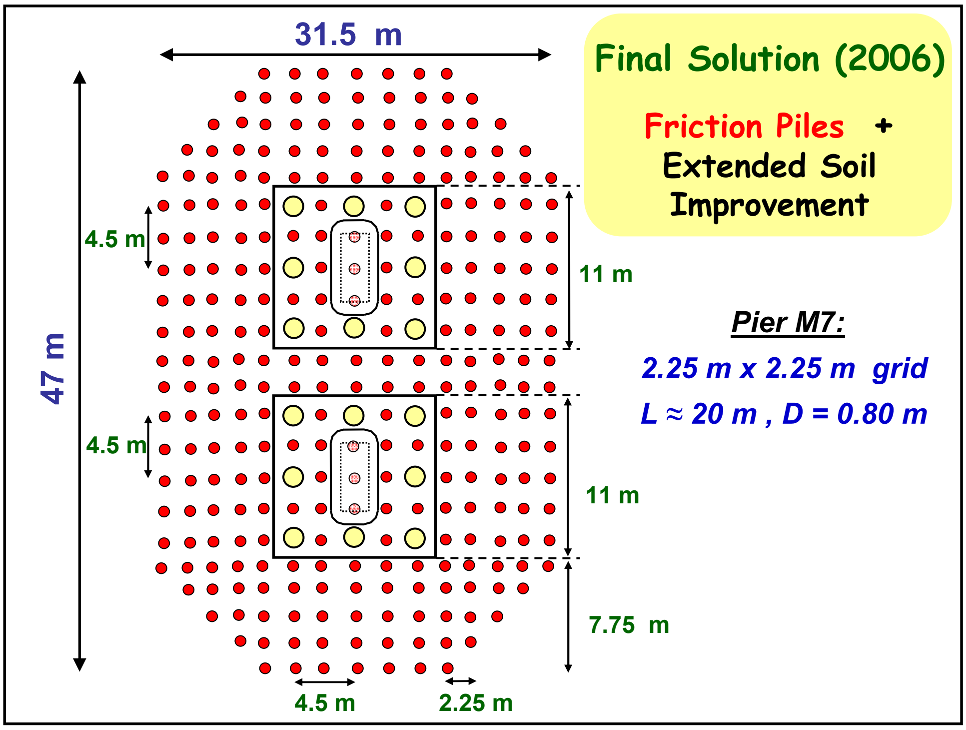


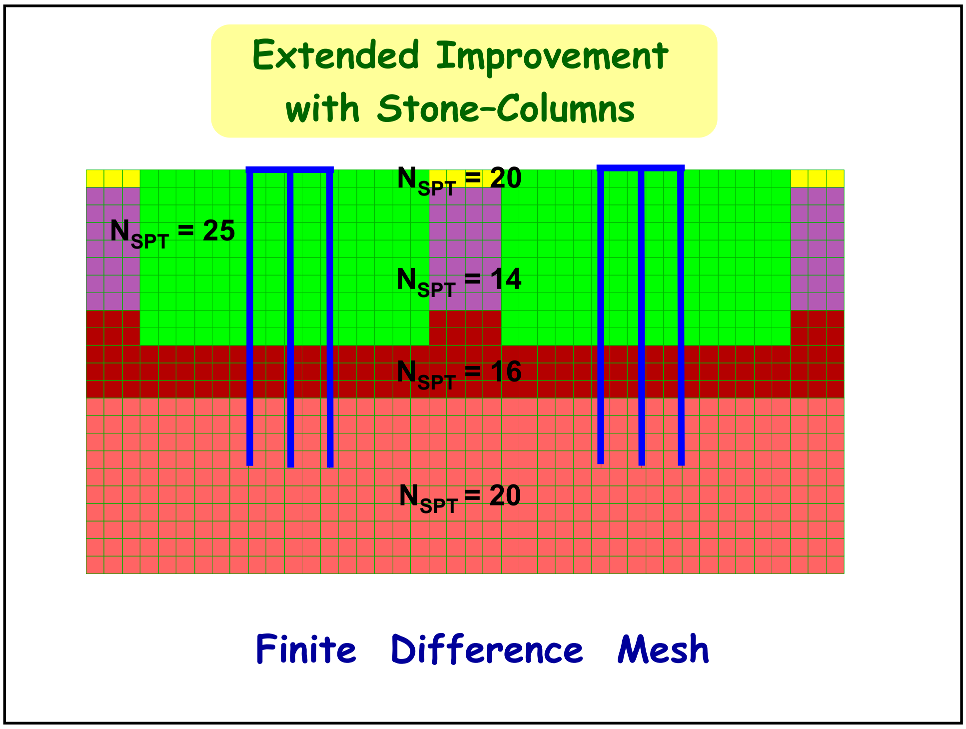
Σχήμα 6.20: Διανύσματα των κυρίων τάσεων στο φρέαρ του μεσοβάθρου Μ2, στο τελευταίο στάδιο της αριθμητικής ανάλυσης για την φόρτιση σχεδιασμού (συντελεστής μεγέθυνσης = 300).

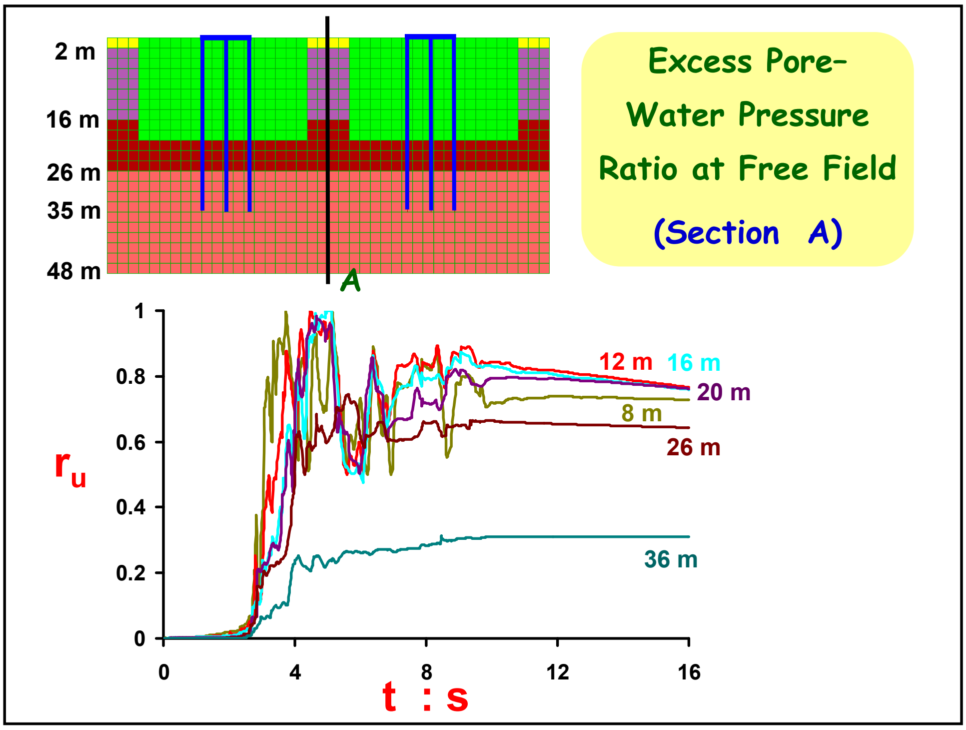
Γέφυρα Νέστου

Σχεδιασμός Θεμελίωσης

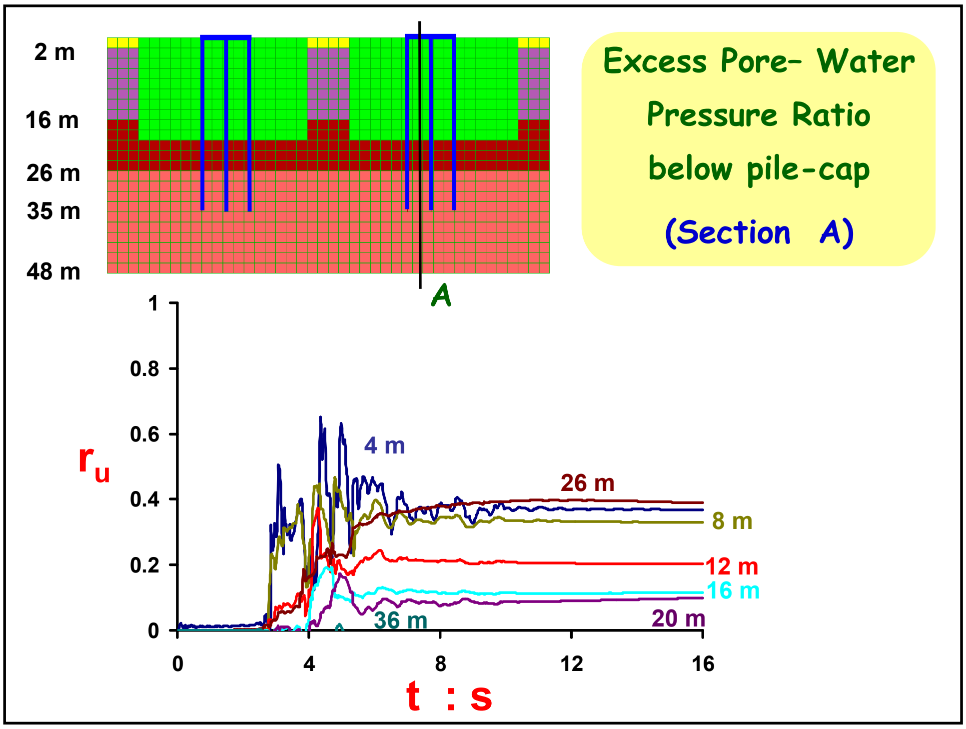

Nestos Bridge Foundation
Final Solution (2006)
M4
M5
M6
M7
38 m
35 m
20 m
Liquefiable zone
Gravel columns
Silty Sand
?
Rock


31.5 m
Final Solution (2006)
Friction Piles +
Extended Soil Improvement
47 m
4.5 m
4.5 m
11 m
11 m
7.75 m
Pier M7:
2.25 m x 2.25 m grid
L ≈ 20 m , D = 0.80 m
4.5 m
2.25 m





Nikos Gerolymos, Lecturer NTUA



Αστοχία Σήραγγας Μετρό Δουκίσσης Πλακεντίας

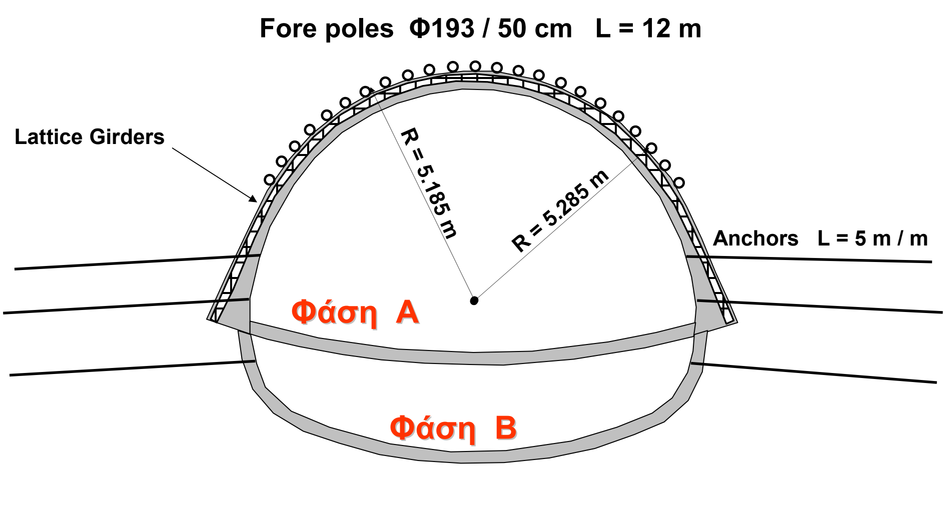
Η “κατάπτωση” επί της οδού Δουκίσσης Πλακεντίας 7–1–2003

Η κατάρρευση μέσα από την σήραγγα

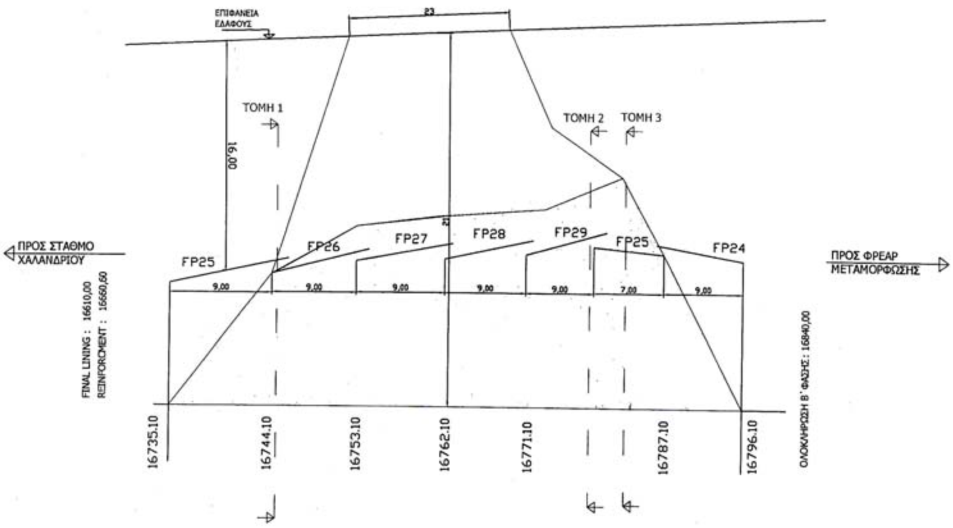
Πιθανά Αίτια της Αστοχίας :

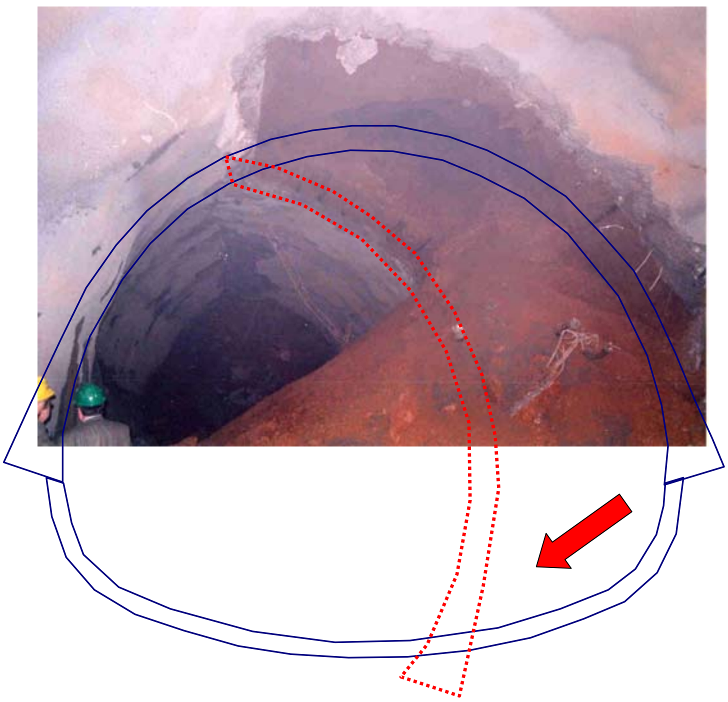
- Δυσμενέστερες Εδαφικές Ιδιότητες
- Δομητικές - Κατασκευαστικές Ατέλειες
- Ασυμμετρία του Υ.Ο.
- Ύπαρξη Πηγαδιών και υπόγειων στοών ??
- Μεγάλη ταχύτητα προχώρησης
- Πλημμελής Παρακολούθηση (γιορτές...)

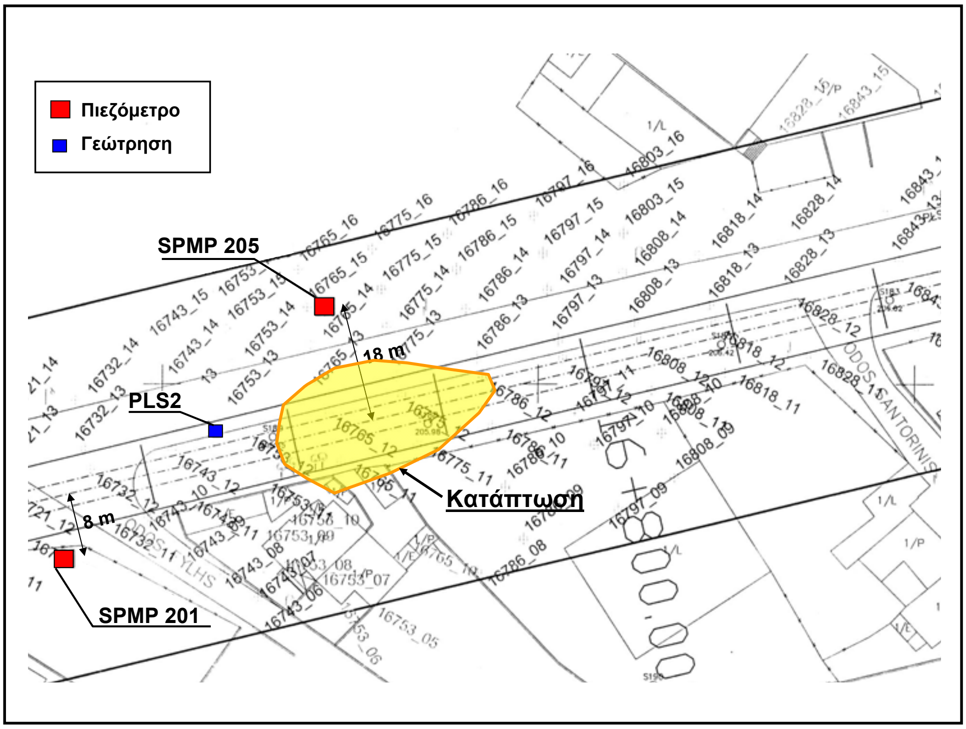
Τυπική διατομή της σήραγγας



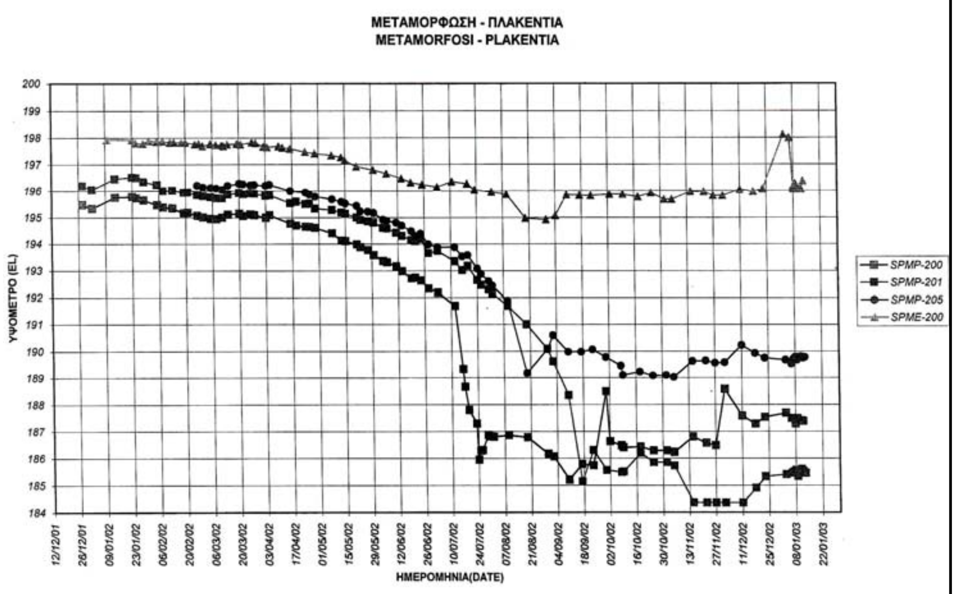
Η έκταση της καταπτώσεως – κατά μήκος τομή



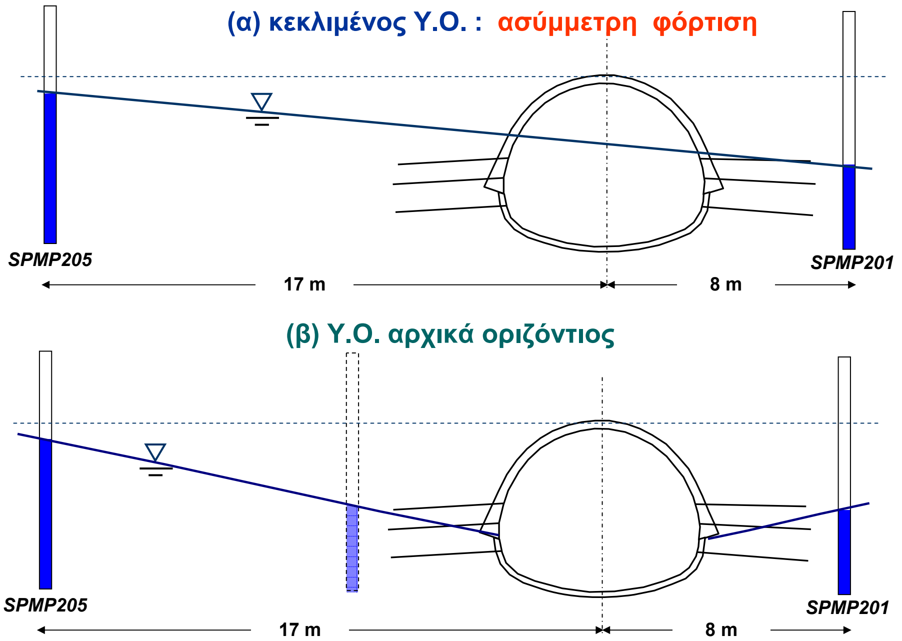




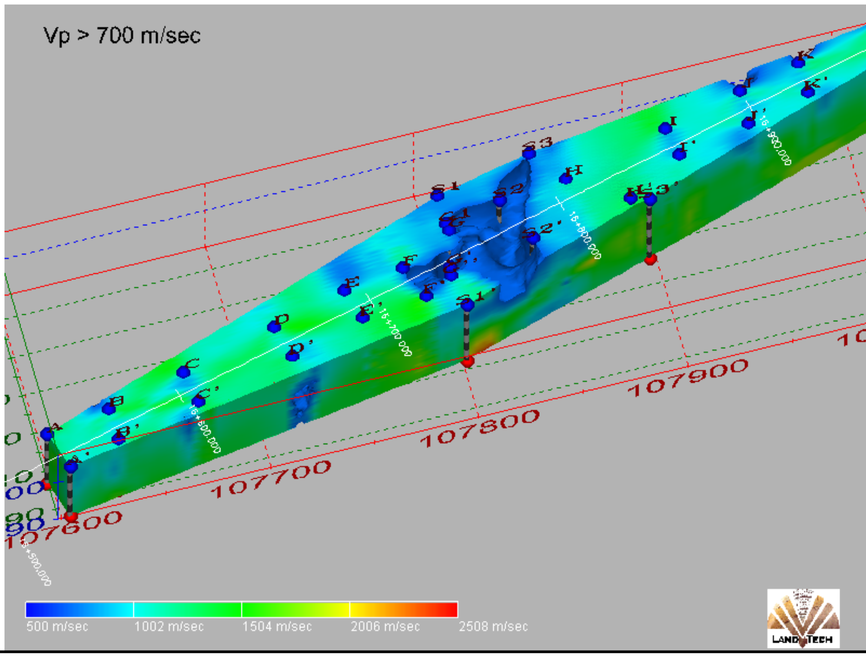
Μετρήσεις πιεζομέτρων : Υψόμετρα στάθμης του Υ.Ο.



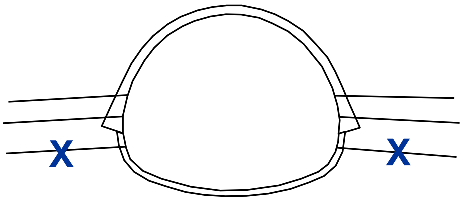
2 πιθανά σενάρια για τον Υ.Ο. στην περιοχή της αστοχίας



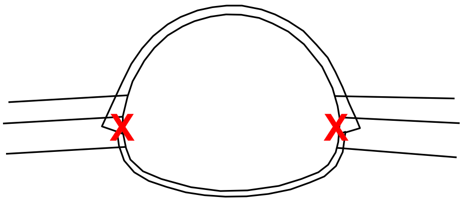
Αποτελέσματα τομογραφικής διερευνήσεως : V_p



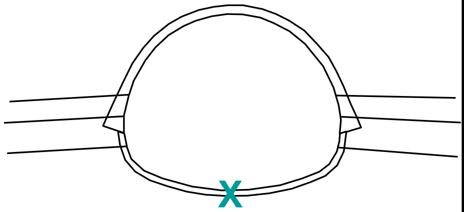
3 πιθανά σενάρια δομητικών ατελειών



(α)



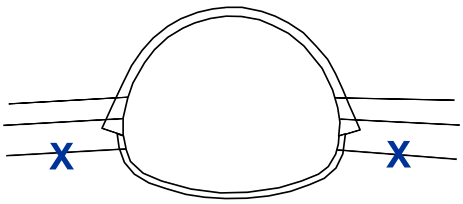
(β)



(γ)

Σενάριο (α) :

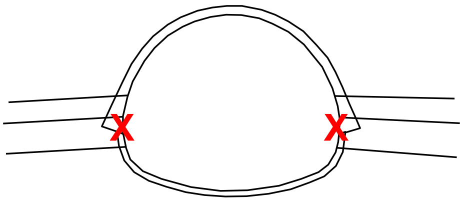
Τοποθετήθηκε η *3η* σειρά αγκυρίων ?



(α)

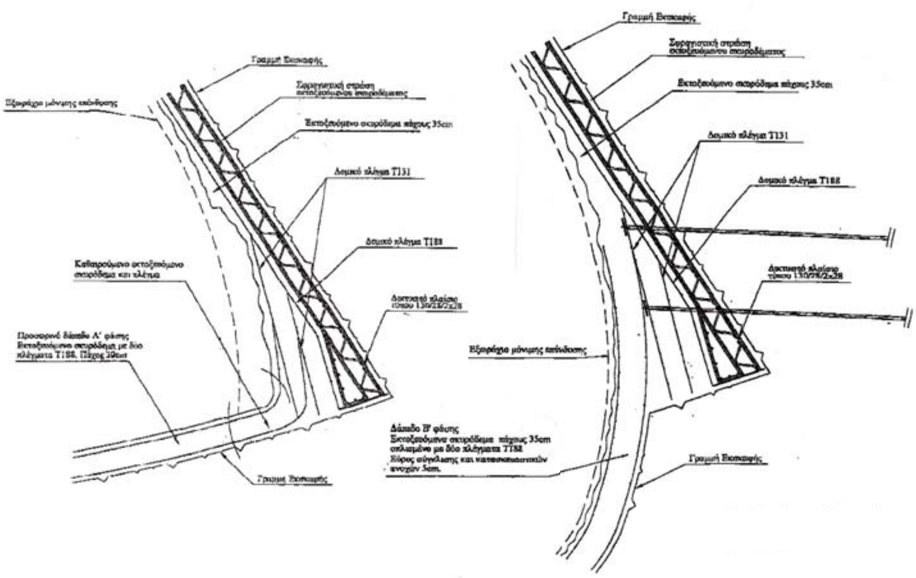
Σενάριο (β) :

Επαρκής η σύνδεση της Α’ φάσης με την Β’ ?

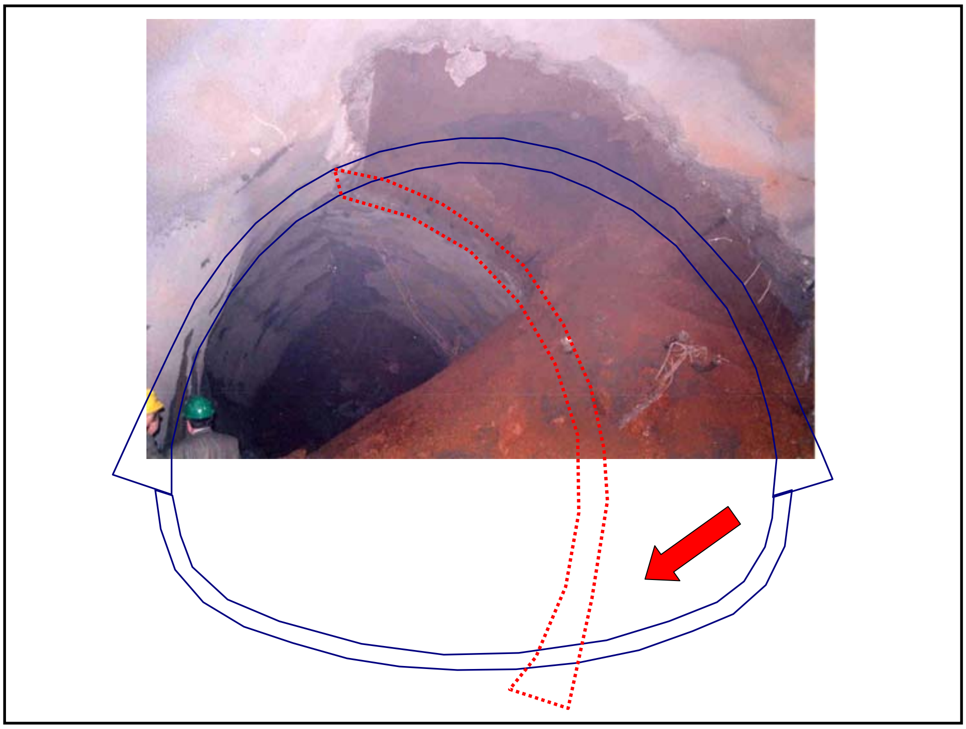


(β)

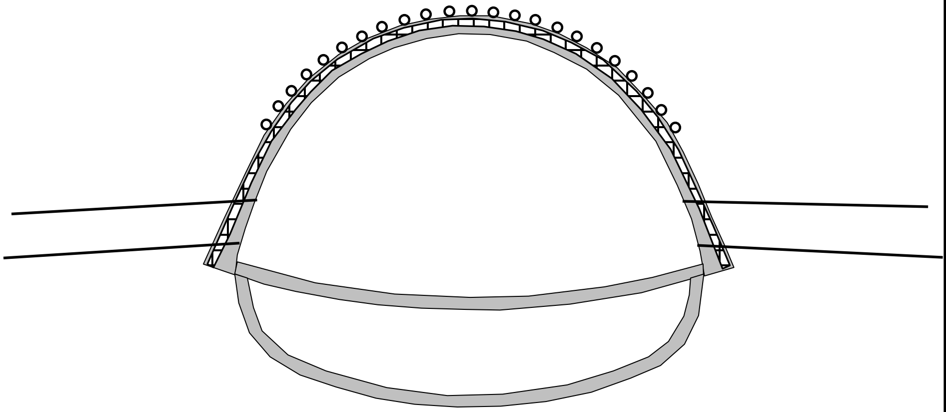
Κατασκευαστική Λεπτομέρεια του Διευρυμένου Πέλματος



Α’ Φάση Εκσκαφής **Β’ Φάση Εκσκαφής**

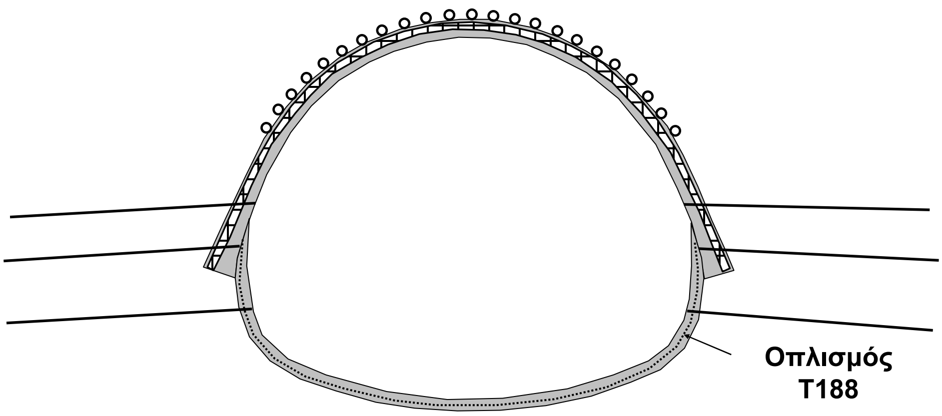


Επαρκής η σύνδεση της Α’ φάσης με την Β’ ?



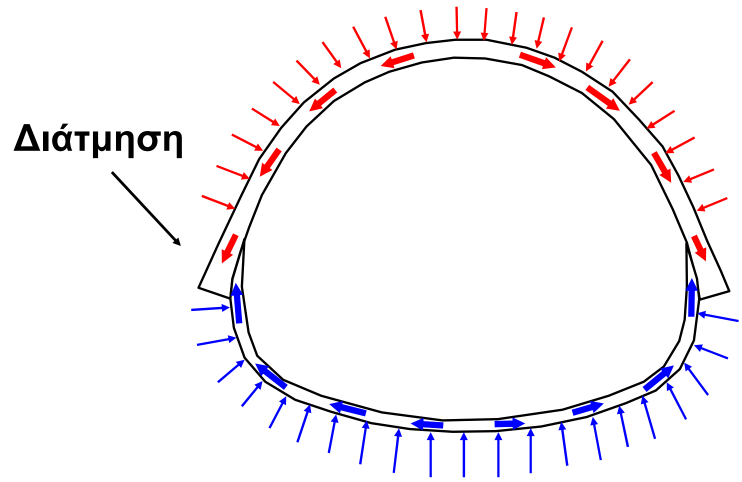
Φάση Α

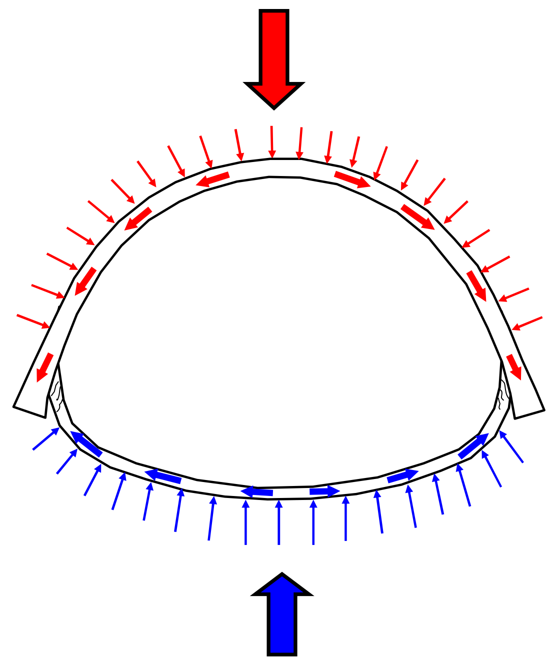
Επαρκής η σύνδεση της Α’ φάσης με την Β’ ?



Φάση Β

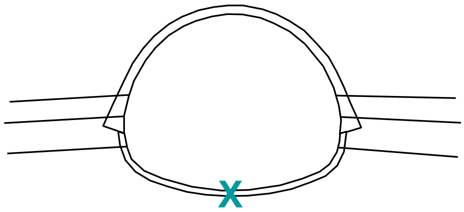
Επαρκής η σύνδεση της Α' φάσης με την Β' ?



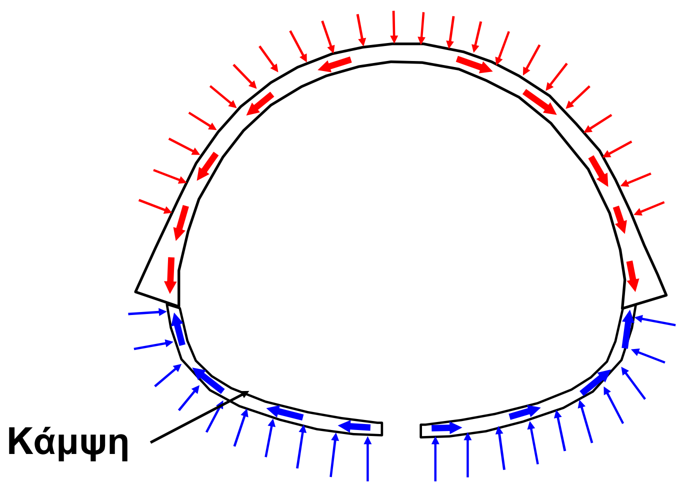


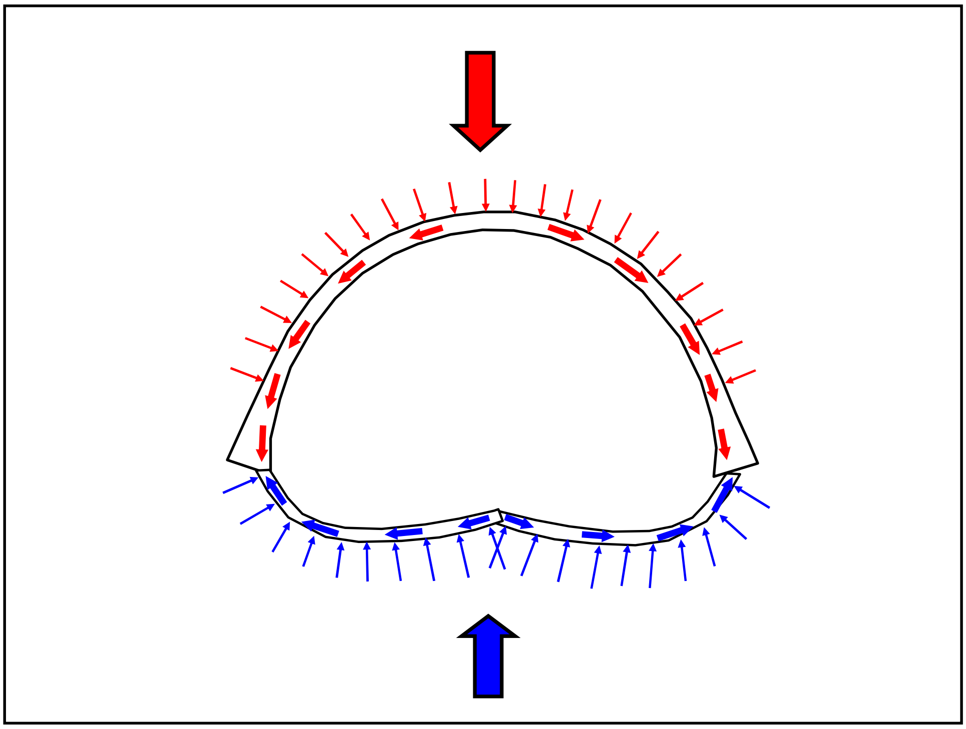
Σενάριο (γ) :

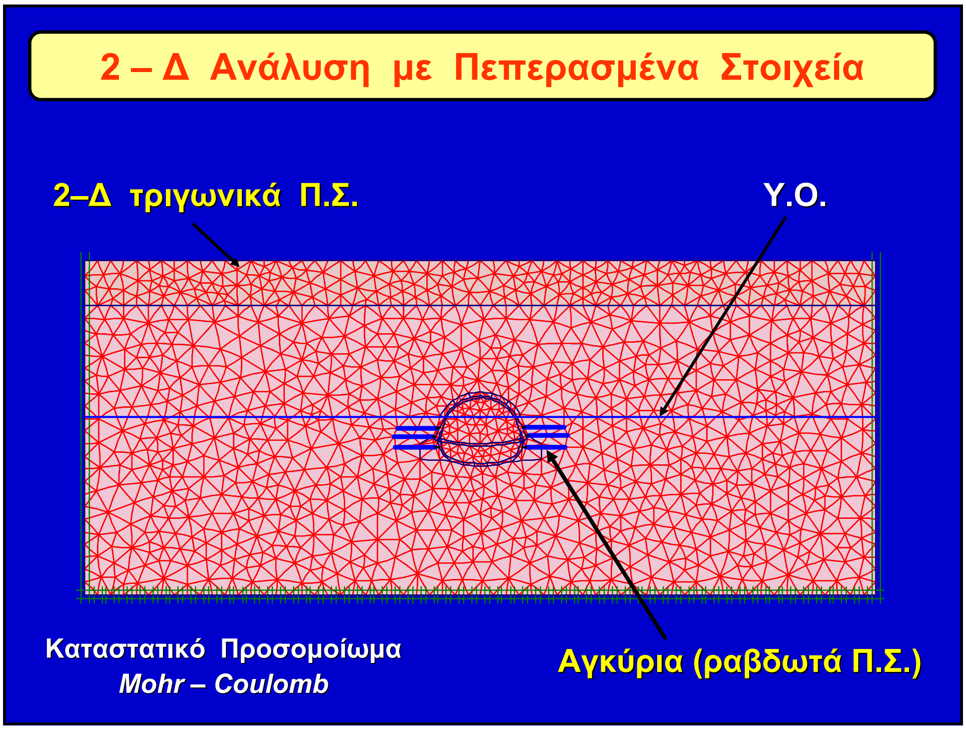
Κατασκευαστική Ασυνέχεια στο ανεστραμμένο τόξο ?



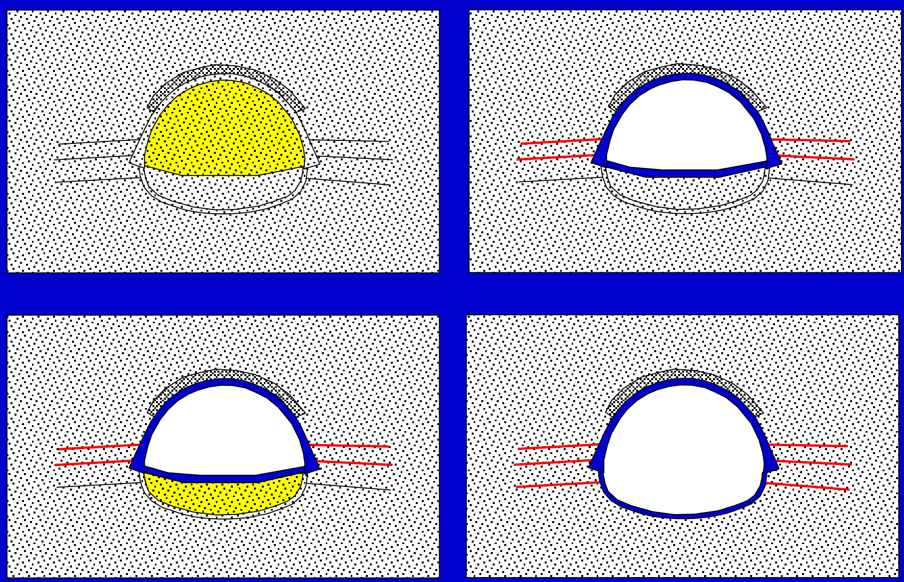
(γ)



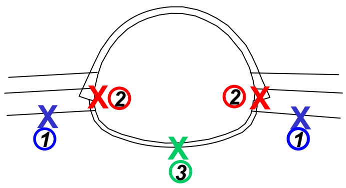



2 – Δ Ανάλυση με Πεπερασμένα Στοιχεία
2–Δ τριγωνικά Π.Σ.
Υ.Ο.
Καταστατικό Προσομοίωμα
Mohr – Coulomb
Αγκύρια (ραβδωτά Π.Σ.)

Στάδια Προσομοίωσης

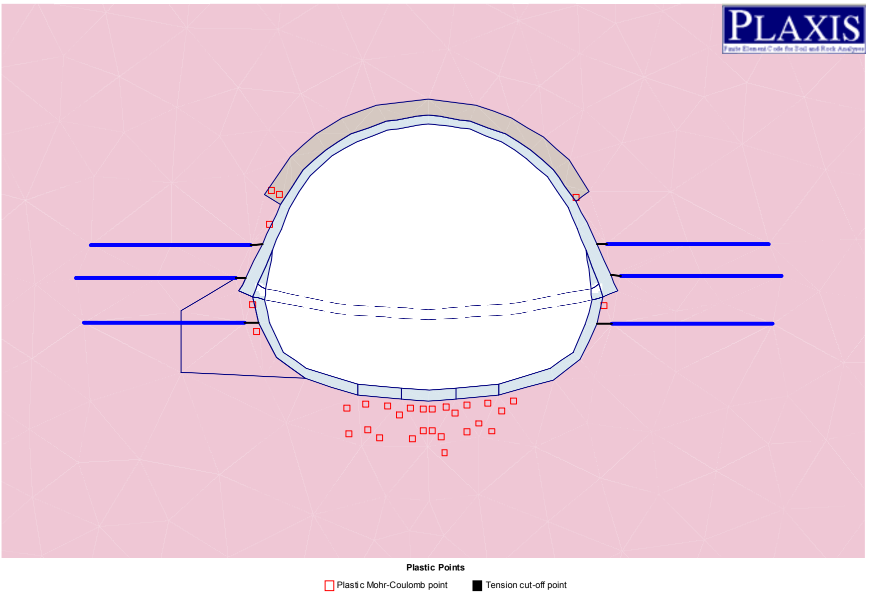


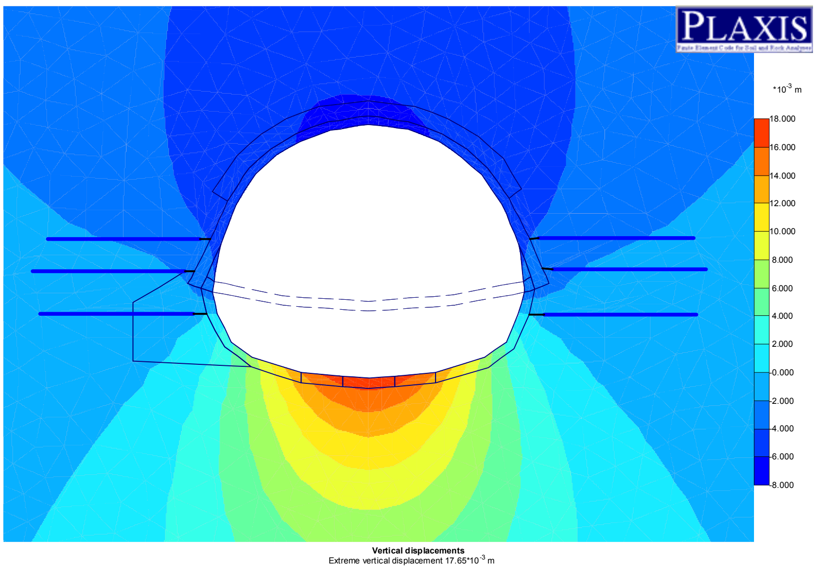
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΑΣΤΟΧΙΑΣ



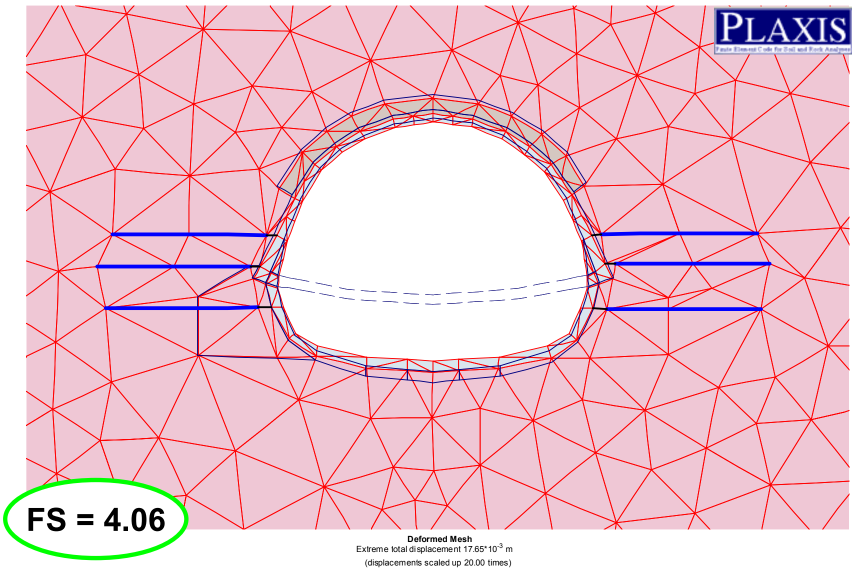
Σενάρια Ατελειών : / Εδαφικές Παράμετροι :	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3
c = 40 kPa φ = 30°	Χαμηλή	Χαμηλή	Χαμηλή έως Μέτρια	Χαμηλή έως Μέτρια	Μέτρια	Χαμηλή έως Μέτρια	Μέτρια	Μέτρια
c = 20 kPa φ = 28°	Χαμηλή	Χαμηλή	Μέτρια έως Υψηλή	Υψηλή	Υψηλή	Υψηλή	Υψηλή	Υψηλή
c = 5 kPa φ = 28°	Χαμηλή	Χαμηλή	Υψηλή	Υψηλή	Υψηλή	Υψηλή	Υψηλή	Υψηλή

Διατομή χωρίς δομητικές ατέλειες, c = 40 kPa, φ = 30°



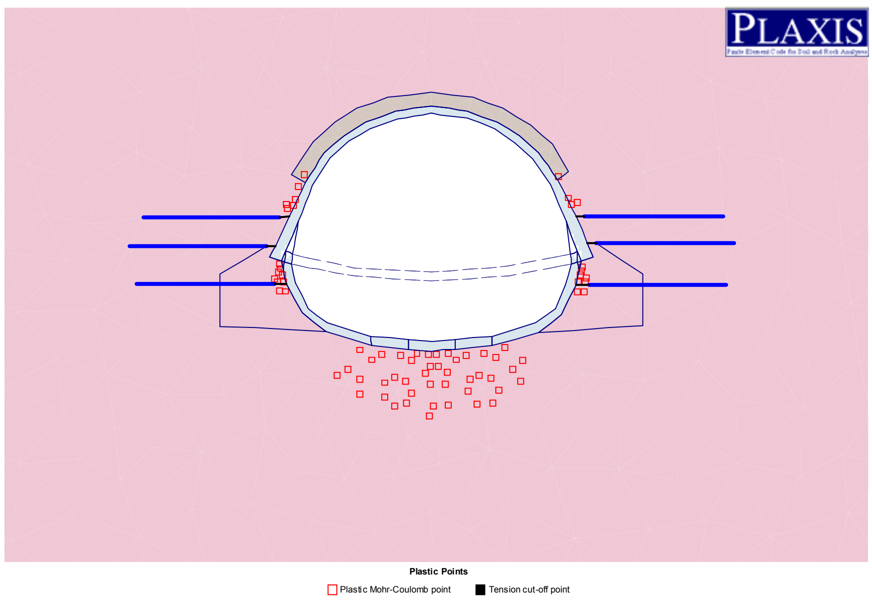


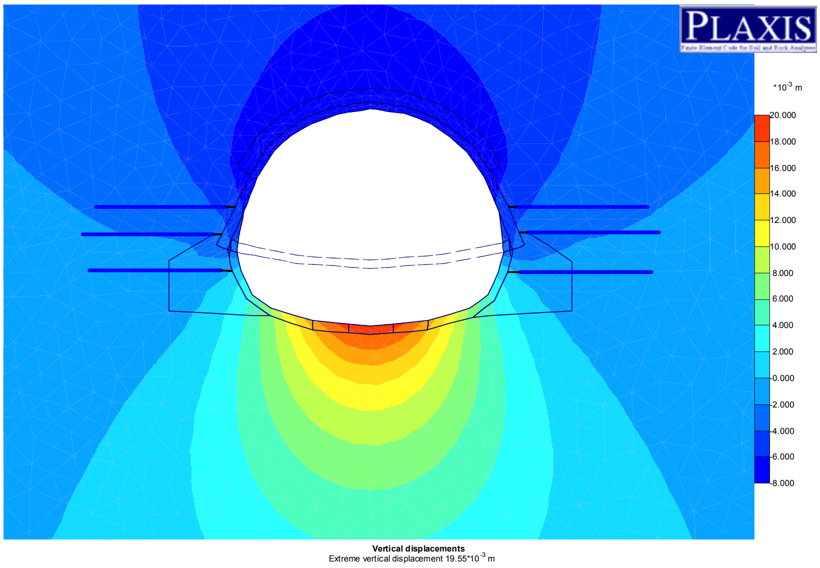
c = 40, φ = 30 , Ideal case



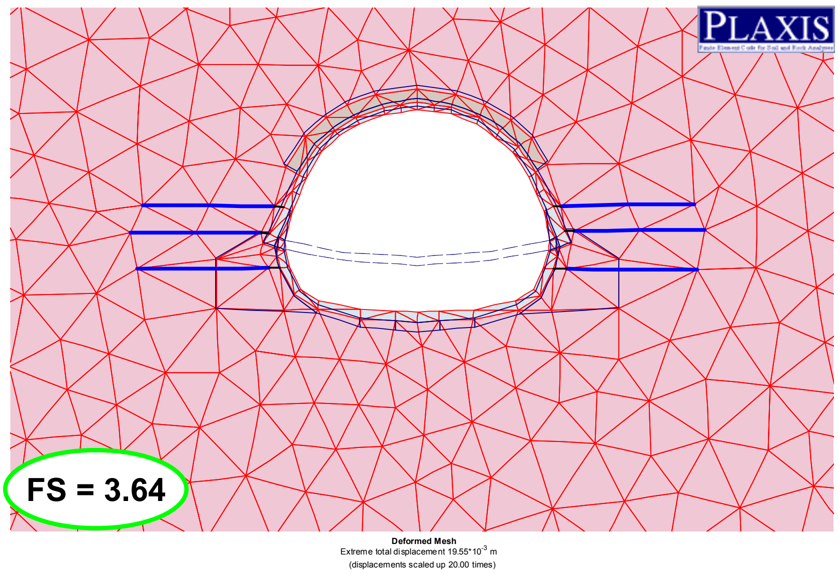
c = 40, φ = 30 , Ideal case

Διατομή χωρίς δομητικές ατέλειες, c = 20 kPa, φ = 28°



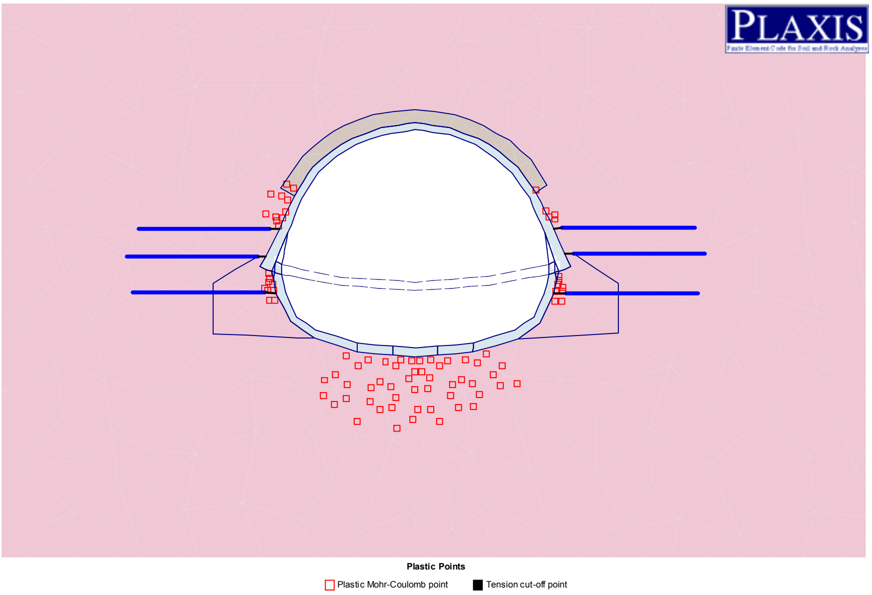


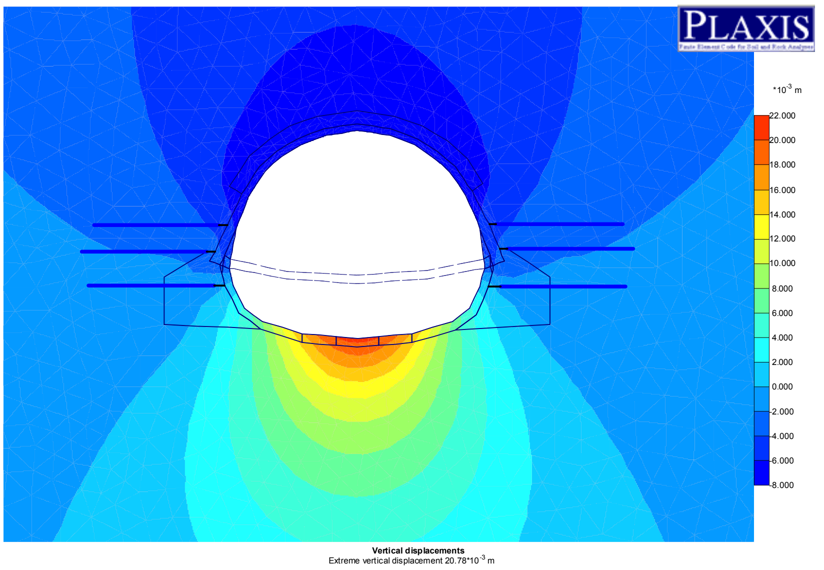
c = 20, φ = 28 , Ideal case



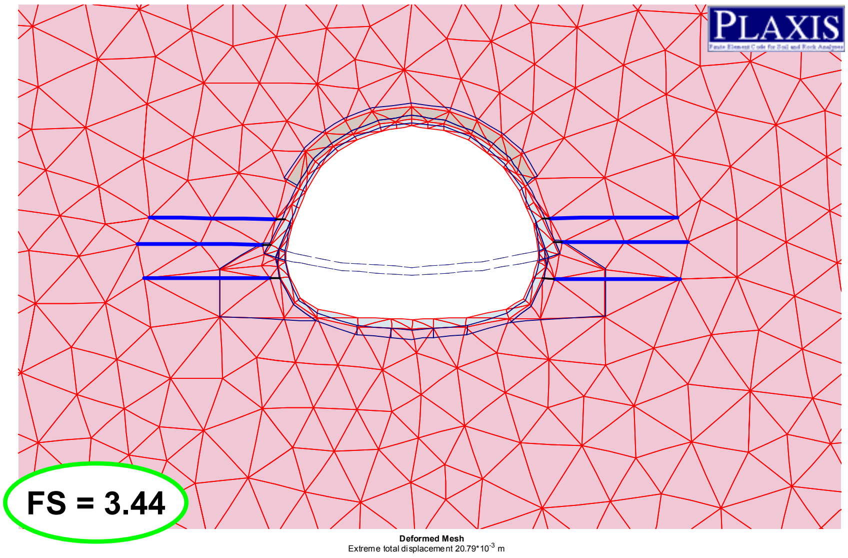
c = 20, φ = 28 , Ideal case

Διατομή χωρίς δομητικές ατέλειες, c = 5 kPa, φ = 28°





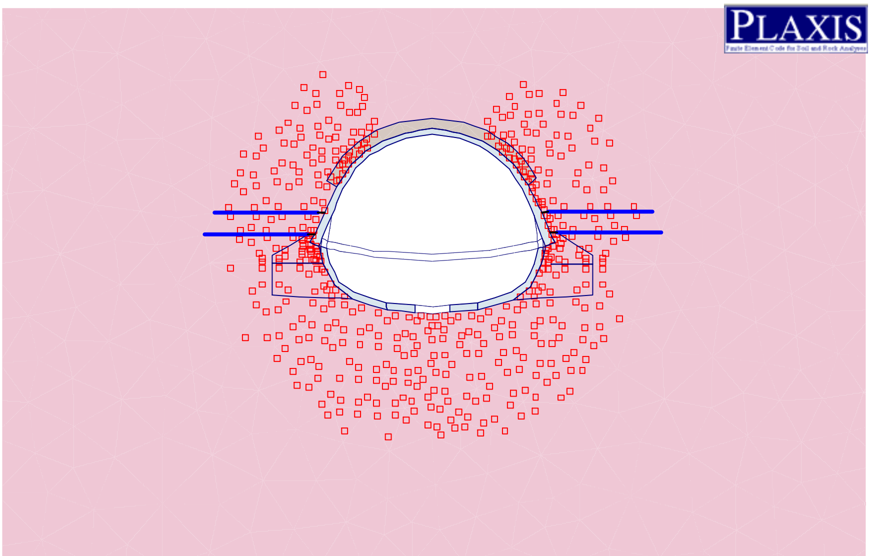
c = 5, φ = 28 , Ideal case



Deformed Mesh
Extreme total displacement $20.79 \cdot 10^{-3}$ m
(displacements scaled up 20.00 times)

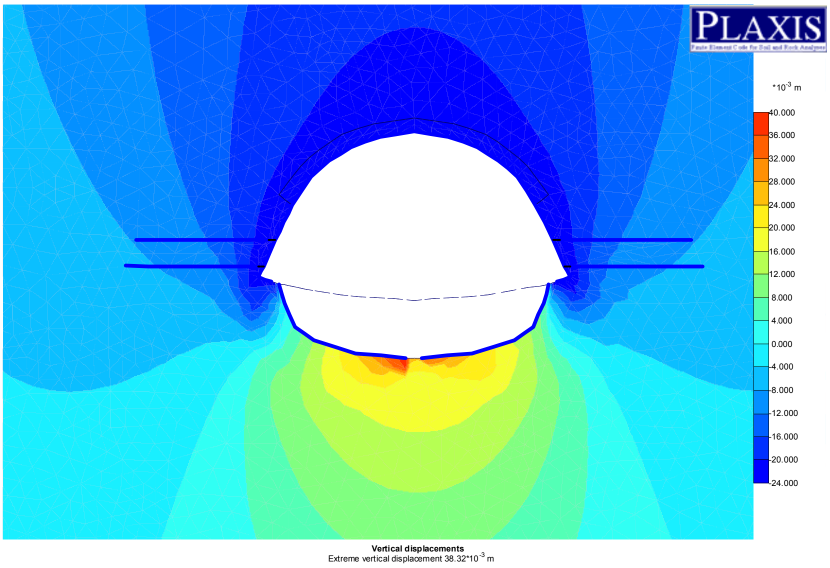
c = 5, φ = 28 , Ideal case

Διατομή με δομητικές ατέλειες (α + β + γ)
c = 40 kPa, φ = 30°

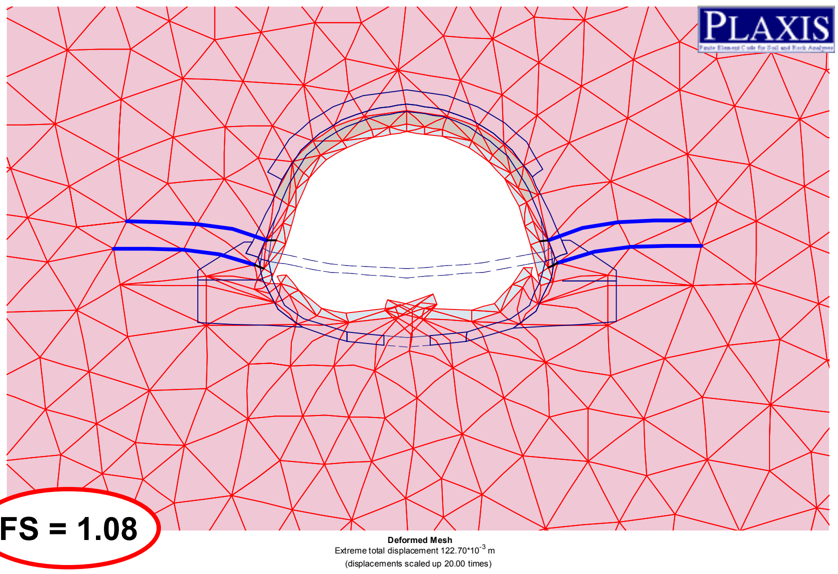


Plastic Points
Plastic Mohr-Coulomb point   Tension cut-off point

Nikos Gerolymos, Lecturer NTUA



c = 40, φ = 30 , No bottom Anchors + Poor Connection + Gutter

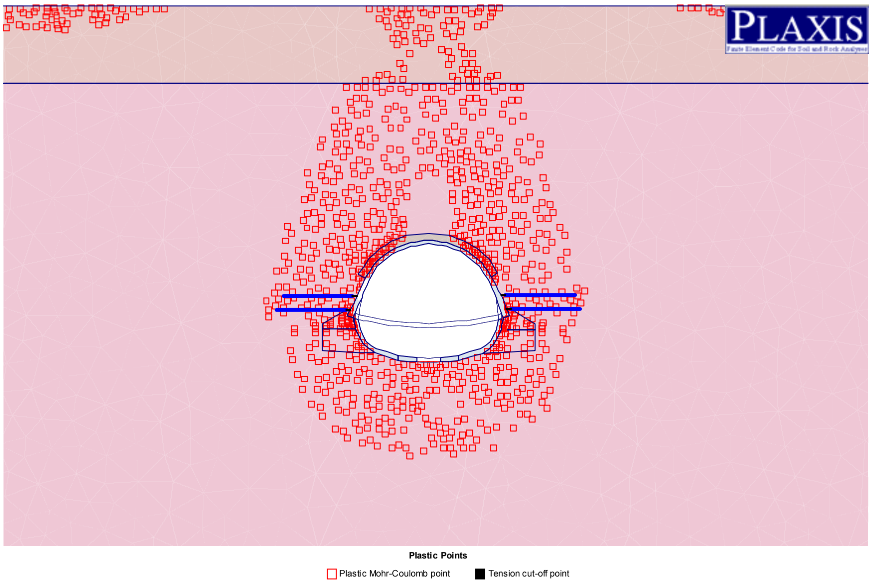


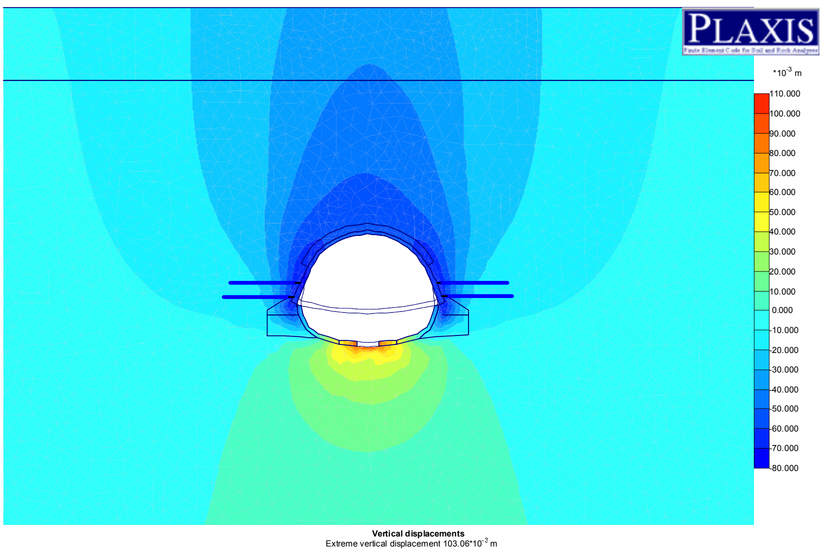
FS = 1.08

c = 40, φ = 30 , No bottom Anchors + Poor Connection + Gutter

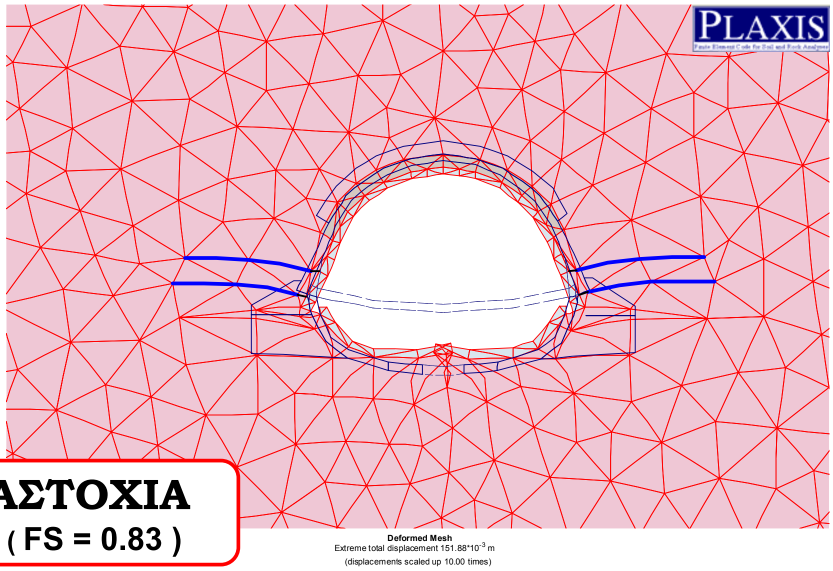
Nikos Gerolymos, Lecturer NTUA

Διατομή *με* δομητικές ατέλειες (α + β + γ)
ΚΑΙ c = 20 kPa, φ = 28°





c = 20, φ = 28 , No bottom Anchors + Poor Connection + Gutter



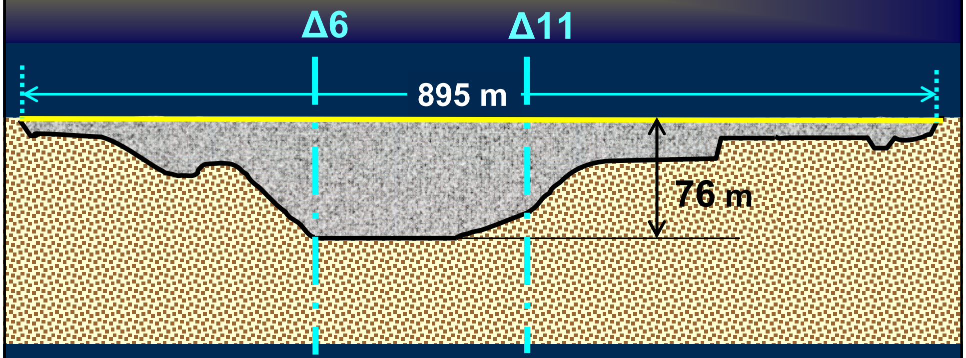
ΑΣΤΟΧΙΑ
(FS = 0.83)

c = 20, φ = 28 , No bottom Anchors + Poor Connection + Gutter

Φράγμα Αστερίου στην Αχαΐα

Εδαφοδυναμική Μελέτη

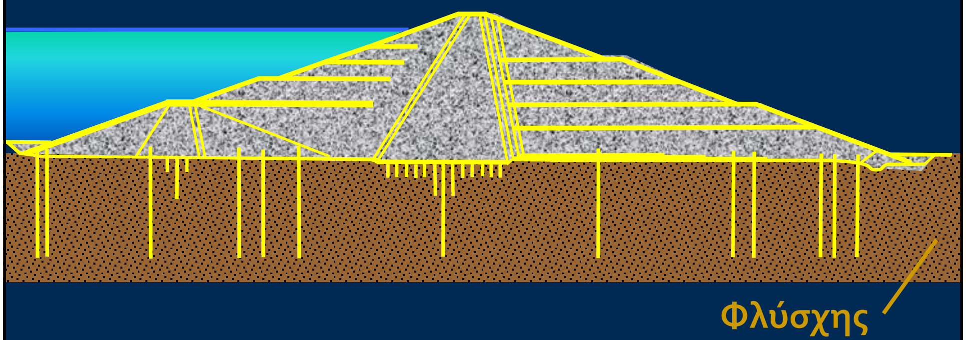
Μηκοτομή Φράγματος Αστερίου

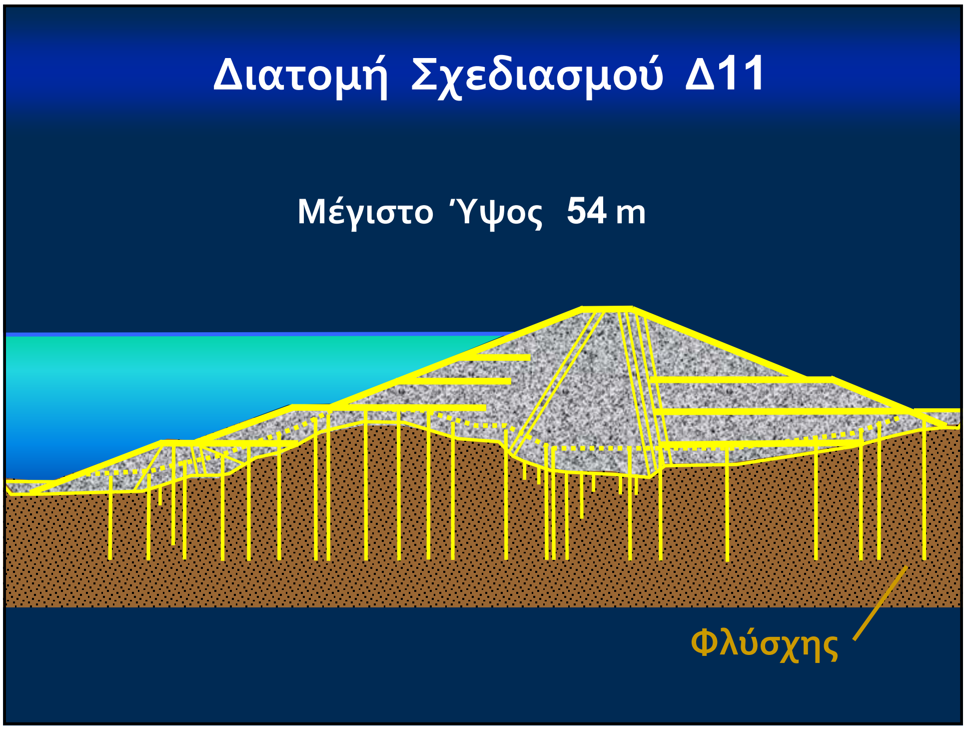


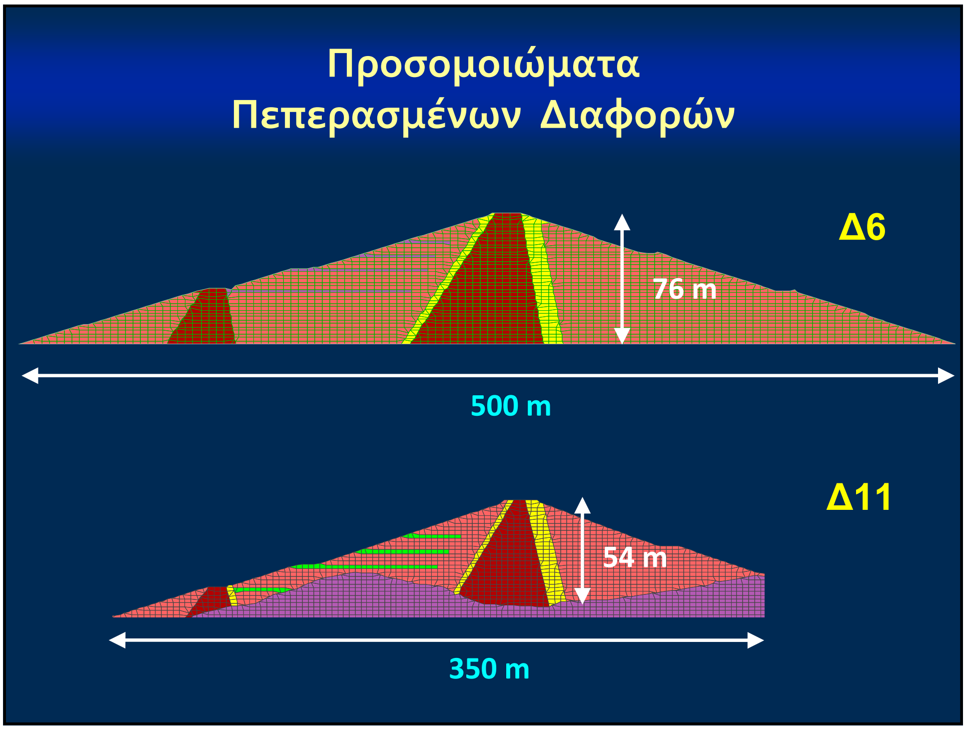
- Υπό κατασκευήν στην Αχαία
- Χωμάτινο σώμα: υλικά από ιλυόλιθο
- Κεντρικός πυρήνας αργίλου
- Επιτάχυνση σχεδιασμού 0.39 g

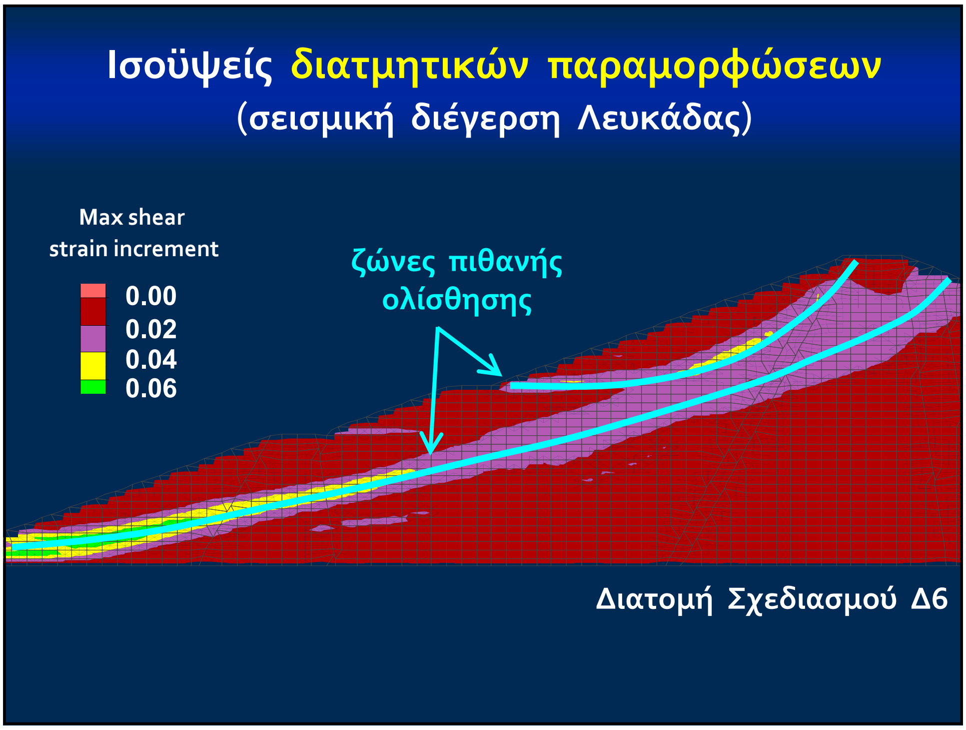
Διατομή Σχεδιασμού Δ6

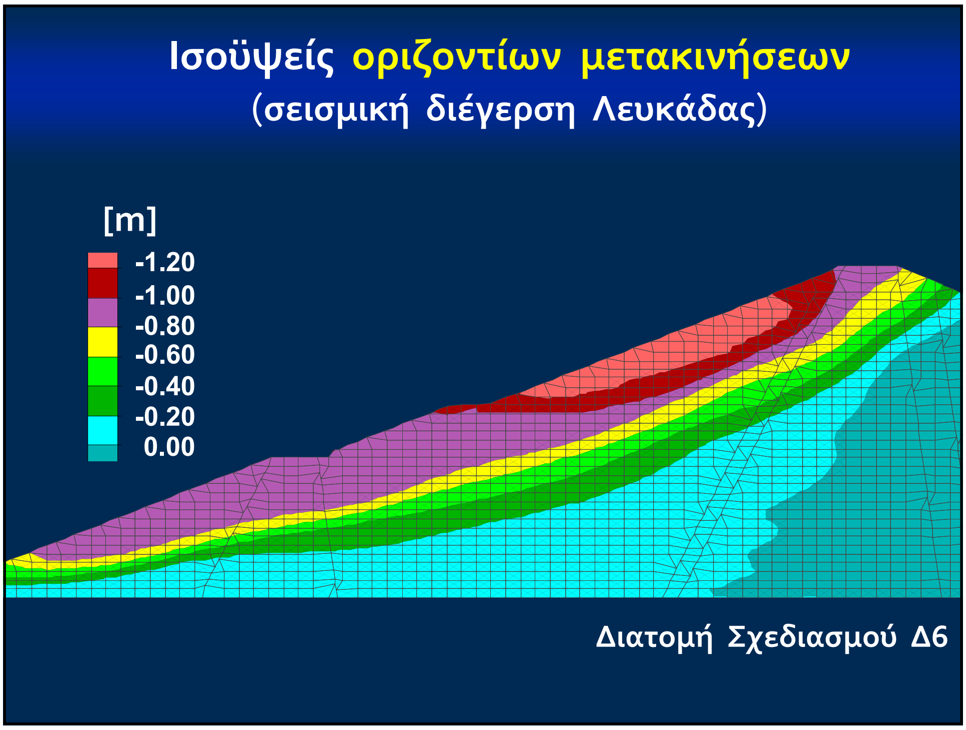
Μέγιστο Ύψος 76 m




Διατομή Σχεδιασμού Δ11
Μέγιστο Ύψος 54 m
Φλύσχης


Προσομοιώματα
Πεπερασμένων Διαφορών
Δ6
76 m
500 m
Δ11
54 m
350 m

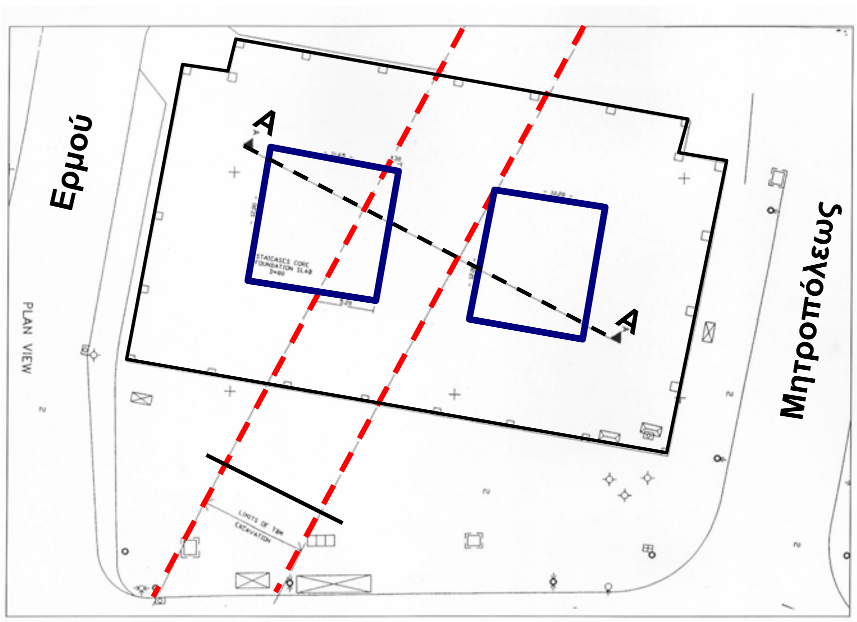

Ισοϋψείς διατμητικών παραμορφώσεων
(σεισμική διέγερση Λευκάδας)
Max shear
strain increment
0.00
0.02
0.04
0.06
ζώνες πιθανής
ολίσθησης
Διατομή Σχεδιασμού Δ6


Ισοϋψείς οριζοντίων μετακινήσεων
(σεισμική διέγερση Λευκάδας)
[m]
-1.20
-1.00
-0.80
-0.60
-0.40
-0.20
0.00
Διατομή Σχεδιασμού Δ6

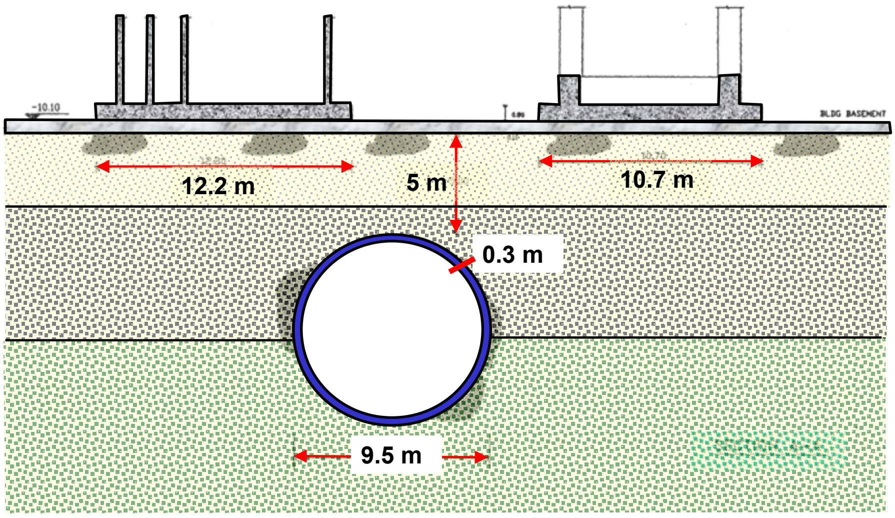
ΚΤΙΡΙΟ ΥΠ.ΕΘ.Ο.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΘΕΜΕΛΙΩΝ – ΕΔΑΦΟΥΣ – ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΣΗΡΑΓΓΑΣ

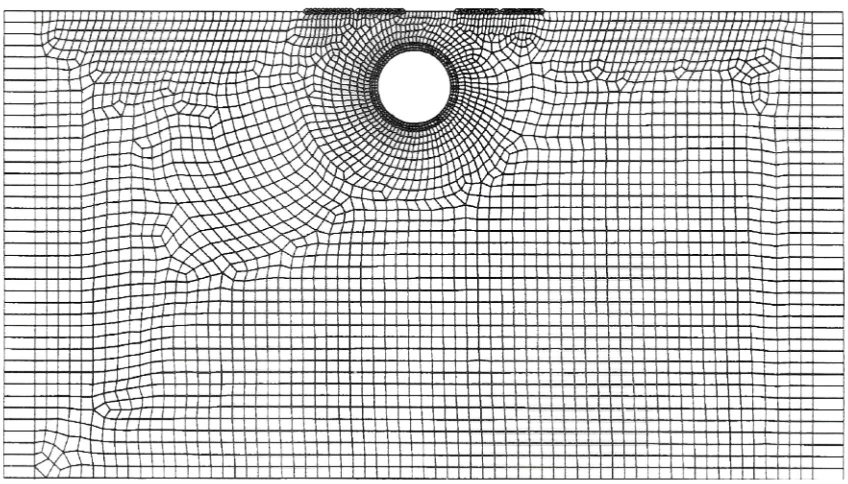
ΚΑΤΟΨΗ



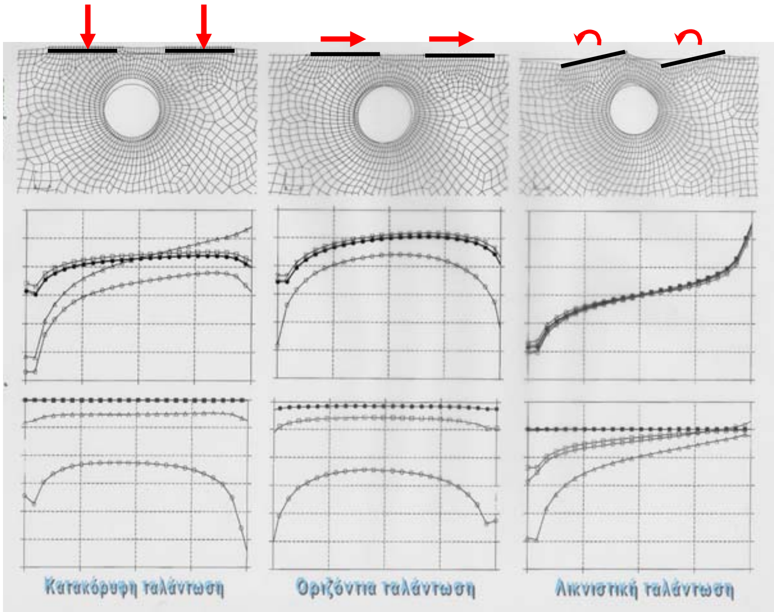
ΤΟΜΗ



Κάνναβος Π.Σ.

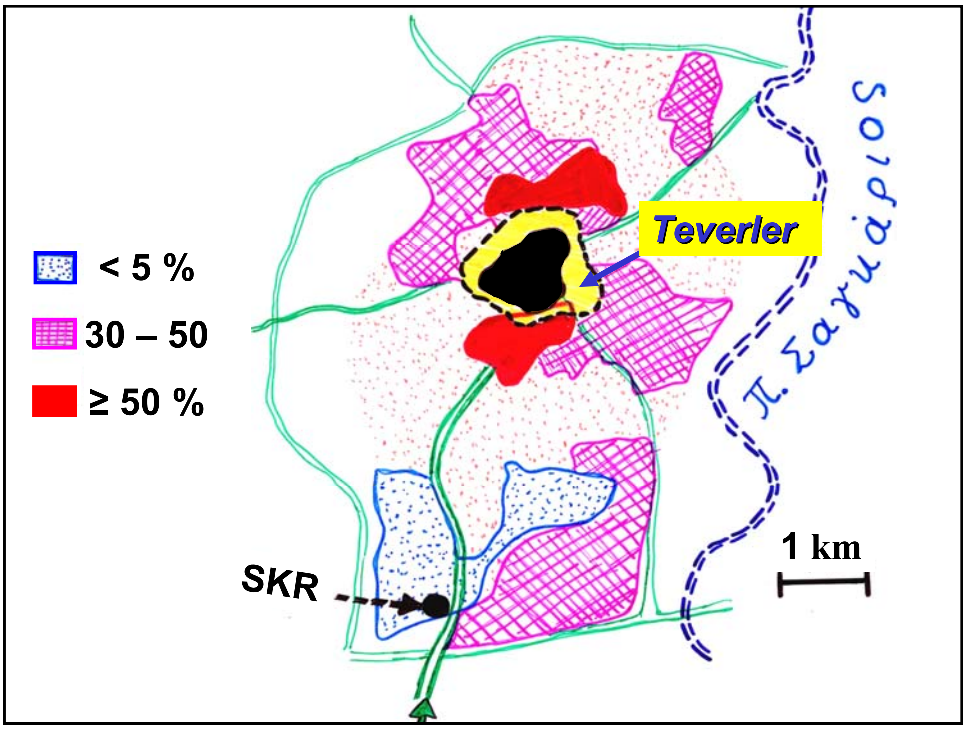


Ανάλυση με Π.Σ.



Σεισμός Νικομήδειας 1999 :
Ανατροπές Κτιρίων στο Ανταπαζάρι

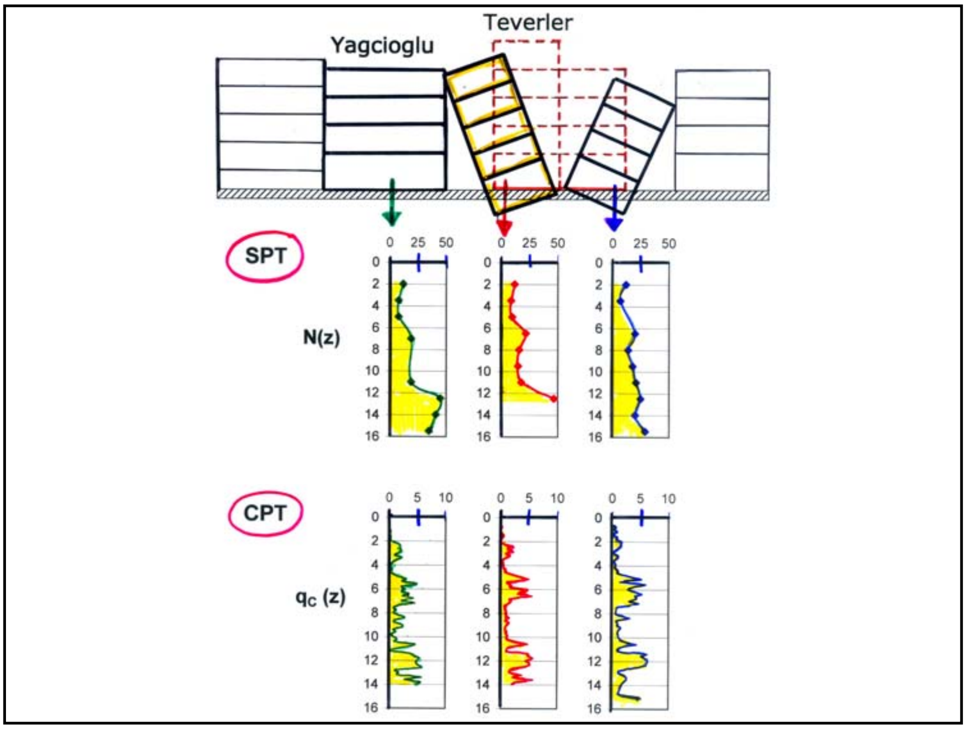

Η Γεωγραφία των δύο Σεισμών του 1999
17–8–99
διάρρηξη
Μ 7.5
12–11–99
διάρρηξη
Μ 7.2
Avcilar
η Πόλη
Izmit
Adapazari
Düzce
Yalova
Gölcük
Sapanza


< 5 %
30 – 50
≥ 50 %
Teverler
π. Σαγγάριος
SKR
1 km

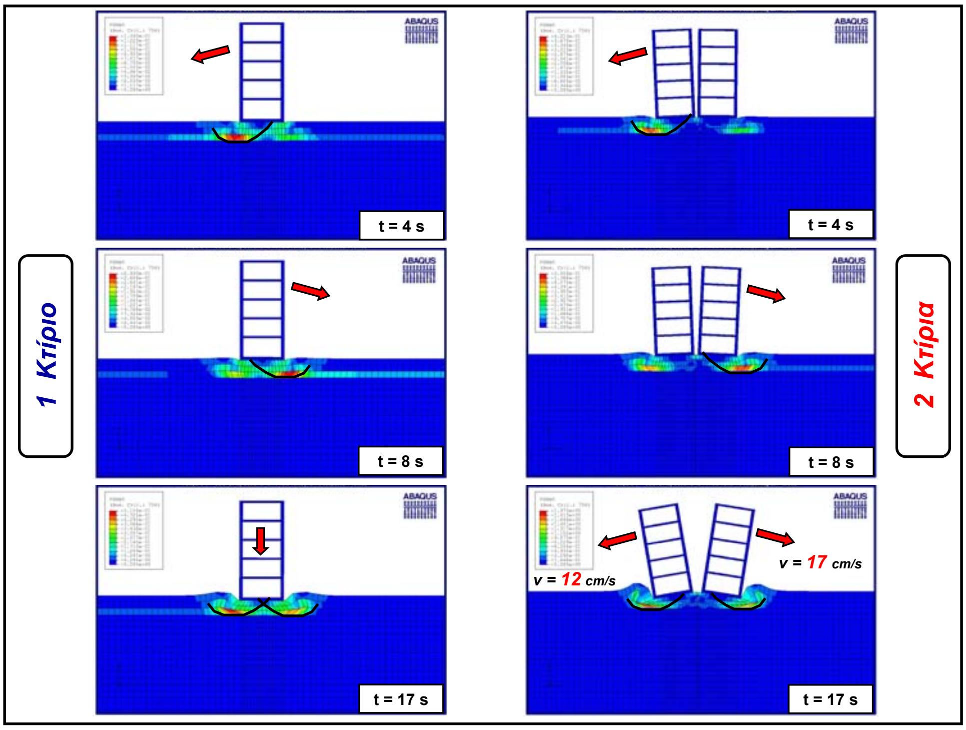

SİTESİ
ODASI


ATASOY HALICILIK
ATAGÜN İŞ MRK.
TAŞINMIŞTIR


TOPRAK
TOPRAK SERAMİK

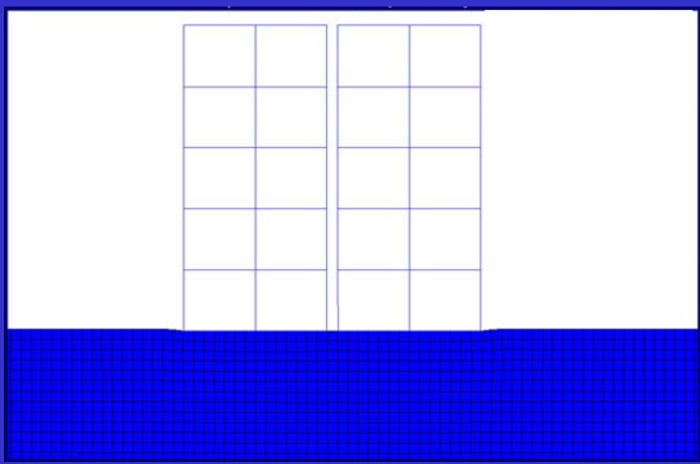


Teverler
Yagcioglu
SPT
N(z)
CPT
qc (z)



1 Κτίριο
2 Κτίρια
t = 4 s
t = 8 s
t = 17 s
v = 12 cm/s
v = 17 cm/s

Πόλη Ανταπαζαρίου : Σενάριο 2 / Κτίρια 2,3



Μεγέθυνση Παραμορφώσεων = *x 3*

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Τομέας Γεωτεχνικής

Σημειώσεις
για το κατ'επιλογήν μάθημα του 9ου εξαμήνου

Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Γεωτεχνική

Γεώργιος Δ. Μπουκοβάλας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Νοέμβριος 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή

Το 1977, δύο από τους πρωτεργάτες της Υπολογιστικής Γεωτεχνικής έγραψαν:

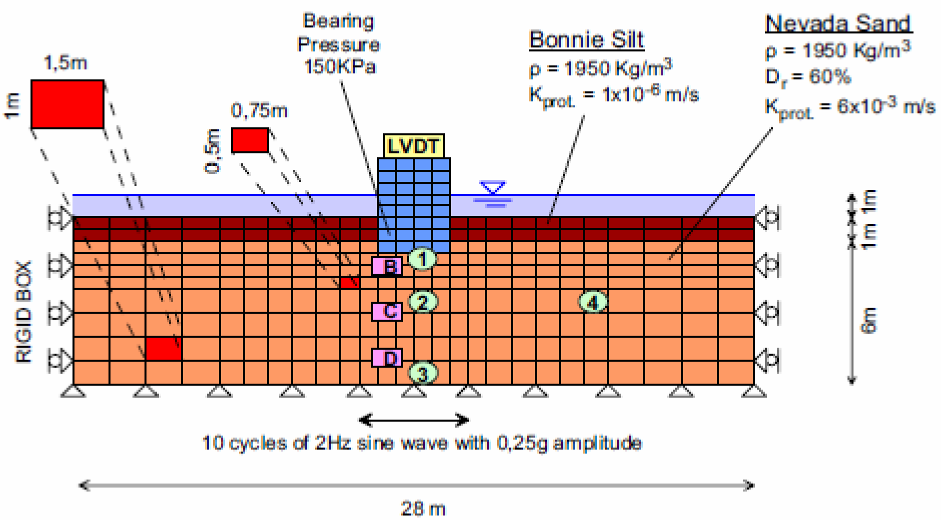
«Κατά την τελευταία 10-ετία γίναμε μάρτυρες μιας τρομερής ανάπτυξης των αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων στην επιστήμη του μηχανικού. Η δημοτικότητα και το μεγάλο εύρος εφαρμογής αυτών των τεχνικών οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη μεγάλων και ταχύτατων ηλεκτρονικών υπολογιστών»

(Desai & Christian in "*Numerical Methods in Geotechnical Engineering*")

Η διαπίστωση αυτή είναι πολύ πιο επίκαιρη σήμερα, περίπου 30 χρόνια μετά, όταν η υπολογιστική ισχύς ενός συνηθισμένου «προσωπικού» (desktop) υπολογιστή είναι πολύ μεγαλύτερη από την ισχύ των υπολογιστών στους οποίους αναφέρονται οι ανωτέρω επιστήμονες. Στην πραγματικότητα, μόνον τα πολύ απλά προβλήματα της γεωτεχνικής (π.χ. φέρουσα ικανότητα και καθίζηση συνηθισμένων κτιρίων) επιλύονται με την βοήθεια αναλυτικών ή εμπειρικών μεθόδων. Τα γεωτεχνικά προβλήματα που αφορούν μεγάλα κτίρια ή έργα υποδομής (θεμελιώσεις γεφυρών, υπόγεια έργα, ευστάθεια πρανών, σεισμική απόκριση θεμελιώσεων και γεωτεχνικών κατασκευών, κλπ.) επιλύονται συνήθως με την βοήθεια υπολογιστικών μεθόδων που παρέχουν την δυνατότητα συστηματικής αντιμετώπισης της εδαφικής ανομοιομορφίας, της ανελαστικής συμπεριφοράς των εδαφικών (και μη) υλικών, καθώς και της πολύπλοκης γεωμετρίας των έργων.

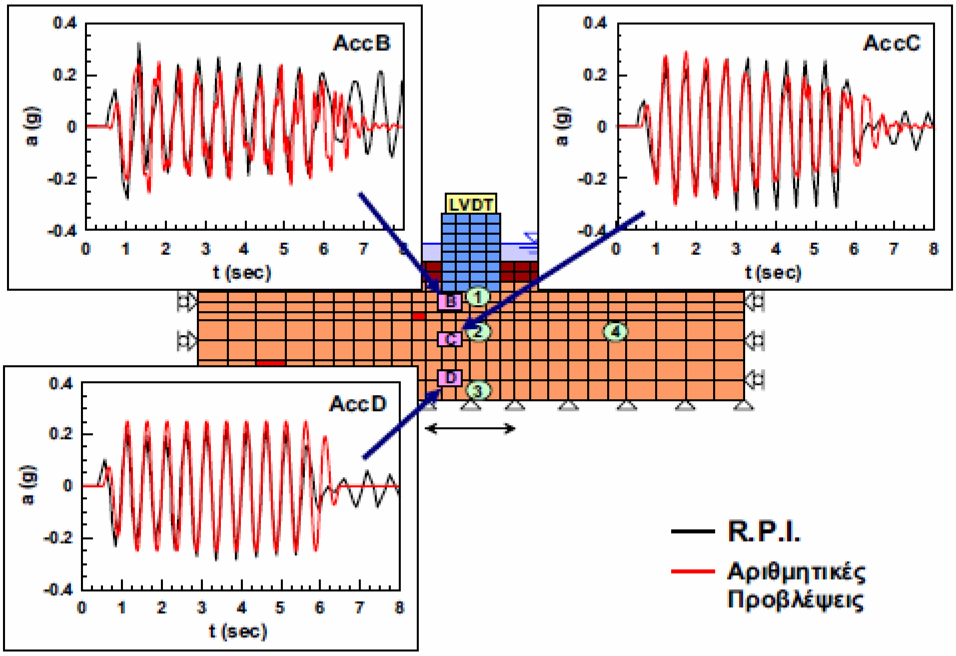
Για παράδειγμα, το 2005………

συζευγμένη δυναμική ανάλυση ενεργών τάσεων και πιέσεων πόρων θεμελίωσης επί ρευστοποιήσιμου εδάφους

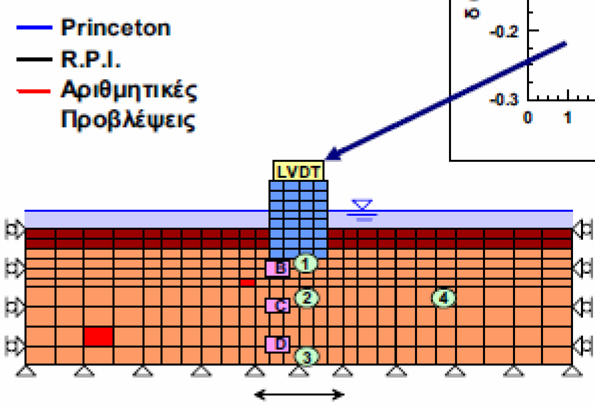


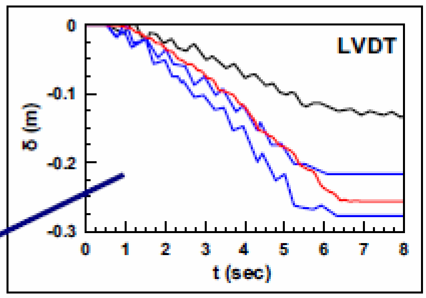
Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.

Χρονοϊστορίες επιταχύνσεων....

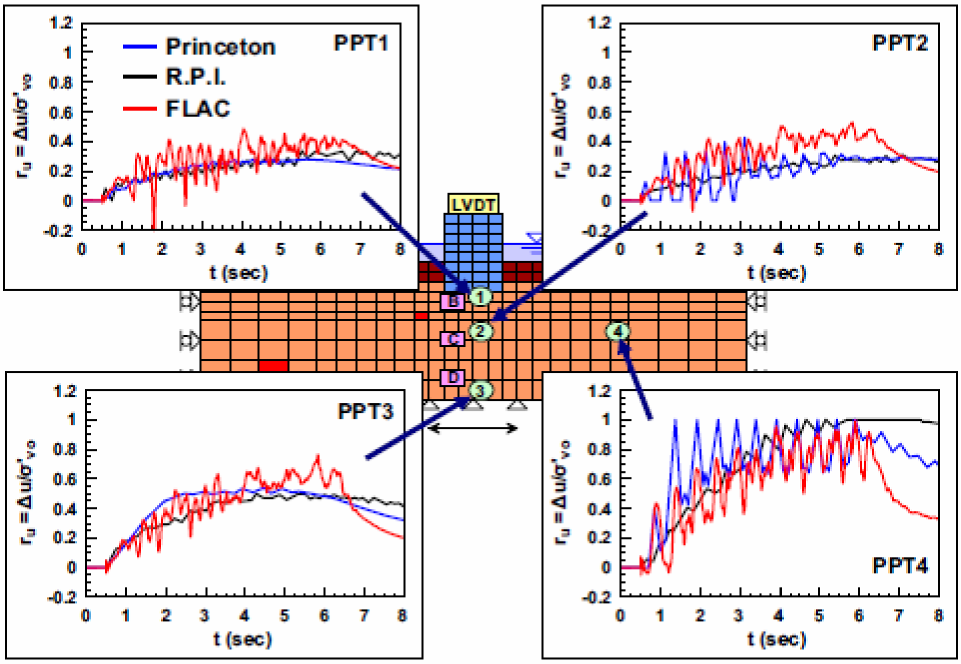


Χρονοϊστορία καθιζήσεων





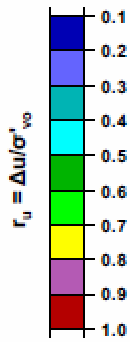
Λόγος υδατικών υπερ-πιέσεων $r_u=\Delta u/\sigma'_{vo}$....



ας δούμε και ένα VIDEO

για την ανάπτυξη και εκτόνωση των υδατικών υπερπιέσεων . . . .

παρατηρείστε:



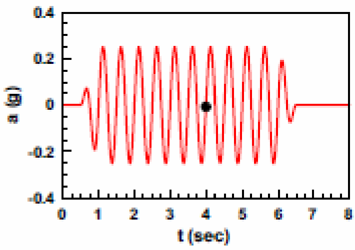
- **την έντονη διακύμανση των διανυσμάτων ροής** (***συνεχίζει να ισχύει ο νόμος Darcy ?***)
- **την ρευστοποίηση στο ελεύθερο πεδίο**
- **τις μικρότερες σχετικά υδατικές υπερπιέσεις κάτω από το θεμέλιο** (***τότε γιατί έχουμε τόσο μεγάλες καθιζήσεις ?***)

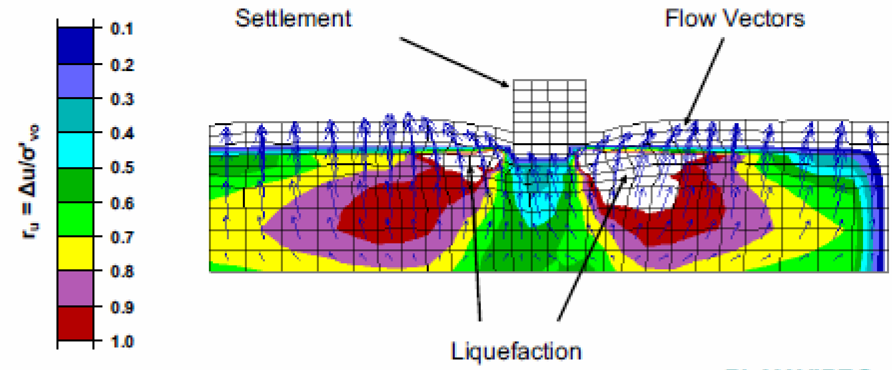
PLAY VIDEO

μηχανισμός

ανάπτυξης και εκτόνωσης

Υδατικών υπερ-πιέσεων . . . .





PLAY VIDEO

Σκοπός και περιεχόμενα της παρούσας ενότητας

Σε αυτή την ενότητα του μαθήματος θα παρουσιασθούν συνοπτικά οι συνηθέστερες υπολογιστικές μέθοδοι – τεχνικές που χρησιμοποιούνται σήμερα για την επίλυση γεωτεχνικών προβλημάτων, καθώς και βασικές έννοιες και όροι που αναπόφευκτα θα συναντήσει ο χρήστης των ανωτέρω μεθόδων κατά την εφαρμογή τους στην πράξη.

Τα στοιχεία αυτά, σε συνδυασμό με την παρουσίαση των καταστατικών σχέσεων που διέπουν την μηχανική συμπεριφορά των διάφορων γεω-υλικών, πιστεύουμε ότι θα από-κωδικοποιήσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις οδηγίες χρήσης (user's manual) των αντίστοιχων λογισμικών. Επιπλέον, και ίσως πιο σημαντικό, θα βοηθήσουν στην συνειδητή αξιολόγηση από τον χρήστη των διαφόρων εναλλακτικών επιλογών που προσφέρονται από το λογισμικό, προκειμένου να επιτευχθεί μία όσο το δυνατόν ακριβέστερη προσομοίωση και επίλυση του τεχνικού προβλήματος που μας απασχολεί.

Επισημαίνεται, ότι το θεωρητικό υπόβαθρο για τις περισσότερες από τις υπολογιστικές μεθόδους που θα εξετάσουμε είναι εκτεταμένο και φυσικά δεν μπορεί να καλυφθεί στα πλαίσια ενός μαθήματος. Ευτυχώς όμως, τόσο στην Σχολή μας όσο και σε άλλες Σχολές του Ε.Μ.Π. παρέχονται προπτυχιακά και μεταπτυχιακά μαθήματα που αποσκοπούν στην λεπτομερή περιγραφή διαφόρων υπολογιστικών μεθόδων και μπορούν να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις όσων επιθυμούν να προχωρήσουν πέρα από το επίπεδο του «*εκπαιδευμένου χρήστη*».

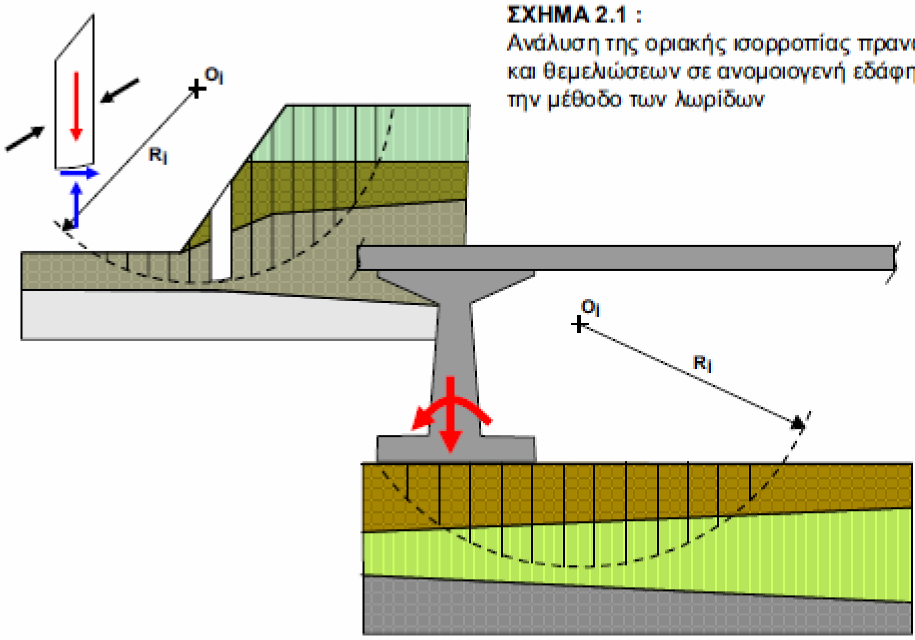
Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.

2. Συνήθεις Υπολογιστικές Μέθοδοι

Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες σήμερα υπολογιστικές μέθοδοι είναι δυνατόν να διαχωρισθούν σε δύο αδρές κατηγορίες:

(α) ***Απλές Υπολογιστικές Μέθοδοι***, οι οποίες προέκυψαν από κωδικοποίηση σε μορφή λογισμικού χρονοβόρων κατά κανόνα αναλυτικών, εμπειρικών ή και προσεγγιστικών λύσεων οι οποίες αναπτύχθηκαν αρχικά για εφαρμογή χωρίς κατ' ανάγκην χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Το πλέον αντιπροσωπευτικό παράδειγμα των μεθόδων αυτών είναι η ανάλυση της οριακής ισορροπίας πρανών και θεμελιώσεων σε ανομοιογενή εδάφη με την μέθοδο των λωρίδων (Σχήμα 2.1). Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής αποσκοπεί στον εντοπισμό της δυσμενέστερης επιφάνειας αστοχίας εντός του εδάφους, και επομένως προϋποθέτει επαναληπτική επίλυση με την διαδικασία «δοκιμής – λάθους» (trial-and-error) που την κάνει αρκετά χρονοβόρα. Το θεωρητικό υπόβαθρο όμως της μεθόδου είναι σχετικά απλό, η δε κωδικοποίηση της σε μορφή λογισμικού δεν απαιτεί ιδιαίτερες τεχνικές και γνώσεις (πέραν από τη χρήση κάποιας γλώσσας προγραμματισμού), εκτός και εάν υπάρχουν απαιτήσεις για γραφική περιγραφή του προβλήματος και παρουσίαση των αποτελεσμάτων.



ΣΧΗΜΑ 2.1 :
Ανάλυση της οριακής ισορροπίας πρανών και θεμελιώσεων σε ανομοιογενή εδάφη με την μέθοδο των λωρίδων

(β) ***Αριθμητικές Μέθοδοι***, οι οποίες αποτελούν ουσιαστικά προσεγγιστικούς αλγορίθμους επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων (ισορροπίας, ροής, κίνησης) που διέπουν τα διάφορα προβλήματα της γεωτεχνικής μηχανικής (βλέπε Πίνακα 2.1).

Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες σήμερα αριθμητικές μέθοδοι είναι των ***Πεπερασμένων Διαφορών (Π.Δ.)*** και των ***Πεπερασμένων Στοιχείων (Π.Σ.)***, οι οποίες θα παρουσιασθούν συνοπτικά στα πλαίσια του μαθήματος. Υπάρχουν βέβαια και αρκετές άλλες μέθοδοι αυτής της κατηγορίας (π.χ. οι μέθοδοι των *Χαρακτηριστικών* και των *Συνοριακών Στοιχείων*) οι οποίες όμως είναι λιγότερο δημοφιλείς στον χώρο της Γεωτεχνικής.

Η βασική αρχή των περισσότερων από αυτές της μεθόδους είναι η ***διακριτοποίηση***, ή πιο απλά η υπο-διαίρεση ενός εκτενούς προβλήματος σε πολύ μικρότερες ισοδύναμες μονάδες εντός των οποίων η γενική λύση μπορεί να πάρει προσεγγιστικά μία αρκετά απλή μορφή με μικρή επίπτωση στην ακρίβεια των υπολογισμών.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον πάσσαλο του Σχήματος 2.2 ο οποίος υπόκειται σε ροπή κεφαλής και στηρίζεται πλευρικά από «ελατηριωτό έδαφος» (Winkler). Η ακριβής επίλυση του προβλήματος αυτού μας δίνει το βέλος κάμψης το οποίο αντιστοιχεί στην ομαλή ελαστική γραμμή του σχήματος. Σε πρώτη προσέγγιση, με τη μέθοδο Π.Σ., ο πάσσαλος θα διακριτοποιηθεί κατά μήκος σε μικρότερα τμήματα και η οριζόντια μετατόπιση θα θεωρηθεί ότι μεταβάλλεται γραμμικά εντός του κάθε τμήματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1:

Τυπικά προβλήματα της Γεωτεχνικής Μηχανικής και οι βασικές διαφορικές εξισώσεις που τα περιγράφουν.

Πρόβλημα	Διαφορική Εξίσωση	Άγνωστη Μεταβλητή
Στατικής Ισορροπίας [π.χ. κατανομή τάσεων στο έδαφος, υπολογισμός καθιζήσεων και φέρουσας ικανότητας θεμελίων (επίπεδη ένταση ή παραμόρφωση)]	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (2.1)	**Μετατόπιση**
Μόνιμης Ροής [π.χ. ροή υπόγειου νερού μέσω φράγματος ή στην περιοχή βαθιών εκσκαφών με άντληση (επίπεδη ένταση ή παραμόρφωση)]	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (2.1)	**Υδραυλικό ύψος**
Μεταβλητής Ροής [π.χ. 1-Δ Στερεοποίηση]	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$ (2.2)	**Υδραυλικό ύψος**
Μετάδοσης Κυμάτων [π.χ. 1-Δ μετάδοση σεισμικών κυμάτων - σεισμική απόκριση επίπεδων εδαφών]	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (2.3)	**Μετατόπιση**
Δυναμικής Ισορροπίας [π.χ. κατακόρυφη ταλάντωση θεμελίου]	$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+ku=0$ (2.4)	**Μετατόπιση**

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1 (Συνέχεια)

Υπενθύμιση !

Στην **βιβλιογραφία των Μαθηματικών**,

οι διαφορικές εξισώσεις (2.1), (2.2) και (2.3) του προηγούμενου Πίνακα αναφέρονται ως *«ελλειπτικές»*, *«παραβολικές»* και *«υπερβολικές»* αντίστοιχα.

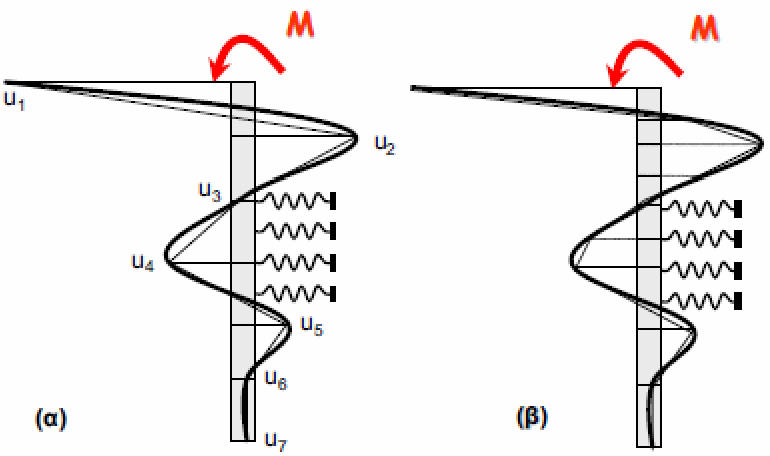
Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της γενικής διαφορικής εξίσωσης:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \qquad (2.4)$$

στην οποία οι συντελεστές A έως F αποτελούν σταθερές συναρτήσεις της θέσης αναφοράς (με συντεταγμένες *x* και *y*) ενώ ο συντελεστής G εξαρτάται επιπλέον από τις αντίστοιχες πρώτες παραγώγους της εκάστοτε άγνωστης μεταβλητής ($\partial u/\partial x$ και $\partial u/\partial y$). Οι προηγούμενες ειδικές περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων, προκύπτουν από την ανωτέρω γενική εξίσωση όταν:

$$B^2\text{-}4AC \begin{cases} <0 & \text{ελλειπτική Δ.Ε.} \\ =0 & \text{παραβολική Δ.Ε.} \\ >0 & \text{υπερβολική Δ.Ε.} \end{cases}$$

ΣΧΗΜΑ 2.2:
Παράδειγμα *διακριτοποίησης* με την αριθμητική μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (Π.Σ.).



Η θεώρηση αυτή θα μας οδηγήσει στην πολυγωνική ελαστική γραμμή η οποία δεν απέχει σημαντικά από την ακριβή λύση, ιδιαίτερα όταν η ***διακριτοποίηση*** γίνει πιο πυκνή στην περιοχή έντονης καμπυλότητας του πασσάλου (Σχήμα 2.2β).

Από το παράδειγμα αυτό προκύπτει επίσης ότι, με τις συνήθεις τουλάχιστον αριθμητικές μεθόδους, επιδιώκεται ο υπολογισμός των τιμών της άγνωστης μεταβλητής (μετατοπίσεις u_1, u_2,…u_4 στο Σχήμα 2.2α) σε συγκεκριμένα, ***πεπερασμένα*** στον αριθμό, σημεία του μέσου. Με άλλα λόγια, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα μεταπίπτει στην πολύ απλούστερη επίλυση ενός συστήματος *NxN* αλγεβρικών (γραμμικών ή μη γραμμικών) εξισώσεων, όπου *N* είναι ο αριθμός των άγνωστων τιμών της μεταβλητής.

Σε αντίθεση λοιπόν με τις ***Απλές Υπολογιστικές Μεθόδους***, όπου το θεωρητικό υπόβαθρο περιορίζεται ουσιαστικά στην γενική διατύπωση της λύσης, στις ***Αριθμητικές Μεθόδους*** δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη ειδικών υπολογιστικών τεχνικών για την οργάνωση - διαχείριση και επεξεργασία των δεδομένων, έτσι ώστε να μειωθεί σε λογικά όρια ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος και να βελτιωθεί η ακρίβεια και η σταθερότητα των αναλύσεων. Για τον λόγο αυτό κάθε μία από τις εν λόγω μεθόδους αποτελεί ουσιαστικά και ένα αυτόνομο γνωστικό κλάδο με εκτενέστατο θεωρητικό υπόβαθρο.

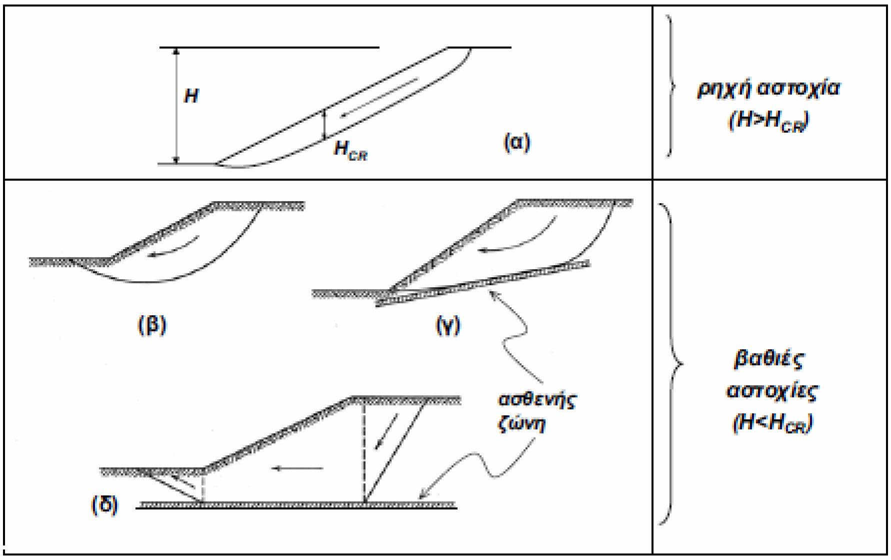
3. Απλές Αριθμητικές Μέθοδοι: *Ανάλυση ευστάθειας πρανών με την μέθοδο των λωρίδων*

3.1 Μορφές και μέθοδοι ανάλυσης της αστοχίας εδαφικών πρανών

Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει τις συνήθεις μορφές αστοχίας εδαφικών πρανών. Από πρακτικής σκοπιάς, μπορούμε να τις χωρίσουμε σε δύο αδρές κατηγορίες:

- Τις **ρηχές**, στις οποίες η επιφάνεια αστοχίας είναι επίπεδη και παράλληλη στο μεγαλύτερο μέρος της προς την επιφάνεια του πρανούς, το δε βάθος της αστοχίας είναι μικρό σε σχέση με το μήκος της (Σχήμα 3.1α). Για συνήθη πρανή (π.χ. επιχώματα οδοποιίας, χωμάτινα φράγματα), η μορφή αυτή αστοχίας δεν είναι ιδιαίτερα καταστροφική μια και σπάνια επηρεάζει την λειτουργικότητα του έργου. Εξαίρεση αποτελούν τα μεγάλα φυσικά πρανή όπου ακόμη και μία ρηχή αστοχία ενεργοποιεί εκατομμύρια κυβικά εδάφους και καταστρέφει όλα τα έργα υποδομής που έχουν κατασκευασθεί στην περιοχή της αστοχίας.
- Τις **βαθιές**, στις οποίες το μέγιστο βάθος αστοχίας είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μήκος. Σε ομοιογενή, ή περίπου ομοιογενή εδάφη, χωρίς έντονες αντιθέσεις μεταξύ των παραμέτρων αντοχής των διάφορων στρώσεων, μπορεί να υποτεθεί ότι η μορφή της επιφάνειας αστοχίας είναι ***κυκλική*** και η αστοχία είναι περιστροφική (Σχήμα 3.1β). Όταν στις εδαφικές στρώσεις παρεμβάλλεται μία στρώση σημαντικά μειωμένης αντοχής, ή όταν συναντάται μία στρώση μεγάλου βάθους και αντοχής, τότε η γεωμετρία της επιφάνειας αστοχίας απέχει πολύ από το κυκλικό τόξο, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.1γ και 3.1δ.

ΣΧΗΜΑ 3.1:
Πιθανές μορφές αστοχίας εδαφικών (όχι βραχωδών) πρανών **(α)** Πρανές «απείρου» (πολύ μεγάλου) μήκους και ύψους, **(β)** Πρανές «περιορισμένου» μήκους και ύψους, σε ομοιόμορφο σχετικά έδαφος, **(γ)** & **(δ)** Πρανή «περιορισμένου» μήκους και ύψους, παρουσία μίας ασθενούς ζώνης εδάφους.



Υπολογισμός του βάθους «ρηχής» αστοχίας H_{CR}:

$$H_c = \frac{c}{\gamma_{\Xi}} \frac{1}{\cos^2 i \left(\tan i - \tan\phi \right)}$$

ΞΗΡΟ ΕΔΑΦΟΣ (c, φ)

$$H_c = \frac{c}{\gamma_b} \frac{1}{\cos^2 i \left(\tan i - \tan\phi \right)}$$

ΚΟΡΕΣΜΕΝΟ ΕΔΑΦΟΣ (c, φ)
βυθισμένο πρανές (χωρίς ροή) ,
μακροχρόνια αστοχία

$$H_c = \frac{C_U}{\gamma_{KOP.}} \frac{1}{\cos i \cdot \sin i}$$

ΚΟΡΕΣΜΕΝΟ ΕΔΑΦΟΣ (C_U, φ=0)
βυθισμένο πρανές (χωρίς ροή) ,
βραχυχρόνια αστοχία

$$H_c = \frac{c}{\gamma} \frac{1}{\cos^2 i \left(\tan i - \frac{\gamma_b}{\gamma} \tan\phi \right)}$$

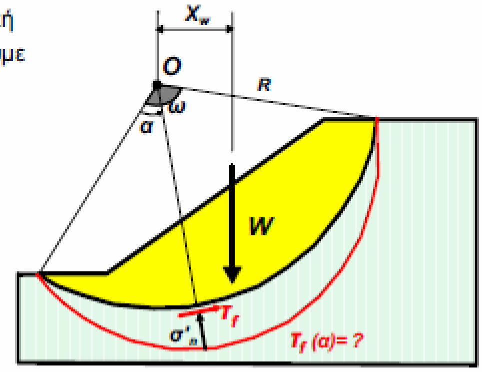
ΚΟΡΕΣΜΕΝΟ ΕΔΑΦΟΣ (c, φ)
με ροή παράλληλη προς την
ελεύθερη επιφάνεια, μακροχρόνια
αστοχία

Στο μάθημα της Εδαφομηχανικής ΙΙ, έχετε ήδη διδαχθεί μία γενική μέθοδο ανάλυσης της ευστάθειας πρανών, την **μέθοδο οριακής ισορροπίας**:

- πρώτα-πρώτα ορίζουμε μία πιθανή επιφάνεια αστοχίας του εδάφους,
- ακολούθως θεωρούμε την οριακή ισορροπία του εδαφικού πρίσματος, στην περίπτωση αστοχίας,
- τέλος, ορίζουμε τον υφιστάμενο συντελεστή ασφαλείας (FS) ως τον λόγο μεταξύ των δράσεων (δυνάμεων ή ροπών) που απαιτούνται να προκαλέσουν αστοχία προς τις υφιστάμενες δράσεις.

Για **παράδειγμα**, για την εικονιζόμενη κυκλική επιφάνεια αστοχίας, μπορούμε να θεωρήσουμε την οριακή ισορροπία ροπών περί το κέντρο περιστροφής ***Ο***, και να γράψουμε:

$$FS = \frac{R \cdot \int_0^{\omega} \tau_f(\alpha) d\alpha}{W \cdot X_w} \qquad (3.1)$$



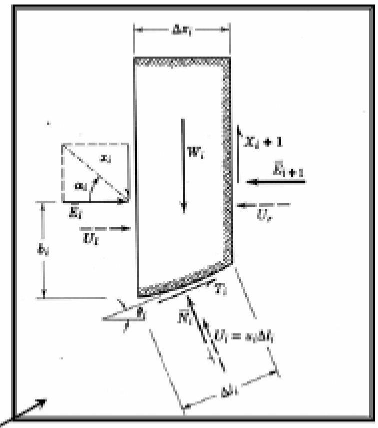
Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται όταν η κατανομή της οριακής διατμητικής τάσης αστοχίας ***τ_f (α)*** επάνω στην επιφάνεια αστοχίας είναι γνωστή, όπως στην περίπτωση ***βραχυχρόνιας αστοχίας*** όπου η ανάλυση γίνεται με βάση την (εκ των προτέρων γνωστή) αστράγγιστη διατμητική αντοχή των εδαφικών στρώσεων.

Στην περίπτωση ***μακροχρόνιας αστοχίας*** όμως, η ***τ_f (α)*** είναι συνάρτηση των ορθών ενεργών τάσεων που ασκούνται στην επιφάνεια αστοχίας, που δεν είναι άμεσα γνωστές. Έτσι, οι υπολογισμοί γίνονται προσεγγιστικά με την ***μέθοδο των λωρίδων*** η οποία προτάθηκε αρχικά από τον Σουηδό W. Fellenius to 1927, σε μία προσπάθεια υπολογισμού των ορθών και διατμητικών τάσεων που ασκούνται στην επιφάνεια αστοχίας συναρτήσει του βάρους των γαιών πάνω από το κάθε σημείο αναφοράς.

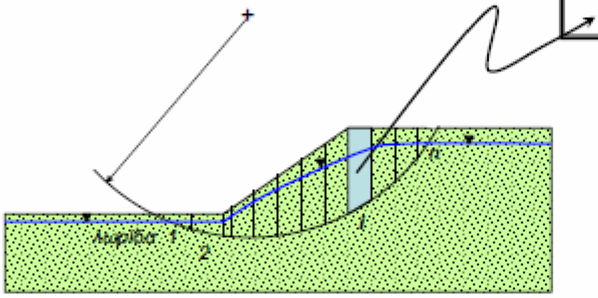
Οι βασικές αρχές της μεθόδου των λωρίδων παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.2. Συγκεκριμένα, για μια δεδομένη επιφάνεια αστοχίας, το ολισθαίνον πρίσμα υποδιαιρείται σε λεπτές κατακόρυφες λωρίδες και οι τάσεις που ασκούνται στην βάση της κάθε λωρίδας υπολογίζονται από τις εξισώσεις ισορροπίας (δυνάμεων και ροπών) της κάθε λωρίδας ξεχωριστά.

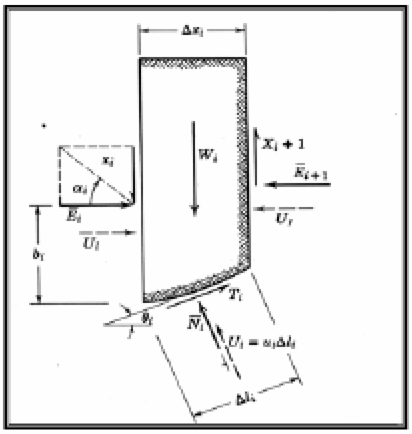
Εκ προοιμίου επισημαίνεται ότι, ακόμη και με την μέθοδο των λωρίδων η επίλυση είναι προσεγγιστική μια και στους αγνώστους μας προστίθενται τώρα οι τάσεις που ασκούνται στην κατακόρυφη παρειά των λωρίδων καθώς και τα σημεία εφαρμογής της συνισταμένης τους. Όπως αναλύεται στο ***Σχήμα 3.3***, ακόμη και εάν οι λωρίδες γίνουν πολύ λεπτές έτσι ώστε να θεωρείται ότι οι αντιδράσεις του εδάφους ασκούνται στο μέσον της βάσης κάθε λωρίδας, οι άγνωστοι του προβλήματος υπερβαίνουν συνολικά τις εξισώσεις ισορροπίας κατά ***n-2*** (n=αριθμός λωρίδων). Έτσι, είναι αναγκαία η υιοθέτηση κάποιων (λογικών) παραδοχών προκειμένου να αρθεί η υπερστατικότητα του προβλήματος.

ΣΧΗΜΑ 3.2:
(α) Διαχωρισμός του ολισθαίνοντος πρίσματος σε λωρίδες και **(β)** πλήρες σύστημα δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε λωρίδα.



W_i = συνολικό βάρος λωρίδας
U = δυνάμεις λόγω πίεσης πόρων
N_i = ενεργός ορθή δύναμη στην βάση της λωρίδας
T_i = αντίσταση τριβής στην βάση της λωρίδας
E_i, E_{i+1} = ορθές, ενεργές δυνάμεις στο αριστερό και στο δεξί όριο της λωρίδας
X_i, X_{i+1} = αντίσταση τριβής στο αριστερό και στο δεξί όριο της λωρίδας





ΣΧΗΜΑ 3.3:
Απολογισμός αγνώστων στις εξισώσεις ισορροπίας για ***n*** λωρίδες

Άγνωστοι που υπεισέρχονται στην ισορροπία δυνάμεων	
Ορθές δυνάμεις $\overline{N}_i$ στη βάση κάθε λωρίδας	***n***
Συντελεστής ασφάλειας ο οποίος επιτρέπει στις διατμητικές δυνάμεις να εκφρασθούν συναρτήσει της N_i (και των c, φ)	***1***
Ορθές δυνάμεις $\overline{E}_i$ επί της κατακόρυφης παρειάς των λωρίδων	***n-1***
Γωνίες κλίσης α_i που επιτρέπουν την συσχέτιση των διατμητικών δυνάμεων X_i με τις ορθές E_i	***n-1***
Σύνολο (έναντι 2n εξισώσεων ισορροπίας)	***3n-1***
Πρόσθετοι άγνωστοι που υπεισέρχονται στην ισορροπία ροπών	
Συντεταγμένες b_i εφαρμογής των ορθών δυνάμεων E_i επί της κατακόρυφης παρειάς των λωρίδων	***n-1***
Συνολικός αριθμός αγνώστων (έναντι 3n εξισώσεων ισορροπίας)	***4n-2***

Σημείωση: *Όταν το πάχος των λωρίδων είναι πολύ μικρό, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $\overline{N}_i$ και U_i ασκούνται στο μέσον της βάσης κάθε λωρίδας*

Μεθοδολογικά, οι διάφορες διατυπώσεις της μεθόδου των λωρίδων που είναι σήμερα διαθέσιμες μπορούν να διακριθούν σε αυτές που αφορούν κυκλική και μη-κυκλική επιφάνεια αστοχίας. Ακολούθως, θα παρουσιασθούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια δύο τυπικές μέθοδοι από την πρώτη κατηγορία (Fellenius, 1927 και απλοποιημένη Bishop, 1955) και μία από την δεύτερη κατηγορία (Janbu, 1973).

Επισημαίνεται ότι, σε όλες τις διαφορετικές εκδοχές της μεθόδου των λωρίδων, η ισορροπία του πρανούς εξετάζεται κατά την κατάσταση λειτουργίας και όχι κατά την οριακή κατάσταση αστοχίας. Για τον λόγο αυτό η «αντίσταση τριβής» T_i που ασκείται στην βάση της κάθε λωρίδας i (Σχήμα 3.2) δεν είναι η «οριακή αντίσταση τριβής» $T_{i,ULT}$ αλλά μικρότερη, ισχύει δε:

$$T_i = \frac{T_{i,ULT}}{FS} \tag{3.2}$$

όπου **FS** είναι ο υφιστάμενος (ή ο επιθυμητός) συντελεστής ασφαλείας έναντι αστοχίας του πρανούς.

Για ***αστράγγιστες συνθήκες*** φόρτισης, οι οποίες θα πρέπει να θεωρούνται κατά την ανάλυση της βραχυχρόνιας ευστάθειας πρανών σε κορεσμένα συνεκτικά εδάφη (αργίλους, πλαστικές ιλύες, κλπ.), η διατμητική αντοχή του εδάφους εκφράζεται από την αστράγγιστη διατμητική αντοχή **Su**, ενώ παράλληλα θεωρείται ότι η γωνία τριβής είναι μηδενική (φ=0) και οι υπολογισμοί βασίζονται στις ολικές ορθές τάσεις. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν:

$$T_{i,ULT} = Su_i \cdot \Delta l_i \tag{3.3}$$

όπου Δl_i είναι το μήκος της βάσης της κάθε λωρίδας (Σχήμα 3.2).

Αντίστοιχα, για ***στραγγιζόμενες συνθήκες*** φόρτισης, η διατμητική αντοχή του εδάφους εκφράζεται από την συνοχή **c** και την γωνία τριβής **φ** του εδάφους, ενώ οι υπολογισμοί βασίζονται στις ενεργές ορθές τάσεις. Στη περίπτωση αυτή λοιπόν:

$$T_{i,ULT} = c_i \cdot \Delta l_i + \overline{N}_i \tan\phi_i = c_i \cdot \Delta l_i + (N_i - U_i)\tan\phi_i \tag{3.4}$$

όπου N_i και U_i είναι οι συνισταμένες των ολικών ορθών τάσεων και των υδροστατικών πιέσεων που ασκούνται στην βάση της κάθε λωρίδας i (Σχήμα 3.2).

Υπενθυμίζεται ότι στραγγιζόμενες συνθήκες φόρτισης θα πρέπει να θεωρούνται κατά την ανάλυση:

- της ευστάθειας (βραχυχρόνιας και μακροχρόνιας) πρανών σε μη συνεκτικά εδάφη (άμμους, χάλικες, μη πλαστικές ιλύες, κλπ.)

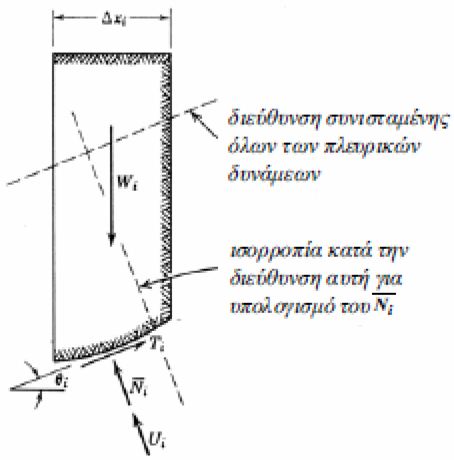
- της μακροχρόνιας ευστάθειας πρανών σε κορεσμένα συνεκτικά εδάφη (αργίλους, πλαστικές ιλύες, κλπ.)

3.2 Συνήθης Μέθοδος των Λωρίδων
[*γνωστή και ως* ***"Swedish method of slices"*** *ή* ***"μέθοδος Fellenius"***]

Η βασική παραδοχή αυτής της μεθόδου είναι ότι η συνισταμένη των πλευρικών δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε λωρίδα έχει διεύθυνση παράλληλη προς την (οιωνεί ευθύγραμμη) βάση της λωρίδας (Σχήμα 3.4).

Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται εύκολα η ορθή δύναμη στην βάση της λωρίδας N_i, από ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται κάθετα προς την βάση της λωρίδας, και ακολούθως η διατμητική δύναμη T_i, από τις σχέσεις (3.2) έως (3.4). Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής ασφαλείας ***FS*** υπολογίζεται τελικά από ισορροπία ροπών του ολισθαίνοντος πρίσματος, λαμβανομένου ως ενιαίου στερεού. Για κυκλική επιφάνεια ολίσθησης, οι υπολογισμοί απλοποιούνται εάν η ισορροπία των ροπών ληφθεί ως προς το κέντρο περιστροφής.

Επί της ουσίας, η παραδοχή που γίνεται σχετικά με τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των λωρίδων εισάγει n-1 ακόμη εξισώσεις και έτσι ο συνολικός αριθμός εξισώσεων γίνεται [3n +(n-1) =] 4n-1, έναντι 4n-2 αγνώστων. Έχουμε δηλαδή μία εξίσωση παραπάνω από όσες χρειαζόμαστε για μία και μοναδική στατικά ορισμένη λύση, και επομένως η επίλυση δεν μπορεί να είναι παρά προσεγγιστική.



Πρόσθετες Εξισώσεις	Πλήθος
$\alpha_i=\alpha_{i-1}=\theta_i$	n

Εξισώσεις ισορροπίας	3n
Πρόσθετες εξισώσεις	n
Σύνολο εξισώσεων	4n

4n - (4n-2) = 2 **εξίσωση επιπλέον από τους αγνώστους**

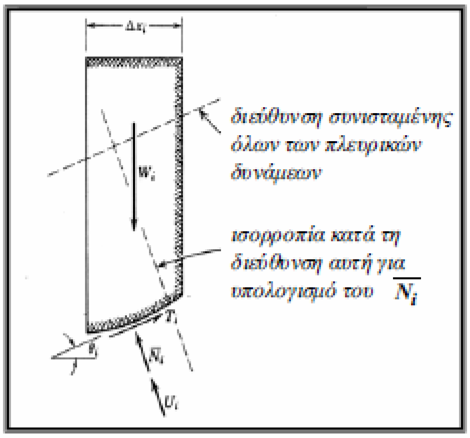
ΣΧΗΜΑ 3.4:
Παραδοχές υπολογισμού των δυνάμεων στην ***συνήθη μέθοδο των λωρίδων***.

Πιο συγκεκριμένα, για μία τυχούσα λωρίδα *i*, η ισορροπία δυνάμεων ως προς την κάθετη προς τη βάση διεύθυνση δίνει τελικώς:

$$\overline{N}_i = W_i \cos\theta_i - U_i \tag{3.5}$$

και επομένως, σύμφωνα με τις Σχέσεις (3.2) και (3.4), η αντίστοιχη διατμητική δύναμη γίνεται:

$$T_i = \frac{T_{i,ULT}}{FS} = \frac{c_i \cdot \Delta l_i + \overline{N}_i \tan\phi_i}{FS}$$



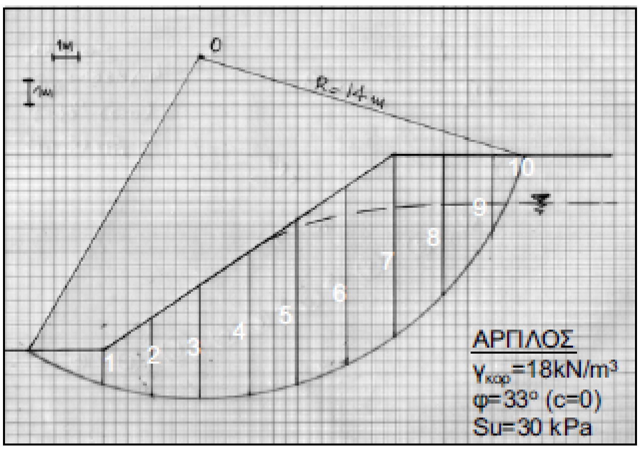
Έτσι, η εξίσωση (3.1) για τον συντελεστή ασφαλείας παίρνει τώρα την μορφή:

$$FS = \frac{\sum_{1}^{n} R \cdot T_{i,ULT}}{\sum_{1}^{n} W_i \cdot X_{w,i}}$$

ή, τελικώς:

$$FS = \frac{\sum_{1}^{n} \left[c_i \Delta l_i + \tan\phi_i \left(W_i \cos\theta_i - u_i \Delta l_i \right) \right]}{\sum_{1}^{n} W_i \cdot \sin\theta_i}$$

Επισημαίνεται ότι η μέθοδος αυτή είναι η πρώτη του είδους που εμφανίσθηκε στην βιβλιογραφία και έγινε δημοφιλής λόγω κυρίως της απλότητας της. Από σύγκριση όμως με πιο «ακριβείς» μεθόδους ανάλυσης προκύπτει ότι είναι ιδιαίτερα συντηρητική, και μπορεί να υπό-εκτιμήσει τον συντελεστή ασφαλείας από 10 έως 60%.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί ο συντελεστής ασφαλείας του εικονιζόμενου πρανούς και της συγκεκρι-μένης επιφάνειας αστοχίας έναντι:

(α) βραχυχρόνιας
(β) μακροχρόνιας

αστοχίας, με χρήση της μεθόδου Fellenius.

Υπόδειξη: *Οι πιέσεις πόρων να ληφθούν απλοποιητικά ως υδροστατικές*

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\varphi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	Δl_i (m)	u_i (kPa)	Αριθμητής (kN m)/m	Παρανομ. (kN m)/m
1				-25.0				
2				-14.0				
3				-4.0				
4				4.0				
5				14.0				
6				19.0				
7				30.0				
8				41.0				
9				53.0				
10				66.5				
FS = Αριθμ./Παρον.=								

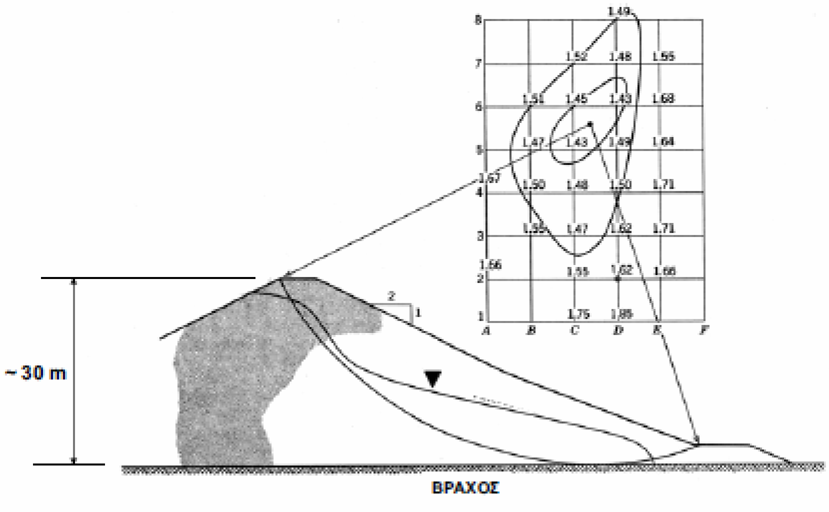
Πίνακας Υπολογισμών για βραχυχρόνια αστοχία

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\varphi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	Δl_i (m)	u_i (kPa)	Αριθμητής (kN m)/m	Παρανομ. (kN m)/m
1				-25.0				
2				-14.0				
3				-4.0				
4				4.0				
5				14.0				
6				19.0				
7				30.0				
8				41.0				
9				53.0				
10				66.5				
FS = Αριθμ./Παρον.=								

Πίνακας Υπολογισμών για μακροχρόνια αστοχία

Στο παράδειγμα που λύσατε προηγουμένως, οι υπολογισμοί αφορούν μία μόνον κυκλική επιφάνεια, δηλαδή ένα κέντρο και μία ακτίνα. Σε μία πραγματική εφαρμογή όμως εξετάζονται πολλά κέντρα (π.χ. σε διάταξη τετραγωνικού καννάβου) και πολλές ακτίνες για κάθε κέντρο, έτσι ώστε να μπορέσουμε να εντοπίσουμε τον κύκλο με τον ελάχιστο συντελεστή ασφαλείας (π.χ. Σχήμα 3.5).

Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι, παρά το γεγονός ότι οι επιμέρους υπολογισμοί είναι απλοί και δεν απαιτούν ιδιαίτερο υπολογιστικό υπόβαθρο, ο όγκος τους όμως είναι τόσο μεγάλος που απαιτεί τη χρήση Η/Υ. . . . . .



ΣΧΗΜΑ 3.5:
Ενδεικτικά αποτελέσματα από την ανάλυση ευστάθειας πρανών φράγματος με $\varphi=39^o$ (c=0), γ_{Ξ}= 20 kN/m^3 (*πάνω από τον φρεάτιο ορίζοντα*) και γ_{KOP}= 21.6 kN/m^3 (*κάτω από τον φρεάτιο ορίζοντα*).

3.3 Απλοποιημένη Μέθοδος Bishop

Η βασική παραδοχή αυτής της μεθόδου είναι ότι η συνισταμένη των πλευρικών δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε λωρίδα έχει οριζόντια διεύθυνση (Σχήμα 3.5). Στην περίπτωση αυτή η ορθή δύναμη στην βάση της λωρίδας N_i, υπολογίζεται από ισορροπία των κατακόρυφων δυνάμεων που ασκούνται στην λωρίδα, και ακολούθως η διατμητική δύναμη T_i υπολογίζεται από τις σχέσεις (3.3)-(3.4). Τέλος, ο συντελεστής ασφαλείας ***FS*** υπολογίζεται από ισορροπία ροπών του ολισθαίνοντος πρίσματος, λαμβανομένου ως ενιαίου στερεού.

Η μέθοδος Bishop παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με την μέθοδο Fellenius που εξετάστηκε προηγουμένως, αλλά παρουσιάζει και δύο ουσιαστικές διαφορές:

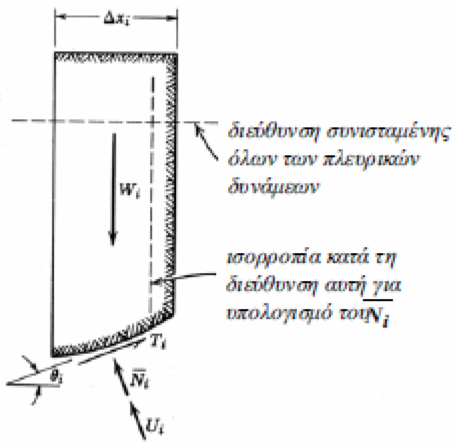
(α) Και σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο εξισώσεις περισσότερες από τους αγνώστους (βλ. Σχήμα 3.6). Η παραδοχή όμως που γίνεται για τις πλευρικές δυνάμεις φαίνεται ότι είναι πλησιέστερα στην πραγματικότητα, μια και οδηγεί σε λύσεις που ικανοποιούν κάποιες θεμελιώδεις γεωτεχνικές συνθήκες (π.χ. ότι η γωνία κλίσης της συνισταμένης πλευρικής δύναμης δεν ξεπερνά την γωνία τριβής και ότι η απόσταση εφαρμογής της από την βάση κυμαίνεται μεταξύ 1/2 και 1/3 του ύψους).

(β) Όπως θα δούμε παρακάτω, η εξίσωση που δίνει τον συντελεστή ασφαλείας είναι μη-γραμμική, μια και ο συντελεστής ασφαλείας εμφανίζεται και στα δύο μέλη. Έτσι, η επίλυση γίνεται επαναληπτικά και απαιτεί μεγαλύτερο χρόνο (αν και 2-3 επαναλήψεις είναι συνήθως αρκετές για να πετύχουμε την σύγκλιση).

Πρόσθετες Εξισώσεις	**Πλήθος**
α_i=0	**n**

Εξισώσεις ισορροπίας	**3n**
Πρόσθετες εξισώσεις	**n**
Σύνολο εξισώσεων	**4n**

4n - (4n-2) = 2	**εξισώσεις επιπλέον από τους αγνώστους**



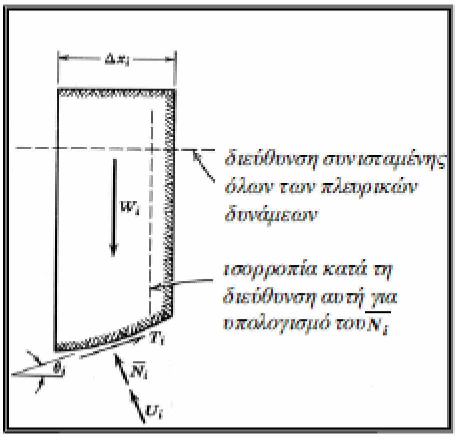
ΣΧΗΜΑ 3.6:
Παραδοχές υπολογισμού των δυνάμεων
στην ***απλοποιημένη μέθοδο Bishop***.

Ο αλγόριθμος επίλυσης με την απλοποιημένη μέθοδο Bishop διαμορφώνεται ως ακολούθως. Για μία τυχούσα λωρίδα *i*, η ισορροπία δυνάμεων ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση δίνει:

$$\overline{N}_i = \frac{W_i}{\cos\theta_i} - U_i - \frac{T_{i,ULT}}{FS}\tan\theta_i$$

και επομένως, σύμφωνα με τις Σχέσεις (3.2) και (3.4), η αντίστοιχη διατμητική δύναμη γίνεται:

$$T_i = \frac{T_{i,ULT}}{FS} = \frac{c_i \cdot \Delta l_i + \overline{N}_i \tan\phi_i}{FS}$$



Έτσι, η Εξίσωση (3.1) για τον συντελεστή ασφαλείας παίρνει την μορφή:

$$FS = \frac{\sum_{1}^{n} R \cdot T_{i,ULT}}{\sum_{1}^{n} W_i \cdot X_{w,i}}$$

από όπου τελικώς προκύπτει:

$$FS = \frac{\sum_{1}^{n} [c_i \Delta x_i + \tan\phi_i (W_i - u_i \Delta x_i)] / m_i(\theta_i, FS)}{\sum_{1}^{n} W_i \cdot \sin\theta_i}$$

όπου:

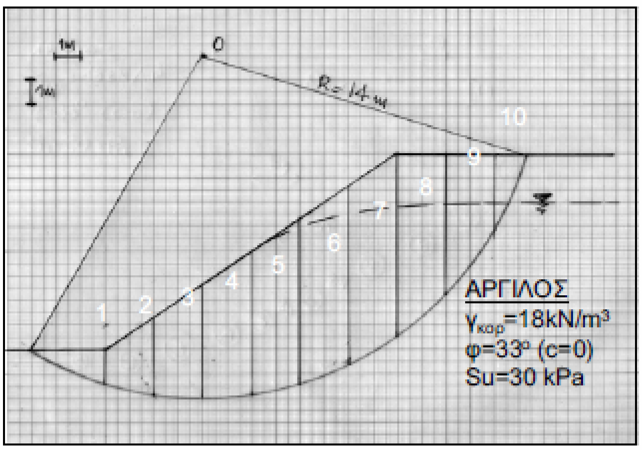
$$m_i(\theta_i, FS) = \cos\theta_i \left(1 + \frac{\tan\theta_i \cdot \tan\phi_i}{FS}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να υπολογισθεί ο συντελεστής ασφαλείας του εικονιζόμενου πρανούς και της συγκεκριμένης επιφάνειας αστοχίας έναντι :

(α) βραχυχρόνιας

(β) μακροχρόνιας

αστοχίας, με χρήση της τροποποιημένης μεθόδου Bishop.



Υπόδειξη: Οι πιέσεις πόρων να ληφθούν απλοποιητικά ως υδροστατικές. Επιπλέον, οι αρχικές τιμές του FS να ληφθούν από τις αναλύσεις με την μέθοδο Fellenius

Πίνακας Υπολογισμών για βραχυχρόνια αστοχία

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\phi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	Δx_i (m)	u_i (kPa)	Παρανομ. (kN m)/m	FS_0=		FS_1=	
								m_i	Αριθμητής (kN m)/m	m_i	Αριθμητής (kN m)/m
1				-25.0							
2				-14.0							
3				-4.0							
4				4.0							
5				14.0							
6				19.0							
7				30.0							
8				41.0							
9				53.0							
10				66.5							
FS_1 = Αριθμ./Παρον.=											
FS_2 = Αριθμ./Παρον.=											

Πίνακας Υπολογισμών για μακροχρόνια αστοχία

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\phi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	Δx_i (m)	u_i (kPa)	Παρανομ. (kN m)/m	FS_0=		FS_1=	
								m_i	Αριθμητής (kN m)/m	m_i	Αριθμητής (kN m)/m
1				-25.0							
2				-14.0							
3				-4.0							
4				4.0							
5				14.0							
6				19.0							
7				30.0							
8				41.0							
9				53.0							
10				66.5							
FS_1 = Αριθμ./Παρον.=											
FS_2 = Αριθμ./Παρον.=											

3.4 Μέθοδος Janbu

Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε πολύ αργότερα από τις δύο προηγούμενες, το 1973 περίπου, μετά από την διαπίστωση του καθηγητή N. Janbu (καθηγητή στο πανεπιστήμιο του Trondheim στην Νορβηγία) ότι οι μέθοδοι για κυκλικές επιφάνειες αστοχίας δεν επαρκούν για την περίπτωση κατολισθήσεων με μεγάλο σχετικά μήκος, όπως αυτές των Σχημάτων 3.1(γ) και (δ).

Οι πρώτες δύο βασικές παραδοχές που υιοθετούνται με στη μέθοδο αυτή είναι ότι:

(Α) Οι πλευρικές οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε λωρίδα είναι ίσες (Σχήμα 3.7)

(Β) Κατά την υφιστάμενη κατάσταση (λειτουργίας) του πρανούς ικανοποιείται η ισορροπία των οριζόντιων δυνάμεων που ασκούνται στο εξεταζόμενο πρίσμα αστοχίας.

Έτσι, ο αλγόριθμος υπολογισμού του συντελεστή ασφαλείας διαμορφώνεται ως ακολούθως.

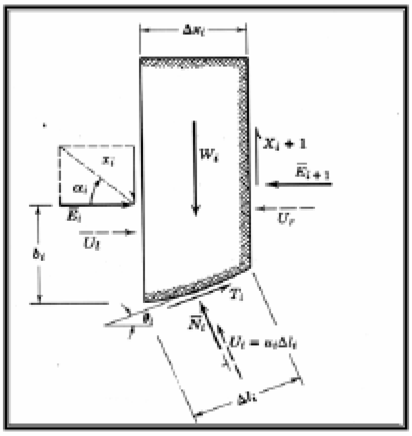
- Ισορροπία των οριζοντίων δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε λωρίδα:

$$T_i \cos\theta_i = (\overline{N}_i + U_i)\sin\theta_i \qquad \acute{\eta} \qquad (\overline{N}_i + U_i) = \frac{T_i}{\tan\theta_i} \tag{3.6}$$

Πρόσθετες Εξισώσεις	Πλήθος
$E_i = E_{i+1}$	n

Εξισώσεις ισορροπίας	3n
Πρόσθετες εξισώσεις	n
Σύνολο εξισώσεων	4n

4n - (4n-2) = 2 εξίσωση επιπλέον από τους αγνώστους



ΣΧΗΜΑ 3.7:
Παραδοχές υπολογισμού των δυνάμεων στην ***μέθοδο Janbu***.

- Ισορροπία λωρίδας στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$W_i + (X_i - X_{i+1}) = T_i \sin\theta_i + (\overline{N}_i + U_i)\cos\theta_i$$

ή, σε συνδυασμό με την ανωτέρω σχέση (3.6),

$$W_i + (X_i - X_{i+1}) = \frac{T_i}{\sin\theta_i}$$

- Συνολική ισορροπία δυνάμενων στην οριζόντια διεύθυνση:

$$\sum_1^n T_i \cos\theta_i = \sum_1^n (\overline{N}_i + U_i)\sin\theta_i$$

και, δεδομένου ότι $T_i = \dfrac{T_{i,ULT}}{FS}$ προκύπτει τελικώς

$$FS = \frac{\sum_1^n T_{i,ULT}\cos\theta_i}{\sum_1^n [W_i + (X_i - X_{i+1})]\sin\theta_i \cos\theta_i}$$

Αντικαθιστώντας στην ανωτέρω σχέση για τον FS την τιμή του $T_{i,ULT}$ από την σχέση (3.4) και την τιμή του $\overline{N}_i$ από την σχέση (3.5), παίρνουμε:

$$FS = \frac{\sum_1^n c_i \Delta x_i + \sum_1^n [W_i + (X_i - X_{i+1})]\cos\theta_i \tan\phi_i - \sum_1^n u_i \Delta x_i \tan\phi_i}{\sum_1^n [W_i + (X_i - X_{i+1})]\sin\theta_i \cos\theta_i}$$

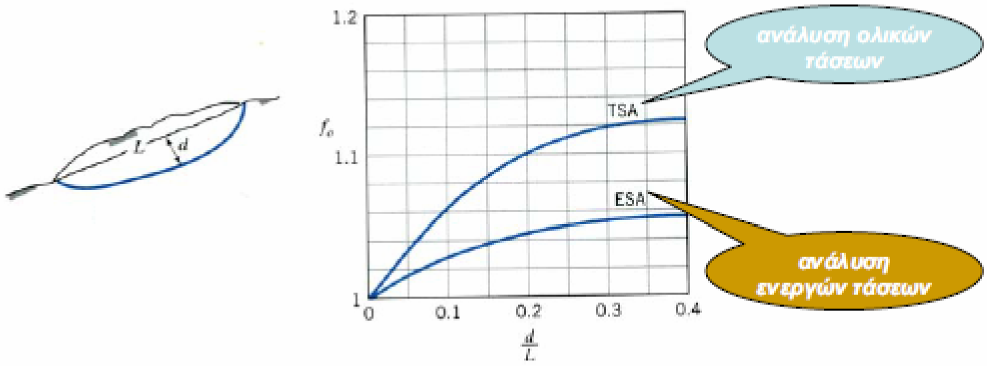
Εδώ μπαίνει και η τρίτη (και τελευταία) παραδοχή της μεθόδου Janbu, σύμφωνα με την οποία:

(Γ) Ο άγνωστος όρος (X_i-X_{i+1}) απαλείφεται από την ανωτέρω σχέση και αντικαθίσταται από έναν διορθωτικό συντελεστή f_o,

ήτοι:

$$\boxed{FS = f_o \frac{\sum_1^n c_i \Delta x_i + \sum_1^n W_i \cos\theta_i \tan\phi_i - \sum_1^n u_i \Delta x_i \tan\phi_i}{\sum_1^n W_i \sin\theta_i \cos\theta_i}}$$

Ο διορθωτικός συντελεστής f_o υπολογίζεται από το Σχήμα 3.8 συναρτήσει της γεωμετρίας της επιφάνειας αστοχίας και ανάλογα προς την μεθοδολογία ανάλυσης (ολικών ή ενεργών τάσεων).

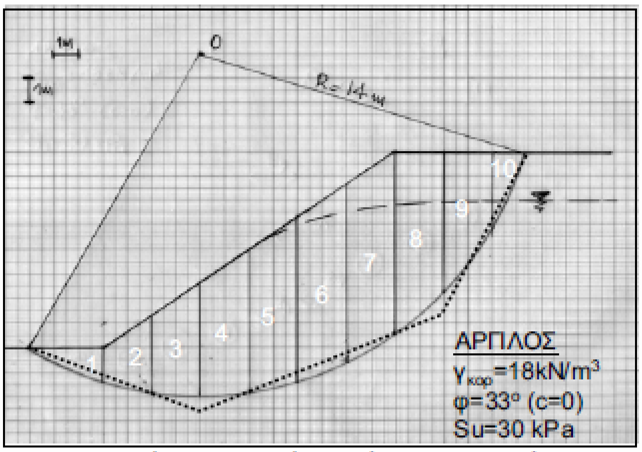


ΣΧΗΜΑ 3.8:
Διορθωτικός συντελεστής για τον υπολογισμό του Συντελεστή Ασφαλείας με την ***μέθοδο Janbu***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί ο συντελεστής ασφαλείας του εικονιζόμενου πρανούς και της τεθλασμένης επιφάνειας αστοχίας (με διακεκομμένη γραμμή) έναντι (α) βραχυχρόνιας και (β) μακροχρόνιας αστοχίας, με χρήση της μεθόδου Janbu.

Υποδείξεις: *Οι πιέσεις πόρων να ληφθούν απλοποιητικά ως υδροστατικές. Η τεθλασμένη επιφάνεια αστοχίας προσεγγίζει αρκετά ικανοποιητικά την κυκλική και επομένως οι αντίστοιχοι συντελεστές αστοχίας δεν θα πρέπει να διαφέρουν πολύ.*



ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\varphi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	u_i (kPa)	Αριθμητής (kN m)/m	Παρανομ. (kN m)/m	f_o
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
FS = f_o(Αριθμ./Παρον.)=								

Πίνακας Υπολογισμών για βραχυχρόνια αστοχία

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\varphi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	u_i (kPa)	Αριθμητής (kN m)/m	Παρανομ. (kN m)/m	f_o
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
FS = f_o(Αριθμ./Παρον.)=								

Πίνακας Υπολογισμών για μακροχρόνια αστοχία

3.5 Τελικές Παρατηρήσεις

- Εκτός από τις τρεις μεθόδους που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, υπάρχουν αρκετές άλλες τις οποίες θα βρείτε πιθανόν στο menu του λογισμικού που θα χρησιμοποιήσετε σε πραγματικές εφαρμογές. Στοιχεία για τις μεθόδους αυτές (παραδοχές, πεδίο εφαρμογής, κλπ.) δίνονται συνοπτικά στο Πίνακα 3.1. Επιπλέον, σύγκριση τεσσάρων από αυτές παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.9.
- Για περισσότερες ακόμη πληροφορίες θα πρέπει να αναφερθείτε στην Βιβλιογραφία του Πίνακα 3.2.
- Το λογισμικό που θα χρησιμοποιήσετε για πρακτικές εφαρμογές παρέχει τη δυνατότητα για ανάλυση αρκετά πιο πολύπλοκων συνθηκών, όπως για παράδειγμα πρανή:

- με εφελκυστική ρωγμή στη στέψη,
- ενισχυμένα με οριζόντιες στρώσεις γεω-υφασμάτων,
- υπό σεισμική δράση,
- κλπ.

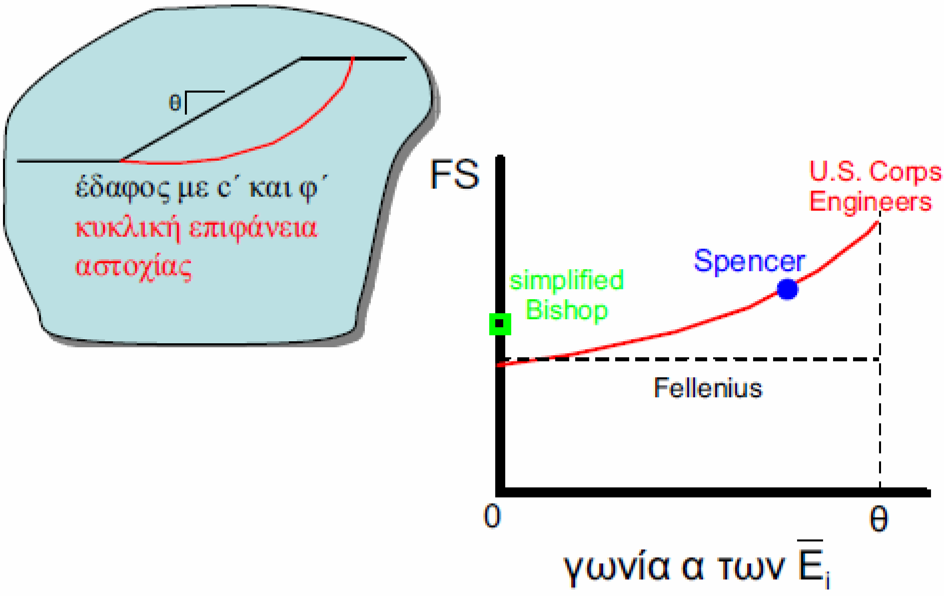
Λεπτομέρειες για την προσομοίωση αυτών των συνθηκών παρέχονται συνήθως μαζί με τις οδηγίες χρήσης των (εμπορικών) λογισμικών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1:
Συνοπτική παρουσίαση των συνηθέστερα χρησιμοποιούμενων μεθόδων ανάλυσης της ευστάθειας πρανών με τη μέθοδο των λωρίδων

Method	Assumption	Failure surface	Equilibrium equation satisfied	Solution by
Swedish method (Fellenius, 1927)	Resultant of interslice force is zero; $J_s = 0$	Circular	Moment	Calculator
Bishop's simplified method (Bishop, 1955)	E_j and E_{j+1} are collinear $X_j - X_{j+1} = 0$, $J_s = 0$	Circular	Moment	Calculator
Bishop's method (Bishop, 1955)	E_j and E_{j+1} are collinear; $J_s = 0$	Circular	Moment	Calculator/ computer
Morgenstern and Price (1965)	Relationship between E and X of the form $X = \lambda f(x) E$, $f(x)$ is a function = 1, λ is a scale factor, $J_s = 0$	Any shape	All	Computer
Spencer (1967)	Interslice forces are parallel; $J_s = 0$	Any shape	All	Computer
Bell's method (Bell, 1968)	Assumed normal stress distribution along failure surface; $J_s = 0$	Any shape	All	Computer
Janbu (1973)	$X_j - X_{j+1}$ replaced by a correction factor, f_o; $J_s = 0$	Noncircular	Horizontal forces	Calculator
Sarma (1976)*	Assumed distribution of vertical interslice forces; $J_s = 0$	Any shape	All	Computer

J_s = seepage force due to flow through the slope

ΣΧΗΜΑ 3.9:
Σύγκριση τεσσάρων τυπικών μεθόδων ανάλυσης της ευστάθειας πρανών με την μέθοδο των λωρίδων.



ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2:
Βιβλιογραφία σχετικά με την μέθοδο των λωρίδων για την ανάλυση της ευστάθειας πρανών

1. Budhu, M. (2000). *"Soil Mechanics and Foundations"*, John Wiley and Sons.
2. Das, M.B. (1999). *"Principles of Foundation Engineering"*, PWS Publishing.
3. Lambe, T.W. and Whitman, R.V. (1969). *"Soil Mechanics"*, John Wiley and Sons.
4. Fellenius, W. (1927). *"Erdstatische Berechnungen"*, W. Ernst und Sohn, Berlin.
5. Bishop, A.W. (1955). *"The Use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes"*, Geotechnique, 5(1), pp. 7-17.
6. Janbu, N. (ed.) (1973). *"Slope Stability Computations"*, Embankment Dam Engineering, Casagrande Memorial Volume, Wiley, New York, pp. 47-86.
7. Morgenstern, N.R. and Price, V.E. (1965). *"The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces"*, Geotechnique, 15(1), pp. 79-83.
8. Spencer, E. (1967). *"A Method of Analysis of Embankments Assuming Parallel Interslices Technique"*, Geotechnique, 17(1), pp. 11-26 .
9. Bell, J.M. (1968). *"Dimensionless Parameters for Homogeneous Earth Slopes"*, J. Soil Mech. Found. Eng. Div. ASCE, 95(SM6), pp.1253-1270.
10. Sarma, S.K. (1976). *"Stability Analysis of Embankments and Slopes"*, J. Geotech. Eng. Div. ASCE, 108(GT6), pp. 835-850.

- Ειδικά για την **σεισμική φόρτιση** θα πρέπει να γνωρίζετε ότι η αντιμετώπιση είναι ψευδο-στατική (γιατί όχι ψευδο-δυναμική;). Πιο συγκεκριμένα, στην επιτάχυνση της βαρύτητας g επαλληλίζεται μία οριζόντια (προς τα κατάντη του πρανούς) και μία κατακόρυφη (προς τα επάνω ή προς τα κάτω) επιτάχυνση λόγω σεισμού, οι οποίες προδιαγράφονται στον αντισεισμικό κανονισμό (π.χ. ΕΑΚ 2000 ή EC-8). Η σύνθετη αυτή (στατική και σεισμική) φόρτιση μετατρέπεται ακολούθως σε μία ισοδύναμη στατική φόρτιση όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας ***g*** έχει κατά τι μεταβληθεί ως προς το μέγεθος, σε:

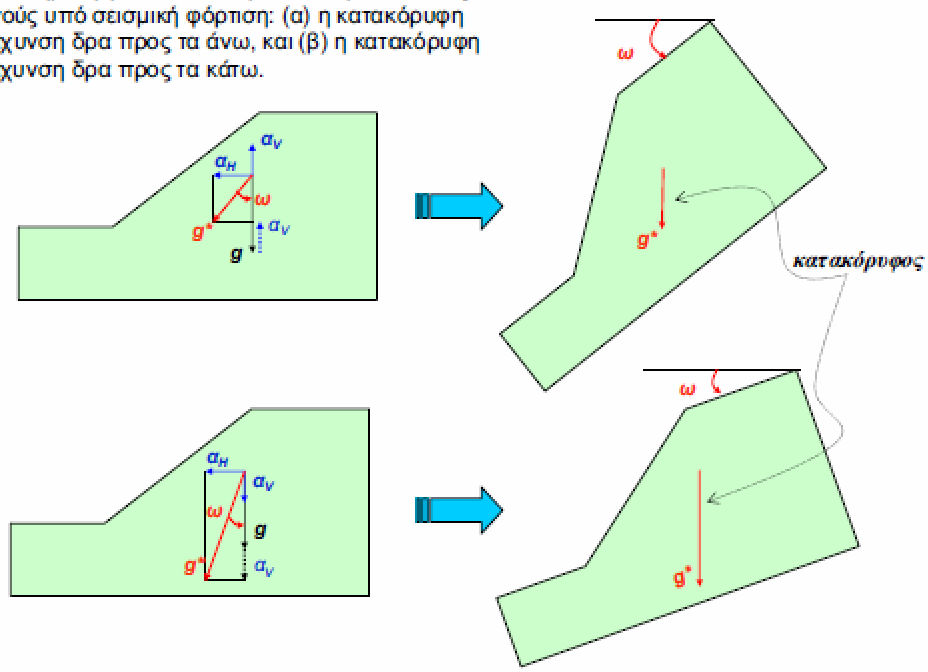
$$g^* = g \cdot \sqrt{\left(1 \pm \frac{a_V}{g}\right)^2 + \left(\frac{a_H}{g}\right)^2}$$

και έχει στραφεί, μαζί βέβαια με την γεωμετρία του πρανούς και την ελεύθερη επιφάνεια του υδροφόρου ορίζοντα, κατά γωνία:

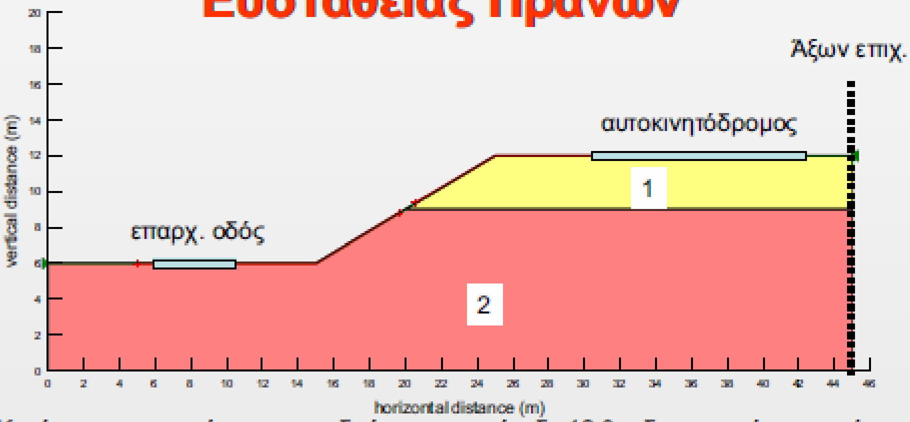
$$\omega = tan^{-1}\left[\frac{a_H}{g \pm a_V}\right]$$

Περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στο Σχήμα 3.10 (*και ακόμη περισσότερες στο μεταπτυχιακό μάθημα «Γεωτεχνική Σεισμική Μηχανική» του εαρινού εξαμήνου…*).

ΣΧΗΜΑ 3.10:
Απλοποιημένη ψευδο-στατική ανάλυση ευστάθειας πρανούς υπό σεισμική φόρτιση: (α) η κατακόρυφη επιτάχυνση δρα προς τα άνω, και (β) η κατακόρυφη επιτάχυνση δρα προς τα κάτω.



Υπολογιστική Άσκηση Ευστάθειας Πρανών



Κατά την κατασκευή αυτοκινητοδρόμου στο επίπεδο 12.0m δημιουργείται πρανές ύψους H=6m και κλίσης 31°. Το πρανές αποτελείται από δύο εδαφικές στρώσεις:

1. Πυκνή άμμος – χάλικες με γ=18kN/m^3, c=0, φ=40°
2. Άργιλος με γ=20kN/m^3, c=15kPa, φ=25°, S_u=30kPa

Κρίσιμη αστοχία για το πρανές είναι αυτή που επηρεάζει τον αυτοκινητόδρομο προς τα ανάντη και την επαρχιακή οδό προς τα κατάντη

Ερώτημα 1

Θεωρώντας τη Σ.Υ.Ο. στη στάθμη ±0.0m, να εκτιμηθεί ο ελάχιστος Συντελεστής Ασφαλείας FS του πρανούς έναντι ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ με τρεις από τις παρακάτω μεθόδους:

α) FELLENIUS (Ordinary Method of Slices)
β) SIMPLIFED BISHOP
γ) JANBU
δ) SPENCER
ε) MORGENSTERN-PRICE (για σταθερή διεύθυνση ενδο-λωριδιακών δυνάμεων),
στ) MORGENSTERN-PRICE (για διεύθυνση ενδο-λωριδιακών δυνάμεων που αυξο-μειώνεται επί τη βάση συνάρτησης μισού ημιτόνου)

ΚΑΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ Η ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Σημείωση: *Οι αναλύσεις μπορούν να γίνουν με το λογισμικό SLOPE/W (Student Edition) που διατίθεται δωρεάν στην ηλεκτρονική διεύθυνση, ως μέρος του GEO-Studio 2004 (Student Edition):*

http://www.geo-slope.com/products/student.aspx

Ερώτημα 2

Να εκτιμηθεί ο Συντελεστής Ασφαλείας FS του πρανούς έναντι ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ, με τις ίδιες μεθόδους, θεωρώντας ότι η ΣΥΟ δίνεται από τα παρακάτω υψόμετρα:

- 6.0m (για $x \le 15$m),
- 9.0m ($x = 20$m),
- 10.5m (για $x = 25$m),
- 12.0m (για $x \ge 35$m)

Οι υπολογισμοί να γίνουν α) για την περίπτωση βραχυχρόνιας, και β) για την περίπτωση μακροχρόνιας αστοχίας.

Ερώτημα 3

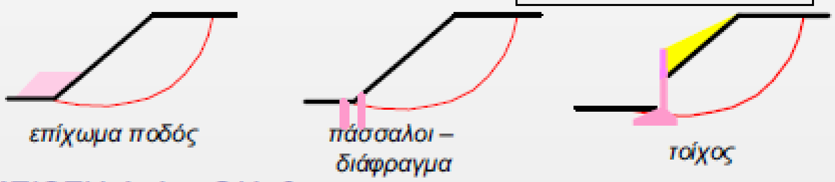
Για τη δυσμενέστερη περίπτωση των ερωτημάτων 1 και 2, να προταθούν ΜΕΤΡΑ σταθεροποίησης του πρανούς, έτσι ώστε ο Συντελεστής Ασφαλείας έναντι ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ να γίνει μεγαλύτερος από **1.5**.

Σημείωση: *Διαλέξτε τουλάχιστον 2 από τις συνήθεις μεθόδους σταθεροποίησης πρανών της επόμενης σελίδας.*

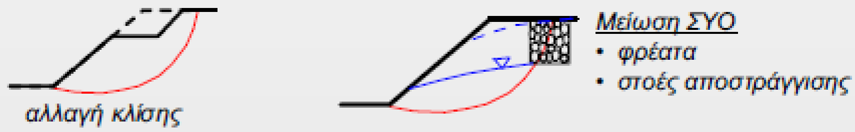
Μέθοδοι Σταθεροποίησης Πρανών

$$FS = \frac{\text{Αντίσταση}}{\text{Αίτιο Ολίσθ.}}$$

1. ΑΥΞΗΣΗ Αντίστασης



2. ΜΕΙΩΣΗ Αιτίου Ολίσθησης



3. “βελτίωση” ή “αντικατάσταση” εδάφους

οπλισμένη γη

Ερώτημα 4

Στην εκπαιδευτική έκδοση του λογισμικού που θα χρησιμοποιήσετε δεν δίνεται η δυνατότητα απ΄ευθείας επιβολής της σεισμικής φόρτισης. Θα μπορούσατε με κάποιο τρόπο να παρακάμψετε αυτή την αδυναμία και να επαναλάβετε το 1ο ερώτημα για

οριζόντια σεισμική επιτάχυνση:

$\alpha_H = 0.20g$ (προς τα «έξω»)

και κατακόρυφη:

$\alpha_V = \pm 0.10g$

4. Η Μέθοδος των *Πεπερασμένων Διαφορών*

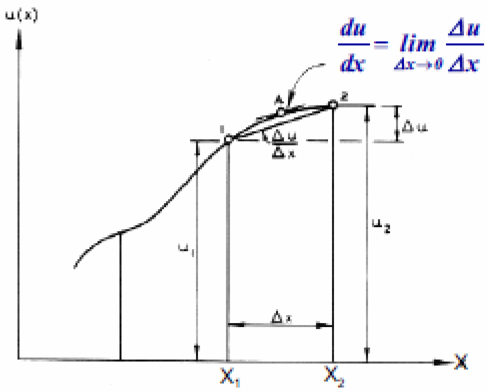
4.1 Βασικές Αρχές

Πριν από την εμφάνιση και την ευρύτατη διάδοση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (Π.Σ.), την οποία θα κουβεντιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, η ***Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών*** (Π.Δ.) ήταν πρακτικά η μόνη αριθμητική μέθοδος που εφαρμοζόταν για την επίλυση γεωτεχνικών προβλημάτων. Σήμερα, αν και η μέθοδος των Π.Σ. συνεχίζει να έχει το προβάδισμα, το ενδιαφέρον για την μέθοδο των Π.Δ. έχει αναζωπυρωθεί μια και αποδείχθηκε ότι παρουσιάζει ουσιαστικά πλεονεκτήματα για την προσομοίωση συγκεκριμένης ομάδας προβλημάτων, όπου η μεταβλητή του χρόνου αποτελεί βασικό παράγοντα της επίλυσης (π.χ. ροή και στερεοποίηση ή διάδοση σεισμικών κυμάτων).

Σύμφωνα με την συγκεκριμένη μέθοδο, η διακριτοποίηση έγκειται στην αντικατάσταση των παραγώγων στην διαφορική εξίσωση που διέπει ένα φυσικό πρόβλημα (π.χ. Πίνακας 2.1) με τον μέσο ρυθμό μεταβολής της άγνωστης συνάρτησης σε ένα μικρό αλλά πεπερασμένου μεγέθους βήμα των μεταβλητών.

Για παράδειγμα, η 1η παράγωγος της συνάρτησης *u(x)* σε ένα σημείο *A* εκφράζεται ως (Σχήμα 4.1):

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \qquad (4.1)$$



ΣΧΗΜΑ 4.1
Προσέγγιση της 1ης παραγώγου με την μέθοδο Π.Δ.

Η αντικατάσταση αυτή έχει ως αποτέλεσμα μία ***Διαφορική Εξίσωση*** να μετατρέπεται σε μία ***Εξίσωση (Πεπερασμένων) Διαφορών***, ή μία εξίσωση που περιλαμβάνει τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης σε δύο συγκεκριμένα σημεία, με συντεταγμένες X_1 και X_2 εν προκειμένω. Εφαρμόζοντας την ανωτέρω αντικατάσταση για πολλά διαδοχικά σημεία *A*, έχω καταφέρει έτσι να μετατρέψω την διαφορική μου εξίσωση σε ένα απλό σύστημα (γραμμικών ή μη γραμμικών) εξισώσεων με αγνώστους τα $u_i=u(X_i)$ η επίλυση του οποίου επιτυγχάνεται με μία από τις γνωστές αριθμητικές μεθόδους (π.χ. μέθοδος απαλοιφής Gauss).

4.2 Προσεγγιστικός Υπολογισμός Παραγώγων

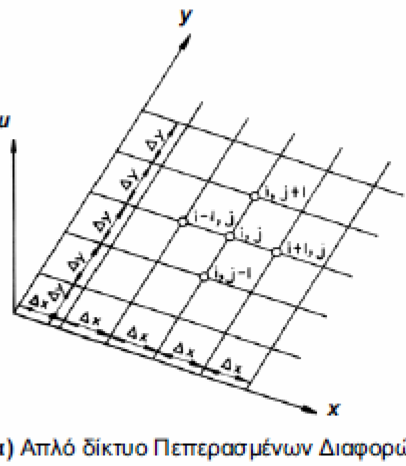
Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 2.1, οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τα γεωτεχνικά προβλήματα περιλαμβάνουν κατά κανόνα 1ες, 2ες, 3ες και 4ες παραγώγους. Έτσι, στις παραγράφους που ακολουθούν, παρατίθενται τυπικές σχέσεις από την θεωρία Π.Δ. για τις τέσσερις αυτές παραγώγους.

Εκ των προτέρων, επισημαίνεται ότι έχουν διατυπωθεί και εφαρμόζονται στην πράξη αρκετές διαφορετικές μεθοδολογίες προσεγγιστικού υπολογισμού των παραγώγων (π.χ. σειρές Taylor ή πολυωνυμική παρεμβολή). Από αυτές, θα ασχοληθούμε ενδεικτικά με την χρήση των αναπτυγμάτων σε σειρά Taylor.

Πρώτη Παράγωγος.- Με αναφορά στο Σχήμα 4.2, και μάλιστα στην κατά *X* τομή, οι τιμές της άγνωστης συνάρτησης *u* στα σημεία *(i-1, j)* και *(i+1,j)* προσεγγίζονται από τα παρακάτω αναπτύγματα σειρών Taylor:

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \qquad (4.2\alpha)$$

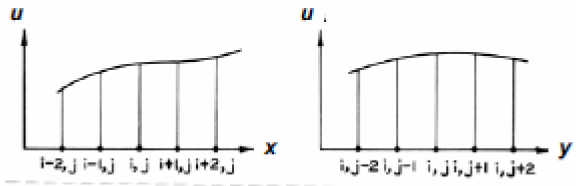
$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \qquad (4.2\beta)$$



ΣΧΗΜΑ 4.2

Απλή διακριτοποίηση συνεχούς μέσου σε 1- και 2- διαστάσεις για εφαρμογή της μεθόδου Π.Δ..

(α) Απλό δίκτυο Πεπερασμένων Διαφορών



(β) Τομή του δικτύου κατά την x και y διεύθυνση

Με ανακατάταξη των όρων και απλές πράξεις (πρόσθεση και αφαίρεση) μεταξύ των Εξισώσεων (4.2α) και (4.2β) μπορούμε να πάρουμε τελικώς τις παρακάτω εκφράσεις για την πρώτη παράγωγο της *u* κατά *x*:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (4.3\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (4.3\beta)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \qquad (4.3\gamma)$$

Οι οποίες είναι αντίστοιχα γνωστές ως *forward-*, *backward* και *central-difference* προσεγγιστικές μέθοδοι παραγώγισης.

Οι όροι ***O(Δx^n)*** στις ανωτέρω εκφράσεις αντιπροσωπεύουν το ***λάθος διακριτοποίησης*** που προκύπτει λόγω παράλειψης των όρων τάξης ***n+1*** και άνω (ως προς Δx) από τα αναπτύγματα των σειρώνTaylor. Το *λάθος διακριτοποίησης* είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το Δx^n, και επομένως μικραίνει όσο πιο μικρό είναι το διάστημα Δx (πιο λεπτομερής διακριτοποίηση).

ΕΡΩΤΗΣΗ: *Ποια είναι η αναλυτική έκφραση του λάθους διακριτοποίησης στις εξισώσεις 4.3 (α), (β) και (γ);*

Ανώτερης Τάξης Παράγωγοι.- Μετά από πρόσθεση των Εξισώσεων (4.2α) και (4.2β) παίρνουμε επιπλέον την έκφραση για την δεύτερη παράγωγο της *u* κατά *x*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \qquad (4.4)$$

Με παρόμοιο τρόπο (*πως δηλαδή;*) μπορούμε να πάρουμε τις προσεγγιστικές εκφράσεις για την τρίτη και την τέταρτη παράγωγο της *u* κατά *x*:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{-u_{i-2,j} + 2u_{i-1,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2(\Delta x)^3} + O[(\Delta x)^2] \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{(\Delta x)^4} + O[(\Delta x)^2] \qquad (4.6)$$

Παρατηρείστε ότι όσο μεγαλύτερης τάξης γίνεται η παράγωγος τόσο περισσότερα γειτονικά σημεία απαιτούνται για τον ορισμό τους με την μέθοδο των Π.Δ.

4.3 Παράδειγμα Εφαρμογής

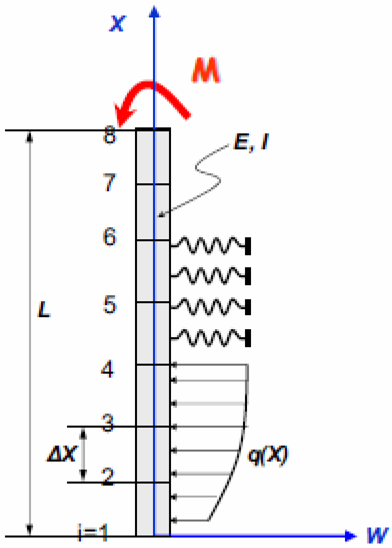
Την σύντομη αυτή παρουσίαση της μεθόδου Π.Δ. θα κλείσουμε με μία πρακτική εφαρμογή: Τον υπολογισμό των οριζόντιων μετατοπίσεων πασσάλου λόγω επιβολής καμπτικής ροπής στην κεφαλή (Σχήμα 4.3).

Απλοποιητικά θα θεωρηθεί ότι ο πάσσαλος έχει σταθερή διατομή και ότι το έδαφος είναι ομοιόμορφο. Η αντίδραση q(x) που ασκείται στον πάσσαλο από το έδαφος είναι ανάλογη προς την μετατόπιση του πασσάλου και επομένως μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$q(x) = -k\,W(x) \qquad (4.7)$$

όπου W(x) είναι η οριζόντια μετατόπιση του πασσάλου. Τα μεγέθη που υπεισέρχονται στη εξίσωση 4.7 έχουν τις ακόλουθες μονάδες (στο διεθνές σύστημα SI):

$$\begin{array}{lcl} W(x) & \rightarrow & m \\ q(x) & \rightarrow & kN/m \\ k & \rightarrow & kN/m^2 \end{array}$$



ΣΧΗΜΑ 4.3
Αριθμητική ανάλυση της καμπτικής παραμόρφωσης πασσάλου με την μέθοδο Π.Δ.

Διαφορική Εξίσωση. - Ως γνωστό (γιατί;) η διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα είναι:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2W}{dx^2}\right) = q(x) \qquad (4.8)$$

ή, σε συνδυασμό με την Εξ. 4.7,

$$\frac{d^4W}{dx^4} + \frac{k}{EI}W(x) = 0 \qquad (4.9)$$

όπου EI = η καμπτική δυσκαμψία του πασσάλου
W = το βέλος κάμψης (οριζόντια μετατόπιση)
$q(x)$ = η αντίδραση του εδάφους

Επισημαίνεται ότι η ίδια ουσιαστικά εξίσωση διέπει τόσο την οριζόντια φόρτιση στην κεφαλή του πασσάλου, όσο και το πρόβλημα της (πεδιλο-) δοκού επί ελαστικού εδάφους.

Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε για την προσεγγιστική έκφραση των παραγώγων με την μέθοδο Π.Δ. (Εξ. 4.3 έως 4.6) , η διαφορική εξίσωση 4.9 για τον κόμβο ***i*** του πασσάλου γράφεται :

$$\frac{W_{i-2} - 4W_{i-1} + 6W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2}}{(\Delta x)^4} + \frac{k}{EI}W_i = 0$$

ή, τελικώς

$$W_{i-2} - 4W_{i-1} + (6 + \frac{k\Delta x^4}{EI})W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2} = 0 \qquad (4.10i)$$

Συνοριακές Συνθήκες.- Η Εξ. 4.10i εφαρμόζεται για τους οκτώ (8) κόμβους στους οποίους αποφασίσαμε να διακριτοποιήσουμε τον πάσσαλο (Σχήμα 4.3), ήτοι για ***i=1*** έως ***8***. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ένα σύστημα οκτώ εξισώσεων με δώδεκα αγνώστους, τις δώδεκα μετατοπίσεις W_{-1} έως W_{10}.

Από αυτές μόνον οι οκτώ (W_1 έως W_8) έχουν φυσικό νόημα, ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις (W_{-1}, W_0 *και* W_9, W_{10}) χρειάζονται μόνον για τον ορισμό της τετάρτης παραγώγου στη βάση (*i=1*) και στην κορυφή του πασσάλου (*i=8*). Όπως και να έχει το πράγμα όμως, χρειαζόμαστε ακόμη τέσσερις εξισώσεις γιατί αλλιώς το σύστημα μας είναι αόριστο, ικανοποιείται δηλαδή όχι από μία αλλά από πολλές ομάδες μετατοπίσεων. Οι πρόσθετες αυτές εξισώσεις προέρχονται από τις ***συνοριακές συνθήκες*** του προβλήματος, και συγκεκριμένα από το γεγονός ότι:

(α) η αιχμή του πασσάλου είναι ελεύθερη από εξωτερικές δυνάμεις (ροπές και τέμνουσες εν προκειμένω) οπότε:

$$M(x=0)=0 \qquad ή \qquad \left(EI\frac{d^2W}{dx^2}\right)_{x=0}=0 \qquad (4.11α)$$

και

$$Q(x=0)=0 \qquad ή \qquad \left(EI\frac{d^3W}{dx^3}\right)_{x=0}=0 \qquad (4.12α)$$

(β) στην κορυφή του πασσάλου επιβάλλεται γνωστή ροπή M_o και μηδενική τέμνουσα, ήτοι:

$$M(x=L)=M_o \qquad ή \qquad \left(EI\frac{d^2W}{dx^2}\right)_{x=L}=-M_o \qquad (4.13α)$$

και

$$Q(x=L)=0 \qquad ή \qquad \left(EI\frac{d^3W}{dx^3}\right)_{x=L}=0 \qquad (4.14α)$$

Υπό μορφή Πεπερασμένων Διαφορών, οι εξισώσεις 4.11α έως 4.13α γράφονται ως ακολούθως:

$$W_0 - 2W_1 + W_2 = 0 \qquad (4.11β)$$

$$-W_{-1} + 2W_0 - 2W_2 + W_3 = 0 \qquad (4.12β)$$

$$W_7 - 2W_8 + W_9 = -\frac{M_o\Delta x^2}{EI} \qquad (4.13β)$$

$$-W_6 + 2W_7 - 2W_9 + W_{10} = 0 \qquad (4.14β)$$

Έτσι, το σύστημα των εξισώσεων που θα πρέπει τελικά να επιλυθεί αποτελείται από τις εξισώσεις 4.10i (i=1 έως 8) και 4.11β έως 4.13β. Με την βοήθεια μητρώων, το σύστημα αυτό των εξισώσεων γράφεται ως ακολούθως:

Έτσι, το σύστημα των εξισώσεων που θα πρέπει τελικά να επιλυθεί αποτελείται από τις εξισώσεις 4.10i (i=1 έως 8) και 4.11β έως 4.13β. Με την βοήθεια μητρώων, το σύστημα αυτό των εξισώσεων γράφεται ως ακολούθως:

$$\underline{K}\,\underline{W} = \underline{F}$$

όπου:

$$\underline{K}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -4 & 6+\frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -4 & 6+\frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -4 & 6+\frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6+\frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6+\frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6+\frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6+\frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6+\frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1
\end{bmatrix}$$

$$-\frac{M_o\Delta x^2}{EI}$$

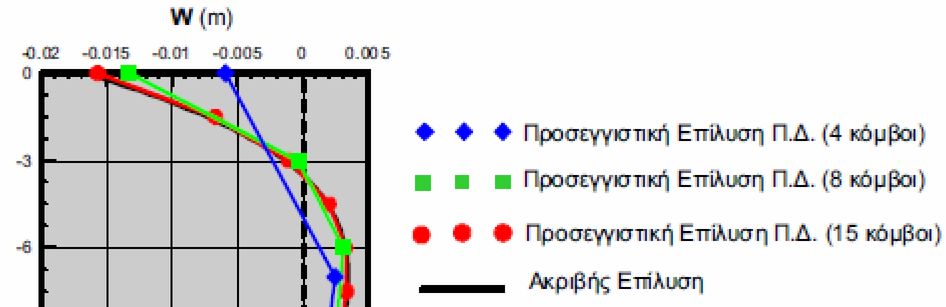
$$\underline{W}=\{W_{-1}\quad W_0\quad W_1\quad W_2\quad W_3\quad W_4\quad W_5\quad W_6\quad W_7\quad W_8\quad W_9\quad W_{10}\}^T$$

$$\underline{F}=\left\{0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad -\frac{M_o\Delta x^2}{EI}\quad 0\right\}^T$$

Στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα επίλυσης του παραπάνω συστήματος εξισώσεων για ένα πάσσαλο από οπλισμένο σκυρόδεμα με μήκος ***L=21m***, διάμετρο ***D=0.80m***, έδαφος με ***k=6 MN/m/m*** και ροπή ***Mo=1 MN m***. Παράλληλα, παρουσιάζονται αποτελέσματα επίλυσης για 4 και 15 κόμβους διακριτοποίησης καθώς και η «ακριβής» λύση η οποία (για την συγκεκριμένη απλή περίπτωση) ελήφθη από αναλυτική επίλυση.

Τα συμπεράσματα δικά σας….

Άλλα παρόμοια προβλήματα με τα οποία μπορείτε να εξασκηθείτε είναι:
- πάσσαλος με οριζόντια δύναμη και ελεύθερη στροφή στην κεφαλή,
- πάσσαλος με οριζόντια δύναμη και πάκτωση στην κεφαλή,
- πεδιλοδοκός με συγκεντρωμένα κατακόρυφα φορτία λόγω της ανωδομής,
- κλπ..



ΣΧΗΜΑ 4.4
Σύγκριση του βέλους κάμψης πασσάλου όπως προέκυψε από την αριθμητική ανάλυση με την μέθοδο Π.Δ., για διαφορετικές πυκνότητες διακριτοποίησης, και από την αναλυτική (ακριβή) επίλυση.

5. Η Μέθοδος των *Πεπερασμένων Στοιχείων*

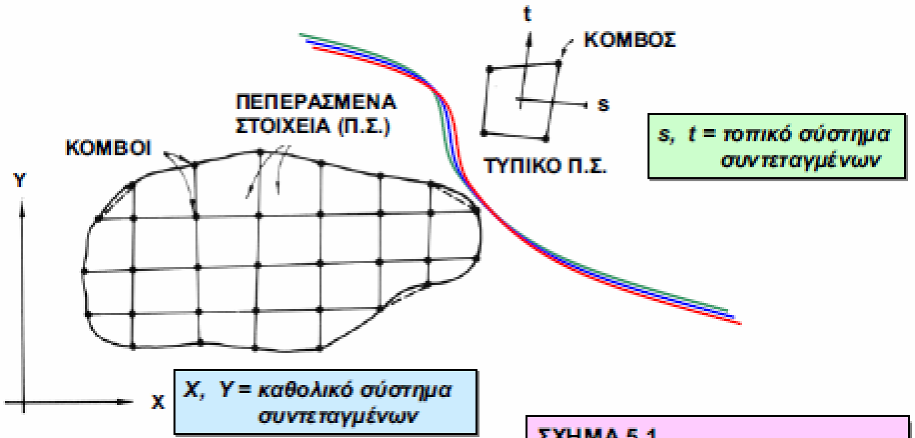
Σε αντίθεση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών, η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων βασίζεται σε ένα μαθηματικό υπόβαθρο το οποίο δεν ήταν απόλυτα ώριμο κατά την εμφάνιση της μεθόδου, αλλά αναπτύχθηκε παράλληλα με την μέθοδο αυτή καθ' εαυτή. Θα μπορούσαμε μάλιστα να πούμε, ότι ακόμη και σήμερα αυτή η παράλληλη εξέλιξη συνεχίζεται με αμείωτη ένταση και ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα περιοριστούμε βέβαια στα βασικά στοιχεία της μεθόδου τα οποία έχουν γίνει ευρέως αποδεκτά και αποτελούν κοινό τόπο για όλα τα εμπορικά τουλάχιστον λογισμικά εφαρμογής της. Για καθαρά εκπαιδευτικούς σκοπούς, η παρουσίαση της μεθόδου θα γίνει βήμα-βήμα, με την σειρά περίπου που ακολουθείται κατά την αριθμητική επίλυση των πραγματικών εφαρμογών:

- **ΒΗΜΑ 1:** Διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου σε Πεπερασμένα Στοιχεία
- **ΒΗΜΑ 2:** Επιλογή Συναρτήσεων Παρεμβολής
- **ΒΗΜΑ 3**: Κατάστρωση εξισώσεων σε επίπεδο (Πεπερασμένου) Στοιχείου
- **ΒΗΜΑ 4:** Κατάστρωση εξισώσεων σε καθολικό (global) επίπεδο.
- **ΒΗΜΑ 5:** Επίλυση - Υπολογισμός κύριων (βασικών) και δευτερογενών (παραγώγων) αποτελεσμάτων

ΒΗΜΑ 1: Διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου σε Πεπερασμένα Στοιχεία

Το πρώτο βήμα στην εφαρμογή της μεθόδου Π.Σ. είναι η διαίρεση του συνεχούς μέσου το οποίο μας ενδιαφέρει σε ένα ισοδύναμο σύστημα ισοδύναμων στοιχείων από το ίδιο συνεχές μέσον, τα ***Πεπερασμένα Στοιχεία*** (π.χ. Σχήμα 5.1), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σε συγκεκριμένα μόνον σημεία, τους ***Κόμβους***.



ΣΧΗΜΑ 5.1
Διακριτοποίηση συνεχούς μέσου σε Πεπερασμένα Στοιχεία (Π.Σ.)

Όπως θα δούμε παρακάτω, η άγνωστη συνάρτηση την οποία επιζητούμε (π.χ. οι οριζόντιες μετατοπίσεις του πασσάλου στο προηγούμενο παράδειγμα) ορίζεται ανεξάρτητα μέσα σε κάθε Π. Σ., συναρτήσει των τιμών που παίρνει σε κάθε κόμβο. Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι, και σε αυτή την περίπτωση, η εξεύρεση μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του προβλήματος ανάγετε στην εξεύρεση των πεπερασμένων σε πλήθος και συγκεκριμένων τιμών που παίρνει η συνάρτηση αυτή στους κόμβους των Π.Σ.. Η επίλυση δηλαδή της διαφορικής εξίσωσης ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων πλήθους ίσου προς αυτό των άγνωστων κομβικών τιμών.

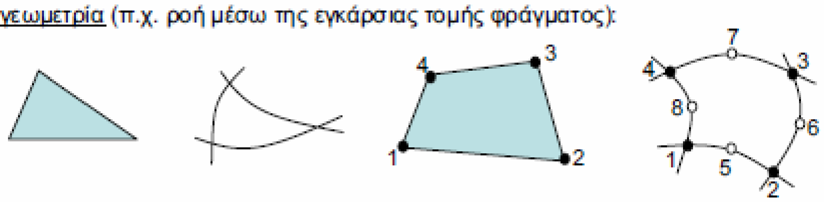
Οι τιμές της συνάρτησης στους κόμβους (π.χ. μετατοπίσεις σε προβλήματα ισορροπίας ή υδραυλικό ύψος σε προβλήματα ροής) αποτελούν τις ***κύριες αγνώστους***, ενώ άλλα μεγέθη που υπολογίζονται με βάση αυτές (π.χ. τάσεις και παραμορφώσεις σε προβλήματα ισορροπίας ή παροχές σε προβλήματα ροής) αποτελούν τις ***δευτερεύουσες αγνώστους***.

Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου Π.Σ. είναι ότι το κάθε στοιχείο αναλύεται πρώτα ξεχωριστά, στο ***τοπικό σύστημα συντεταγμένων*** (t-s στο Σχήμα 5.1), και ακολούθως σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα, στο ***καθολικό σύστημα*** συντεταγμένων (x-y στο Σχήμα 5.1). Η συνθήκη η οποία επιτρέπει την μετάβαση από το τοπικό στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων είναι ότι οι τιμές των κύριων αγνώστων σε ένα τυχαίο κόμβο (i στο Σχήμα 5.1) που προκύπτουν από την τοπική ανάλυση όλων των στοιχείων που συντρέχουν σε αυτόν (I, J, K και L στο Σχήμα 5.1) θα πρέπει να είναι ίσες.

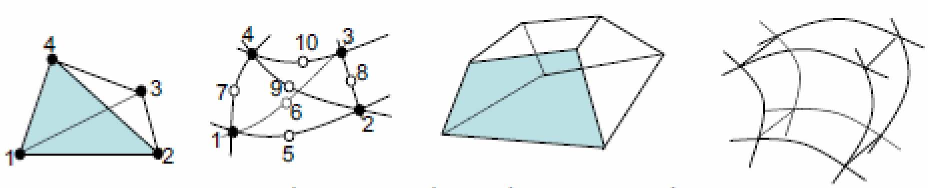
Η γεωμετρία των Π.Σ. είναι φυσικά ανάλογη προς την γεωμετρία του συνεχούς μέσου που θα αναλυθεί:

<u>1-Δ γεωμετρία</u> (π.χ. ο πάσσαλος σε «ελατηριωτό» έδαφος που είδαμε πριν):

<u>2-Δ γεωμετρία</u> (π.χ. ροή μέσω της εγκάρσιας τομής φράγματος):

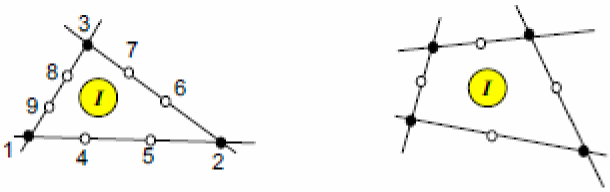


<u>3-Δ γεωμετρία</u> (π.χ. πάσσαλος σε συνεχές έδαφος υπό οριζόντια φόρτιση)

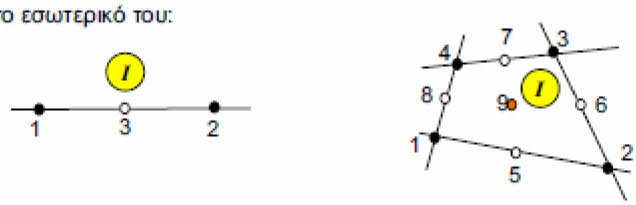


Εάν δεν συντρέχει ιδιαίτερος λόγος, η διακριτοποίηση γίνεται με Π.Σ. συνηθισμένου - κανονικού σχήματος (ευθύγραμμα τμήματα, τρίγωνα, ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κλπ.). Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε πρακτικά σχήμα, ακόμη και με καμπύλες πλευρές, χάριν της τεχνικής των ***«ισοπαραμετρικών» Π.Σ.*** που είναι σήμερα διαθέσιμη σε όλα τα εμπορικά πακέτα λογισμικών Π.Σ..

Ο αριθμός των κόμβων που θα δεχθούμε σε ένα Π.Σ. δεν είναι συγκεκριμένος, μια και οι κόμβοι δεν τοποθετούνται μόνον στις κορυφές (ή τις άκρες) ενός Π.Σ., αλλά και επί των πλευρών του:



ή ακόμη και στο εσωτερικό του:

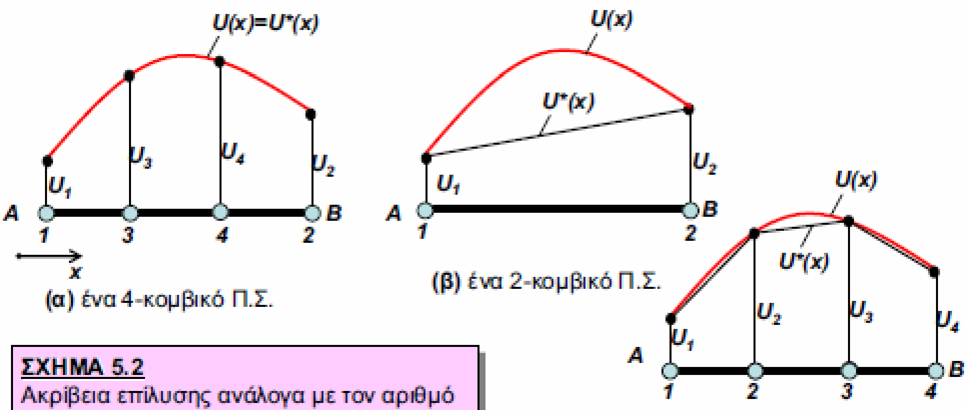


Η αύξηση του αριθμού των κόμβων σε ένα Π.Σ. οδηγεί συνήθως σε ακριβέστερες λύσεις, και μειώνει το συνολικό πλήθος των απαιτούμενων Π.Σ..

Για να καταλάβουμε το γιατί, ας θεωρήσουμε το Π.Σ. ΑΒ ενός πασσάλου που υπόκειται σε αξονική φόρτιση, καθώς και μία «άγνωστη» συνάρτηση αξονικών μετατοπίσεων 3-ου βαθμού:

$$U=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$$

όπου x είναι ο διαμήκης άξονας του Π.Σ..



(α) ένα 4-κομβικό Π.Σ.

(β) ένα 2-κομβικό Π.Σ.

(γ) τρία 2-κομβικά Π.Σ.

ΣΧΗΜΑ 5.2
Ακρίβεια επίλυσης ανάλογα με τον αριθμό των Π.Σ. και των κόμβων ανά Π.Σ.

Για τον ακριβή υπολογισμό της U χρειαζόμαστε τέσσερις κόμβους (i=1,2,3, 4), δύο στις άκρες του στοιχείου και δύο στο εσωτερικό του, έτσι ώστε οι τιμές των σταθερών (α, β, γ και δ) της άγνωστης συνάρτησης να μπορούν να υπολογισθούν βάσει των τιμών της U στους κόμβους αυτούς (U_1. U_2, U_3 και U_4).

Εάν αντί για τέσσερις κόμβους χρησιμοποιήσουμε μόνον δύο (i=1 & 2 στις άκρες του Π.Σ.), τότε η επίλυση θα μας δώσει αναγκαστικά μία γραμμική συνάρτηση:

$$\mathbf{U^* = \alpha^* + \beta^* x}$$

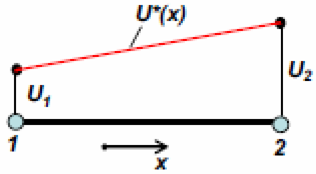
η οποία θα συμφωνεί με την πραγματική μόνον στα άκρα A και B.

Για να προσεγγίσουμε την ακρίβεια ενός 4-κομβικού Π.Σ., θα μπορούσαμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερο αριθμό (τριών ή περισσότερων) 2-κομβικών στοιχείων, γεγονός το οποίο όμως αυξάνει τελικώς τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο.

ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Συναρτήσεων Παρεμβολής

Στο βήμα αυτό επιλέγουμε εκ των προτέρων την γενική μορφή της λύσης (π.χ. μετατόπισης ή υδραυλικού ύψους) εντός κάθε Π.Σ. και παράλληλα, για τους λόγους που εξηγήσαμε λίγο πριν, τον αριθμό των κόμβων με τους οποίους θα ενώσουμε κάθε Π.Σ. με τα διπλανά του.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν την πιο απλή μορφή Π.Σ., το ευθύγραμμο με δύο κόμβους (έναν σε κάθε άκρη του) και ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο. Στο στοιχείο αυτό, μπορούμε να υποθέσουμε γραμμική μεταβολή της άγνωστης ποσότητας



$$U^*(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = \{1 \quad x\}\begin{Bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{Bmatrix} \qquad (5.1)$$

μια και έχουμε μόνον δύο μετατοπίσεις, την U_1 και την U_2 για να ορίσουμε τους συντελεστές α_1 και α_2.

Εάν εφαρμόσουμε λοιπόν την Εξ. 5.1 στους κόμβους 1 και 2, παίρνουμε:

$$U_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1$$
$$U_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2$$

ή, υπό μορφή μητρώων:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.2)$$

Επίλυση της εξ. 5.2 ως προς α_1 και α_2 δίνει:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.3)$$

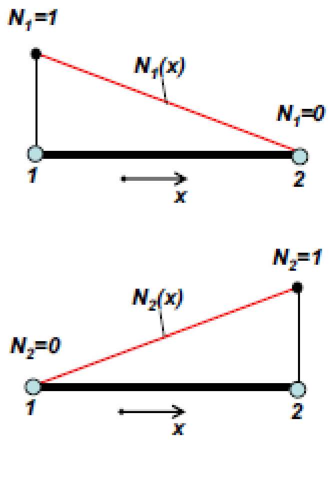
Συνδυασμός των εξ. 5.1 και 5.3 δίνει τελικώς:

$$U^*(x) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} \{1 \quad x\} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

ή

$$U^*(x) = \Bigg\{ \underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}}_{N_1} \quad \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{N_2} \Bigg\} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.4)$$

Οι λόγοι N_1 και N_2 καλούνται ***Συναρτήσεις Σχήματος*** *(shape functions)* και βοηθούν ιδιαιτέρως στην περαιτέρω διατύπωση των εξισώσεων. Για την απλή περίπτωση Π.Σ. που θεωρήσαμε, οι N_1 και N_2 είναι γραμμικές συναρτήσεις που μεταβάλλονται μεταξύ 0 και 1:



ΣΧΗΜΑ 5.3
Συναρτήσεις Σχήματος για ευθύγραμμο Π.Σ. με δύο κόμβους και ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο.

ΑΣΚΗΣΗ για το σπίτι:

(α) Μπορείτε να ορίσετε τις *Συναρτήσεις Σχήματος* για ένα ευθύγραμμο Π.Σ. με τρεις κόμβους (δύο στα άκρα και έναν στην μέση), και ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία;

(β) Είναι αλήθεια ότι η χρήση των *Συναρτήσεων Σχήματος* βοηθά στην ολοκλήρωση και στην παραγώγηση της άγνωστης συνάρτησης U(x); Γιατί;

Στην ***γενική περίπτωση*** η άγνωστη συνάρτηση U(x) αναλύεται σε συνιστώσες, αποτελεί δηλαδή διανυσματικό μέγεθος, και επομένως η Εξ. 5.4 γράφεται:

$$\{U\} = [\,N\,]\{q\} \qquad (5.5)$$

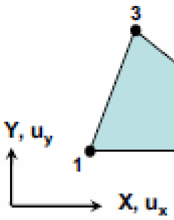
Οι διαστάσεις (σειρές x στήλες) των μητρώων στην ανωτέρω εξίσωση είναι:

U ⟶ [αριθμός αγνώστων ανά κόμβο] **x** [1]

N ⟶ [αρ. αγνώστων ανά κόμβο] **x** [(αρ. αγνώστων ανά κόμβο) x (αρ. κόμβων)]

q ⟶ [(αρ. αγνώστων ανά κόμβο) x (αρ. κόμβων)] **x** [1]

Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα επίπεδης έντασης (π.χ. καθίζηση πεδιλοδοκού) και για 3-κομβικά Π.Σ., η Εξ. 5.5 γράφεται αναλυτικά . . . . :



$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{2x} & 0 & N_{3x} & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & N_{2y} & 0 & N_{3y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{Bmatrix} \qquad (5.6)$$

Τι είναι τα ***Ισο-παραμετρικά Πεπερασμένα Στοιχεία;***

Είναι Π.Σ. στα οποία η γεωμετρία του στοιχείου εκφράζεται με την βοήθεια των ίδιων *Συναρτήσεων Σχήματος* που χρησιμοποιούνται για τον (κατ' εκτίμηση) ορισμό της άγνωστης συνάρτησης U(x). Έτσι, στην περίπτωση του προηγουμένου παραδείγματος, οι συντεταγμένες x και y κάθε σημείου του 3-γωνικού και 3-κομβικού Π.Σ. γράφονται:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{2x} & 0 & N_{3x} & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & N_{2y} & 0 & N_{3y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.7)$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ξεφύγουμε από τα απλά σχήματα των Π.Σ.(τρίγωνα, κύβους, κλπ.) και να υιοθετήσουμε Π.Σ. με καμπύλες πλευρές και κυρτές έδρες για καλύτερη προσομοίωση της γεωμετρίας του προβλήματος (π.χ. 3-Δ προσομοίωση σήραγγας). Τότε όμως δεν αρκούν μόνον οι κόμβοι στις κορυφές αλλά απαιτούνται και ενδιάμεσοι κόμβοι στις πλευρές και τις έδρες του Π.Σ..

ΒΗΜΑ 3: Κατάστρωση εξισώσεων σε επίπεδο (Πεπερασμένου) Στοιχείου

Η μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων στο επίπεδο του κάθε Π.Σ. είναι ίσως το πιο βασικό βήμα της επίλυσης με την μέθοδο των Π.Σ.. Οι μέθοδοι που είναι διαθέσιμες για τον σκοπό αυτό είναι αρκετές, αυτές όμως που έχουν επικρατήσει σήμερα ανήκουν σε δύο βασικές ομάδες: η μία βασίζεται στην ***θεωρία των μεταβολών*** (theory of variations) και η άλλη στην θεωρία των ***σταθμικών (ή σταθμισμένων) υπολοίπων*** (theory of weighted residuals).

Ανεξαρτήτως μεθόδου διατύπωσης των εξισώσεων που διέπουν την συμπεριφορά ενός Π.Σ. m, καταλήγουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων με n αγνώστους, όπου n=(αρ. κόμβων του Π.Σ.)x(αρ. αγνώστων ανά κόμβο):

$$\left[K\right]_m \left\{q\right\}_m = \left\{F\right\}_m$$

Στην ανωτέρω σχέση,

- ***[K]$_m$*** είναι το μητρώο που περιλαμβάνει πληροφορίες για τις γεωμετρικές και τις μηχανικές ιδιότητες του Π.Σ. (μητρώο ακαμψίας σε προβλήματα φορτίου-μετατόπισης ή μητρώο διαπερατότητας σε προβλήματα ροής),

- ***[q]$_m$*** είναι το διάνυσμα των τιμών της άγνωστης συνάρτησης (μετατοπίσεις σε προβλήματα φορτίου-μετατόπισης ή διάνυσμα υδραυλικού ύψους σε προβλήματα ροής) και

- ***[F]$_m$*** είναι το διάνυσμα «φόρτισης» των κόμβων (δυνάμεις σε προβλήματα φορτίου-μετατόπισης ή διάνυσμα παροχών σε προβλήματα ροής)

- $[F]_m$ είναι το διάνυσμα «φόρτισης» των κόμβων (δυνάμεις σε προβλήματα φορτίου-μετατόπισης ή διάνυσμα παροχών σε προβλήματα ροής)

Μέθοδος Σταθμισμένων Υπολοίπων Galerkin.- Η λεπτομερής παρουσίαση των διάφορων μεθόδων διατύπωσης των εξισώσεων σε επίπεδο Π.Σ. εκφεύγει κατά πολύ των σκοπών της παρουσίασης. Συνοπτικά μόνον θα παρουσιασθεί η Galerkin η οποία είναι από τις δημοφιλέστερες και ευρύτερα χρησιμοποιούμενες σήμερα.

Ας πάρουμε πάλι τον γνωστό μας οριζόντια φορτιζόμενο πάσσαλο σε ελατηριωτό έδαφος, του Σχήματος 4.3. Η ακριβής λύση για τις οριζόντιες μετατοπίσεις του πασσάλου *U* ικανοποιεί προφανώς την διαφορική εξίσωση του προβλήματος:

$$\frac{d^4U}{dx^4}+\frac{k}{EI}U=0$$

Η οποιαδήποτε προσεγγιστική λύση *U** όμως δεν την ικανοποιεί, αλλά αφήνει ένα υπόλοιπο *R*, ισχύει δηλαδή:

$$\frac{d^4U^*}{dx^4}+\frac{k}{EI}U^*=R \qquad (5.8)$$

Η φιλοσοφία των διαφόρων μεθόδων *Σταθμισμένων Υπολοίπων* είναι να βρεθεί η προσεγγιστική εκείνη λύση η οποία ελαχιστοποιεί το υπόλοιπο R σε κάθε σημείο του Π.Σ.. Σύμφωνα με την μέθοδο Galerkin, η συνθήκη αυτή εξασφαλίζεται όταν ισχύει:

$$\int_D R\cdot N_j\cdot dD=0 \qquad j=1,2,3....r \qquad (5.9)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, το πεδίο D αντιστοιχεί στον χώρο που καταλαμβάνει το Π.Σ., N_j είναι οι γνωστές μας πλέον Συναρτήσεις Σχήματος και r είναι ο συνολικός αριθμός των *«βαθμών ελευθερίας»* του Π.Σ. [*r = (αριθμ. κόμβων) x (αριθμ. βαθμών ελευθ. ανά κόμβο)*].

Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιήσουμε 2-κομβικά στοιχεία πασσάλου, με δύο βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (μία οριζόντια μετατόπιση και μία στροφή) θα είναι *r=2 x 2=4*.

Αντικαθιστώντας την εξ. 5.8 στις εξ. 5.9, προκύπτει ότι για κάθε Π.Σ. του πασσάλου ισχύει:

$$\int_D\left[\frac{d^4U^*}{dx^4}+\frac{k}{EI}U^*\right]\cdot N_j\cdot dD=0 \qquad j=1,2,3....r \qquad (5.10)$$

Λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι $U^*=\sum_{j=1}^{r}N_jq_j$ η εξ. 5.10 για ένα Π.Σ. *m* του πασσάλου γράφεται τελικώς :

$$\sum_{i=1}^{r}\left\{\int_{x1}^{x2}\left[\frac{d^4N_i}{dx^4}+\frac{k}{EI}N_i\right]\cdot N_j\cdot dx\right\}q_i=0 \qquad j=1,2,3....r \qquad (5.11)$$

ή, υπό μορφή μητρώου:

$$\begin{bmatrix} k^m_{1,1} & k^m_{1,2} & k^m_{1,3} & k^m_{1,4} \\ k^m_{2,1} & k^m_{2,2} & k^m_{2,3} & k^m_{2,4} \\ k^m_{3,1} & k^m_{3,2} & k^m_{3,3} & k^m_{3,4} \\ k^m_{4,1} & k^m_{4,2} & k^m_{4,3} & k^m_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^m_1 \\ F^m_2 \\ F^m_3 \\ F^m_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.11)$$

όπου:

$$k_{j\,i} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^4 N_i}{dx^4} + \frac{k}{EI} N_i \right] \cdot N_j \cdot dx \qquad (5.12)$$

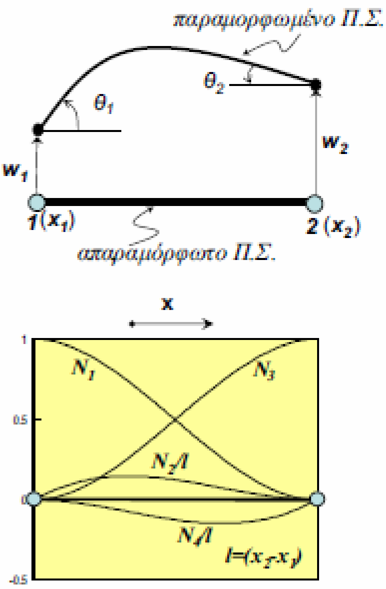
και (βλ. Σχήμα 5.4):

$q_1 = w_1$ μετατόπιση στον κόμβο 1 **$F_1 = P_1$** εξωτερική (οριζόντια) δύναμη στον κόμβο 1

$q_2 = \theta_1$ στροφή στον κόμβο 1 **$F_2 = M_1$** εξωτερική ροπή στον κόμβο 1

$q_3 = w_2$ μετατόπιση στον κόμβο 2 **$F_3 = P_2$** εξωτερική (οριζόντια) δύναμη στον κόμβο 2

$q_4 = \theta_2$ στροφή στον κόμβο 2 **$F_4 = M_2$** εξωτερική (οριζόντια) δύναμη στον κόμβο 2



$$U^* = \sum_{j=1}^{4} q_j N_j$$

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 + 2\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^3$$

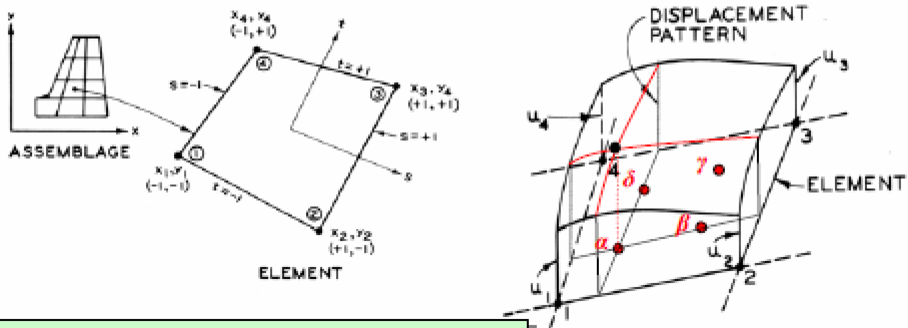
$$N_2(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - 1\right)^2$$

$$N_3(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 \left[3 - 2\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\right]$$

$$N_4(x) = \frac{(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)}\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - 1\right)$$

ΣΧΗΜΑ 5.4
Βαθμοί ελευθερίας και Συναρτήσεις Σχήματος για Π.Σ. οριζόντια φορτιζόμενου πασσάλου σε ελατηριωτό έδαφος

Η ολοκλήρωση στην εξ. 5.12 γίνεται βέβαια αριθμητικά, με αναφορά στις τιμές που παίρνει η αντίστοιχη συνάρτηση σε συγκεκριμένα σημεία εντός του Π.Σ. ($x_1<x<x_2$), τα επωνομαζόμενα **σημεία ολοκλήρωσης** (integration points):



π.χ.

$$\iint_{A1234} U(x,y)dxdy = \sum U_k A_k, \qquad k=\alpha,\beta,\gamma,\delta$$

ή

$$\iint_{A1234} U(x,y)dxdy = U_\alpha A_\alpha + U_\beta A_\beta + U_\gamma A_\gamma + U_\delta A_\delta$$

όπου A_α, A_β, A_γ και A_δ είναι τα εμβαδά του Π.Σ. που επηρεάζει το κάθε ένα από τα σημεία ολοκλήρωσης ($A_\alpha+A_\beta+A_\gamma+A_\delta = A_{1234}$).

ΣΧΗΜΑ 5.5
Βασικά στοιχεία σχετικά με την αριθμητική ολοκλήρωση επί ενός Π.Σ..

ΒΗΜΑ 4: Κατάστρωση εξισώσεων σε καθολικό (global) επίπεδο.

Η κατάστρωση του συστήματος των εξισώσεων σε καθολικό επίπεδο

$$[K]\ \{q\}\ =\{F\} \tag{5.13}$$

αποτελεί μία .. μηχανική διαδικασία η οποία περιγράφεται εποπτικά στα Σχήματα 5.6 και 5.7, για την περίπτωση ενός οριζόντια φορτιζόμενου πασσάλου σε ελατηριωτό έδαφος. Κατ' ουσίαν, τα συστήματα εξισώσεων σε επίπεδο Π.Σ.:

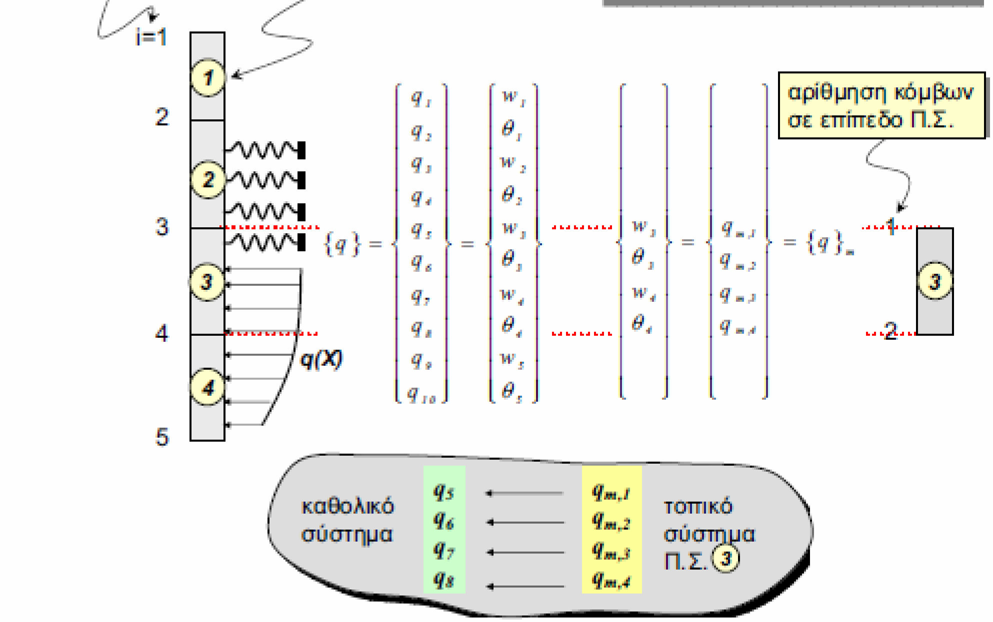
$$[K]_m \{q\}_m = \{F\}_m$$

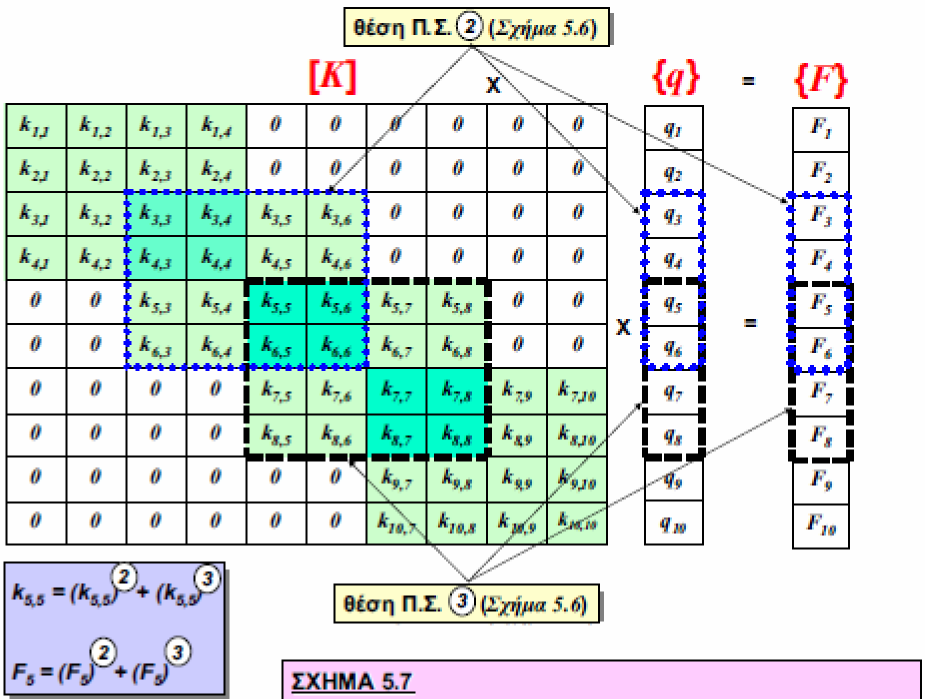
επαλληλίζονται με οδηγό την αντιστοιχία μεταξύ τοπικών (σε επίπεδο Π.Σ.) και καθολικών (για ολόκληρο το δίκτυο Π.Σ.) βαθμών ελευθερίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.6. Σαν αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας :

A. Τα στοιχεία των μητρώων **[K]**$_m$ και **{F}**$_m$ τα οποία αντιστοιχούν σε ένα κόμβο που είναι κοινός σε δύο ή περισσότερα Π.Σ. προστίθενται (Σχήμα 5.7).

B. Το μητρώο **[K]** είναι συνήθως συμμετρικό ως προς την διαγώνιο του, πάνω και κάτω από την οποία συγκεντρώνονται τα μη μηδενικά στοιχεία υπό μορφή διαγώνιας ζώνης. Όσο μικρότερο είναι το εύρος αυτής της ζώνης τόσο μικρότερος είναι ο χρόνος αντιστροφής του εν λόγω μητρώου και, κατ' επέκταση ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος (Σχήμα 5.7).

ΣΧΗΜΑ 5.6
Αντιστοιχία βαθμών ελευθερίας σε *Τοπικό* και σε *Καθολικό* επίπεδο





ΣΧΗΜΑ 5.7
Σύνθεση συστήματος εξισώσεων Π.Σ. σε *καθολικό* επίπεδο

ΒΗΜΑ 5: Επίλυση - Υπολογισμός κύριων (βασικών) και δευτερογενών (παραγώγων) αποτελεσμάτων

Η επίλυση της Εξ. 5.13 προϋποθέτει αντιστροφή του μητρώου [***K***] και αποτελεί την πιο χρονοβόρα διαδικασία κατά την εφαρμογή της μεθόδου των Π.Σ..

Για να καταλάβετε γιατί, θεωρείστε ένα πραγματικό πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης (π.χ. υπολογισμού των καθιζήσεων πεδιλοδοκού) όπου η διακριτοποίηση οδηγεί σε 1000 κόμβους. Τότε οι βαθμοί ελευθερίας (δύο μετατοπίσεις και μία πίεση πόρων ανά κόμβο) είναι3x1000=3000 και το μητρώο [***K***] έχει διάσταση 3000x3000, ήτοι περιλαμβάνει 9,000,0000 στοιχεία.

Η επίλυση τέτοιων γιγαντιαίων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων απαιτεί ειδικές υπολογιστικές τεχνικές, όπως είναι για παράδειγμα η *μέθοδος απαλοιφής Gauss,* η οποία είναι ιδιαίτερα δημοφιλής στην πράξη δεδομένου ότι απαιτεί μικρό σχετικά υπολογιστικό χρόνο και αντίστοιχα μικρό χώρο μνήμης.

6. Επίλυση *μη-γραμμικών προβλημάτων (Π.Σ. ή Π.Δ.)*

Ο χρόνος επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων αυξάνει ακόμη περισσότερο όταν είναι μη γραμμικές, π.χ. όταν το μητρώο [***K***] είναι συνάρτηση της επιζητούμενης λύσης ή/και της επιβαλλόμενης φόρτισης:

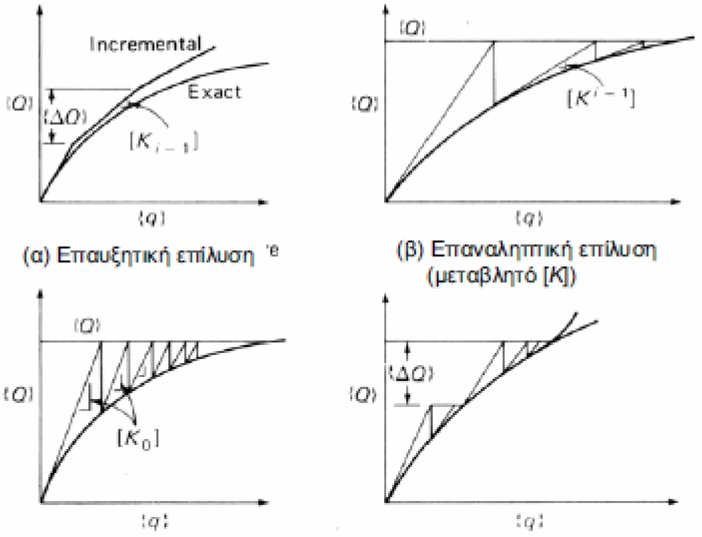
$$\left[K(q_i,F_i)\right]\ \{q\}\ =\{F\} \qquad i=1,.....,\beta\alpha\theta\mu o\acute{\iota}\quad \varepsilon\lambda\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\rho\acute{\iota}\alpha\varsigma \qquad (6.1)$$

Στην περίπτωση αυτή, όπως εξ' άλλου και στην περίπτωση μη γραμμικών εξισώσεων, η επίλυση περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό

- ***μικρών βημάτων*** (*επαυξητική μέθοδος επίλυσης ή incremental solution*), ή
- ***επαναλήψεων*** (*επαναληπτική μέθοδος επίλυσης ή itterative solution*).

Η βασική ιδέα των ανωτέρω μεθόδων επιδεικνύεται στο Σχήμα 6.1.

Επισημαίνεται ότι η αποτελεσματικότητα της κάθε μεθόδου εξαρτάται από τον τύπο του προβλήματος που επιλύεται. Για παράδειγμα, η *επαυξητική μέθοδος* προϋποθέτει ότι στην Εξ. 6.1 υπεισέρχεται η μεταβολή της άγνωστης μεταβλητής (*{Δq} αντί για {q}*) και της γενικευμένης φόρτισης (*{Δq} αντί για {q}*). Για προβλήματα δύναμης-μετατόπισης, αυτό σημαίνει ότι η διατύπωση των εξισώσεων Π.Σ. γίνεται με την βοήθεια του *εφαπτομενικού* και όχι του *τέμνοντος* μητρώου δυσκαμψίας….



(α) Επαυξητική επίλυση

(β) Επαναληπτική επίλυση (μεταβλητό [K])

(γ) Επαναληπτική λύση (σταθερό $[K]=[K]_o$)

(δ) Συνδυασμένη επίλυση

ΣΧΗΜΑ 6.1
Μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης Μη-Γραμμικών προβλημάτων

ΑΣΚΗΣΗ για το σπίτι:

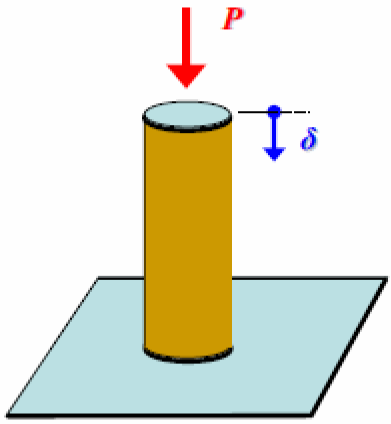
Για να απομυθοποιήσετε τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών (συστημάτων) εξισώσεων, ας θεωρήσουμε την εδαφική στήλη του σχήματος (ένα μοναδικό Π.Σ.) για την οποία ισχύει η εξής μη γραμμική σχέση μεταξύ της δύναμης και της μετατόπισης στην κορυφή:

$$K \cdot \delta = P$$

$$\mu\varepsilon \qquad K = \frac{K_o}{1+(\delta/\delta_o)^{\alpha}}$$

Μπορείτε να κατασκευάσετε αριθμητικά την καμπύλη **P-δ** για $P=0 \div 5000kN$ χρησιμοποιώντας κάποιες από τις μεθόδους που περιγράφονται στο Σχήμα 6.1;

Οι τιμές των παραμέτρων είναι $K_o=10^4$ kN/m, $\delta_o=0.30m$ και $\alpha=0.80$.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Για την σύντομη περιγραφή των μεθόδων Π.Δ. και Π.Σ. που προηγήθηκε (Κεφ. 4, 5 και 6) χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω βιβλιογραφία:

1. Μ. ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗ: *Ανάλυση Φορέων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων,* Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001
2. C. S. DESAI & J. T. CHRISTIAN: *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, McGraw Hill, 1977
3. P. TONG & J. N. ROSSETTOS: *Finite-Element Method, basic Technique and Implementation,* The MIT Press, 1977
4. O. C. ZIENKIEWICZ: *The Finite Element Method*, McGraw Hill, 1977

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ – ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗΣ

ΕΠΟΠΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΔΙΑΛΕΞΕΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
« ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ – Μέρος 1 »

9ο Εξ. ΠΟΛ. ΜΗΧ. - Ακαδ. Ετος 2006 - 07

Μ. ΚΑΒΒΑΔΑΣ, Αναπλ. Καθηγητής ΕΜΠ

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπάρχει και στην ιστοσελίδα :
http://www.civil.ntua.gr/~kavvadas/

13.12.2006

ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ
στη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ

Εξάμηνο	Είδος	Μάθημα
1	Υ	Γεωλογία Μηχανικού
5	Υ	Εδαφομηχανική Ι
6	Υ Υ	Εδαφομηχανική ΙΙ Τεχνική Γεωλογία
7	Υ ΚΕΥ	Θεμελιώσεις Πειραματική Εδαφομηχανική
8	ΚΕΥ ΚΕΥ	Ειδικά Θέματα Θεμελιώσεων Αλληλεπίδραση εδάφους-θεμελίων
9	ΚΕΥ ΚΕΥ ΚΕΥ ΚΕΥ ΚΕΥ	Βραχομηχανική Ειδικά Γεωτεχνικά Έργα Περιβαλλοντική Γεωτεχνική Εδαφοδυναμική Υπολογιστική Γεωτεχνική

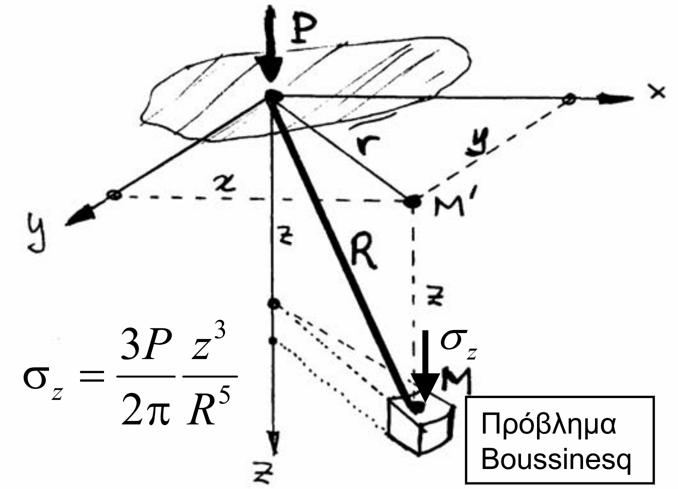
Υ = Υποχρεωτικό , ΚΕΥ = Κατ' Εκλογήν Υποχρεωτικό

Αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις των προβλημάτων γεωτεχνικής

Η λύση ενός προβλήματος γεωτεχνικής περιλαμβάνει τον προσδιορισμό ενός πεδίου μετακινήσεων (**u**), παραμορφώσεων (**ε**), ενεργών τάσεων (**σ’**) και πιέσεων πόρων (u) οι οποίες ικανοποιούν (ταυτοχρόνως) τις εξής συνθήκες :

1. Εξισώσεις ισορροπίας τάσεων
2. Συνοριακές συνθήκες (φόρτιση στο σύνορο) και αρχικές συνθήκες (δηλ. Κατάσταση για t=0)
3. Καταστατικές σχέσεις του υλικού (σχέσεις ενεργών τάσεων – παραμορφώσεων)
4. Σχέσεις παραμορφώσεων – μετακινήσεων (συνήθως για μικρές παραμορφώσεις)
5. Σχέσεις ορισμού της ενεργού τάσης (σ’ = σ – u)

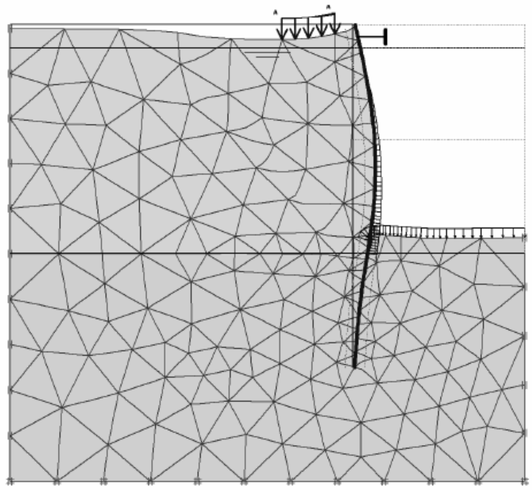
Σε ορισμένα (απλά) προβλήματα υπάρχει αναλυτική λύση (δηλ. αναλυτικές συναρτήσεις των ζητούμενων πεδίων)



$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{R^5}$$

Πρόβλημα Boussinesq

Στα περισσότερα (συνήθη) προβλήματα απαιτείται η χρήση αριθμητικών μεθόδων για τον υπολογισμό των ζητούμενων πεδίων



« ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ – Μέρος 1 »
Διδάσκων : Μ. Καββαδάς

Θεματολογία

1. Επανάληψη της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου
   Τάσεις στο εσωτερικό του εδάφους – ενεργές τάσεις - παραμορφώσεις
   Σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων, Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα
   Διαδρομές τάσεων
   Διατμητική αντοχή του εδάφους, Κριτήρια αστοχίας
2. Θεωρία Κρίσιμης Κατάστασης Αργιλικών Εδαφών
   Ισότροπη και μονοδιάστατη συμπίεση
   Τριαξονική θλίψη – Διαδρομές ολικών και ενεργών τάσεων
   Παρουσίαση των διαδρομών τάσεων σε χώρο p' – q – v
   Επιφάνεια Roscoe για κανονικά στερεοποιημένες αργίλους
   Επιφάνεια Hvorslev για υπερ-στεροποιημένες αργίλους
3. Το Καταστατικό Προσομοίωμα Εδαφών : Cam-Clay

ΔΙΑΛΕΞΗ 1

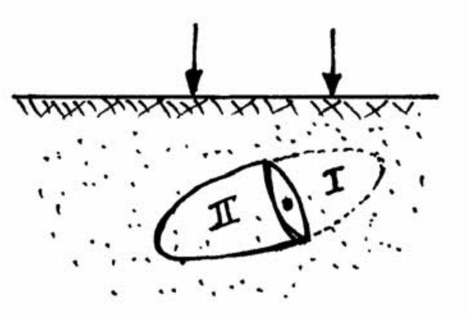
Επανάληψη της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου

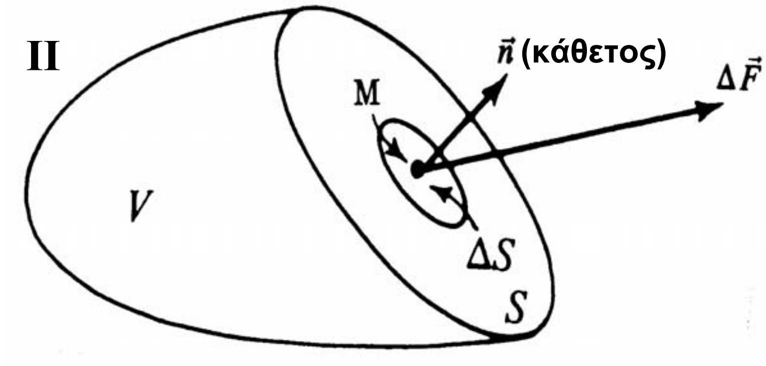
Θεματολογία

1. Τάσεις στο εσωτερικό του εδάφους – ενεργές τάσεις
2. Παραμορφώσεις
3. Η αρχή των ενεργών τάσεων
4. Σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων, Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα
5. Διαδρομές τάσεων
6. Τάσεις και παραμορφώσεις του εδάφους λόγω επιβολής φορτίων
7. Διατμητική αντοχή του εδάφους, Κριτήρια αστοχίας

ΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ

1. Τάσεις σε συνεχή υλικά

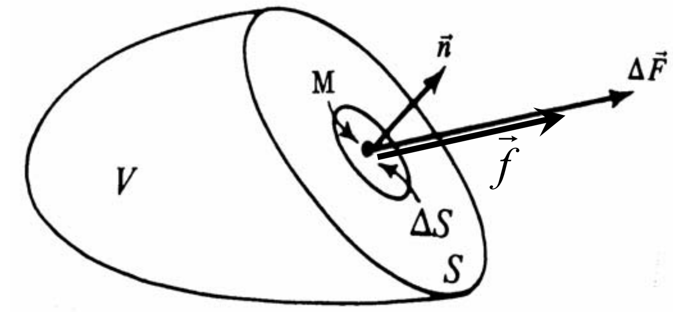




Ανηγμένη δύναμη : $$\vec{f} = \lim \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} \quad , \quad \Delta S \to 0$$

- Η ανηγμένη δύναμη έχει διαστάσεις «τάσης» (F/L^2 ή kPa)
- Η ανηγμένη δύναμη (***f***) εξαρτάται από τη θέση (σημείο Μ) και τη διεύθυνση (***n***) της επιφάνειας *ΔS*
- Σε κάθε σημείο Μ ορίζονται άπειρες ανηγμένες δυνάμεις (***f***), μία για κάθε επίπεδο που διέρχεται από το Μ

1. Τάσεις σε συνεχή υλικά (συνέχεια)



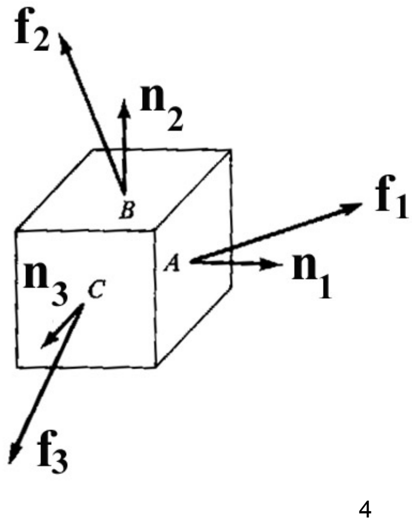
Ανηγμένη δύναμη :

$$\vec{f} = \lim \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} \quad , \quad \Delta S \to 0$$

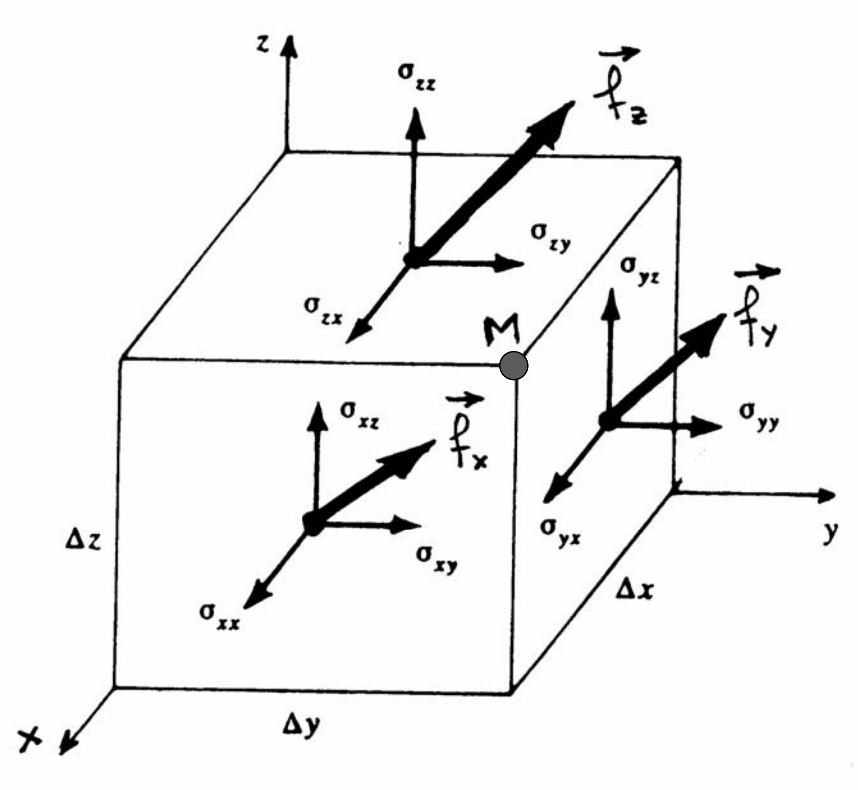
Η εντατική κατάσταση στο σημείο Μ μπορεί να θεωρηθεί γνωστή, εάν είναι γνωστές οι ανηγμένες δυνάμεις σε κάθε επιπέδο δια του Μ

Θεώρημα :
Εάν είναι γνωστές οι ανηγμένες δυνάμεις (**f$_1$**, **f$_2$**, **f$_3$**) σε τρία επίπεδα (**n$_1$**, **n$_2$**, **n$_3$**) δια του Μ, τότε μπορεί να υπολογισθεί η ανηγμένη δύναμη (**f**) σε κάθε άλλο επιπέδο (**n**) δια του Μ.

Πόρισμα :
Η εντατική κατάσταση στο σημείο Μ μπορεί να θεωρηθεί γνωστή, εάν είναι γνωστές οι ανηγμένες δυνάμεις σε τρία επίπεδα δια του Μ



Ειδική περίπτωση : Εστω ότι τα τρία επίπεδα δια του Μ στα οποία είναι γνωστές οι ανηγμένες δυνάμεις είναι ορθογώνια και κάθετα στους άξονες (x, y, z).



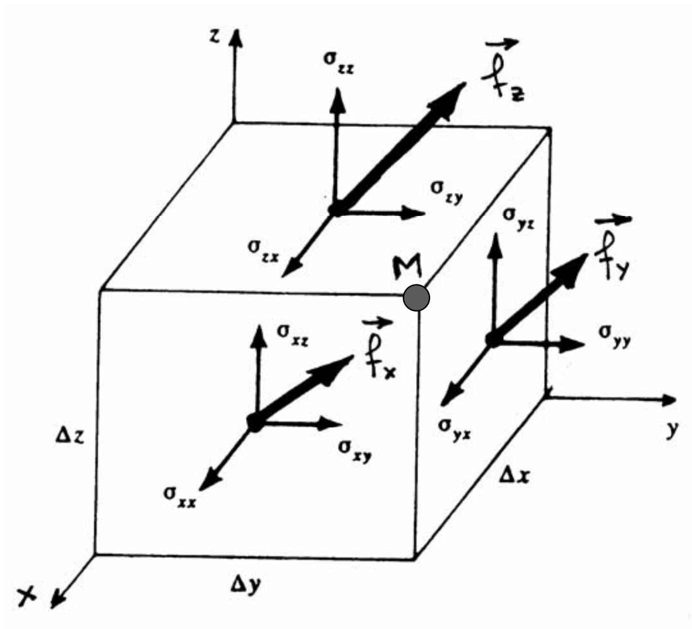
Εάν είναι γνωστές οι ανηγμένες δυνάμεις στα τρία ορθογώνια επίπεδα δια του Μ :

$$\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{x}} = \left(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}\right)$$

$$\vec{\mathbf{f}}_{y} = \left(\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}\right)$$

$$\vec{\mathbf{f}}_{z} = \left(\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}\right)$$

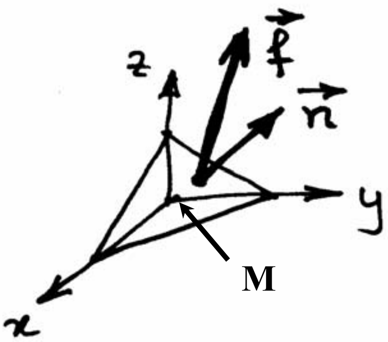
Τότε ….



$$\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{x}} = \left(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}\right)$$

$$\vec{\mathbf{f}}_{y} = \left(\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}\right)$$

$$\vec{\mathbf{f}}_{z} = \left(\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}\right)$$



… η ανηγμένη δύναμη σε ένα τυχαίο επίπεδο δια του Μ, με διεύθυνση :

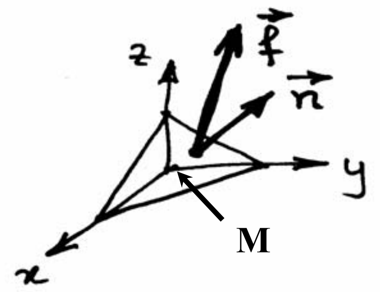
$$\vec{\mathbf{n}} = \left(n_x, n_y, n_z\right)$$

υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\boxed{\vec{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}}$$

Ορισμός της τάσης στο σημείο Μ :

Το μέγεθος : $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$



που δίνει την ανηγμένη δύναμη σε οποιοδήποτε επίπεδο (**n**) δια του Μ μέσω της σχέσης : $\vec{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}}$

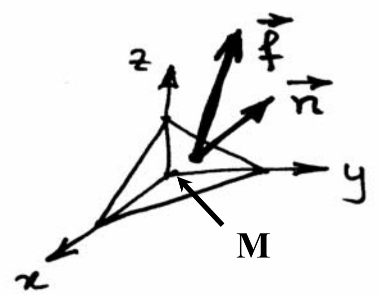
ονομάζεται τάση στο σημείο Μ, και έχει χαρακτηριστικά τανυστή β' τάξεως.

- Η τάση στο σημείο Μ εξαρτάται μόνον από τη θέση του σημείου Μ και το σύστημα των συντεταγμένων (x, y, z).
- Αποδεικνύεται ότι η τάση είναι συμμετρικός τανυστής : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
- Οι (έξι) συνιστώσες της τάσης έχουν διαστάσεις (F/L^2 -> kPa)

Κύριες τάσεις :

Προσδιορισμός των επιπέδων δια του Μ, στα οποία η ανηγμένη δύναμη είναι ορθή, δηλαδή:

$$\vec{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \lambda\, \vec{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow \left(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\, \mathbf{I}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{0}}$$



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Η ανωτέρω εξίσωση έχει τρείς λύσεις λ_1, λ_2, λ_3 και συνεπώς δίνει τρία επίπεδα $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$.
- Τα επίπεδα αυτά είναι ορθογώνια μεταξύ τους και ονομάζονται κύρια επίπεδα. Η ορθή ανηγμένη δύναμη σε καθένα από τα επίπεδα αυτά ονομάζεται ορθή τάση και συμβολίζεται με : σ_1 , σ_2 , σ_3

Ουσιαστικά, προσδιορίσθηκαν οι ιδιο-τιμές και τα ιδιο-διανύσματα του τανυστή της τάσης

Αναλλοίωτοι των τάσεων (*p, q, J₃*) :

Συνδυασμοί των συνιστωσών της τάσης που δεν εξαρτώνται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων (x, y, z)

$$p = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right]^{1/2}$$

ή : $$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]^{1/2}$$

Παρατήρηση : Συχνά χρησιμοποιείται η ισοδύναμη αναλλοίωτος :

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(s_{ij}\ s_{ij}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} q$$ όπου : $$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\,\delta_{ij}$$

$$J_3 = \sigma_{ij}\,\sigma_{jk}\,\sigma_{ki}$$

ή, ισοδύναμα, η γωνία Lode (θ) : $$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\frac{\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)}{\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)} - 1\right]$$

Αναλλοίωτοι των τάσεων (*p, q, J₃*) :

Συνδυασμοί των συνιστωσών της τάσης που δεν εξαρτώνται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων (x, y, z)

Οι κύριες τάσεις μπορούν να γραφούν συναρτήσει των τριών αναλλοιώτων :

$$\sigma_1 = p + \frac{2}{3} q\ \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

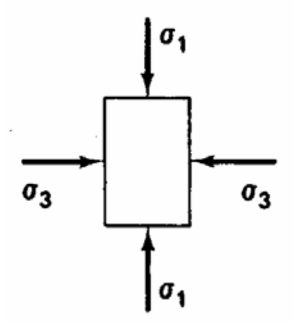
$$\sigma_2 = p + \frac{2}{3} q\ \sin(\theta)$$

$$\sigma_3 = p + \frac{2}{3} q \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Αναλλοίωτοι των τάσεων (p, q, J_3) :

Συνδυασμοί των συνιστωσών της τάσης που δεν εξαρτώνται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων (x, y, z)

Ειδικώς, στην κυλινδρική τριαξονική δοκιμή ($\sigma_2 = \sigma_3$) :



$$p = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + 2\sigma_3\right)$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3$$

θ = - 30° κατά τη αξονική συμπίεση ($\sigma_2 = \sigma_3$)

θ = 30° κατά τον αξονικό εφελκυσμό ($\sigma_1 = \sigma_2$)

Γωνία Lode (θ) : $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)} - 1\right]$

2. Τάσεις σε εδαφικά υλικά

2.1. Τάσεις σε εδαφικά υλικά χωρίς νερό στους πόρους

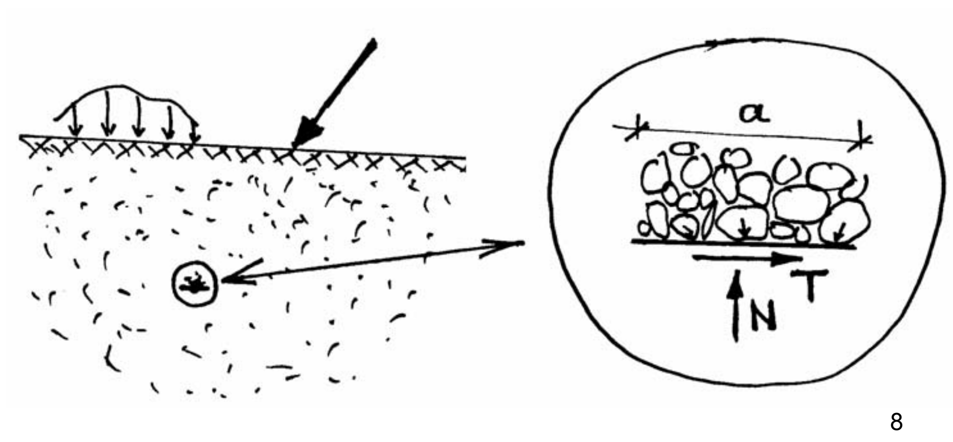
- Στο έδαφος, οι τάσεις μεταδίδονται με την μηχανική επαφή μεταξύ των κόκκων.
- Συνεπώς ο ορισμός της τάσης μέσω της έννοιας του ορίου της επιφάνειας ΔS->0 δεν είναι μονοσήμαντος (δεν υπάρχει το όριο).
- Παρά ταύτα χρησιμοποιείται ο ίδιος ορισμός της τάσης θεωρώντας ότι η στοιχειώδης επιφάνεια ΔS=α είναι αρκετά μεγάλη ώστε να περιλαμβάνει αρκετούς εδαφικούς κόκκους.

N = συνισταμένη ορθή δύναμη στην επιφάνεια "α"
T = συνισταμένη διατμητική δύναμη στην επιφάνεια "α"

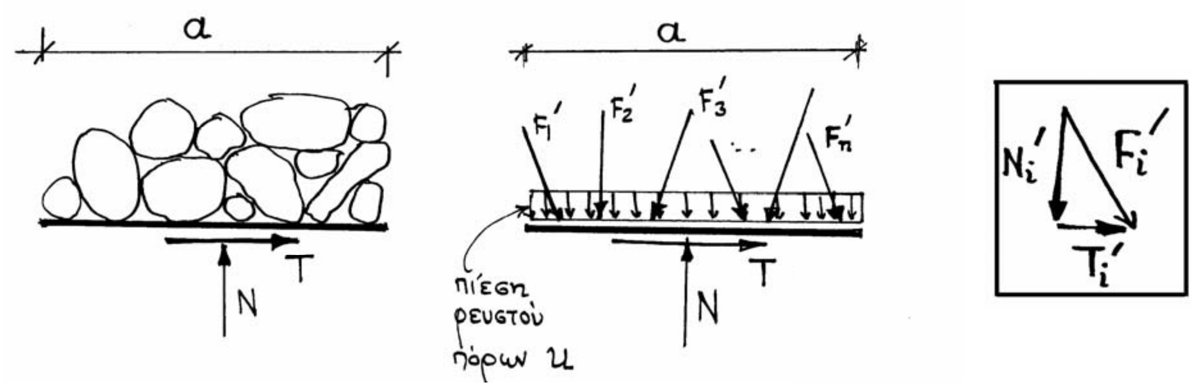
$$\sigma = \lim \frac{N}{a^2}$$

$$\tau = \lim \frac{T}{a^2}$$

$$a \to 0$$



2.2. Τάσεις σε εδαφικά υλικά με νερό στους πόρους



F'_i = δύναμη που ασκείται στην επαφή μεταξύ δύο κόκκων

Αναλύεται σε ορθή δύναμη (N'_i) και διατμητική δύναμη (T'_i)

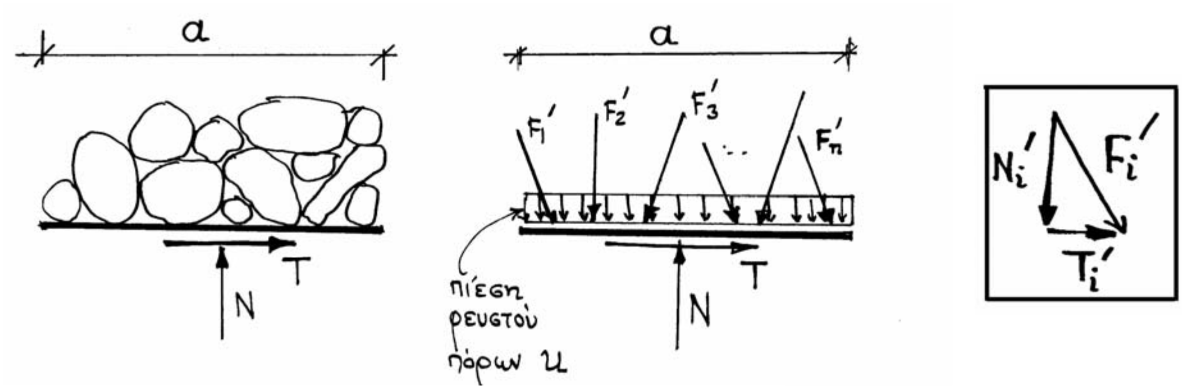
Ορθή τάση : $$\sigma = \lim \frac{N}{a^2} = \lim \frac{u\,a^2 + \sum N_i'}{a^2} = u + \lim \frac{\sum N_i'}{a^2} = u + \sigma'$$

δηλαδή : $$\boxed{\sigma = u + \sigma'}$$

σ' = ενεργός ορθή τάση
u = πίεση πόρων
σ = ολική ορθή τάση

Η ενεργός τάση ΔΕΝ είναι η τάση στην επαφή μεταξύ των κόκκων

2.2. Τάσεις σε εδαφικά υλικά με νερό στους πόρους



F'_i = δύναμη που ασκείται στην επαφή μεταξύ δύο κόκκων

Αναλύεται σε ορθή δύναμη (N'_i) και διατμητική δύναμη (T'_i)

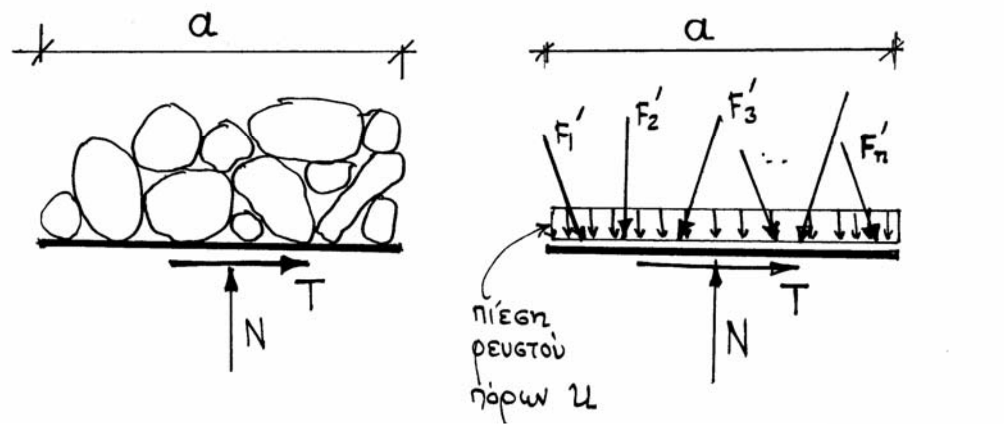
Διατμητική τάση : $$\tau = \lim \frac{T}{a^2} = \lim \frac{\sum T_i'}{a^2} = \tau'$$

δηλαδή : $$\boxed{\tau = \tau'}$$

τ' = ενεργός διατμητική τάση
τ = ολική διατμητική τάση

Διατμητικές τάσεις μεταφέρονται μόνον στις επαφές μεταξύ των κόκκων. Το νερό δεν αναλαμβάνει διατμητικές τάσεις

2.2. Τάσεις σε εδαφικά υλικά με νερό στους πόρους (σύνοψη)



F'_i = δύναμη που ασκείται στην επαφή μεταξύ δύο κόκκων

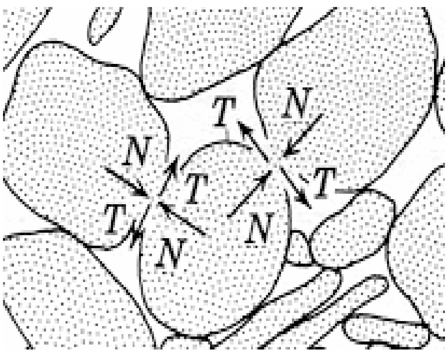
Αναλύεται σε ορθή δύναμη (N'_i) και διατμητική δύναμη (T'_i)

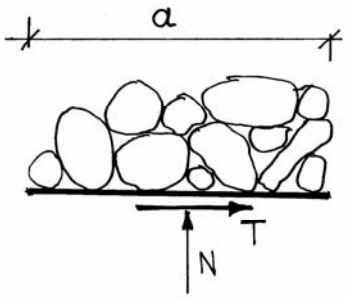
Ενεργός ορθή τάση : $\sigma' \equiv \lim \dfrac{\sum N'_i}{a^2}$

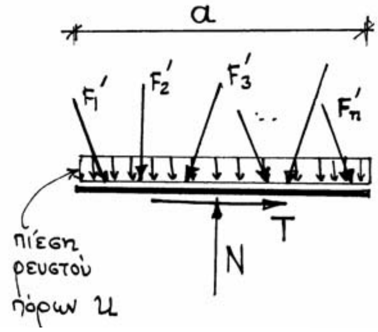
Ενεργός διατμητική τάση : $\tau' \equiv \lim \dfrac{\sum T'_i}{a^2}$

} Δράσεις μεταξύ των κόκκων

2.2. Τάσεις σε εδαφικά υλικά με νερό στους πόρους (σύνοψη)







$$\sigma = u + \sigma' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma' = \sigma - u}$$

$$\tau = \tau'$$

σ' = ενεργός ορθή τάση
u = πίεση πόρων
σ = ολική ορθή τάση
τ' = ενεργός διατμητική τάση
τ = ολική διατμητική τάση

- Οσο αυξάνει η πίεση πόρων (u), μειώνεται η ενεργός τάση (σ')
- Εάν η πίεση πόρων αυξηθεί τόσο ώστε σ '=0, οι ορθές δυνάμεις μεταξύ των κόκκων είναι μηδέν. Τότε η τριβή είναι μηδέν, δηλαδή η αντοχή του υλικού μηδενίζεται (το έδαφος συμπεριφέρεται σαν υγρό)
- Γενικότερα, όσο μειώνεται η σ ', τόσο μειώνεται η αντοχή του υλικού

Αναλλοίωτοι των ενεργών τάσεων (p', q, J_3) :

Συνδυασμοί των συνιστωσών της ενεργού τάσης που δεν εξαρτώνται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων (x, y, z)

$$p' = \frac{1}{3}\left(\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}\right) = \frac{1}{3}\left(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3\right)$$

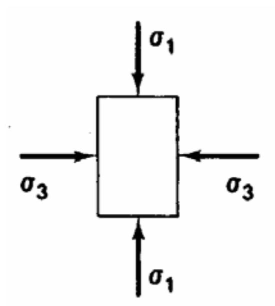
$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\right)^2 + 6\left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{zy}^2 + \sigma_{xz}^2\right)\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]^{1/2}$$

Σημείωση : $q = q'$

Ειδικώς, στην κυλινδρική τριαξονική δοκιμή ($\sigma_2 = \sigma_3$) :

$$p' = \frac{1}{3}\left(\sigma'_1 + 2\sigma'_3\right) \qquad q = \sigma_1 - \sigma_3$$



Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ

Η παραμόρφωση των συνεχών μέσων περιγράφεται μέσω του τανυστή της παραμόρφωσης που δίνει τα χαρακτηριστικά της παραμόρφωσης στο σημείο Μ :

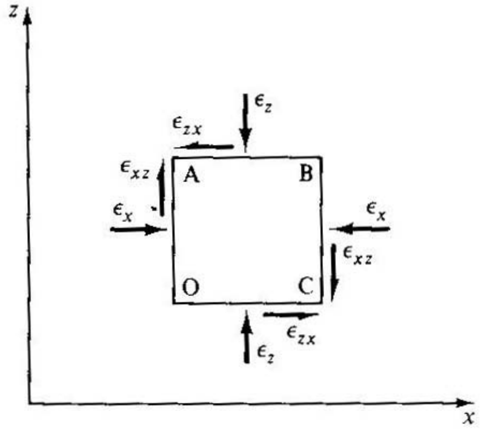
$\vec{\mathbf{u}}$

$M'(x+u_x , y+u_y , z+u_z)$
τελική θέση

$M(x , y, z)$
αρχική θέση

διάνυσμα της μετακίνησης :

$$\vec{\mathbf{u}} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$



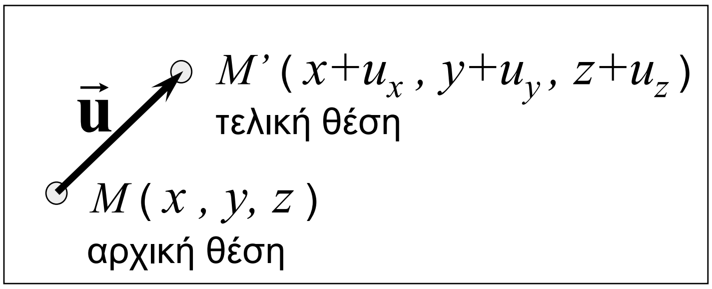
τανυστής της παραμόρφωσης :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

όπου :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

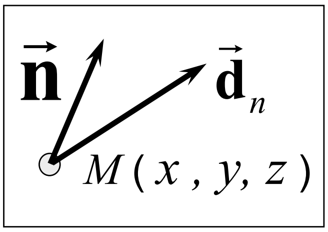
Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ



διάνυσμα της μετακίνησης :

$$\vec{\mathbf{u}} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$

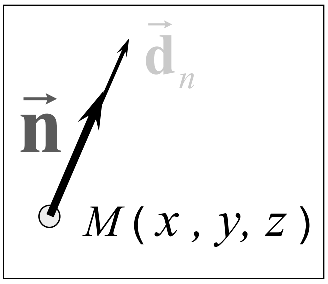
Ο τανυστής της παραμόρφωσης (**ε**) έχει την εξής ιδιότητα :



Οταν πολλαπλασιασθεί με ένα μοναδιαίο διάνυσμα (**n**), δίνει τα χαρακτηριστικά της παραμόρφωσης (επιμήκυνση και στροφές) στο σημείο Μ κατά τη διεύθυνση (**n**) :

$$\vec{\mathbf{d}}_n = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\mathbf{n}}$$

Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ

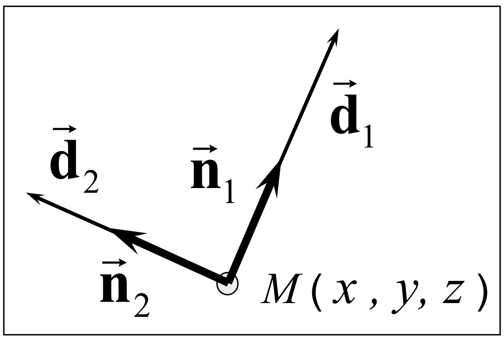


Κύριες διευθύνσεις της παραμόρφωσης :

Υπάρχουν τρείς διευθύνσεις ($\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$) δια του σημείου Μ, κατά τις οποίες δεν υπάρχει στροφή, δηλαδή η παραμόρφωση περιλαμβάνει μόνον επιμήκυνση της ευθείας (n) :

$$\vec{\mathbf{d}}_n = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \lambda\, \vec{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow \quad \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda\, \mathbf{I}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{0}$$

(ιδιο-διανύσματα του τανυστή της παραμόρφωσης)



Οι διευθύνσεις ($\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$) είναι ορθογώνιες και ονομάζονται κύριες διευθύνσεις της παραμόρφωσης.

Οι κύριες διευθύνσεις παραμορφώνονται χωρίς στρέβλωση των μεταξύ τους ορθών γωνιών.

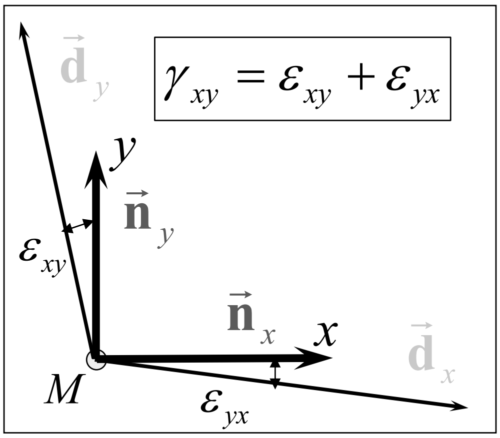
Η ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ

Οποιεσδήποτε άλλες διευθύνσεις (**n**) εκτός των κυρίων διευθύνσεων, παραμορφώνονται με στρέβλωση των ορθών γωνιών (και με επιμήκυνση).

Οι επιμηκύνσεις των τριών αξόνων των συντεταγμένων *(x, y, z)* ονομάζονται ορθές παραμορφώσεις και δίνονται από τις σχέσεις :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Οι στρεβλώσεις των ορθών γωνιών μεταξύ των τριών αξόνων *(x, y, z)* ονομάζονται διατμητικές παραμορφώσεις και δίνονται από τις σχέσεις :

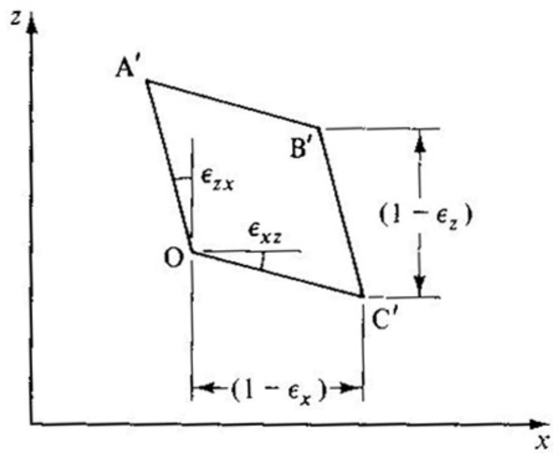


$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

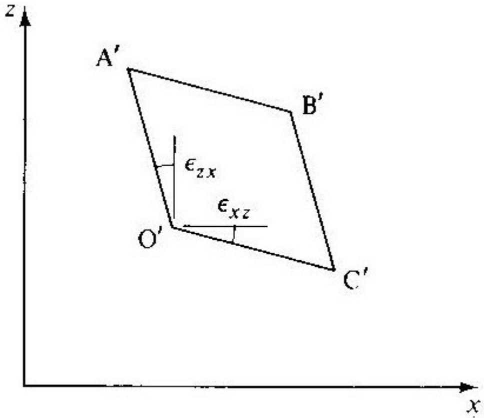
Συνιστώσες της παραμόρφωσης στο επίπεδο

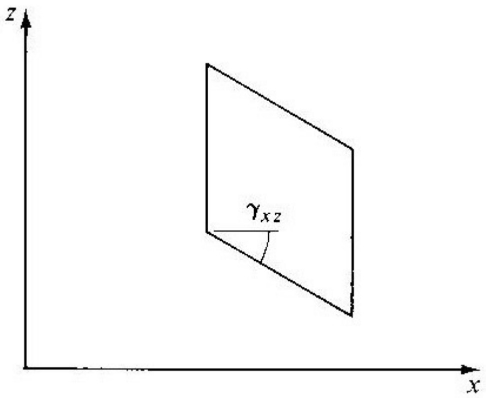


$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x_z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_x}\right)$$

$$\gamma_{zx} = \varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$





Ογκομετρική παραμόρφωση

Η ανηγμένη μεταβολή (ΔV) ενός στοιχειώδους όγκου (V) στο σημείο Μ ονομάζεται ογκομετρική παραμόρφωση και δίνεται από τη σχέση :

$$\varepsilon_{vol} \equiv \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Παρατηρήσεις :

Οι ανωτέρω ορισμοί αφορούν συνεχή υλικά επειδή προϋποθέτουν συνέχεια του υλικού ώστε να ορίζονται οι παράγωγοι.

Τα εδαφικά υλικά δεν είναι συνεχή και συνεπώς οι ανωτέρω ορισμοί δεν έχουν ακριβή έννοια.

Παρά ταύτα, όπως και κατά τον ορισμό της τάσης, χρησιμοποιούνται οι ίδιοι ορισμοί των παραμορφώσεων, θεωρώντας ότι τα «όρια» δεν τείνουν στο μηδέν αλλά σε κάποιο μικρό μέγεθος το οποίο όμως περιλαμβάνει αρκετούς κόκκους ώστε να εξασφαλίζεται η στατιστική ομοιογένεια

Ενεργειακή αντιστοιχία ενεργών τάσεων – παραμορφώσεων :

Στα αναλλοίωτα μεγέθη των τάσεων (p’, q) αντιστοιχούν τα εξής αναλλοίωτα μεγέθη παραμορφώσεων ($\Delta\varepsilon_{vol}$, $\Delta\varepsilon_q$) :

$$\Delta\varepsilon_{vol} = \Delta\varepsilon_{xx} + \Delta\varepsilon_{yy} + \Delta\varepsilon_{zz}$$

$$\Delta\varepsilon_q = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\left(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_3\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_2 - \Delta\varepsilon_3\right)^2\right]^{1/2}$$

με την έννοια της ενεργειακής αντιστοιχίας :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\Delta\varepsilon} = \sum_{i,j} \sigma'_{ij}\,\Delta\varepsilon_{ij} = p'\,\Delta\varepsilon_{vol} + q\,\Delta\varepsilon_q}$$

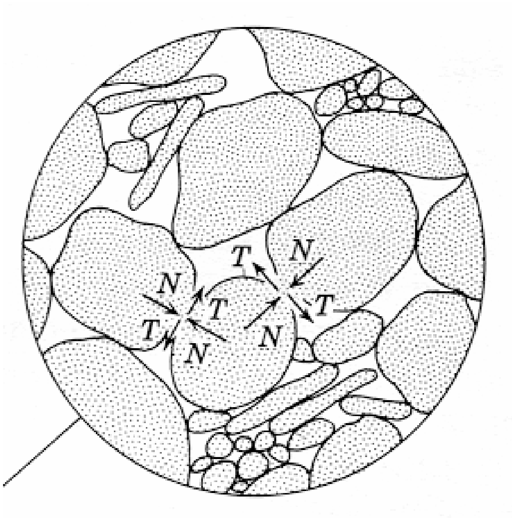
Στην κυλινδρική τριαξονική δοκιμή ($\sigma_2 = \sigma_3$) :

$$p' = \frac{1}{3}\left(\sigma'_1 + 2\sigma'_3\right) \qquad \Delta\varepsilon_{vol} = \Delta\varepsilon_1 + 2\,\Delta\varepsilon_3$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 \qquad \Delta\varepsilon_q = \frac{2}{3}\left(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_3\right)$$

Η ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΕΝΕΡΓΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

- Η παραμόρφωση των εδαφών γίνεται κυρίως με αναδιάταξη μεταξύ των κόκκων (ολίσθηση και κύλιση), δηλαδή με μεταβολή της γεωμετρίας του εδαφικού σκελετού (= της δομής των κόκκων).
- Η αναδιάταξη μεταξύ των κόκκων προκαλείται από μεταβολές των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των κόκκων, δηλαδή από μεταβολές των ενεργών τάσεων.



- Μεταβολή των υδατικών πιέσεων, χωρίς μεταβολή των ενεργών τάσεων, δεν προκαλεί παραμόρφωση, αφού ισοδυναμεί με ισότροπη συμπίεση των κόκκων (οι οποίοι θεωρούνται πρακτικώς απαραμόρφωτοι)
- Μεταβολή των ολικών τάσεων χωρίς μεταβολή των ενεργών τάσεων, δεν προκαλεί παραμόρφωση

$$u = \sigma - \sigma' \quad \Rightarrow \quad \Delta u = \Delta\sigma - \Delta\sigma'$$

Αρχή των ενεργών τάσεων :

Η μεταβολή οποιουδήποτε μηχανικού χαρακτηριστικού των εδαφών (π.χ. παραμόρφωση και αντοχή) οφείλεται σε μεταβολή των ενεργών τάσεων και αντιστρόφως,

$$\boxed{\mathbf{\Delta\varepsilon \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\sigma' \neq 0}}$$

Πόρισμα :

Εάν δεν μεταβληθούν οι ενεργές τάσεις*, τα μηχανικά χαρακτηριστικά των εδαφών δεν μεταβάλλονται, π.χ. τα εδάφη δεν παραμορφώνονται και δεν μεταβάλλεται η αντοχή τους.

$$\boxed{\mathbf{\Delta\sigma' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\varepsilon = 0}}$$

* *δηλαδή, όλες οι συνιστώσες των ενεργών τάσεων να είναι σταθερές*

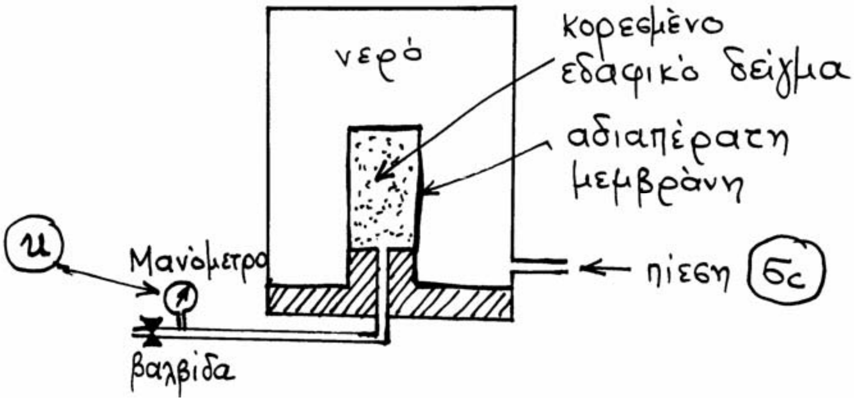
Παρατήρηση :

Μπορεί να μεταβληθούν οι ολικές τάσεις και οι υδατικές πιέσεις χωρίς μεταβολή των ενεργών τάσεων. Στην περίπτωση αυτή το έδαφος δεν παραμορφώνεται.

Εάν : $(\Delta\sigma, \Delta u)\ :\ \Delta\sigma' = \Delta\sigma - \Delta u = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0$

Αρχή των ενεργών τάσεων - Παραδείγματα εφαρμογής

Η βαλβίδα είναι κλειστή. Η πίεση της κυψέλης αυξάνεται.
Θα συμπιεσθεί το εδαφικό δείγμα ;



Ολικές τάσεις στο εδαφικό δείγμα :

Αρχική : σ_c

Τελική : $\sigma_c + \Delta\sigma_c$

Μεταβολή : $\Delta\sigma_c$

$$V = V_s + V_w \Rightarrow \Delta V = \Delta V_s + \Delta V_w = 0 + 0 = 0$$

Αρα το δείγμα δεν αλλάζει όγκο, ούτε στρεβλώνεται (η φόρτιση είναι ισότροπη). Δηλαδή Δε=0. Αρα οι ενεργές τάσεις δεν μεταβάλλονται.

Συνεπώς : $\Delta\sigma' = 0 \Rightarrow \Delta u = \Delta\sigma \Rightarrow \Delta u = \Delta\sigma_c$

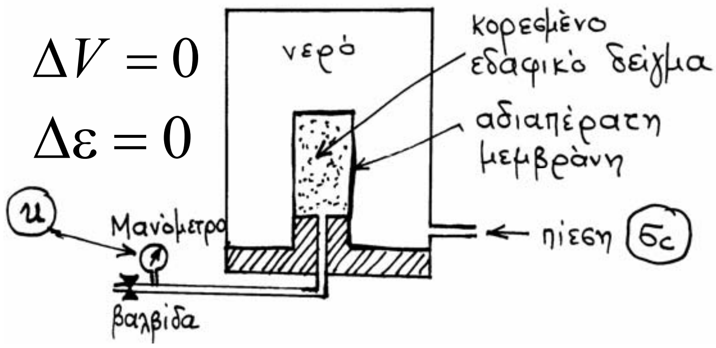
Το σύνολο της αύξησης της ολικής πίεσης, αναλαμβάνεται από τις πιέσεις πόρων, χωρίς μεταβολή των ενεργών τάσεων

Φόρτιση των εδαφών υπό αστράγγιστες συνθήκες

Αστράγγιστη είναι η φόρτιση κατά την οποία το έδαφος δεν αποβάλλει νερό και συνεπώς παραμορφώνεται υπό σταθερό όγκο :

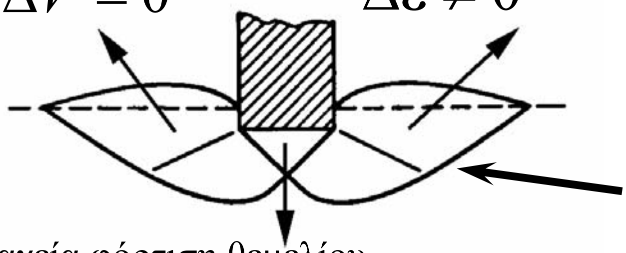
$$\Delta V = \Delta V_s + \Delta V_w = 0$$

$$\Delta V = 0$$
$$\Delta\varepsilon = 0$$



Αστράγγιστη φόρτιση συμβαίνει συχνά στις αργίλους, όπου λόγω του πολύ μικρού μεγέθους των πόρων, το νερό δεν προλαβαίνει να διαφύγει εάν η φόρτιση είναι αρκετά ταχεία.

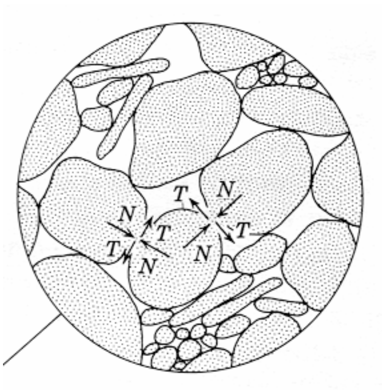
$\Delta V = 0$ $\qquad$ $\Delta\varepsilon \neq 0$



ταχεία φόρτιση θεμελίου

Προσοχή :
Αστράγγιστη φόρτιση σημαίνει μηδενική μεταβολή του όγκου, ΟΧΙ πάντοτε μηδενική παραμόρφωση. Συνεπώς μπορεί να συμβούν διατμητικές παραμορφώσεις οπότε οι ενεργές τάσεις μεταβάλλονται.

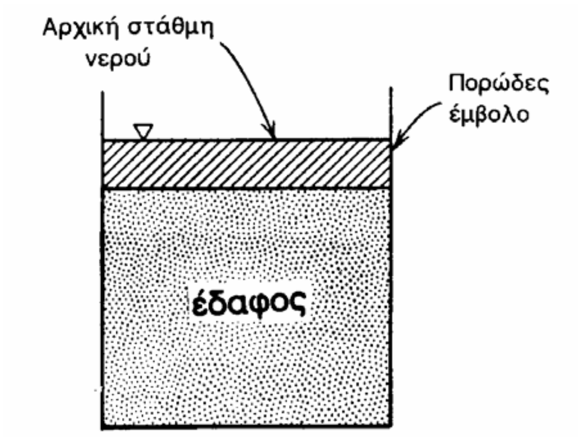
Μηχανική αλληλεπίδραση εδαφικών κόκκων - νερού

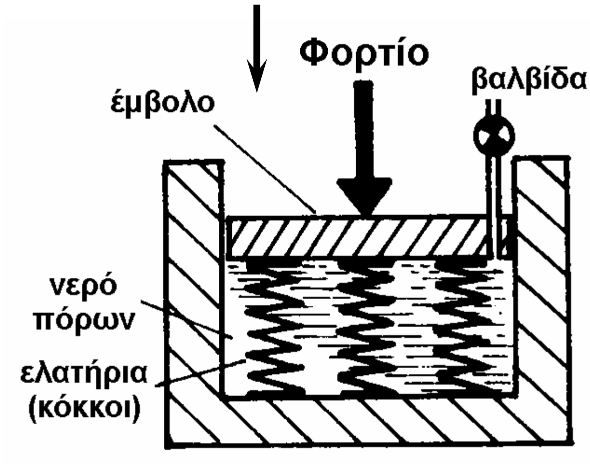


Τα φορτία που επιβάλλονται στο έδαφος αναλαμβάνονται εν-μέρει από τον εδαφικό σκελετό (κόκκοι) και εν-μέρει από το νερό των πόρων

$$\sigma = \sigma' + u$$

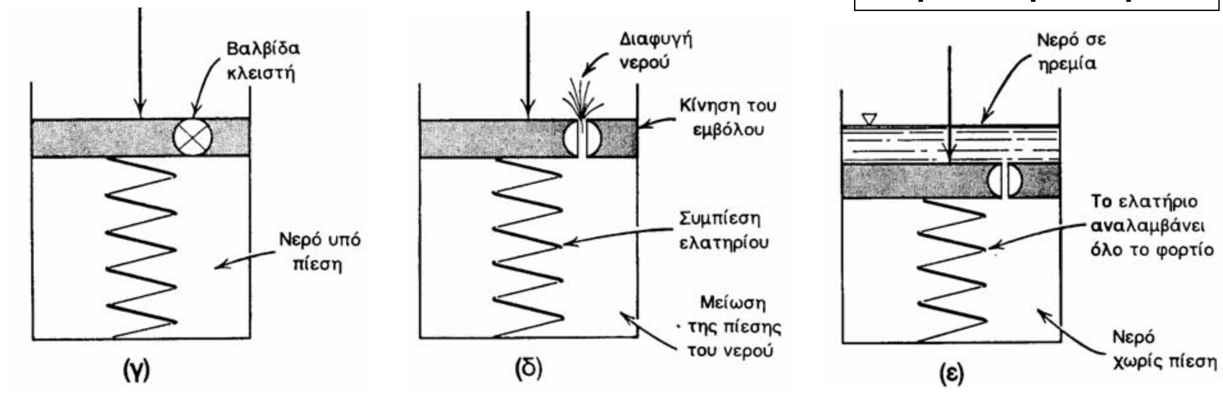
Η μεταξύ τους αλληλεπίδραση μπορεί να περιγραφεί με το εξής μοντέλο :



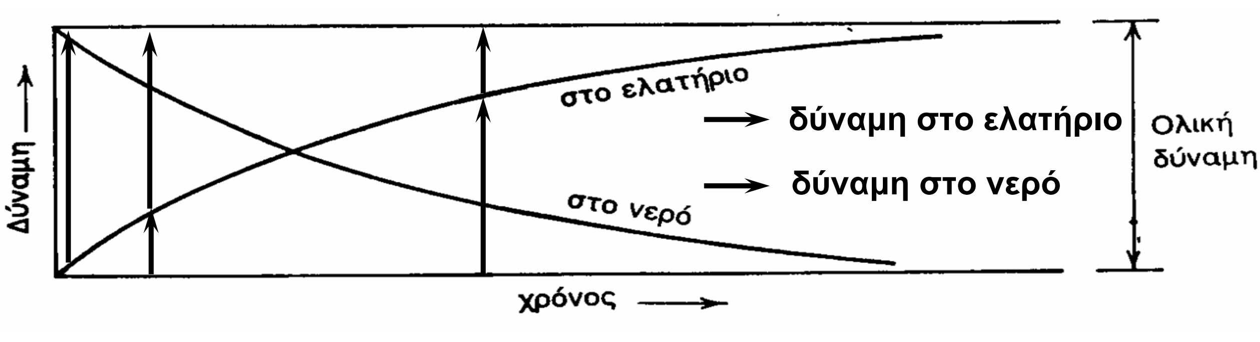


Μηχανική αλληλεπίδραση εδαφικών κόκκων - νερού

ελατήριο = κόκκοι
νερό = νερό πόρων

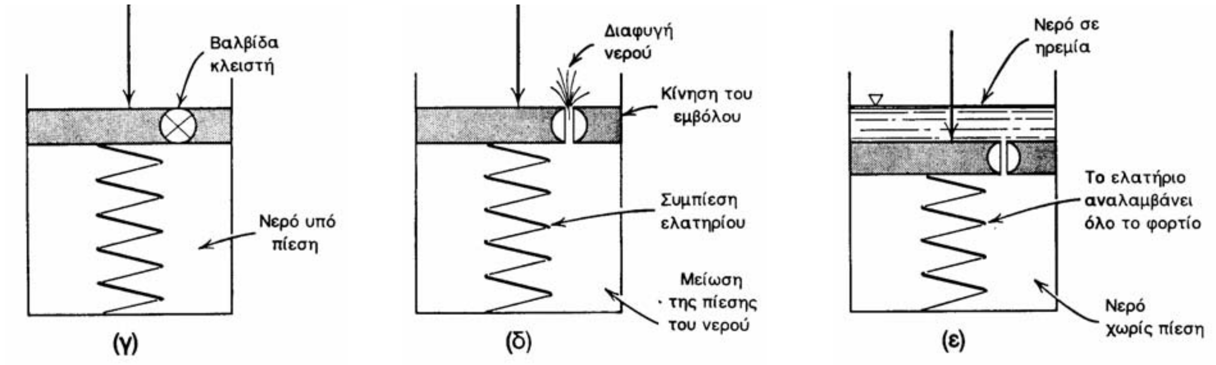


Χρόνος από την επιβολή του κατακόρυφου φορτίου στο έμβολο ⟶



Μηχανική αλληλεπίδραση εδαφικών κόκκων - νερού

ελατήριο = κόκκοι
νερό = νερό πόρων



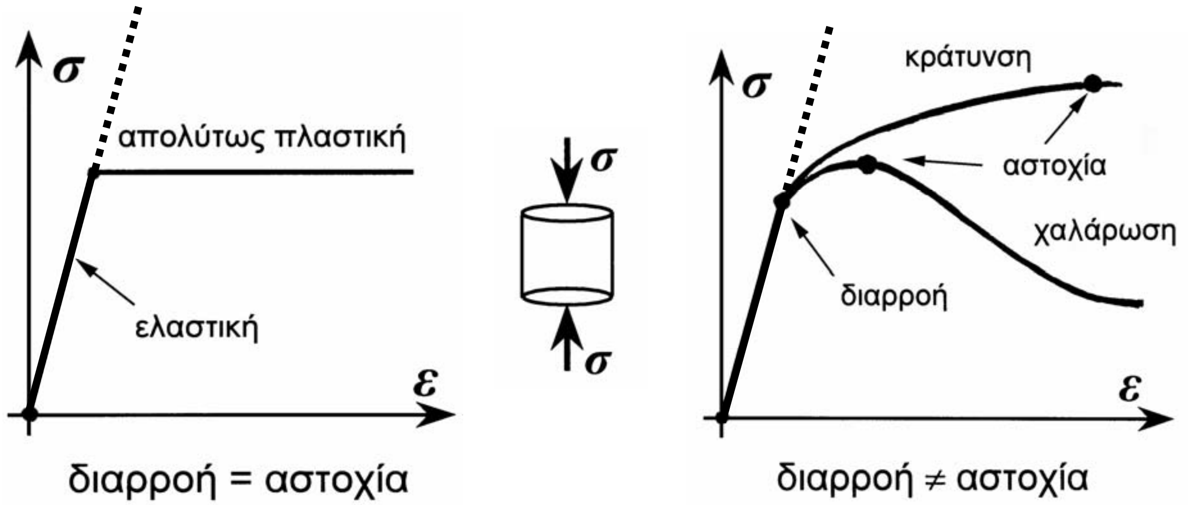
Χρόνος από την επιβολή του κατακόρυφου φορτίου στο έμβολο ⟶

- Το φορτίο αρχικώς αναλαμβάνεται από το νερό των πόρων χωρίς συμπίεση του εδάφους : $\Delta u = \Delta\sigma$, ενώ $\Delta\sigma' = 0$, (αφού: $\Delta u = \Delta\sigma - \Delta\sigma'$) .
- Βαθμιαία, το φορτίο μεταφέρεται στον εδαφικό σκελετό (κόκκους) και το έδαφος συμπιέζεται : Μείωση του Δu και ισόποση αύξηση του $\Delta\sigma'$.
- Η παραμόρφωση του εδάφους είναι χρονικά εξελισσόμενη. Το φαινόμενο είναι πιό έντονο στα λεπτόκοκκα εδάφη λόγω δυσχέρειας του νερού να διαφύγει διαμέσου των λεπτών πόρων.

Το φαινόμενο αυτό λέγεται στερεοποίηση του εδάφους.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

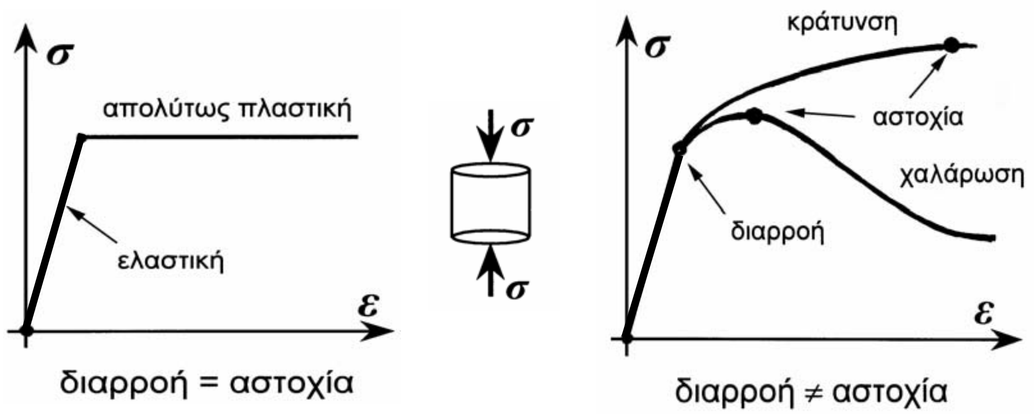
Παράδειγμα : Φόρτιση σε μοναξονική θλίψη



- Στα αρχικά στάδια της φόρτισης, όλα τα υλικά παρουσιάζουν γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά
- Σε μεγαλύτερες τάσεις η συμπεριφορά γίνεται μή-γραμμική (διαρροή), και τελικώς ορισμένοι συνδυασμοί τάσεων οδηγούν σε αστοχία

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Παράδειγμα : Φόρτιση σε μοναξονική θλίψη



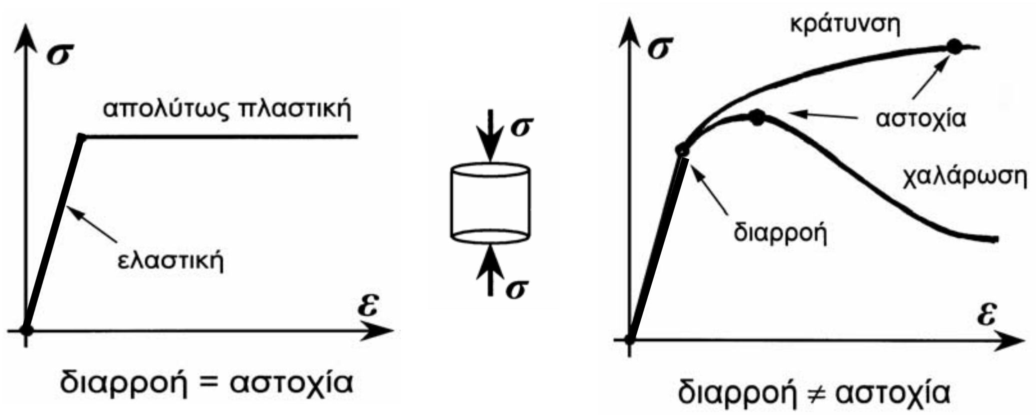
- Οι σχέσεις μεταξύ των τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων ονομάζονται καταστατικοί νόμοι
- Στα εδαφικά υλικά, παραμορφώσεις $(\Delta\varepsilon_{ij})$ προκαλούνται από μεταβολές των ενεργών τάσεων $(\Delta\sigma'_{kl})$

Συνεπώς, στα εδαφικά υλικά οι καταστατικοί νόμοι συνδέουν :

Παραμορφώσεις $(\Delta\varepsilon_{ij})$ με μεταβολές των ενεργών τάσεων $(\Delta\sigma'_{kl})$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Παράδειγμα : Φόρτιση σε μοναξονική θλίψη



- Ο απλούστερος καταστατικός νόμος είναι η γραμμική, ισότροπη ελαστικότητα (ΓΙΕ)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα

Στην γραμμική, ισότροπη ελαστικότητα οι σχέσεις μεταξύ των μεταβολών των ενεργών τάσεων και των αντίστοιχων παραμορφώσεων περιλαμβάνουν δύο σταθερές :

E = μέτρο ελαστικότητας   ν = λόγος του Poisson

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{xx} - \nu\left(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xy}$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{yy} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{yz}$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{zz} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xz}$$

όπου : $G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$ $\Delta\tau_{ij} \equiv \Delta\sigma'_{ij}$ $\Delta\gamma_{ij} \equiv 2\Delta\varepsilon_{ij}$

Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα (ΓΙΕ)

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{xx} - \nu\left(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xy}$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{yy} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{yz}$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{zz} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xz}$$

Παρατηρήσεις :

- Οταν το έδαφος είναι ξηρό οι ενεργές τάσεις μπορούν να αντικατασταθούν με τις ολικές (αφού οι πιέσεις πόρων είναι μηδέν), δηλαδή : $\Delta\sigma'_{ij} = \Delta\sigma_{ij}$
- Οι ορθές τάσεις σχετίζονται μόνον με τις ορθές παραμορφώσεις
- Οι διατμητικές τάσεις σχετίζονται μόνον με τις διατμητικές παραμορφώσεις

Πόρισμα :

Εάν το έδαφος φορτισθεί μόνον με διατμητικές τάσεις (π.χ. σεισμός) ο όγκος του δεν μεταβάλλεται και συνεπώς δεν συμβαίνει καθίζηση της επιφάνειας.

Τούτο δεν επιβεβαιώνεται στην πράξη. Αρα (τουλάχιστον) κατά την σεισμική φόρτιση το έδαφος δεν ακολουθεί την ΙΓΕ

Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{xx} - \nu\left(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xy}$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{yy} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{yz}$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{zz} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xz}$$

Παράγωγα μεγέθη των ελαστικών σταθερών (E, ν) :

Μέτρο διάτμησης : $G = \dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}$

Μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης : $D = \dfrac{E\left(1-\nu\right)}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}$

Μέτρο ισότροπης συμπίεσης : $K = \dfrac{E}{3\left(1-2\nu\right)}$

Εκφραση των καταστατικών σχέσεων της ΓΙΕ ως προς τις αναλλοίωτες

Οι καταστατικές σχέσεις της ΓΙΕ δίνουν :

$$\begin{cases} \Delta p' = K\ \Delta\varepsilon_{vol} \\ \Delta q = 3G\ \Delta\varepsilon_q \end{cases}$$

όπου :

$$\Delta p' = \frac{1}{3}\left(\Delta\sigma'_1 + \Delta\sigma'_2 + \Delta\sigma'_3\right)$$

$$\Delta q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2\right)^2 + \left(\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3\right)^2 + \left(\Delta\sigma_3 - \Delta\sigma_1\right)^2\right]^{1/2}$$

και :

$$\Delta\varepsilon_{vol} = \Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3$$

$$\Delta\varepsilon_q = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\left(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_3\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_2 - \Delta\varepsilon_3\right)^2\right]^{1/2}$$

Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα

Καταστατικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων σε μητρωική μορφή : $\mathbf{\Delta\varepsilon} = \mathbf{S} : \mathbf{\Delta\sigma}'$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_{xx} \\ \Delta\sigma'_{yy} \\ \Delta\sigma'_{zz} \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

ή (με αντιστροφή) : $\mathbf{\Delta\sigma}' = \mathbf{C} : \mathbf{\Delta\varepsilon}$ Προσοχή : για ν = 0.5 το **S** δεν αντιστρέφεται

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_{xx} \\ \Delta\sigma'_{yy} \\ \Delta\sigma'_{zz} \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{zx} \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

όπου : $A = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{xx} - \nu\left(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xy}$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{yy} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{yz}$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{zz} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xz}$$

Ογκομετρική παραμόρφωση : $\Delta\varepsilon_{vol} \equiv \Delta\varepsilon_{xx} + \Delta\varepsilon_{yy} + \Delta\varepsilon_{zz}$

Με άθροιση των ορθών παραμορφώσεων προκύπτει : $(\Delta\sigma'_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta u)$

$$\Delta\varepsilon_{vol} = \frac{1}{3K}\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}\right) = \frac{1}{3K}\left(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}\right) - \frac{1}{K}\Delta u$$

Πόρισμα : Στην ΓΙΕ, κατά την αστράγγιστη φόρτιση εδαφών ($\Delta\varepsilon_{vol}=0$), η πίεση πόρων μεταβάλλεται κατά :

$$\Delta u = \frac{1}{3}\left(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}\right)$$

Γραμμική Ισότροπη Ελαστικότητα (ΓΙΕ) και πιέσεις πόρων

Κατά την αστράγγιστη φόρτιση εδαφών ($\Delta\varepsilon_{vol}=0$), η πίεση πόρων μεταβάλλεται κατά :

$$\Delta u = \frac{1}{3}\left(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}\right) = \Delta p$$

- Η ανάπτυξη των ανωτέρω υπερπιέσεων πόρων οφείλεται στην απαίτηση μηδενικής μεταβολής του όγκου του εδάφους
- Οι υπερπιέσεις πόρων βαθμιαία εκτονώνονται με συνέπεια την μεταβολή των ενεργών τάσεων και χρονικά εξελισσόμενες παραμορφώσεις (στερεοποίηση του εδάφους)

Πορίσματα :

Σύμφωνα με την ΓΙΕ, εάν το έδαφος φορτισθεί μόνον με διατμητικές τάσεις (π.χ. σεισμός) :

1. Ο όγκος του δεν μεταβάλλεται και συνεπώς δεν συμβαίνει καθίζηση της επιφάνειας
2. Δεν παρατηρούνται μεταβολές των υδατικών πιέσεων πόρων

Και τα δύο ανωτέρω πορίσματα δεν επιβεβαιώνονται στην πράξη. Αρα (τουλάχιστον) κατά την σεισμική φόρτιση το έδαφος δεν ακολουθεί την ΓΙΕ

Στα φυσικά εδάφη : $\Delta u = \Delta p + \alpha\,\Delta q$ (συμμετοχή και των διατμητικών τάσεων Δq)

α = συντελεστής (όχι πάντα σταθερός)

Εκφραση των καταστατικών σχέσεων της Γραμμικής Ισότροπης Ελαστικότητας ως προς τις ολικές τάσεις

1. Περίπτωση ξηρού εδάφους ή κορεσμένου εδάφους με πλήρη στράγγιση :

Ισχύει : ενεργές τάσεις = ολικές τάσεις $\Rightarrow$ $\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma'_{ij}$ και συνεπώς :

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma_{xx} - \nu\left(\Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xy}$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma_{yy} - \nu\left(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{yz}$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma_{zz} - \nu\left(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xz}$$

όπου : $G = \dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}$

Οι ανωτέρω σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση κορεσμένου εδάφους, όταν οι συνθήκες φόρτισης είναι αρκετά αργές ώστε να επιτυγχάνεται πλήρης στράγγιση, δηλαδή φόρτιση χωρίς να αναπτύσσονται υπερπιέσεις πόρων: Δu=0.

1. Περίπτωση ξηρού εδάφους ή κορεσμένου εδάφους με πλήρη στράγγιση :

Μητρωική έκφραση των σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων : $\mathbf{\Delta\varepsilon = S : \Delta\sigma}$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{xx} \\ \Delta\sigma_{yy} \\ \Delta\sigma_{zz} \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

ή (με αντιστροφή) : $\mathbf{\Delta\sigma = C : \Delta\varepsilon}$ Προσοχή : για ν = 0.5 το **S** δεν αντιστρέφεται

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_{xx} \\ \Delta\sigma'_{yy} \\ \Delta\sigma'_{zz} \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{zx} \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

όπου : $A = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Εκφραση των καταστατικών σχέσεων της ΓΙΕ ως προς τις ολικές τάσεις

2. Περίπτωση κορεσμένου εδάφους υπό αστράγγιστες συνθήκες :

(δηλαδή φόρτιση του εδάφους χωρίς μεταβολή του όγκου του)

$$\Delta\sigma'_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta u \qquad \text{όπου :} \qquad \Delta u = \frac{1}{3}\left(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}\right)$$

Αντικατάσταση στις σχέσεις ελαστικότητας :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{xx} - \nu\left(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \\ \Delta\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{yy} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \\ \Delta\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{zz} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy}\right)\right] \\ \Delta\gamma_{ij} &= \frac{1}{G}\Delta\tau_{ij} \end{aligned}\right\}$$

Δίνει :

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_u}\left[\Delta\sigma_{xx} - \nu_u\left(\Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}\right)\right] \\ \Delta\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_u}\left[\Delta\sigma_{yy} - \nu_u\left(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{zz}\right)\right] \\ \Delta\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E_u}\left[\Delta\sigma_{zz} - \nu_u\left(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy}\right)\right] \\ \Delta\gamma_{ij} &= \frac{1}{G}\Delta\tau_{ij} \end{aligned}$$

όπου : $E_u = \dfrac{3E}{2(1+\nu)} = 3G \qquad \nu_u = \dfrac{1}{2}$

Εκφραση των καταστατικών σχέσεων της ΓΙΕ ως προς τις ολικές τάσεις

2. Περίπτωση κορεσμένου εδάφους υπό αστράγγιστες συνθήκες :
(δηλαδή φόρτιση του εδάφους χωρίς μεταβολή του όγκου του)

Μητρωική έκφραση των σχέσεων τάσεων – παραμορφώσεων : $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}_u : \Delta\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_u} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_u & -\nu_u & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_u & 1 & -\nu_u & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_u & -\nu_u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{xx} \\ \Delta\sigma_{yy} \\ \Delta\sigma_{zz} \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Προσοχή :
Το μητρώο $\mathbf{S_u}$ δεν αντιστρέφεται επειδή $\nu_u = 0.5$.
Άρα συχνά τίθεται (κατά προσέγγιση) : $\nu = 0.495$, οπότε με την αντιστροφή προκύπτει:

$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_u : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ Το $\boldsymbol{C}_u$ έχει ίδια μορφή με το $\boldsymbol{C}$, με $\nu = \nu_u$

Μή-γραμμικές σχέσεις τάσεων -παραμορφώσεων

1. Βασισμένες στη θεωρία πλαστικότητας

Περιγράφονται με μαθηματική σχέση της μορφής : $\Delta\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$

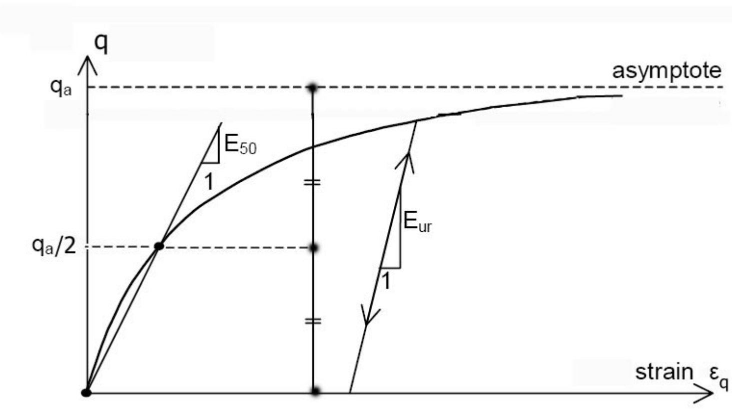
Το μητρώο C δεν είναι σταθερό, αλλά εξαρτάται από τις τάσεις και άλλα μεγέθη

Ο προσδιορισμός του C αποτελεί αντικείμενο της θεωρίας πλαστικότητας

Παράδειγμα : Το μοντέλο Cam-Clay που βασίζεται στη θεωρία της κρίσιμης κατάστασης των αργιλικών υλικών (βλέπε επόμενες διαλέξεις)

2. Ημι-εμπειρικές

Παράδειγμα : Υπερβολικό μοντέλο. Μονοδιάστατο μοντέλο μέσω των αναλλοίωτων μεγεθών διατμητικής τάσης (q) και διατμητικής παραμόρφωσης (ε_q)



$$\varepsilon_q = \frac{q_a}{2\,E_{50}} \frac{q}{(q_a - q)}$$

Παράμετροι :

q_a = αντοχή του υλικού

E_{50} = τέμνον μέτρο ελαστικότητας στο 50% της αντοχής

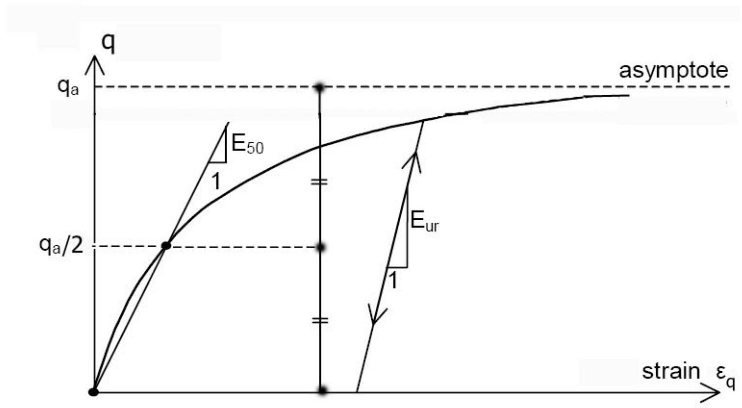
E_{ur} = μέτρο ελαστικότητας κατά την αποφόρτιση - επαναφόρτιση

Μή-γραμμικές σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων

Ημι-εμπειρικές σχέσεις : Το υπερβολικό μοντέλο (Duncan & Chang, 1970)

$$\varepsilon_q = \frac{q_a}{2\,E_{50}} \frac{q}{\left(q_a - q\right)} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\varepsilon_q}{\left(\dfrac{1}{2\,E_{50}}\right) + \left(\dfrac{1}{q_a}\right)\varepsilon_q}$$

δηλαδή σχέση της μορφής (υπερβολή) : $q = \dfrac{\varepsilon}{A + B\,\varepsilon}$



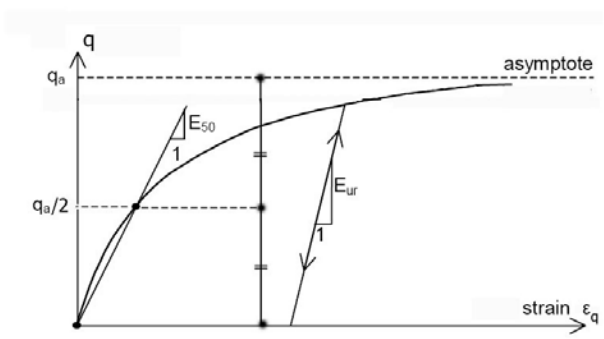
Μή-γραμμικές σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων

Ημι-εμπειρικές σχέσεις : Το υπερβολικό μοντέλο

$$\varepsilon_q = \frac{q_a}{2\,E_{50}} \frac{q}{\left(q_a - q\right)}$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει (με διαφορισμό) η τιμή της εκάστοτε κλίσης της καμπύλης q – ε_q :

$$\frac{dq}{d\varepsilon_q} = 2\,E_{50}\left(1 - \frac{q}{q_a}\right)^2$$



Αρχική κλίση : $\dfrac{dq}{d\varepsilon_q} = 2\,E_{50}$

Κλίση στο q = q_a/2 : $\dfrac{dq}{d\varepsilon_q} = \dfrac{1}{2} E_{50}$

Σχέση τάσεων – παραμορφώσεων :

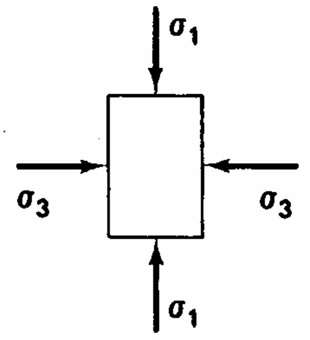
Κατά τη φόρτιση ($\Delta\varepsilon_q$ >0) : $\Delta q = 2\,E_{50}\left(1 - \dfrac{q}{q_a}\right)^2 \Delta\varepsilon_q$

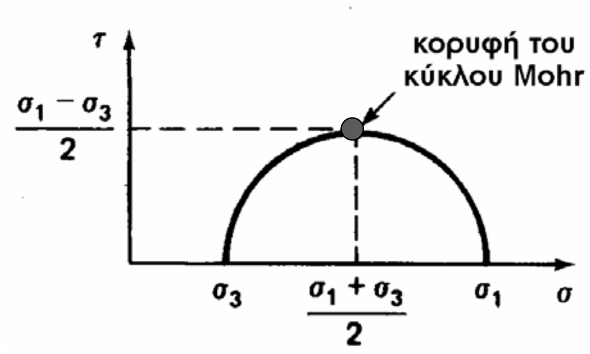
Κατά την αποφόρτιση ($\Delta\varepsilon_q$ <0) : $\Delta q = E_{ur}\ \Delta\varepsilon_q$

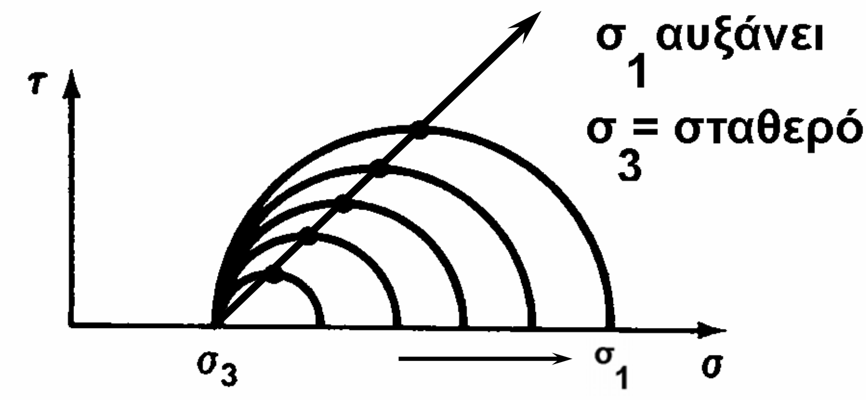
Το μοντέλο μπορεί να γενικευθεί στις τρείς διαστάσεις ως μοντέλο ολικών τάσεων για την αστράγγιστη φόρτιση εδαφών : $\boldsymbol{\Delta\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\Delta\varepsilon}$

Περιγραφή της φόρτισης εδαφικού στοιχείου μέσω της διαδρομής των τάσεων

Παρακολούθηση της εξέλιξης του κύκλου Mohr μέσω της κίνησης της κορυφής του :



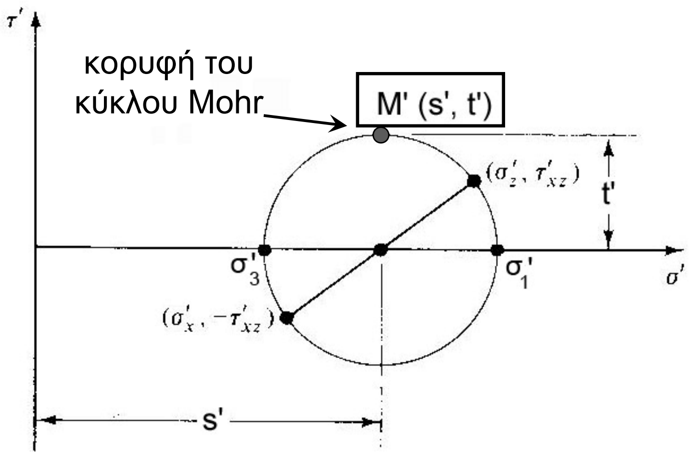


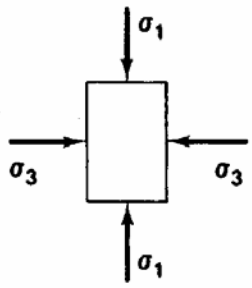


Διαδρομή τάσεων κατά την τριαξονική θλίψη

Αρχικά $\sigma_1 = \sigma_3$ και στη συνέχεια το σ_1 αυξάνει ενώ το σ_3 παραμένει σταθερό

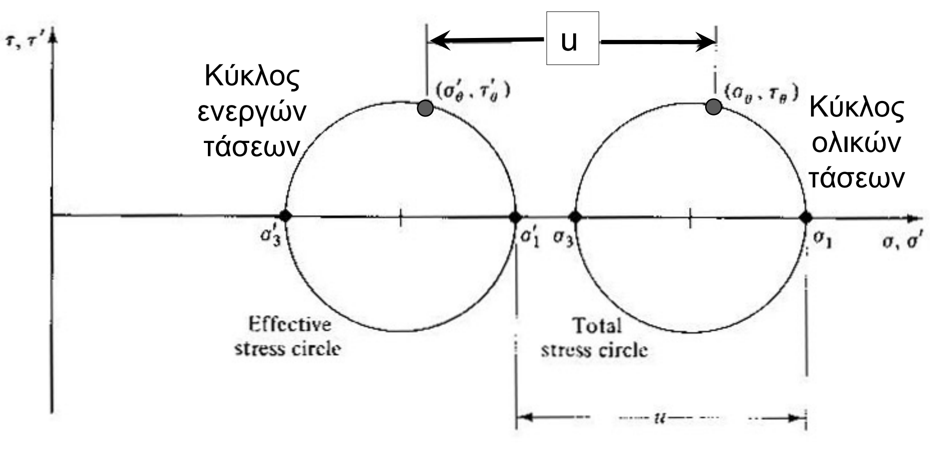
Περιγραφή της φόρτισης εδαφικού στοιχείου μέσω της διαδρομής των τάσεων





$$s' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1' + \sigma_3'\right)$$

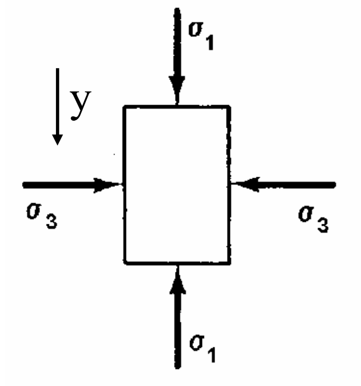
$$t' = t = \frac{1}{2}\left(\sigma_1' - \sigma_3'\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)$$



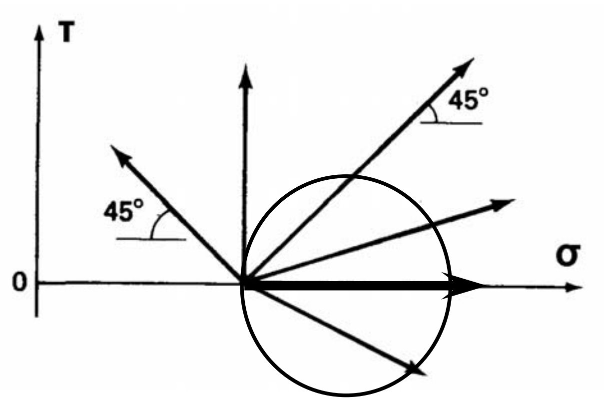
Κύκλος ολικών και ενεργών τάσεων (απέχουν κατά την πίεση πόρων - u)

Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

1. Ισότροπη θλίψη $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$



Διαδρομή τάσεων



$$\Delta\sigma'_{xx} = \Delta\sigma'_{yy} = \Delta\sigma'_{zz} = \Delta\sigma'_c$$

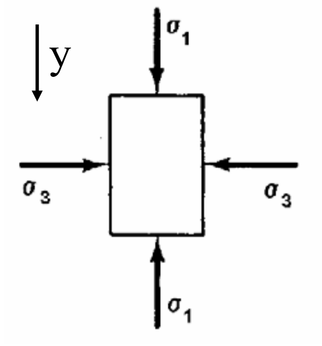
$$\Delta\varepsilon_{xx} = \Delta\varepsilon_{yy} = \Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E}\Delta\sigma'_c \qquad \Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{xz} = 0$$

$$\Delta\varepsilon_{vol} = \frac{1}{K}\Delta\sigma'_c \quad \text{όπου :} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

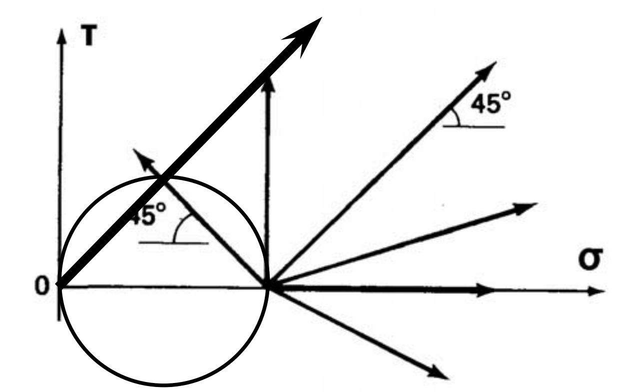
Μέτρο ισότροπης συμπίεσης

Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

2. Μονοδιάστατη θλίψη $(\sigma_2 = \sigma_3 = 0)$



Διαδρομή τάσεων



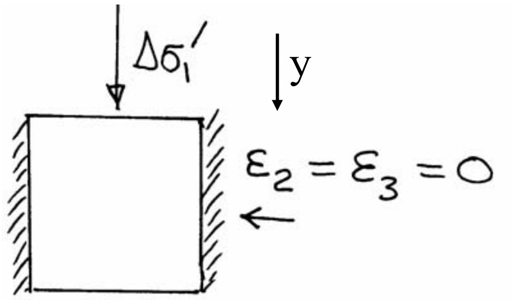
$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\Delta\sigma'_{yy}$$

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \Delta\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\Delta\sigma'_{yy} \qquad \Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{xz} = 0$$

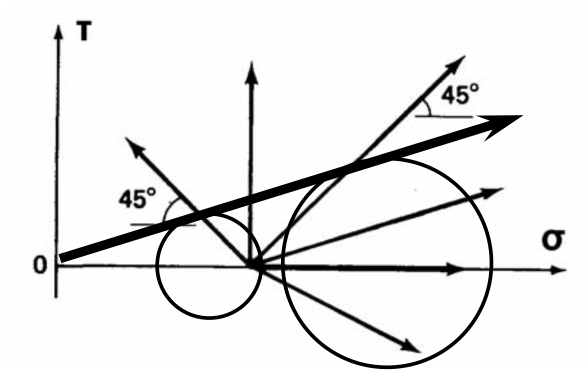
$$\Delta\varepsilon_{vol} = \frac{1}{3K}\Delta\sigma'_{yy} \quad \text{όπου :} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Μέτρο ισότροπης συμπίεσης

3. Μονοδιάστατη παραμόρφωση *(συνέχεια)*



Διαδρομή τάσεων



$$\Delta\varepsilon_{xx} = \Delta\varepsilon_{zz} = \Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{xz} = 0$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{D}\Delta\sigma'_{yy} \quad \text{όπου :} \; D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης

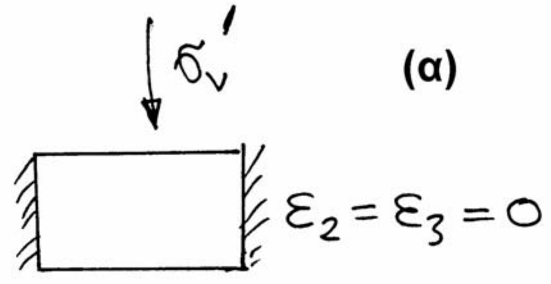
$$\Delta\sigma'_{xx} = \Delta\sigma'_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu}\Delta\sigma'_{yy}$$

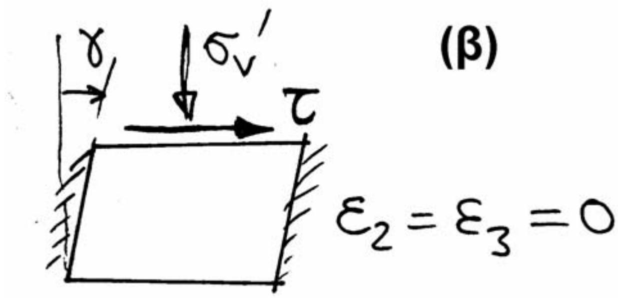
Λόγος μονοδιάστατης παραμόρφωσης : $K_o \equiv \dfrac{\Delta\sigma'_h}{\Delta\sigma'_v} = \dfrac{\Delta\sigma'_{xx}}{\Delta\sigma'_{yy}}$

και με θεώρηση ΓΙΕ : $K_o = \dfrac{\nu}{1-\nu}$

Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

4. Απλή διάτμηση





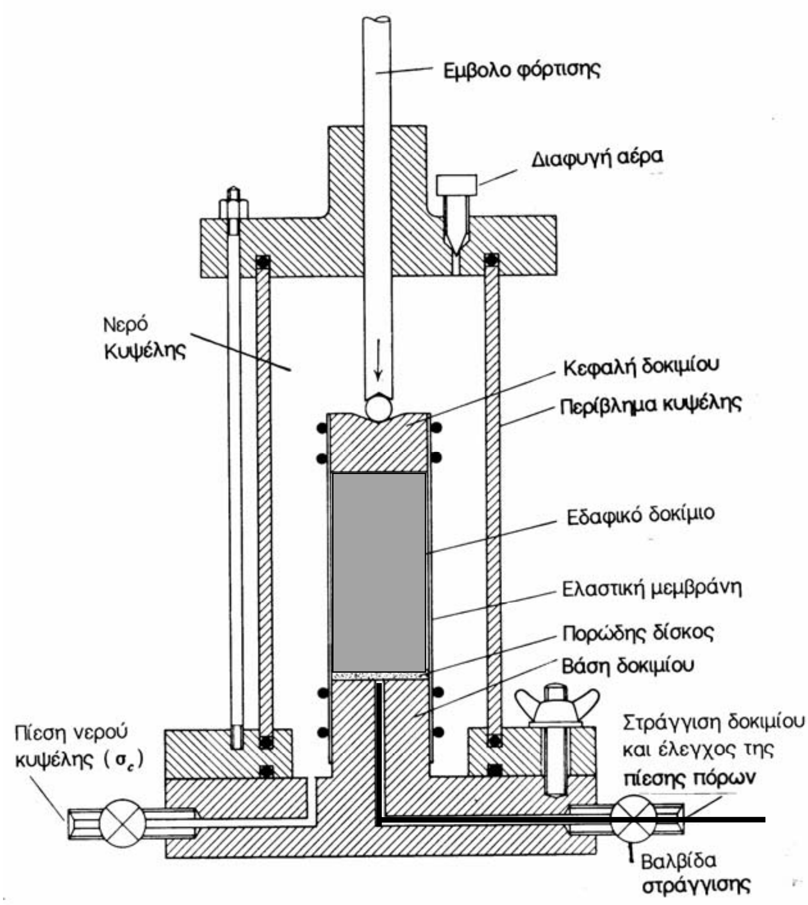
$$\Delta\sigma'_{xx} = \Delta\sigma'_{yy} = \Delta\sigma'_{zz} = 0$$

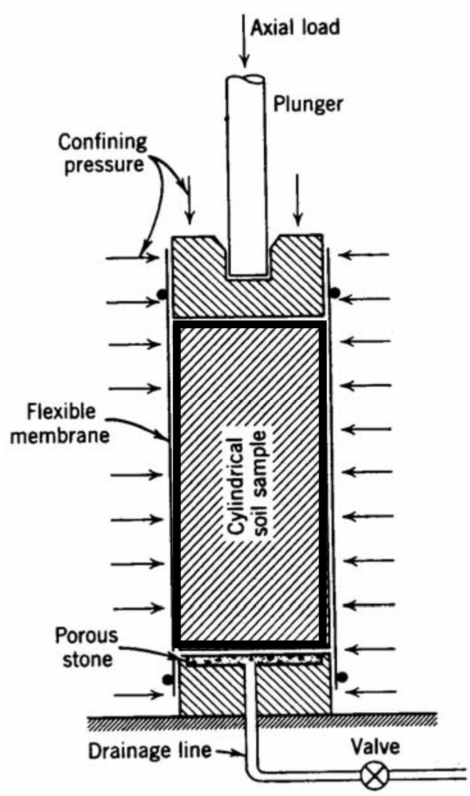
$$\Delta\tau_{xy} = G\,\Delta\gamma_{xy}$$

$$\Delta\tau_{yz} = \Delta\tau_{zx} = 0$$

Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

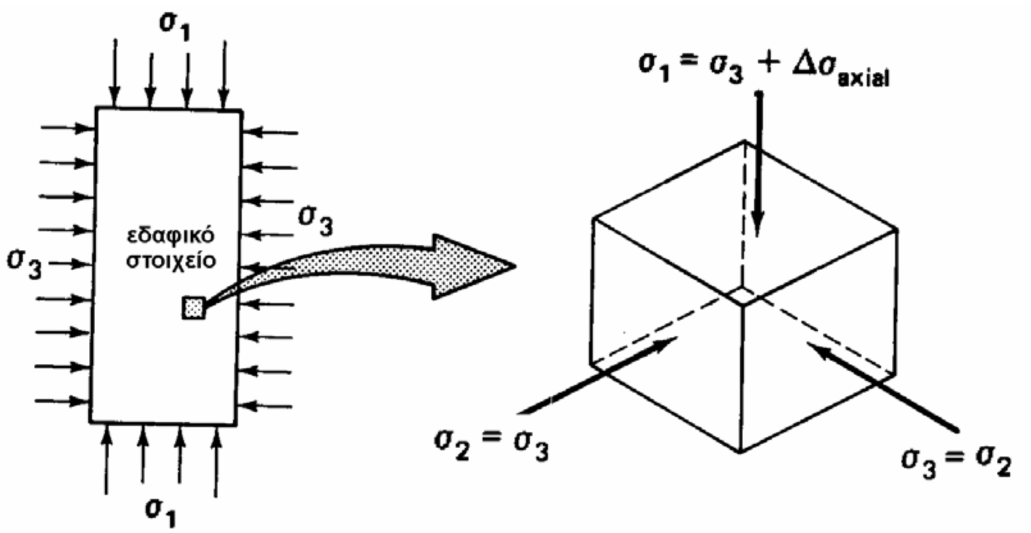
5. Τριαξονική θλίψη





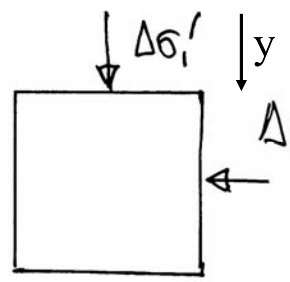
Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

5. Τριαξονική θλίψη



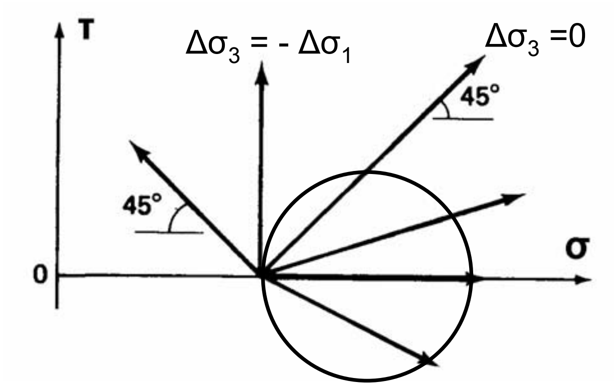
Τυπικοί τρόποι φόρτισης του εδάφους

5. Τριαξονική θλίψη



$\Delta\sigma_2' = \Delta\sigma_3' < \Delta\sigma_1'$

Διαδρομή τάσεων

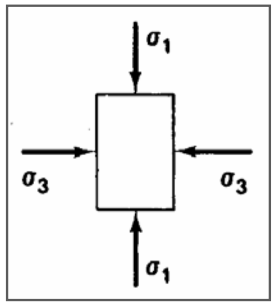


$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{yy} - 2\,\nu\,\Delta\sigma'_{xx}\right]$$

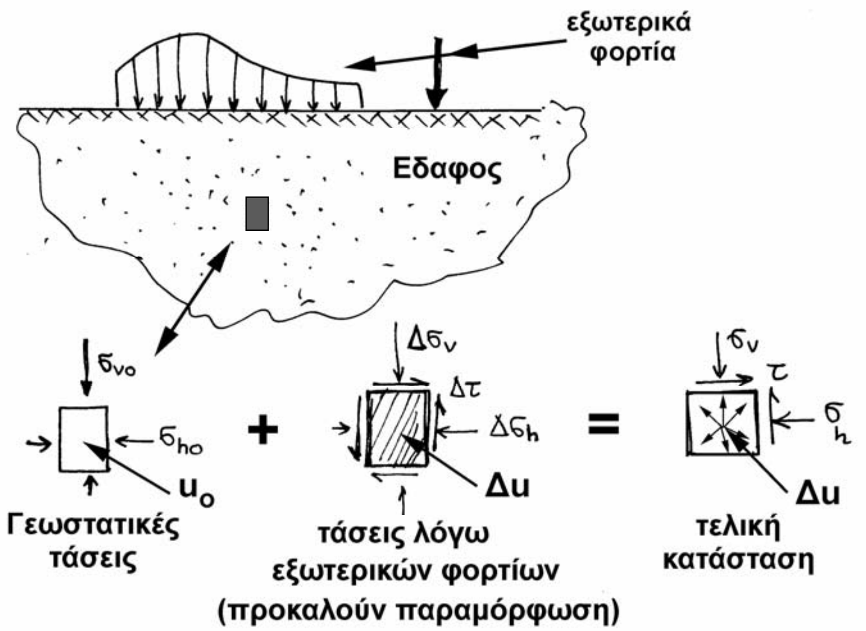
$$\Delta\varepsilon_{xx} = \Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)\Delta\sigma'_{xx} - \nu\,\Delta\sigma'_{yy}\right]$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{xz} = 0$$

Αναλόγως του λόγου $\Delta\sigma_1/\Delta\sigma_3$



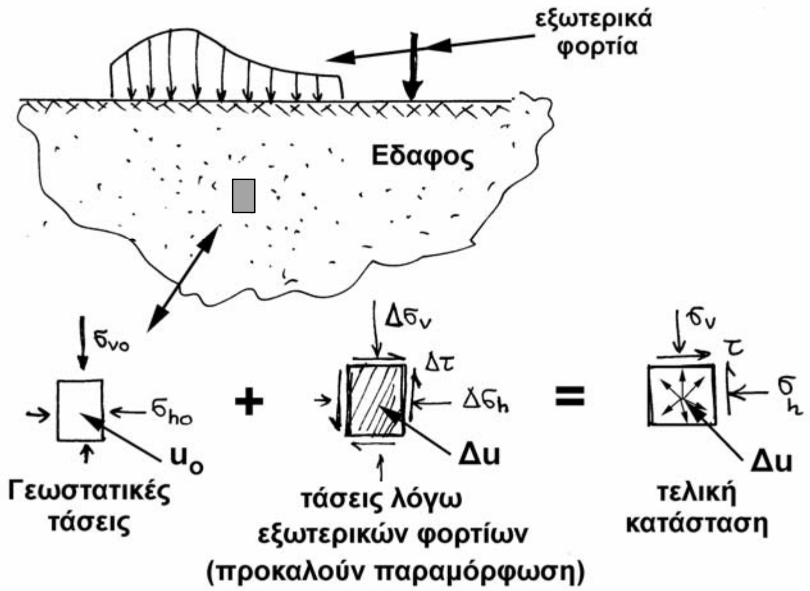
Τάσεις και παραμορφώσεις του εδάφους λόγω επιβολής φορτίων



Λόγω των εξωτερικών φορτίων, στο έδαφος αναπτύσσονται πρόσθετες τάσεις (**Δσ**) και πιέσεις πόρων (Δu) που προκαλούν παραμορφώσεις (**Δε**)

Το θεμελιώδες πρόβλημα :
Ο προσδιορισμός των παραμορφώσεων, μετακινήσεων και τάσεων που προκαλούνται στο έδαφος λόγω των εξωτερικών φορτίων

Τάσεις και παραμορφώσεις του εδάφους λόγω επιβολής φορτίων



Οι αναπτυσσόμενες τάσεις (**Δσ**) δεν εξαρτώνται μόνον από τη φόρτιση αλλά και από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων του εδάφους (**σ-ε**)

Αρα : το πρόβλημα του προσδιορισμού των παραμορφώσεων δεν μπορεί να επιλυθεί μέσω της απλής διαδικασίας :

P -> (**Δσ**, Δu) -> **Δε**

Ο προσδιορισμός των παραμορφώσεων του εδάφους συνήθως απαιτεί τη λύση ενός σύνθετου προβλήματος συνοριακών τιμών με μερικές παραγώγους

1. Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \hat{f}_x = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \hat{f}_y = 0 \\
\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \hat{f}_z = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{ή :} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

2. Σχέσεις μεταξύ ενεργών τάσεων και πιέσεων πόρων :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + u\,\delta_{ij} \qquad \text{ή :} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + u\,\mathbf{I} \qquad (2)$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) : $\boxed{\boldsymbol{\sigma}' \cdot \nabla + \nabla u + \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0}}$

Αγνωστοι : **σ΄** και u (ενεργές τάσεις και πίεση πόρων)

3. Καταστατικές σχέσεις ενεργών τάσεων - παραμορφώσεων :

$\Delta\sigma'_{ij} = C_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl}$ ή : $\mathbf{\Delta\sigma' = C : \Delta\varepsilon}$ όπου : $\Delta\sigma'_{ij} \equiv \sigma'_{ij} - \left(\sigma'_{ij}\right)_o$

Παράδειγμα στην περίπτωση Γραμμικής Ισότροπης Ελαστικότητας:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_{xx} \\ \Delta\sigma'_{yy} \\ \Delta\sigma'_{zz} \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{zx} \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

όπου : $A = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

4. Σχέσεις παραμορφώσεων - μετακινήσεων :

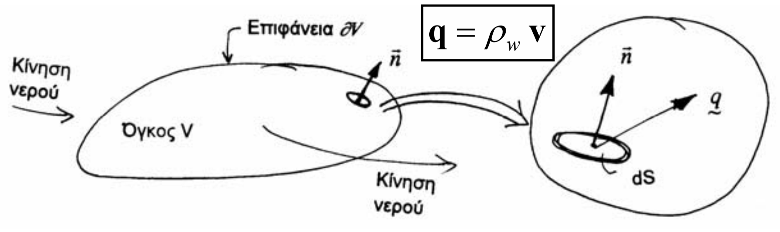
$\Delta\varepsilon_{kl} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ ή : $\mathbf{\Delta\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\right)$

5. Διατήρηση της μάζας του ρευστού των πόρων (προσδιορισμός της πίεσης των πόρων) :

Αρχή διατηρήσεως της μάζας του ρευστού που πληρεί τους εδαφικούς πόρους :

Η καθαρή εισροή νερού σε ένα εδαφικό όγκο ισούται με τον ρυθμό μεταβολής του νερού εντός του όγκου αυτού :

$$\nabla\cdot\left(\rho_w\,\mathbf{v}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(S\,\rho_w\,\eta\right) = 0$$



Μάζα νερού εντός μοναδιαίου όγκου : $m_w = S\,\rho_w\,\eta$

Για κορεσμένο έδαφος (S=1) και ασυμπίεστο ομοιογενές ρευστό (ρ_w=ct) :

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = (1-\eta)\frac{\partial\varepsilon_{vol}}{\partial t} \qquad (1)$$

ρ_w = πυκνότητα του ρευστού των πόρων
v = ανηγμένη ταχύτητα του ρευστού (στη συνολική επιφάνεια – όχι το εμβαδόν των πόρων)
S = βαθμός κορεσμού
η = πορώδες
ε_{vol} = ογκομετρική παραμόρφωση

5. Σχέσεις προσδιορισμού της πίεσης των πόρων (u) :

Καταστατική σχέση ροής (νόμος Darcy) : $\mathbf{v} = -\mathbf{k} \cdot \nabla h$ (2)

Ορισμός της πιεζομετρικής στάθμης (h) : $h = z + \dfrac{u}{\gamma_w}$ $\quad h_s = z + \dfrac{u_s}{\gamma_w}$

Στην υδροστατική κατάσταση : $h = h_s = ct \Rightarrow \nabla h_s = 0 \Rightarrow \nabla u_s = -\gamma_w \nabla z$

Οπότε : $\nabla h = \dfrac{1}{\gamma_w} \nabla(u - u_s)$ (3)

Οι σχέσεις (1), (2), (3) δίνουν για k = ct : $\nabla^2 u + \dfrac{\gamma_w}{k}(1-\eta)\dfrac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} = 0$

γ_w = ειδικό βάρος του ρευστού των πόρων
v = ανηγμένη ταχύτητα του ρευστού (στη συνολική επιφάνεια – όχι το εμβαδόν των πόρων)
k = τανυστής διαπερατότητας. Για σταθερή διαπερατότητα (k) : $\mathbf{k} = k\,\mathbf{I}$
h = πιεζομετρική στάθμη
h_s = πιεζομετρική στάθμη στην υδροστατική κατάσταση (= σταθερή)
u_s = υδροστατική πίεση πόρων
u = πίεση πόρων

5. Σχέσεις προσδιορισμού της πίεσης των πόρων (u) :

$$\nabla^2 u + \frac{\gamma_w}{k}(1-\eta)\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} = 0$$

Η διαφορική εξίσωση διατήρησης της μάζας δεν μπορεί να επιλυθεί ως προς την πίεση πόρων (u) επειδή είναι συζευγμένη με τις εδαφικές παραμορφώσεις (ε_{vol}). Συνεπώς, απαιτείται η επίλυση των τεσσάρων εξισώσεων (τρείς εξισώσεις ισορροπίας και μία εξίσωση διατήρησης της μάζας) για τον προσδιορισμό των τριών μετακινήσεων (u_x, u_y, u_z) και της πίεσης πόρων (u).

Εξισώσεις ισορροπίας : $\boldsymbol{\sigma}' \cdot \nabla + \nabla u + \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$

Συνοριακές συνθήκες :

(α) Τάσεων ή/και μετακινήσεων στο σύνορο : $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{T}}$ ή : $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$

(β) Πιέσεων πόρων ή/και παροχών στο σύνορο : $u = \hat{u}$ ή : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \hat{q}_n = \rho_w \hat{v}_n$

Η επίλυση του συνδυασμού των ανωτέρω σχέσεων απαιτεί προηγμένες αριθμητικές μεθόδους (π.χ. πεπερασμένα στοιχεία)

Σε ορισμένες περιπτώσεις απλής γεωμετρίας και φόρτισης και με την παραδοχή γραμμικής ελαστικότητας υπάρχουν αναλυτικές λύσεις

5. Σχέσεις προσδιορισμού της πίεσης των πόρων (u) :

Ειδικές περιπτώσεις :

1. Εάν θεωρηθεί ότι ο εδαφικός σκελετός είναι απαραμόρφωτος ($\varepsilon_{vol} = 0$) ή ότι η ροή είναι μόνιμη ($\partial / \partial t = 0$) :

$$\nabla^2 u + \frac{\gamma_w}{k}(1-\eta)\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = 0$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση (εξίσωση Laplace) μπορεί να επιλυθεί ώστε να υπολογισθεί η πίεση πόρων (u). Στη συνέχεια, επιλύονται (ανεξάρτητα) οι εξισώσεις ισορροπίας για τον προσδιορισμό των μετακινήσεων, παραμορφώσεων και τάσεων.

2. Μονοδιάστατη στερεοποίηση με σταθερή ολική τάση (σ = ct) - Θεωρία Terzaghi :

$$\frac{\partial \varepsilon_{vol}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{D}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Οπότε, η εξίσωση διατηρήσεως της μάζας δίνει :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\gamma_w}{k\,D}(1-\eta)\frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad c\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{όπου :} \quad c = \frac{k\,D}{\gamma_w(1-\eta)}$$

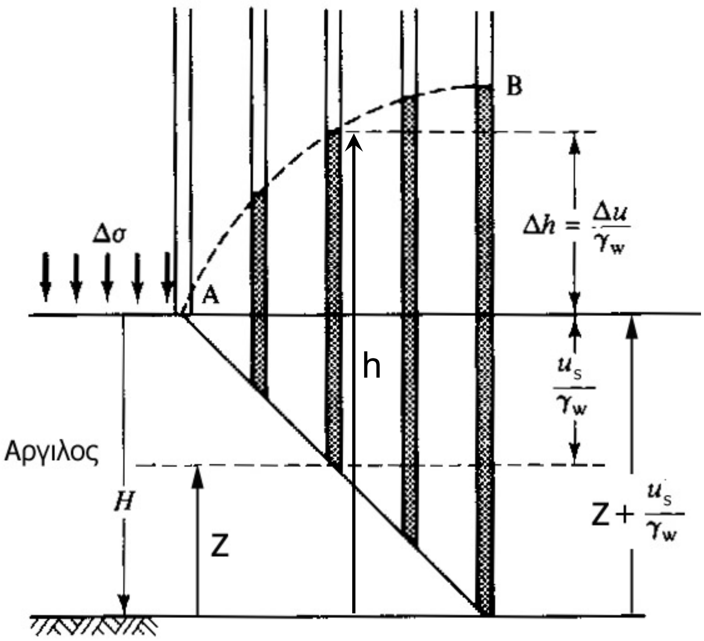
Εξίσωση διάχυσης, c = συντελεστής στερεοποίησης

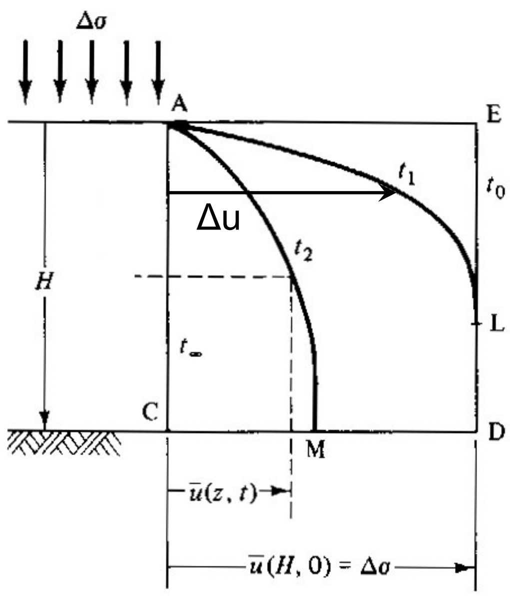
---

2. Μονοδιάστατη στερεοποίηση με σταθερή ολική τάση (θεωρία Terzaghi) :

$$h = z + \frac{u}{\gamma_w}$$

$$c\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$





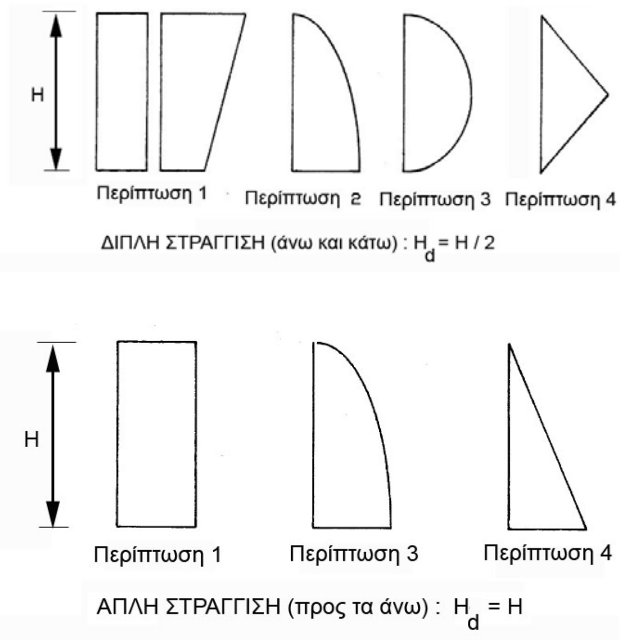
Υπολογισμός της χρονικής εξέλιξης των καθιζήσεων στερεοποιήσεως (ρ_c) :

$$\rho_c(t) = U(t)\ \rho_c(t=\infty)$$

$\rho_c(t) =$ καθίζηση την χρονική στιγμή t

$\rho_c(t=\infty) =$ συνολική καθίζηση στερεοποιήσεως

$U(t) =$ συντελεστής στερεοποιήσεως

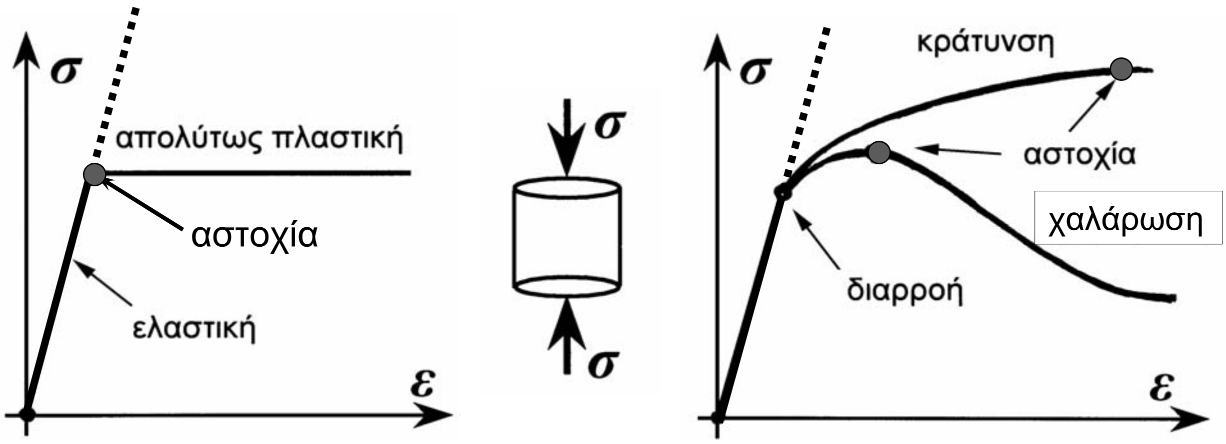


Συντελεστής στερεοποιήσεως (U) συναρτήσει του T_V

Χρονικός παράγων T_V	Τιμές του μέσου συντελεστή στερεοποιήσεως U (%)			
	Περίπτωση 1	Περίπτωση 2	Περίπτωση 3	Περίπτωση 4
0.004	7.14	6.49	0.98	0.80
0.008	10.09	8.62	1.95	1.60
0.012	12.36	10.49	2.92	2.40
0.020	15.96	13.67	4.81	4.00
0.028	18.88	16.38	6.67	5.60
0.036	21.40	18.76	8.50	7.20
0.048	24.72	21.96	11.17	9.69
0.060	27.64	24.81	13.76	11.99
0.072	30.28	27.43	16.28	14.36
0.083	32.51	29.67	18.52	16.51
0.100	35.68	32.88	21.87	19.77
0.125	39.89	36.54	26.54	24.42
0.150	43.70	41.12	30.93	28.86
0.175	47.18	44.73	35.07	33.06
0.200	50.41	48.09	38.95	37.04
0.250	56.22	54.17	46.03	44.32
0.300	61.32	59.50	52.30	50.78
0.350	65.82	64.21	57.83	56.49
0.400	69.79	68.36	62.73	61.54
0.500	76.40	76.28	70.88	69.95
0.600	81.56	80.69	77.25	76.52
0.800	88.74	88.21	86.11	85.66
1.000	93.13	92.80	91.52	91.25
1.500	98.00	97.90	97.53	97.45
2.000	99.42	99.39	99.28	99.26

Διατμητική αντοχή του εδάφους

Παράδειγμα : Φόρτιση σε μοναξονική θλίψη



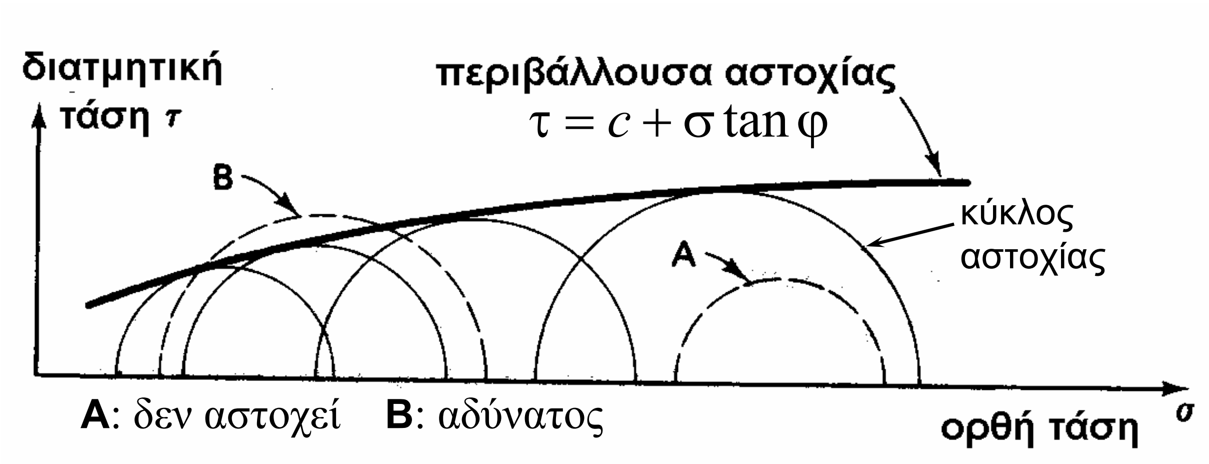
- Στα αρχικά στάδια της φόρτισης, όλα τα υλικά παρουσιάζουν γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά
- Σε μεγαλύτερες τάσεις η συμπεριφορά γίνεται μή-γραμμική (διαρροή), και τελικώς ορισμένοι συνδυασμοί τάσεων οδηγούν σε αστοχία

Αστοχία : Η κατάσταση κατά την οποία το έδαφος έχει φθάσει την αντοχή του και δεν μπορεί να αναλάβει πρόσθετα φορτία (δηλαδή δεν μπορεί να αναλάβει μεγαλύτερες τάσεις)

Διατμητική αντοχή του εδάφους

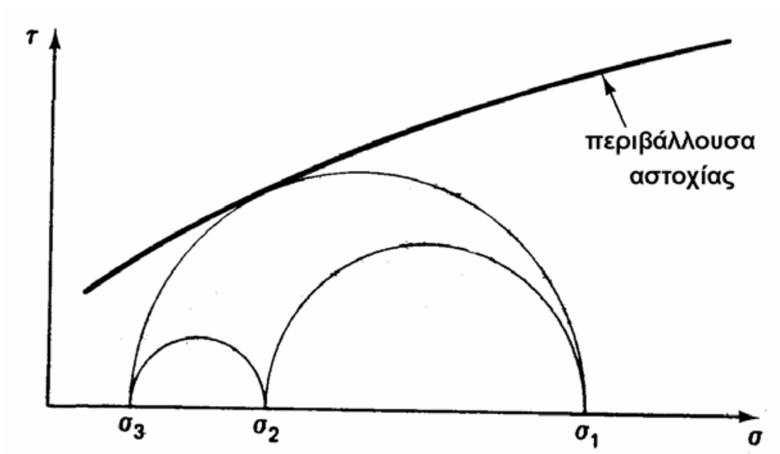
- Η καμπύλη $\tau_{ff} = f(\sigma_{ff})$ είναι ιδιότητα του υλικού και ονομάζεται περιβάλλουσα αστοχίας
- Τα κριτήρια αστοχίας καθορίζουν το σχήμα και την θέση της περιβάλλουσας αστοχίας για κάθε υλικό
- Το κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb ορίζει ως περιβάλλουσα αστοχίας την ευθεία γραμμή : $\tau = c + \sigma \tan\varphi$

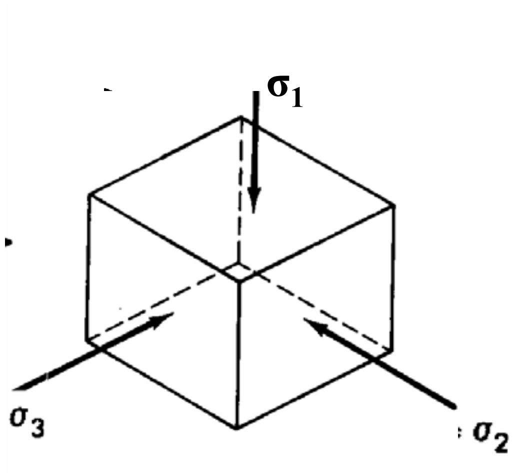
που ορίζεται από δύο παραμέτρους : c = συνοχή , φ = γωνία τριβής



Κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb

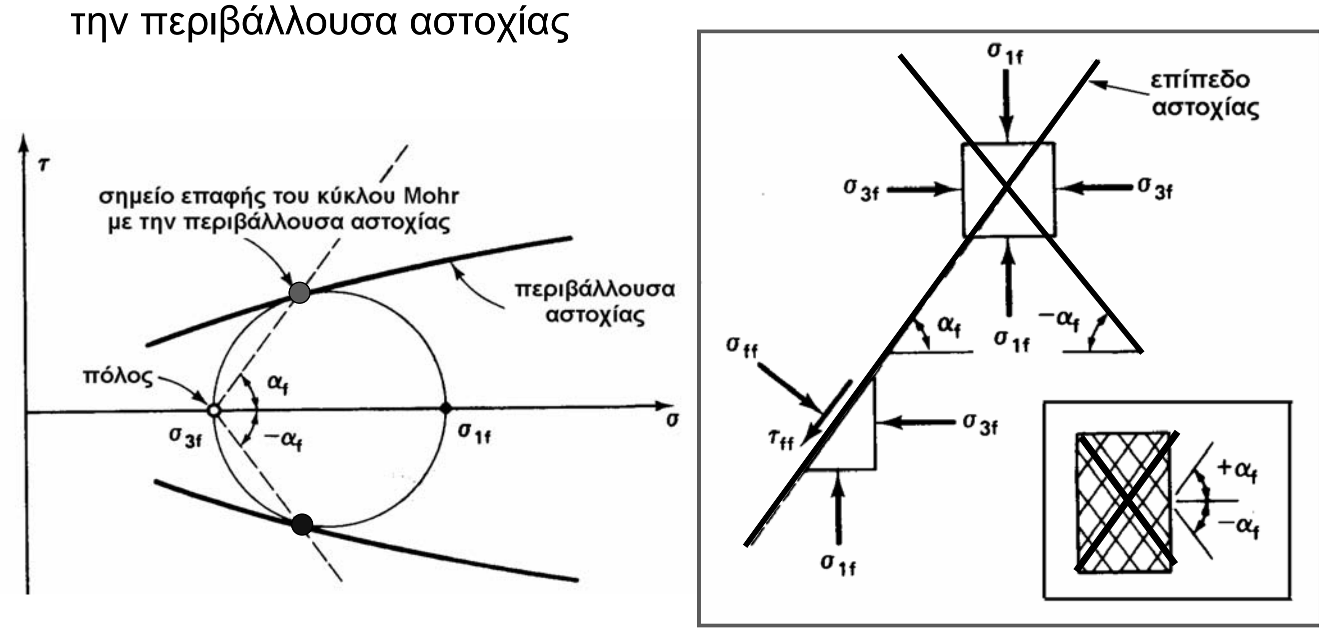
Το κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb δεν εξαρτάται από την ενδιάμεση κύρια τάση σ_2





Κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb

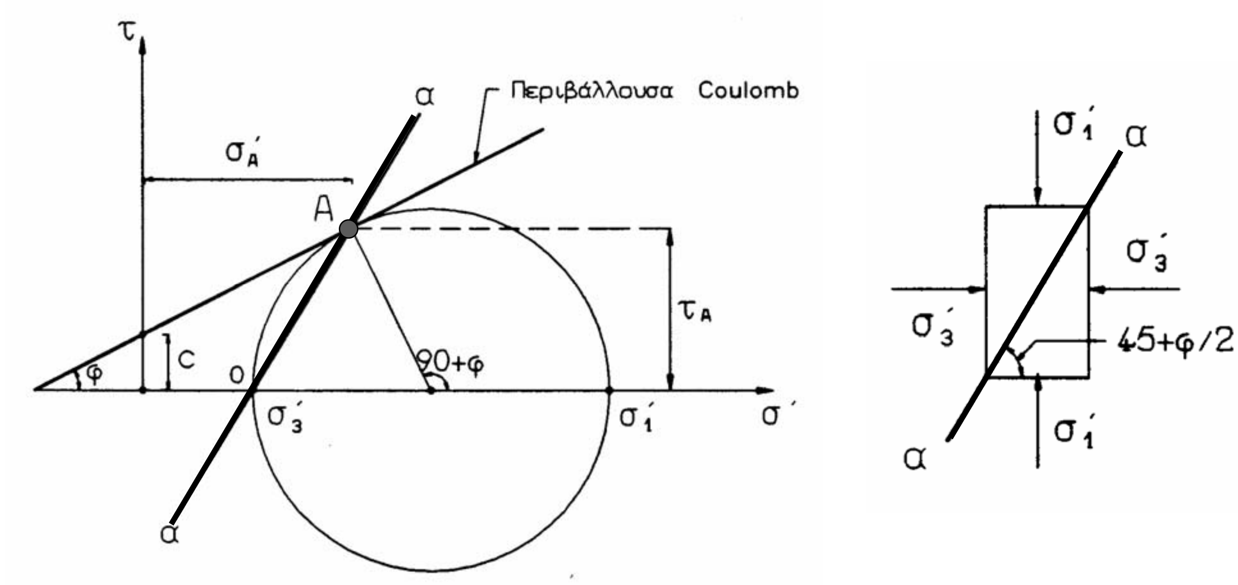
1. Ενα εδαφικό στοιχείο αστοχεί αν ο κύκλος Mohr εφάπτεται στην περιβάλλουσα αστοχίας : $\tau = c + \sigma \tan\varphi$
2. Το επίπεδο αστοχίας αντιστοιχεί στο σημείο επαφής του κύκλου με την περιβάλλουσα αστοχίας



Ζεύγος επιπέδων αστοχίας κατά το κριτήριο Mohr-Coulomb

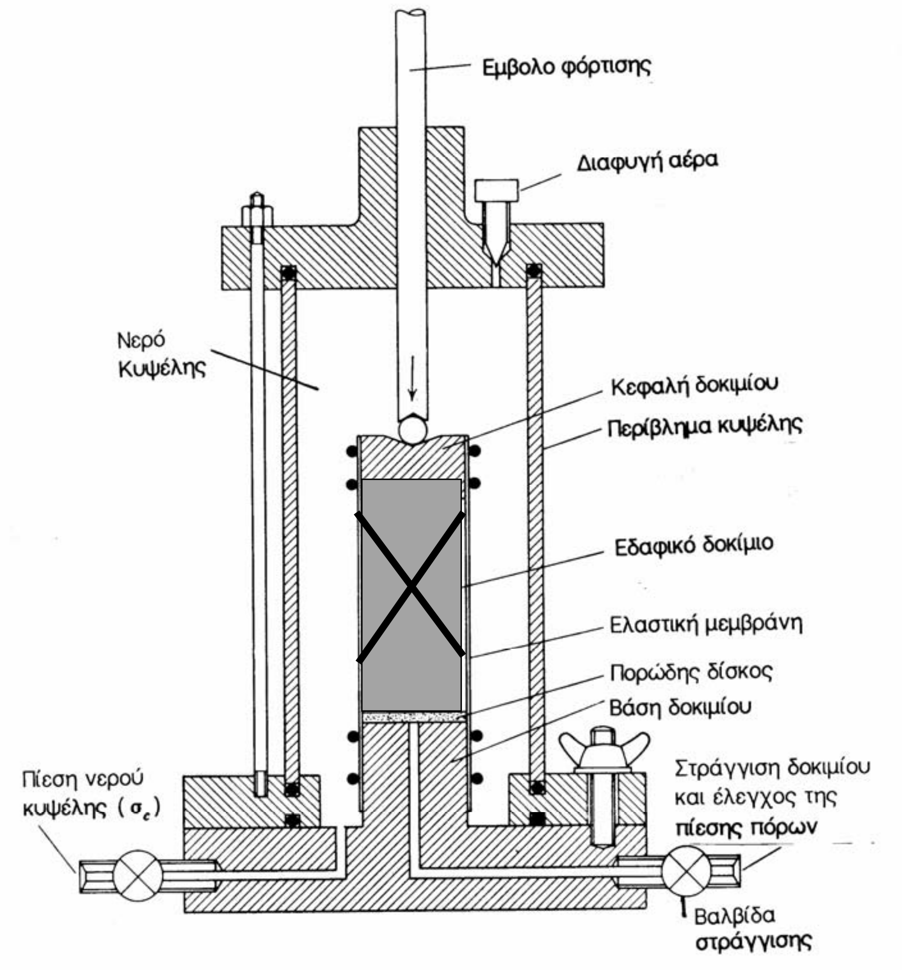
Κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb

1. Ενα εδαφικό στοιχείο αστοχεί αν ο κύκλος Mohr εφάπτεται στην περιβάλλουσα αστοχίας
2. Το επίπεδο αστοχίας αντιστοιχεί στο σημείο επαφής του κύκλου με την περιβάλλουσα αστοχίας

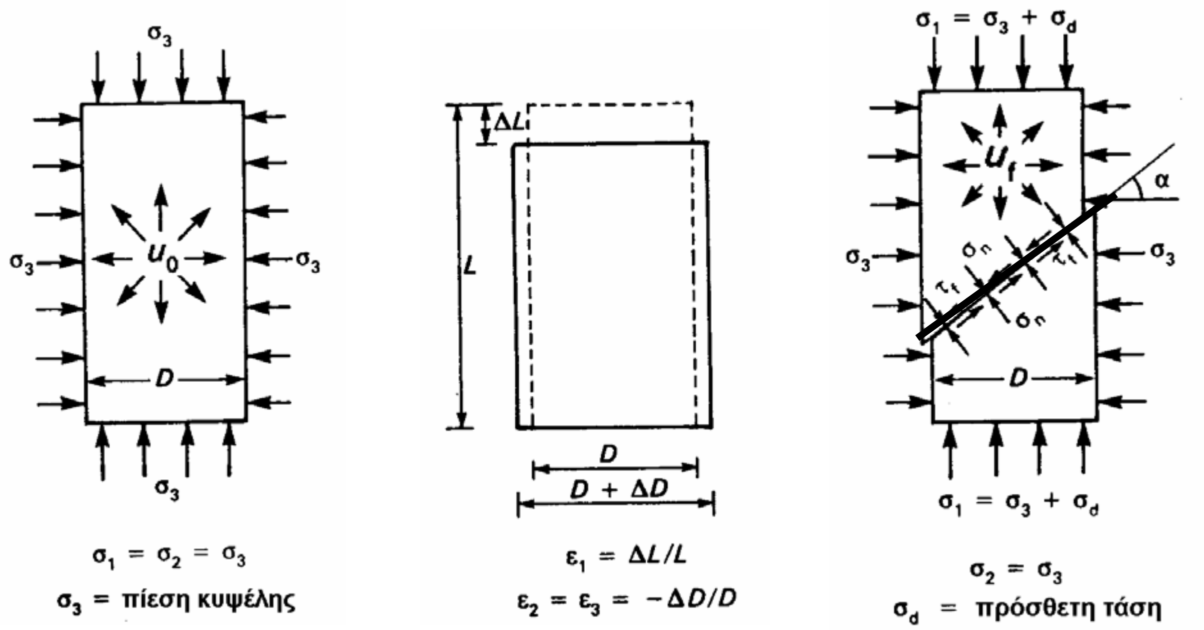


Το επίπεδο αστοχίας σχηματίζει γωνία 45+φ/2 με το επίπεδο της σ_1

Προσδιορισμός της περιβάλλουσας αστοχίας με την τριαξονική δοκιμή



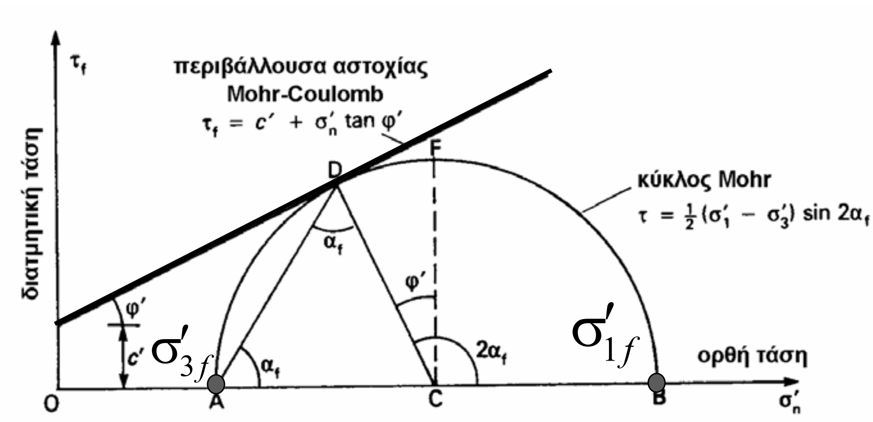
Προσδιορισμός της περιβάλλουσας αστοχίας με την τριαξονική δοκιμή

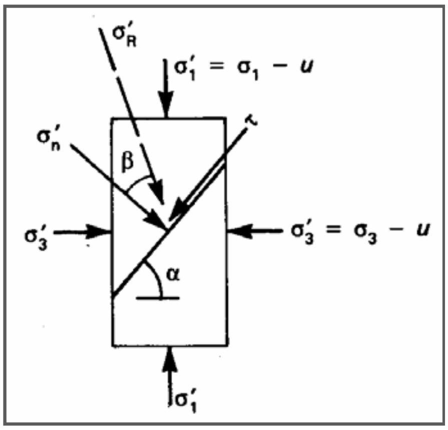


1. Επιβολή ομοιόμορφης πίεσης
2. Αύξηση της κατακόρυφης τάσης μέχρι την αστοχία του δοκιμίου

Αναλόγως των συνθηκών στράγγισης, μπορεί να μεταβάλλεται η πίεση πόρων (u) κατά τη διάρκεια της δοκιμής

Προσδιορισμός της περιβάλλουσας αστοχίας με την τριαξονική δοκιμή





Μία δοκιμή δεν αρκεί για τον προσδιορισμό της περιβάλλουσας, εκτός εάν το υλικό δεν έχει συνοχή (π.χ. άμμος)

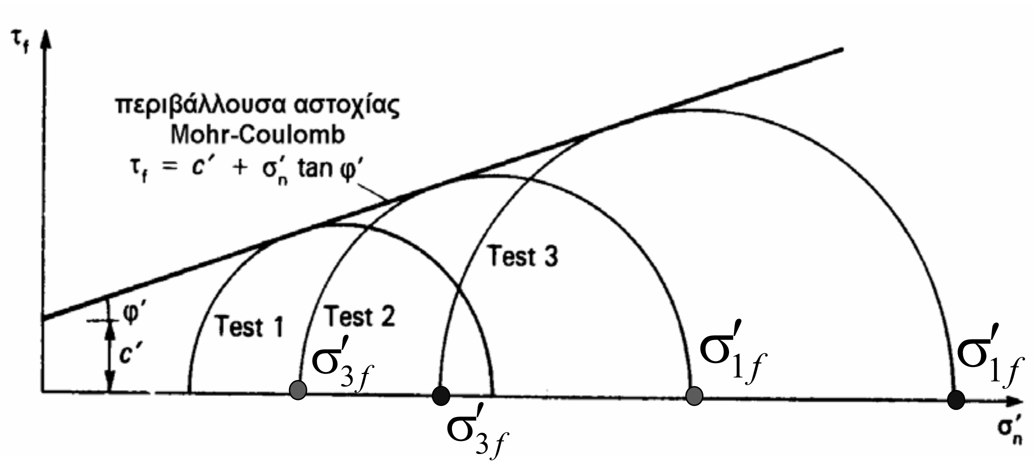
Εάν το υλικό δεν έχει συνοχή (c=0) :

$$\tau_{ff} = \sigma'_{ff} \tan\varphi \;\wedge\; \alpha = 45 + \frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\sigma'_{1f}}{\sigma'_{3f}} = \tan^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

Προσοχή :

Το κριτήριο αστοχίας εκφράζεται ως προς τις ενεργές τάσεις

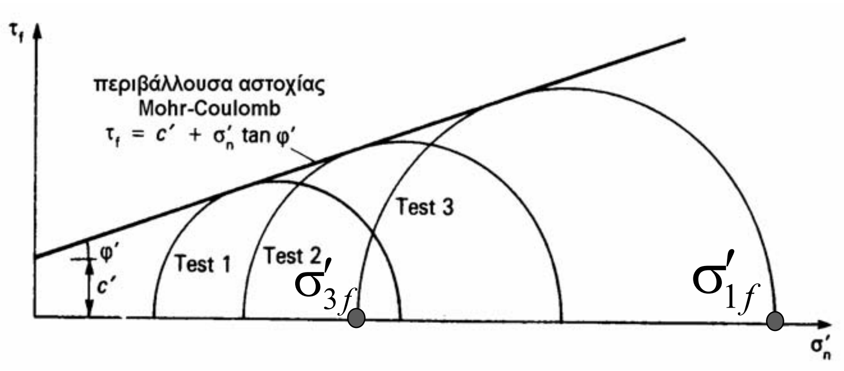
Προσδιορισμός της περιβάλλουσας αστοχίας με την τριαξονική δοκιμή



Εάν το υλικό έχει και συνοχή, απαιτούνται τουλάχιστον δύο δοκιμές, για να προσδιορισθεί η κοινή εφαπτομένη στους δύο κύκλους Mohr κατά την αστοχία

Εάν το υλικό έχει και συνοχή :

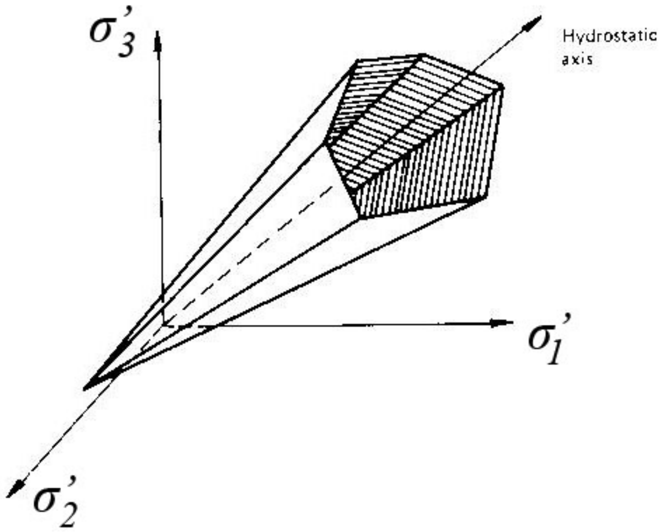
$$\boxed{\sigma'_{1f} = \sigma'_{3f} \tan^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) + 2\,c\,\tan\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)}$$



Περιβάλλουσα αστοχίας Mohr - Coulomb

Σε χώρο ορθής και διατμητικής τάσης (σ' , τ)

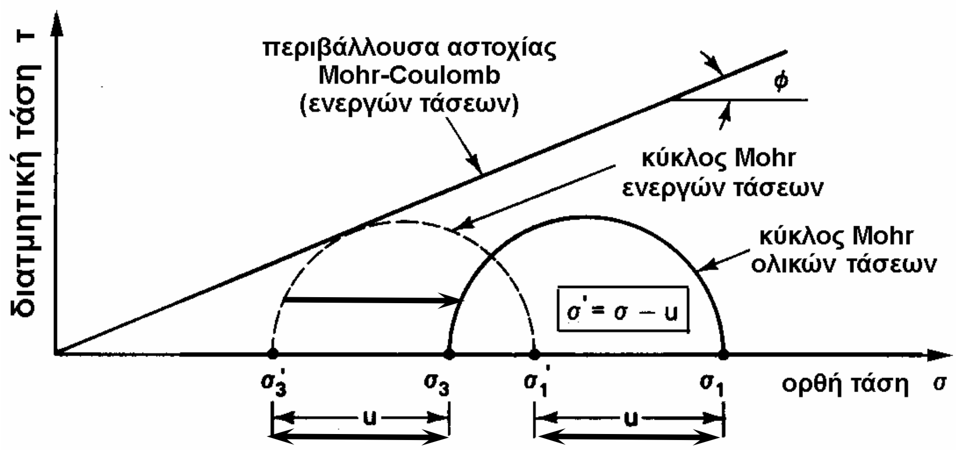
Σε χώρο κυρίων τάσεων (σ'$_1$, σ'$_2$, σ'$_3$)

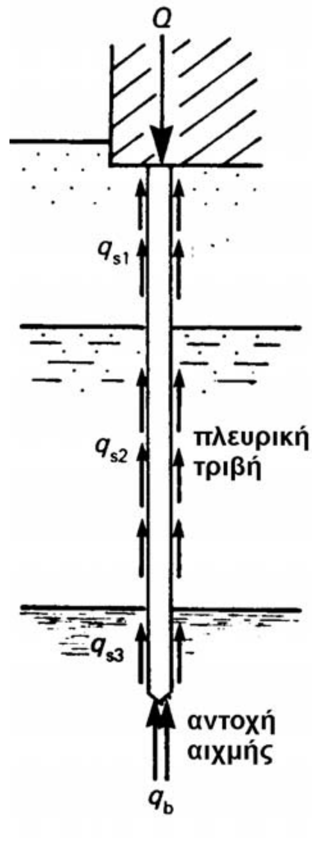


Παρατήρηση :

Κατά το κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb, δεν μπορεί να συμβεί αστοχία του υλικού σε φόρτιση ισότροπης συμπίεσης ή για φορτίσεις με κυρίως συμπιεστική συνιστώσα (δηλαδή με σχετικώς μικρή διατμητική συνιστώσα)

Το κριτήριο αστοχίας εκφράζεται ως προς τις ενεργές τάσεις :



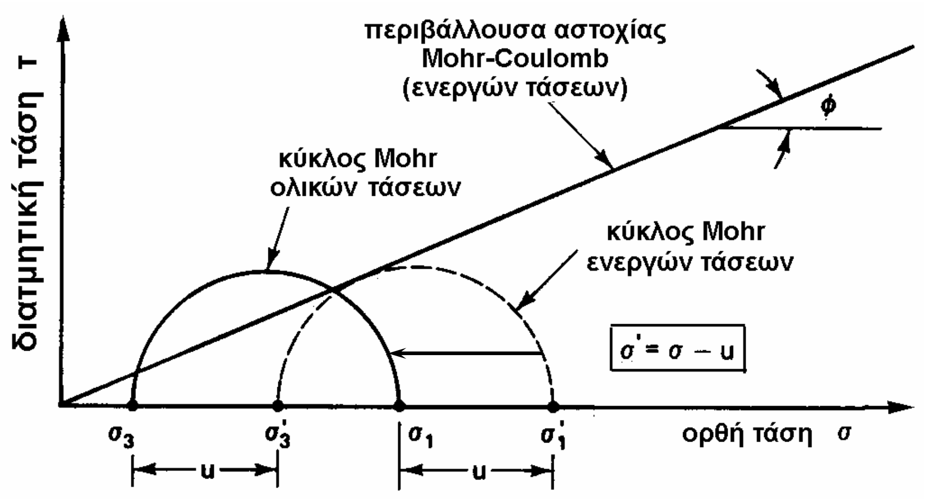


Περίπτωση θετικής πίεσης πόρων :

Εάν με την πάροδο του χρόνου μειωθεί η πίεση πόρων, αυξάνει η ασφάλεια έναντι αστοχίας

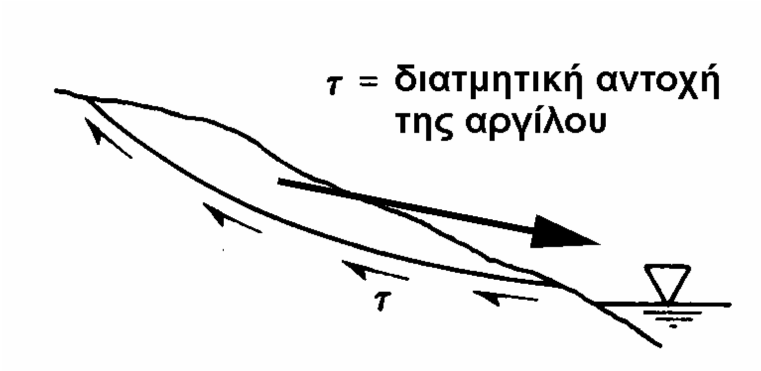
Παράδειγμα : Αύξηση της αντοχής εμπηγνυόμενων πασσάλων με την πάροδο του χρόνου

Το κριτήριο αστοχίας εκφράζεται ως προς τις ενεργές τάσεις :



Περίπτωση αρνητικής πίεσης πόρων :

Εάν με την πάροδο του χρόνου μειωθεί η αρνητική πίεση πόρων, μειώνεται η ασφάλεια έναντι αστοχίας

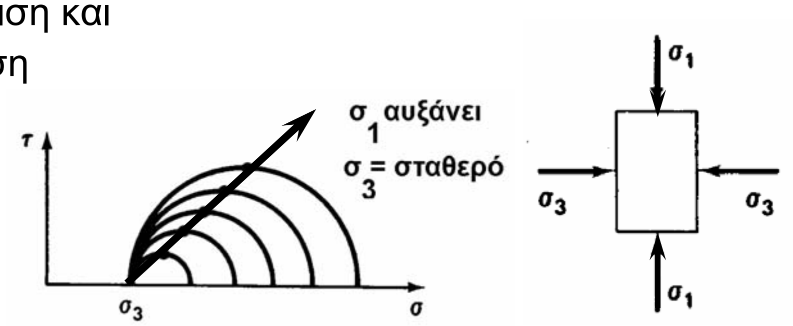


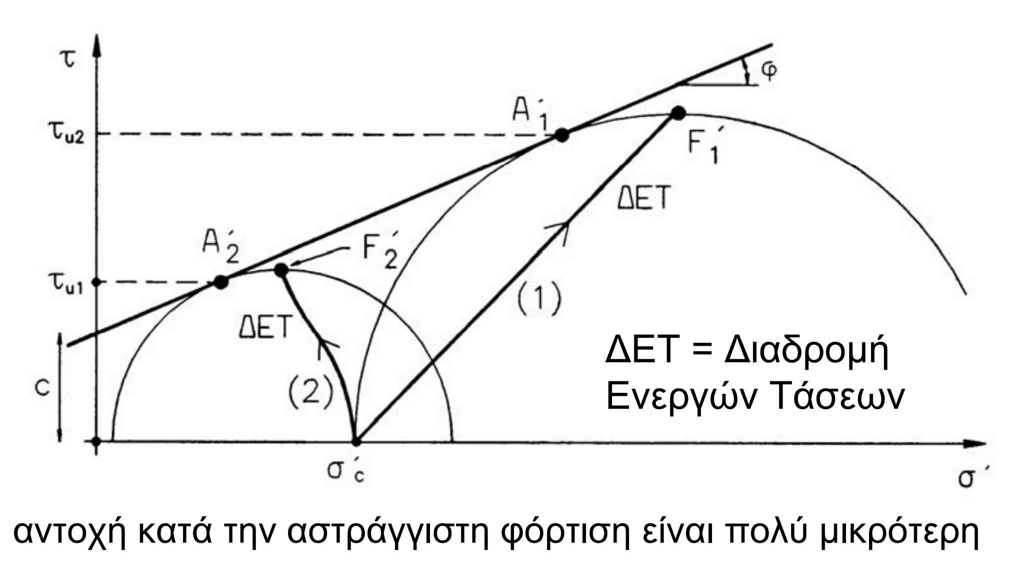
Παράδειγμα : Χρονική υστέρηση της αστοχίας πρανών ορυγμάτων σε στιφρές αργίλους

Σύγκριση της αστοχίας δοκιμίων στην τριαξονική δοκιμή κατά την:

(1) στραγγισμένη φόρτιση και

(2) αστράγγιστη φόρτιση





ΔΕΤ = Διαδρομή Ενεργών Τάσεων

Η αντοχή κατά την αστράγγιστη φόρτιση είναι πολύ μικρότερη

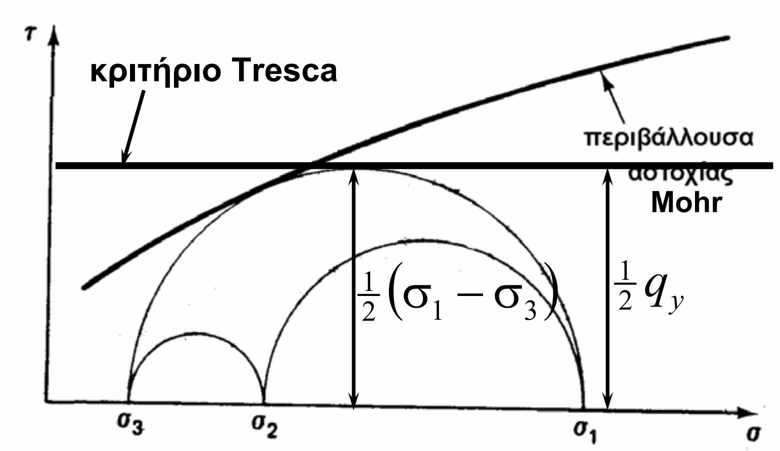
Αλλα κριτήρια αστοχίας :

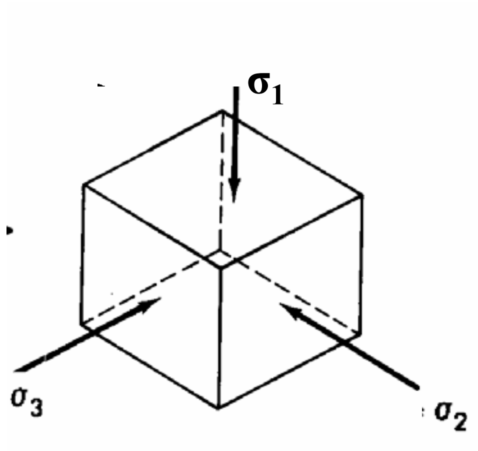
1. Κριτήριο μέγιστης διατμητικής τάσης (Tresca) : $\sigma_1 - \sigma_3 = q_y$

2. Γενικευμένο κριτήριο μέγιστης διατμητικής τάσης (Mises) :

$$2q^2 \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\, q_y^2$$

Στα ανωτέρω κριτήρια, η αστοχία δεν εξαρτάται από την ορθή τάση (σ), δηλαδή τα κριτήρια αυτά δεν έχουν τα χαρακτηριστικά του νόμου τριβής. Συνεπώς δεν εφαρμόζονται σε αναλύσεις εδαφών με ενεργές τάσεις. Μπορούν όμως να εφαρμοσθούν σε αναλύσεις εδαφών υπό αστράγγιστες συνθήκες (τύπου φ=0)

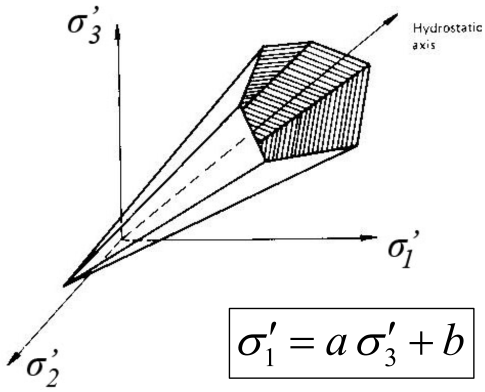




1. Κριτήριο Mohr - Coulomb :

Περιγραφή του κριτηρίου Mohr – Coulomb
στον χώρο των κυρίων τάσεων :

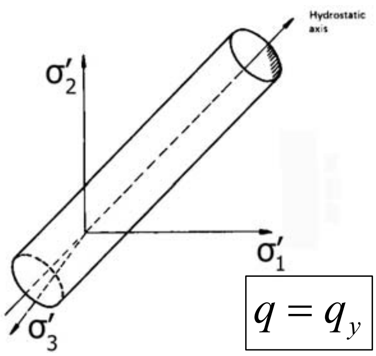
$$a = \tan^2\left(45 + \frac{\phi}{2}\right) \qquad b = 2\,c\tan\left(45 + \frac{\phi}{2}\right)$$



$$\boxed{\sigma_1' = a\,\sigma_3' + b}$$

Αλλα κριτήρια αστοχίας :

2. Κριτήριο Mises (για αστράγγιστη φόρτιση) :

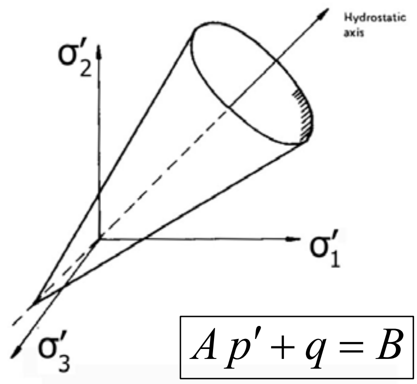


$$\boxed{q = q_y}$$

Η παράμετρος q_y ισούται με την αντοχή του υλικού σε ανεμπόδιστη θλίψη

Ακτίνα του κυλίνδρου : $r = q_y\sqrt{2}$

3. Κριτήριο Drucker - Prager :



$$\boxed{A\,p' + q = B}$$

$$A = \frac{3\ \tan\phi}{\sqrt{3 + 4\tan^2\phi}} \qquad B = \frac{3\ c}{\sqrt{3 + 4\tan^2\phi}}$$

ΕΠΟΠΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΔΙΑΛΕΞΕΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

« ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ – Μέρος 1 »

9ο Εξ. ΠΟΛ. ΜΗΧ. - Ακαδ. Ετος 2006 - 07

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

Θεωρία Κρίσιμης Κατάστασης Αργιλικών Εδαφών

20.10.2006

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

Θεωρία Κρίσιμης Κατάστασης Αργιλικών Εδαφών

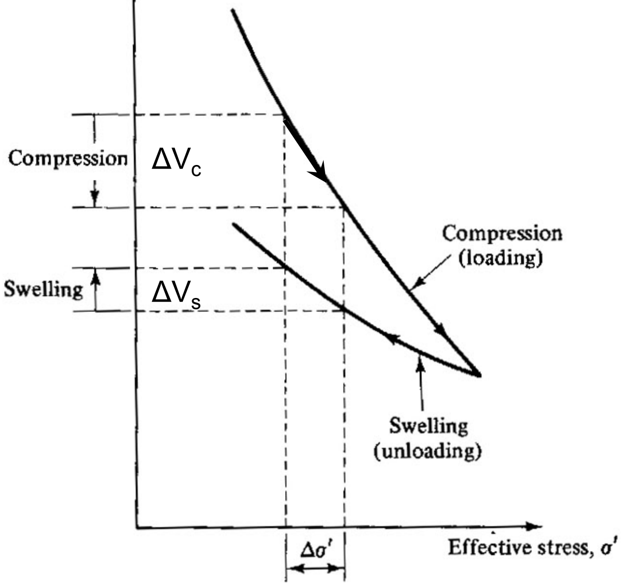
Θεματολογία

1. Ισότροπη και μονοδιάστατη συμπίεση
2. Τριαξονική θλίψη – Διαδρομές ολικών και ενεργών τάσεων
3. Παρουσίαση των διαδρομών τάσεων σε χώρο p' – q – v
4. Επιφάνεια Roscoe για κανονικά στερεοποιημένες αργίλους
5. Επιφάνεια Hvorslev για υπερ-στεροποιημένες αργίλους

Ισότροπη συμπίεση

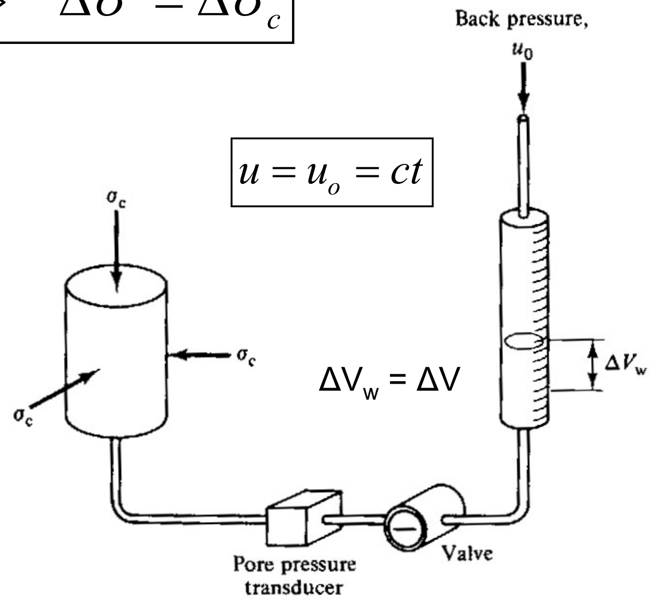
Ισότροπη αύξηση της πίεσης (σ_c) με σταθερή πίεση πόρων (u) - ελεύθερη στράγγιση

$$\boxed{\sigma' = \sigma_c - u \;\Rightarrow\; \Delta\sigma' = \Delta\sigma_c}$$



$$\boxed{u = u_o = ct}$$

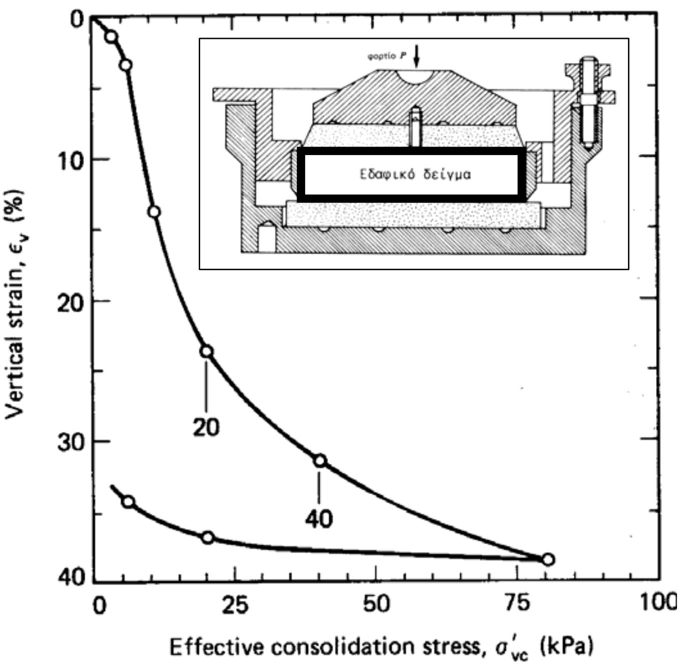
$\Delta V_w = \Delta V$

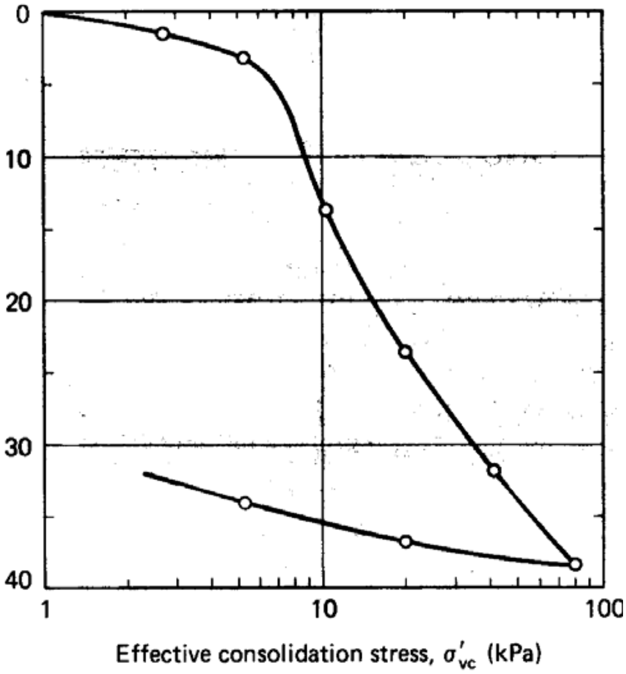


Καμπύλη ογκομετρικής συμπίεσης και αποσυμπίεσης

Σε πλήρως κορεσμένο έδαφος, η μεταβολή του όγκου (ΔV) ισούται με τον όγκο του αποβαλλόμενου ή εισροφούμενου νερού (ΔV_w)

Μονοδιάστατη συμπίεση : πειραματικά αποτελέσματα

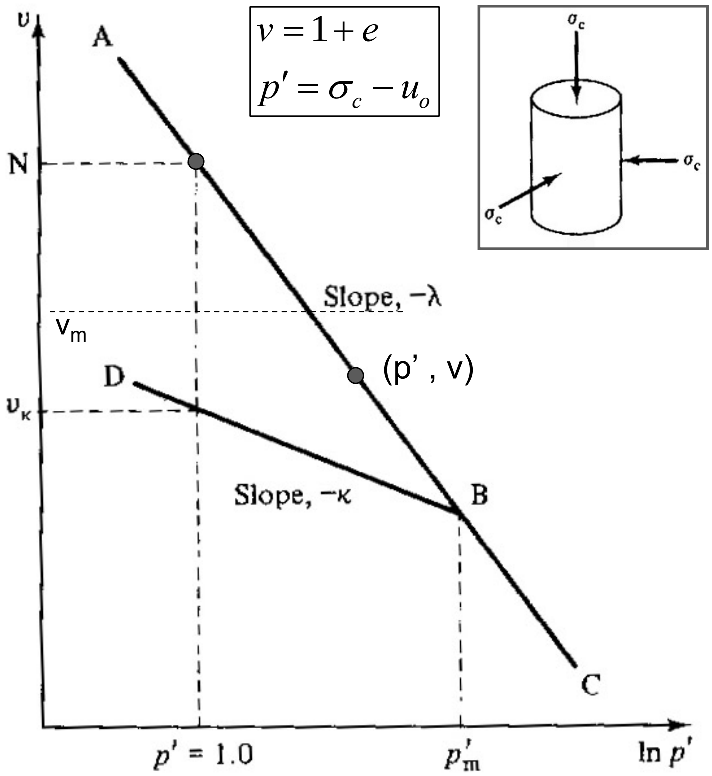




Γραμμική κλίμακα της ενεργού τάσης στερεοποίησης

Λογαριθμική κλίμακα της ενεργού τάσης στερεοποίησης
(οι καμπύλες προσεγίζουν ευθείες)

1. Ισότροπη συμπίεση



Καμπύλη ισότροπης συμπίεσης (AC) :

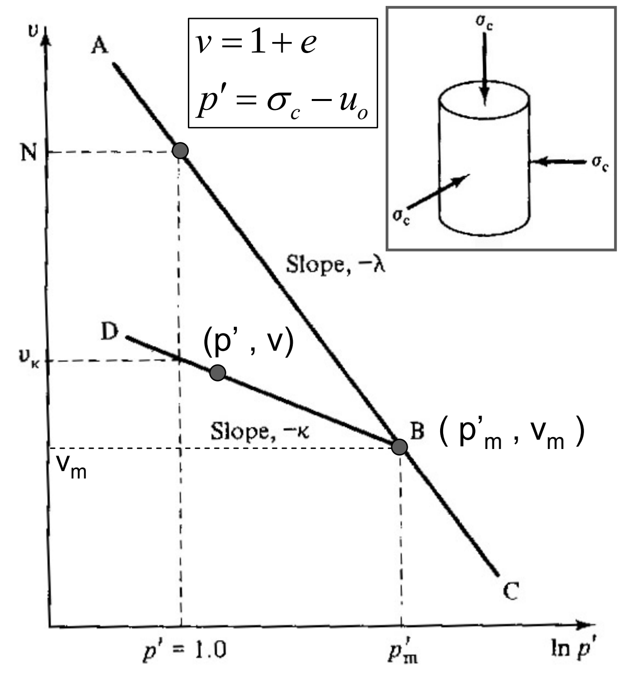
$$v = N - \lambda \ln p'$$

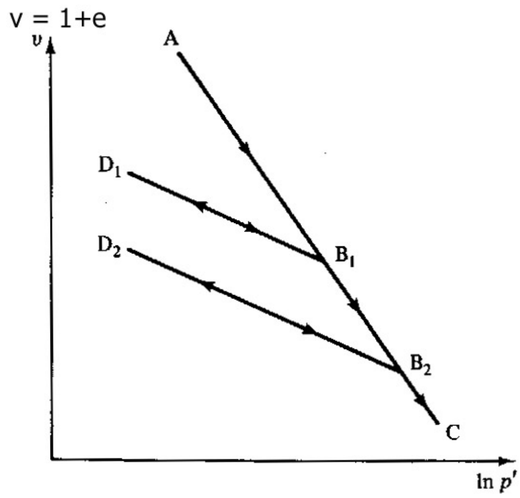
Παράμετροι ισότροπης συμπίεσης :

N = τιμή του v = 1+e για p' = 1 kPa

λ = κλίση της καμπύλης σε ημι-λογαριθμική κλίμακα

2. Ισότροπη αποφόρτιση





Καμπύλες ισότροπης αποφόρτισης – επαναφόρτισης από πίεση p'_m (BD) :

$$v = v_m - \kappa \ln\left(\frac{p'}{p'_m}\right) \quad \Rightarrow$$

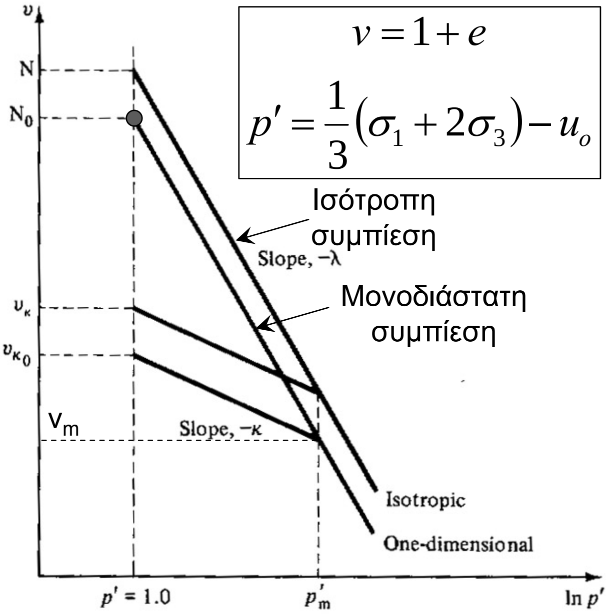
$$v = \left[N - (\lambda - \kappa)\ln p'_m\right] - \kappa \ln p' \quad \text{ή :} \quad p'_m = \exp\left(\frac{N - v - \kappa \ln p'}{\lambda - \kappa}\right)$$

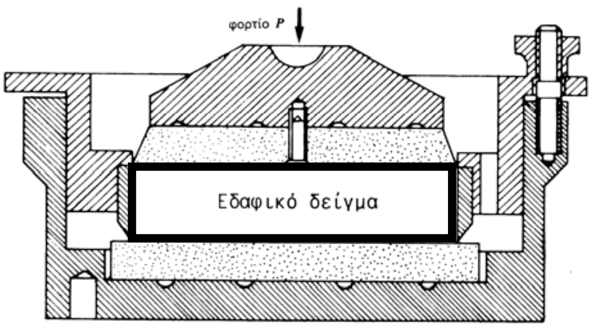
Οι καμπύλες ισότροπης αποφόρτισης είναι παράλληλες (με κλίση κ)

3. Μονοδιάστατη συμπίεση (συμπιεσόμετρο) :

$$v = 1 + e$$

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3) - u_o$$





Καμπύλη μονοδιάστατης συμπίεσης :

$$v = N_o - \lambda \ln p'$$

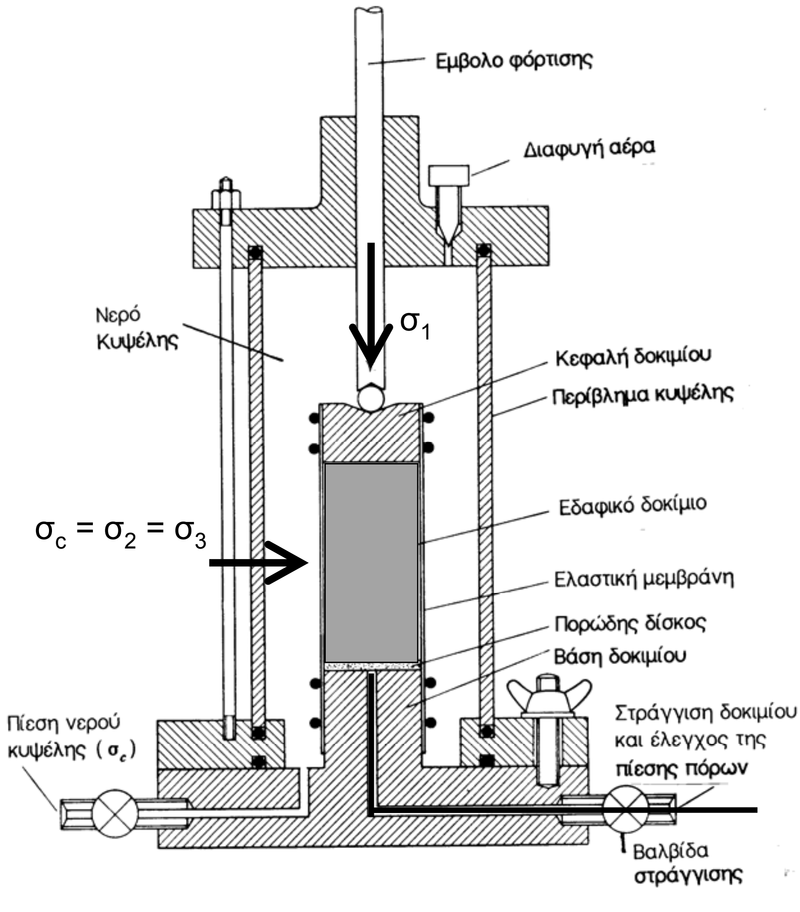
(παράλληλη με καμπύλη ισότροπης συμπίεσης)

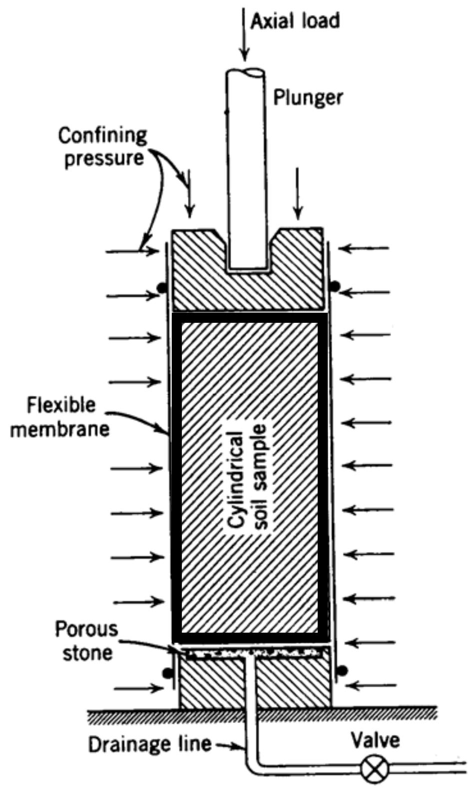
Καμπύλες μονοδιάστατης αποφόρτισης – επαναφόρτισης από μέση πίεση p'_m :

$$v = v_m - \kappa \ln\left(\frac{p'}{p'_m}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \left[N_o - (\lambda - \kappa)\ln p'_m\right] - \kappa \ln p'$$

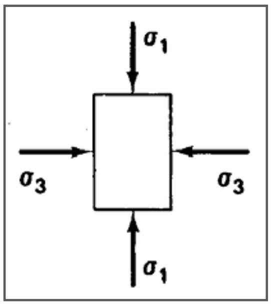
Οι καμπύλες μονοδιάστατης αποφόρτισης είναι παράλληλες μεταξύ τους (κλίση κ) και παράλληλες με τις καμπύλες ισότροπης αποφόρτισης

4. Κυλινδρική τριαξονική συμπίεση :





4.1. Τριαξονική θλίψη : Στραγγισμένη δοκιμή



Αρχικές συνθήκες :

$\sigma_{10} = \sigma_{30} = 300$ kPa , $u_o = 100$ kPa

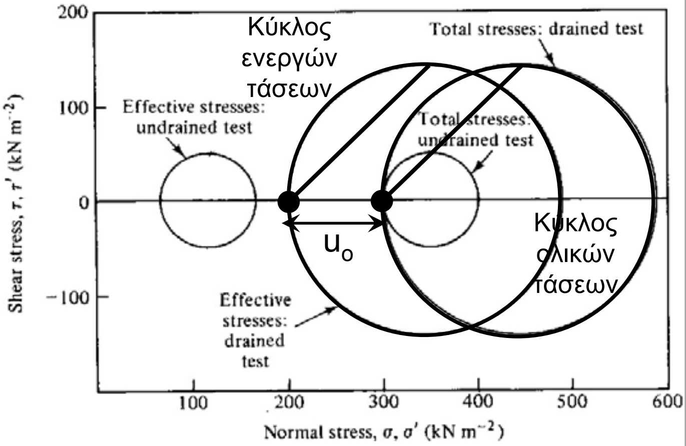
$\sigma'_{10} = \sigma'_{30} = 200$ kPa

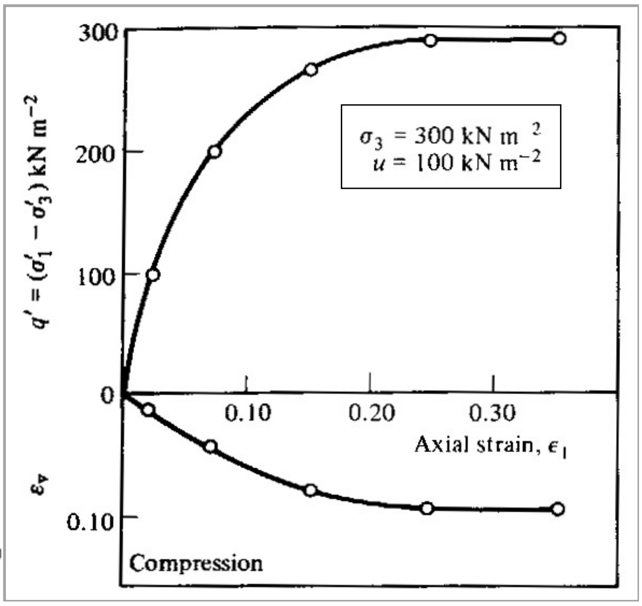
Στην αστοχία :

$\sigma_{1f} = 590$ kPa , $\sigma_{3f} = \sigma_{30} = 300$ kPa $\Rightarrow \sigma_{1f} - \sigma_{3f} = 290$ kPa

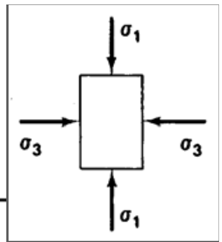
$u_f = u_o = 100$ kPa

$\sigma'_{1f} = 490$ kPa , $\sigma'_{3f} = \sigma'_{30} = 200$ kPa





4.2. Τριαξονική θλίψη : Αστράγγιστη δοκιμή



Αρχικές συνθήκες :

$\sigma_{10} = \sigma_{30} = 300$ kPa , $u_o = 100$ kPa

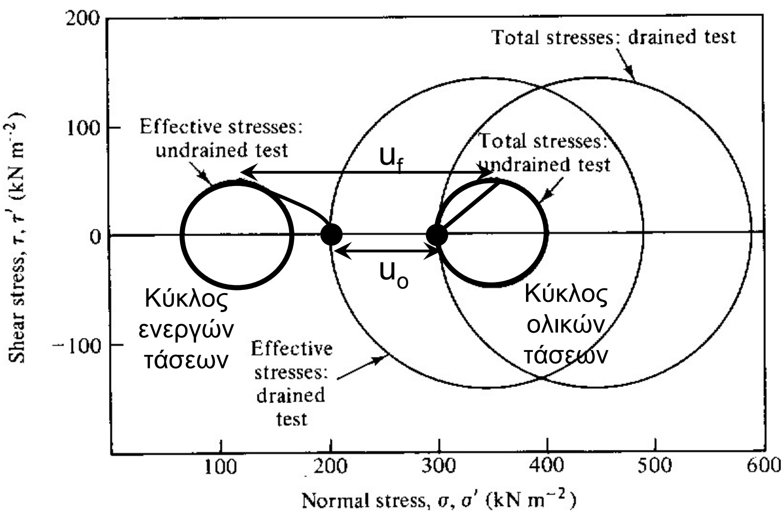
$\sigma'_{10} = \sigma'_{30} = 200$ kPa

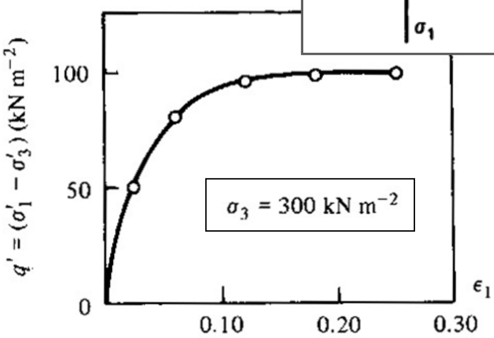
Στην αστοχία :

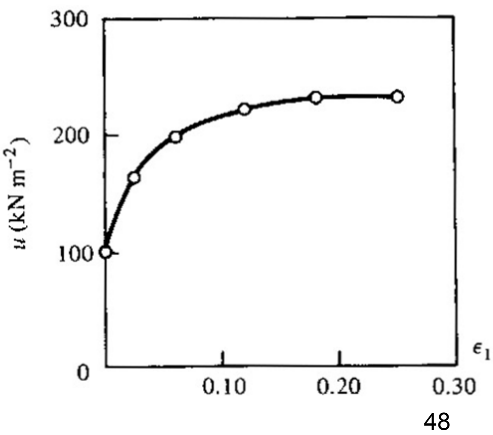
$\sigma_{1f} = 398$ kPa , $\sigma_{3f} = 300$ kPa $\Rightarrow \sigma_{1f} - \sigma_{3f} = 98$ kPa

$u_f = 232$ kPa

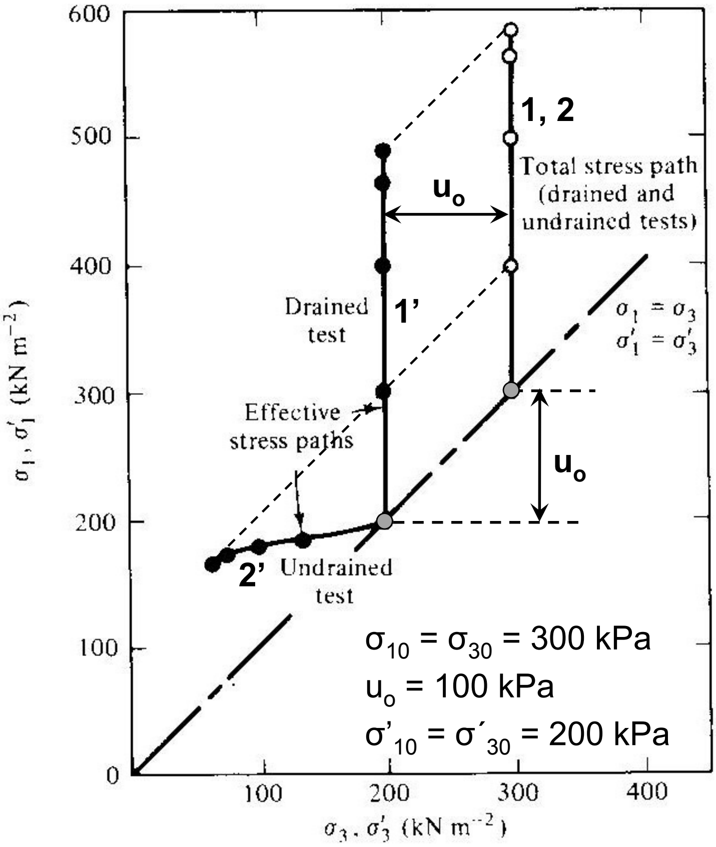
$\sigma'_{1f} = 166$ kPa , $\sigma'_{3f} = 68$ kPa $\Rightarrow \sigma'_{1f} - \sigma'_{3f} = 98$ kPa



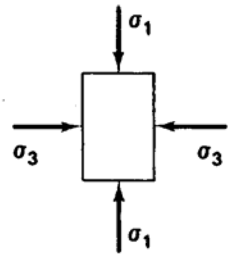




Τριαξονικές διαδρομές σε διάφορους χώρους τάσεων



Stress paths for drained and undrained loading tests



Διαδρομή ολικών τάσεων :

1 Στραγγισμένη δοκιμή

$\sigma_{1f} = 590$ kPa , $\sigma_{3f} = 300$ kPa

2 Αστράγγιστη δοκιμή

$\sigma_{1f} = 398$ kPa , $\sigma_{3f} = 300$ kPa

Διαδρομή ενεργών τάσεων :

1’ Στραγγισμένη δοκιμή

$\sigma'_{1f} = 490$ kPa , $\sigma'_{3f} = 200$ kPa

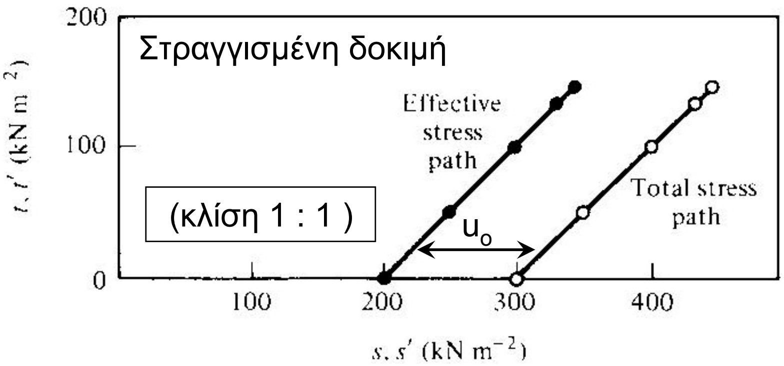
$u_f = u_o = 100$ kPa

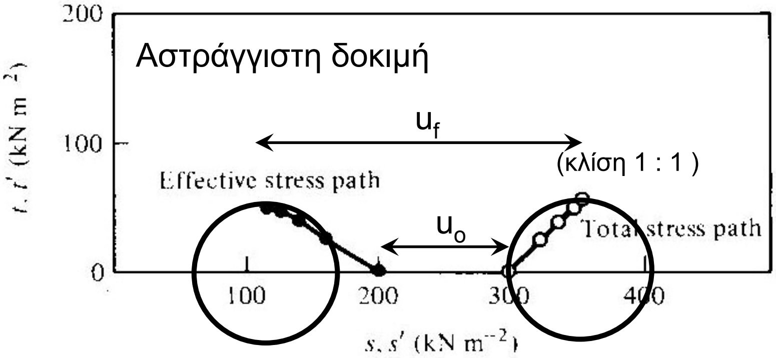
2’ Αστράγγιστη δοκιμή

$\sigma'_{1f} = 166$ kPa , $\sigma'_{3f} = 68$ kPa

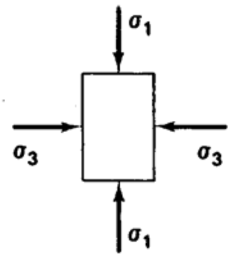
$u_f = 232$ kPa

Τριαξονικές διαδρομές σε διάφορους χώρους τάσεων





Διαδρομές ολικών και ενεργών τάσεων σε χώρο (s, t) – (s’ , t’)

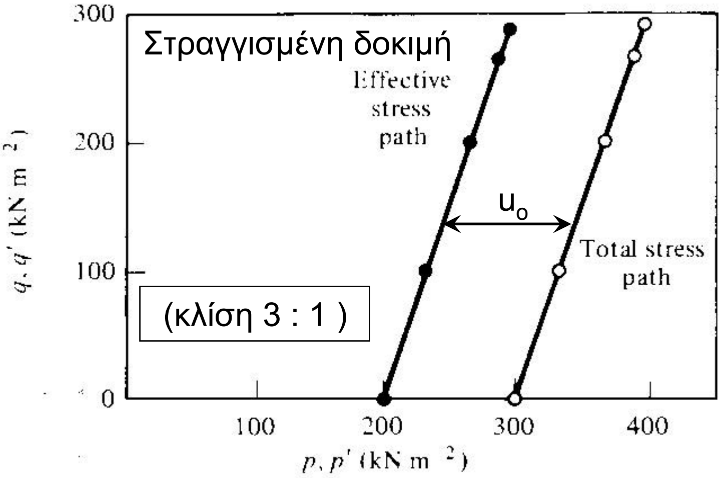


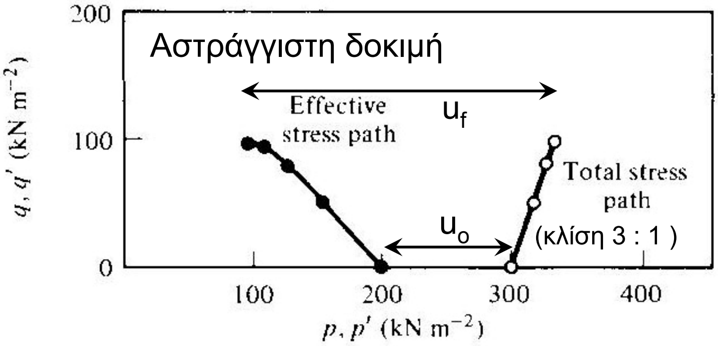
$$s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$s' = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3) = s - u$$

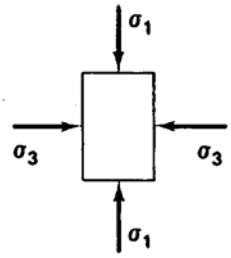
$$t' = t = \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Τριαξονικές διαδρομές σε διάφορους χώρους τάσεων





Διαδρομές ολικών και ενεργών τάσεων σε χώρο (p, q) – (p’ , q’)



$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$$

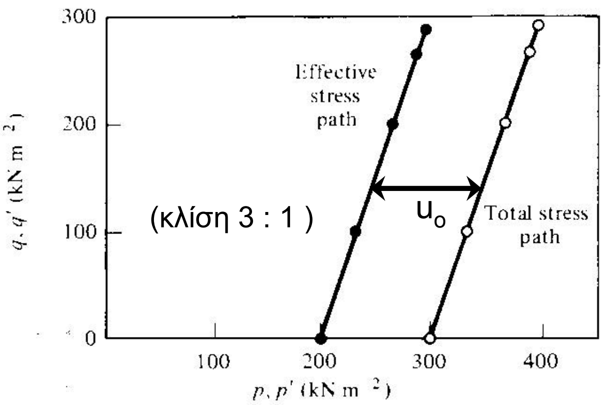
$$p' = \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3') = p - u$$

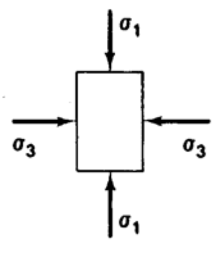
$$q' = q = (\sigma_1' - \sigma_3') = (\sigma_1 - \sigma_3)$$

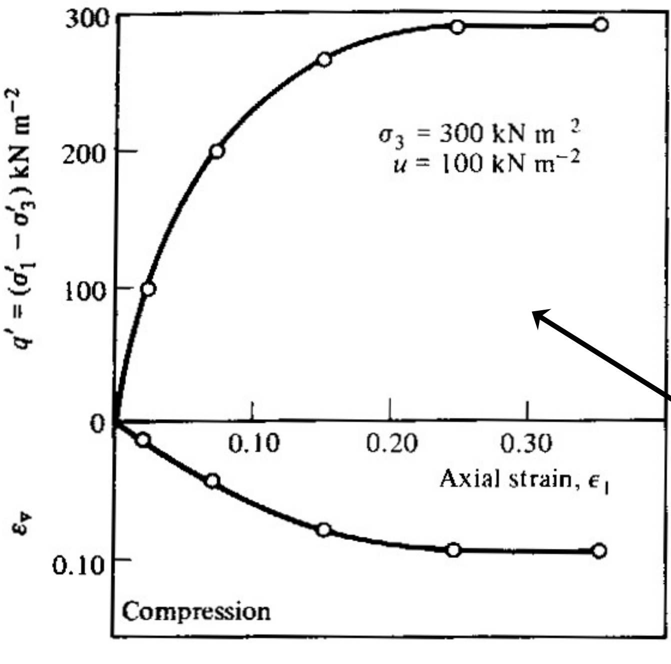
Τριαξονικές διαδρομές σε διάφορους χώρους τάσεων : Στραγγισμένη δοκιμή

Κανονικά στερεοποιημένη άργιλος

Διαδρομές ολικών και ενεργών τάσεων σε χώρο (p, q) – (p’ , q’)

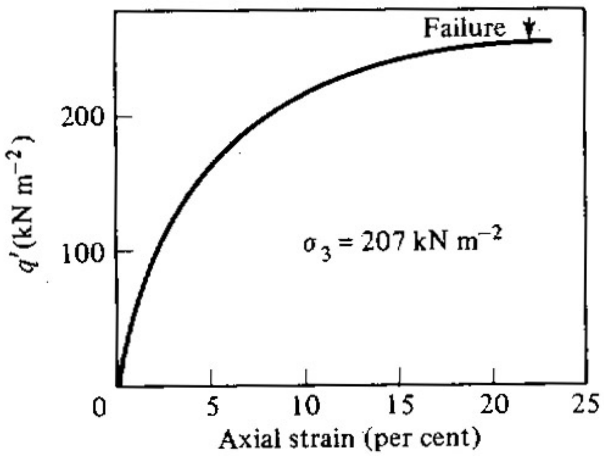




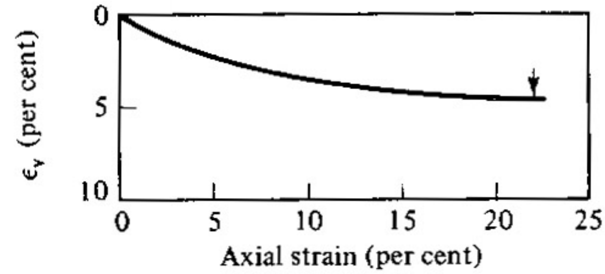


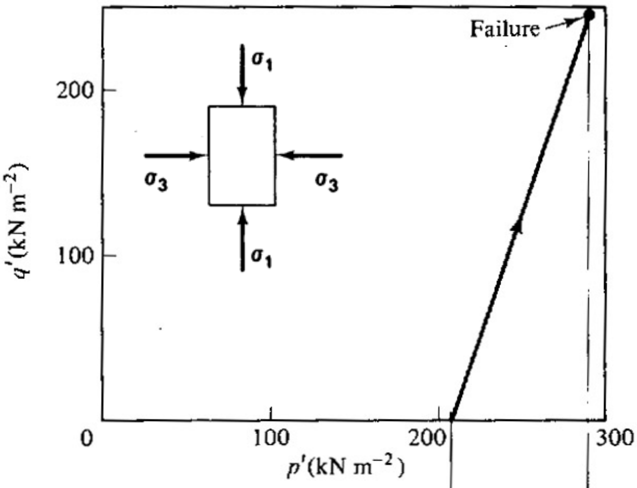
Καμπύλες :
τάσης - παραμόρφωσης (q – ε_1)
και ογκομετρικής – αξονική παραμόρφωση (ε_{vol} – ε_1)

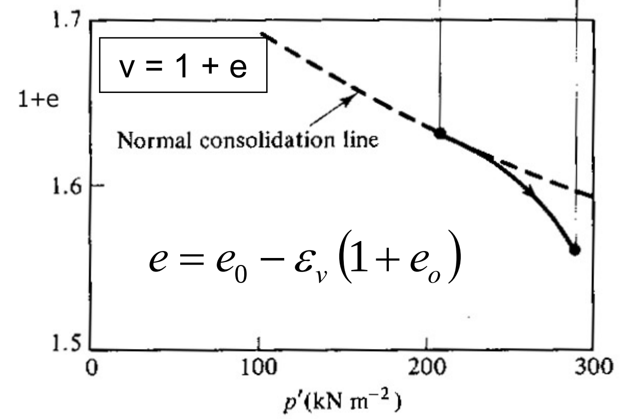
Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p' - q :
Στραγγισμένη δοκιμή σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο



ε_v = ογκομετρική παραμόρφωση



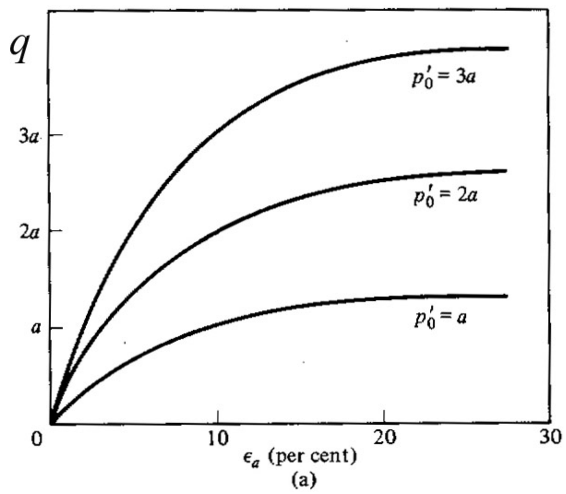


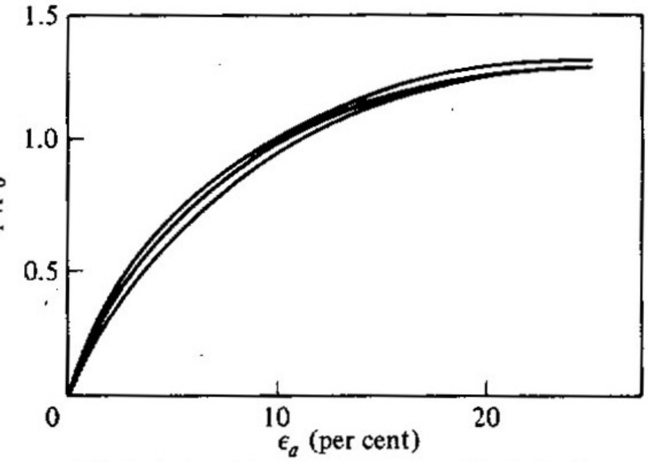


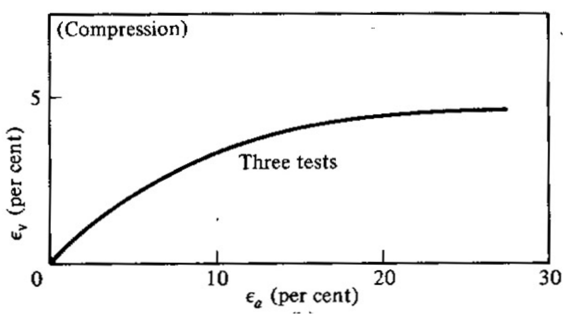
$$e = e_0 - \varepsilon_v \left(1 + e_o\right)$$

Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p' - q : Στραγγισμένες δοκιμές σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο

Τρείς δοκιμές με αύξουσα τάση ισότροπης στερεοποίησης (p'_o)





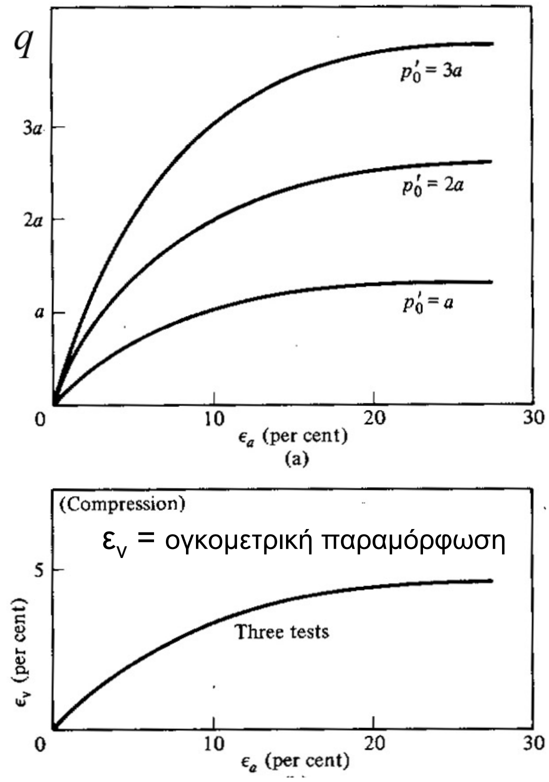


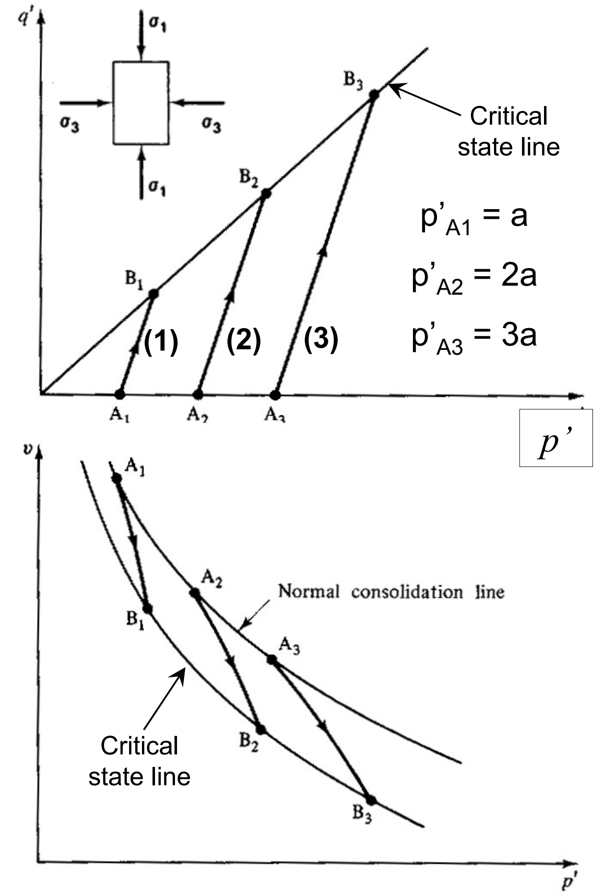
Κανονικοποίηση διαγράμματος τάσης – παραμόρφωσης ως προς την τάση ισότροπης στερεοποίησης (p'_o)

Οι κανονικοποιημένες καμπύλες ταυτίζονται

Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p' - q : Στραγγισμένες δοκιμές σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο

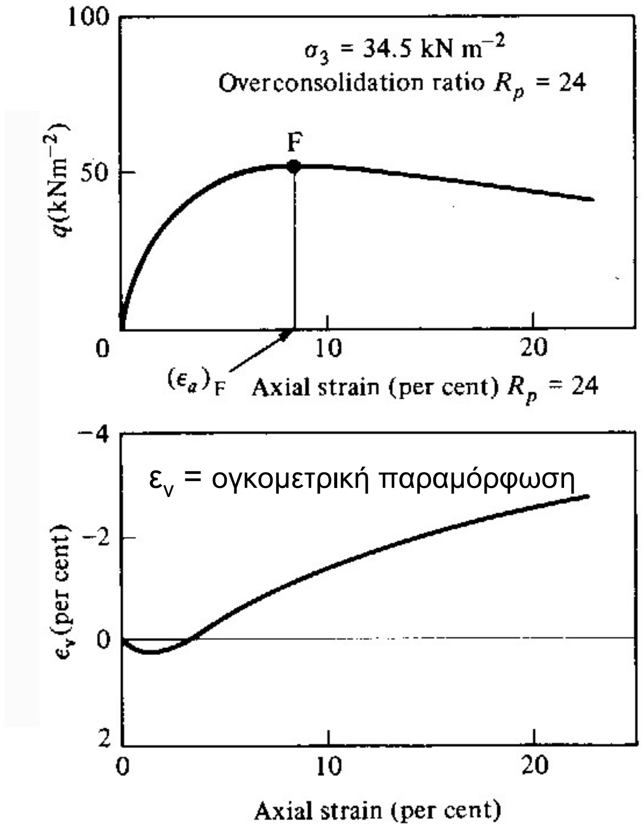
Τρείς δοκιμές με αύξουσα τάση ισότροπης στερεοποίησης (p'$_o$)

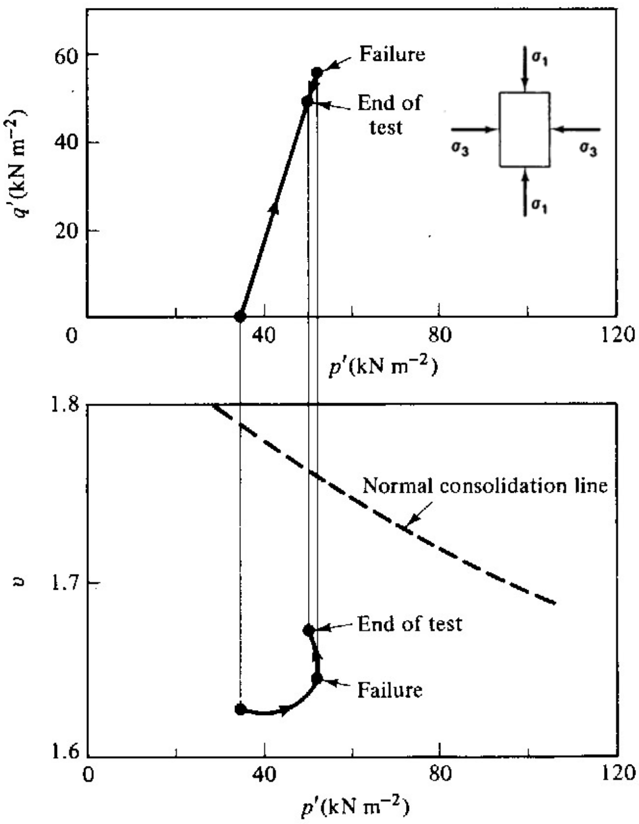




Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p' - q : Στραγγισμένη δοκιμή σε υπερστερεοποιημένη άργιλο (OCR = 24)

v = 1 + e $\qquad e = e_0 - \varepsilon_v \left(1 + e_o\right)$

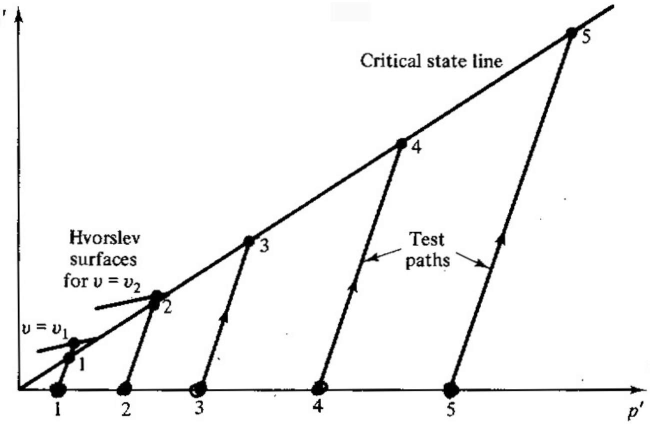




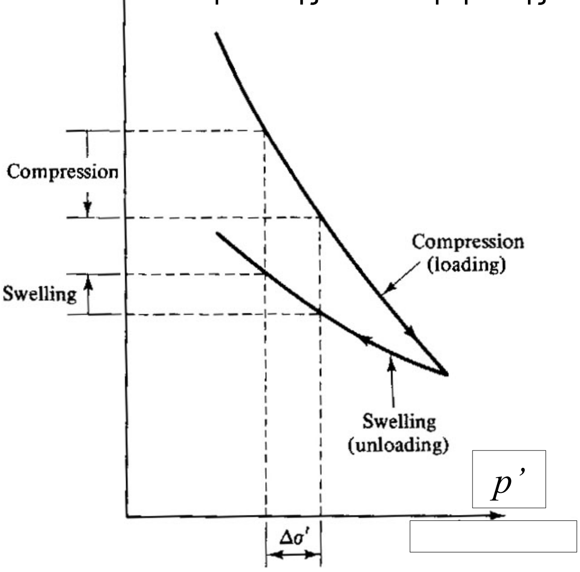
Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p' - q : Στραγγισμένες δοκιμές σε υπερστερεοποιημένη άργιλο

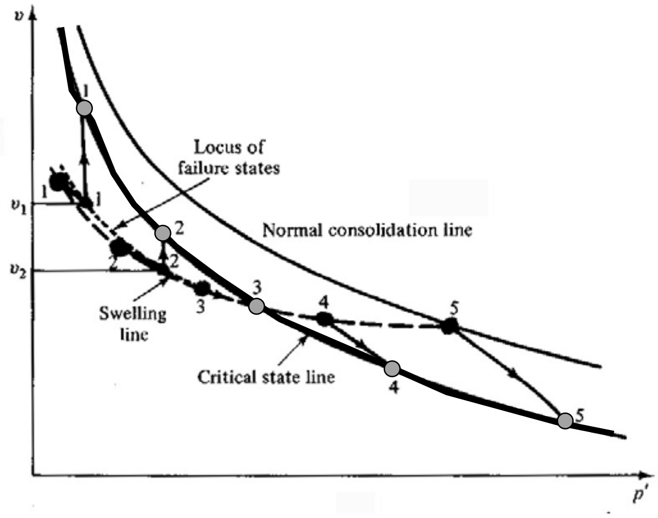
5 : κανονικά στερεοποιημένη

4, 3, 2, 1 : υπερστερεοποιημένη με αύξοντα συντελεστή υπερστερεοποίησης OCR

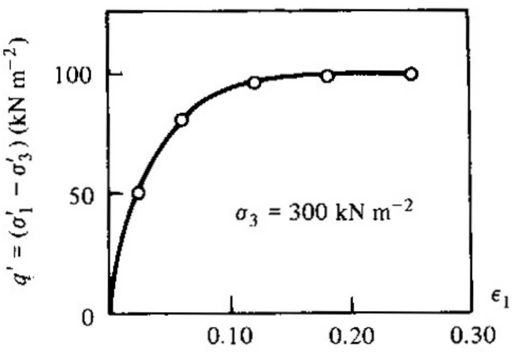


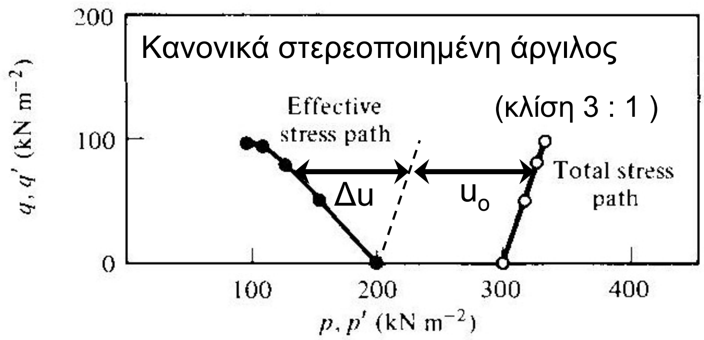
Καμπύλη ισότροπης συμπίεσης και αποφόρτισης



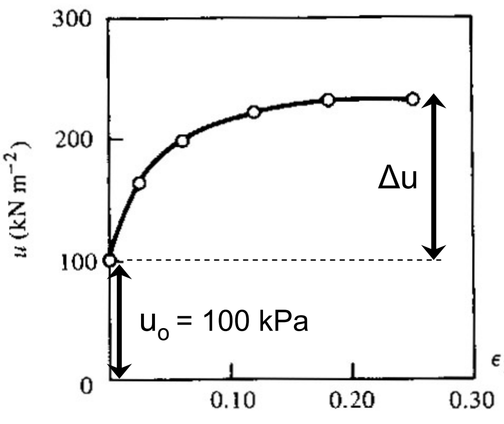


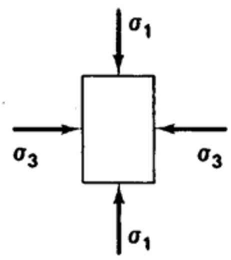
Τριαξονικές διαδρομές σε διάφορους χώρους τάσεων : Αστράγγιστη δοκιμή





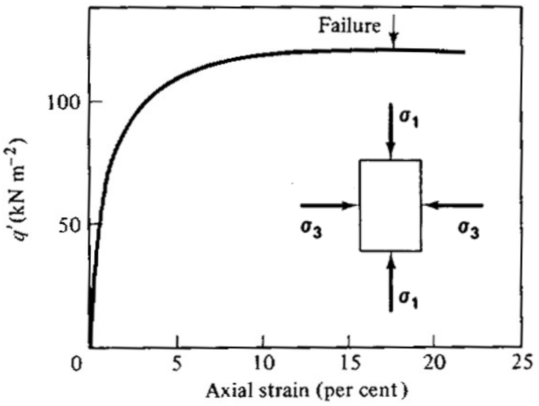
Διαδρομές ολικών και ενεργών τάσεων σε χώρο (p, q) – (p' , q')

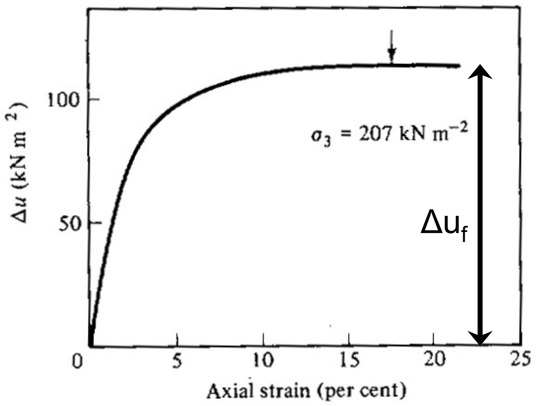


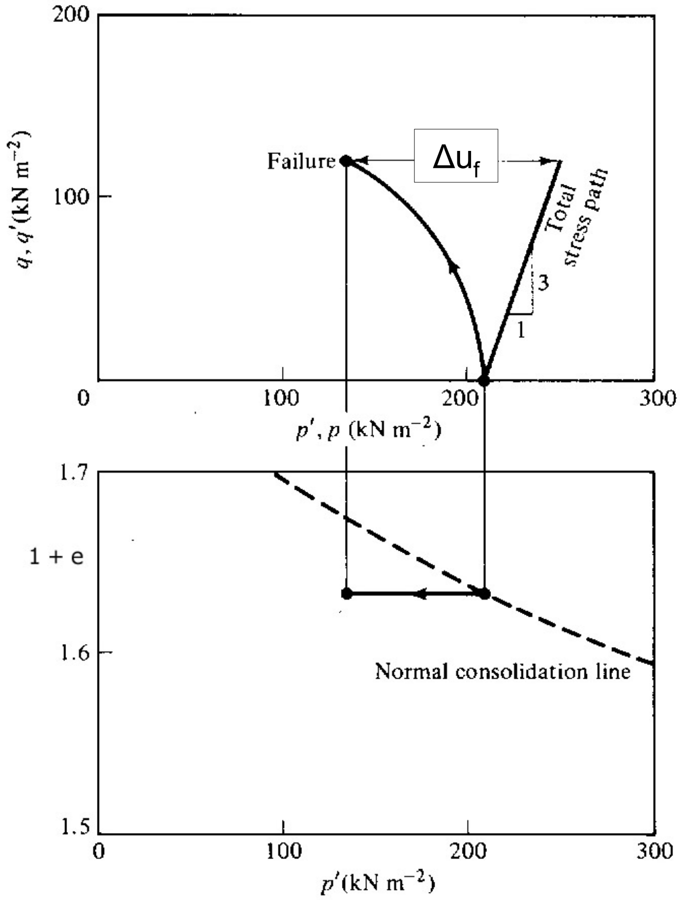


Καμπύλες τάσης - παραμόρφωσης (q – ε_1)
και
πίεσης πόρων – παραμόρφωσης (u – ε_1)

Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p’ - q : Αστράγγιστη δοκιμή σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο

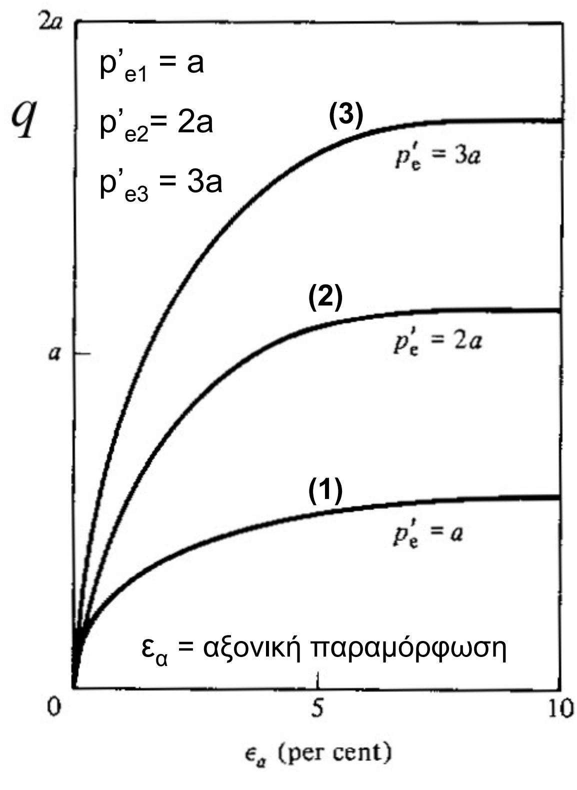


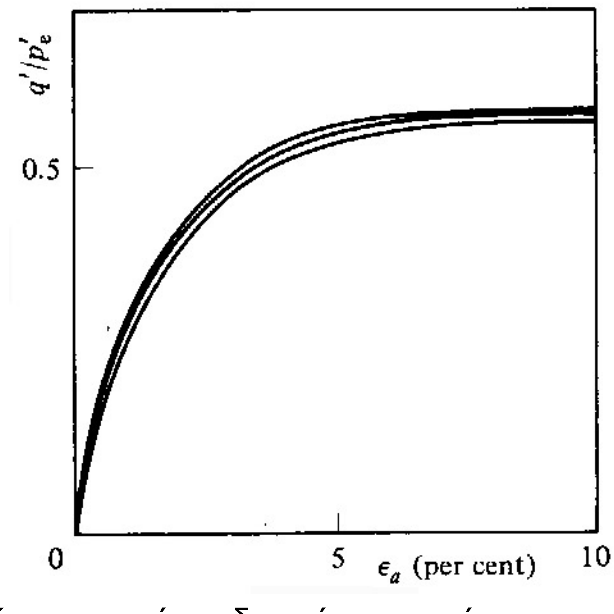




Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p’ - q : Αστράγγιστες δοκιμές σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο

Τρείς δοκιμές με αύξουσα τάση ισότροπης στερεοποίησης (p'_e)



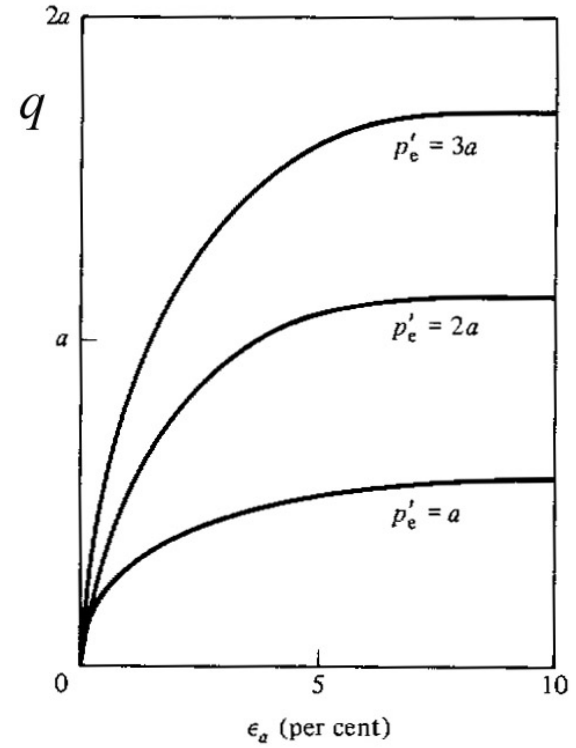


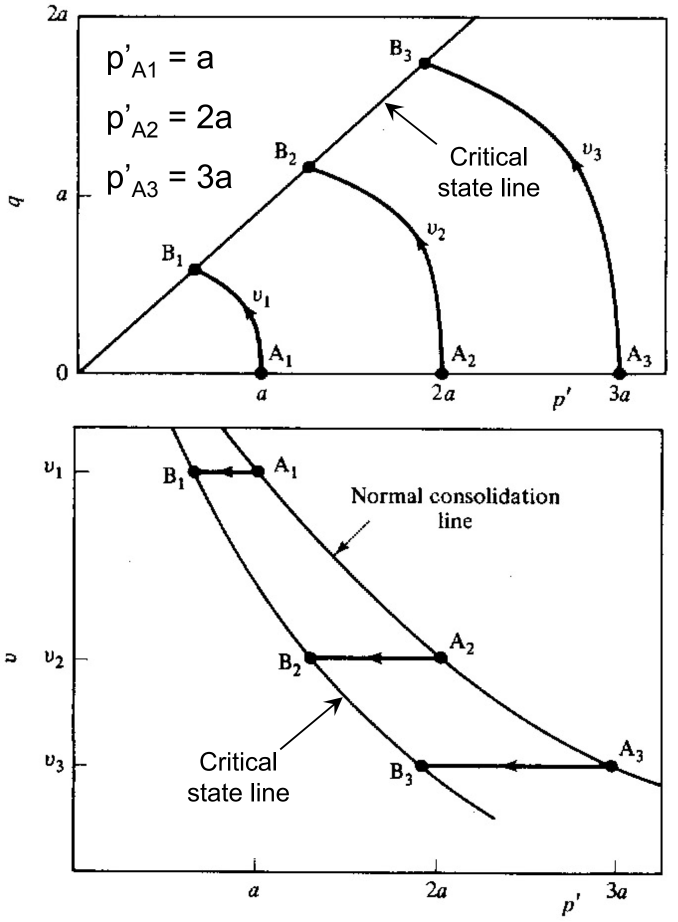
Κανονικοποίηση διαγράμματος τάσης – παραμόρφωσης ως προς την τάση ισότροπης στερεοποίησης (p'_e)

Οι κανονικοποιημένες καμπύλες ταυτίζονται

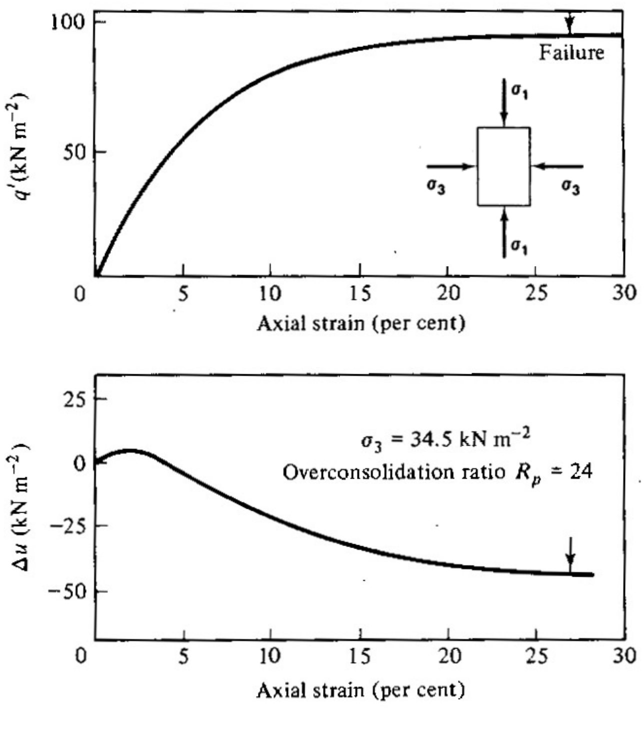
Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p' - q : Αστράγγιστες δοκιμές σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο

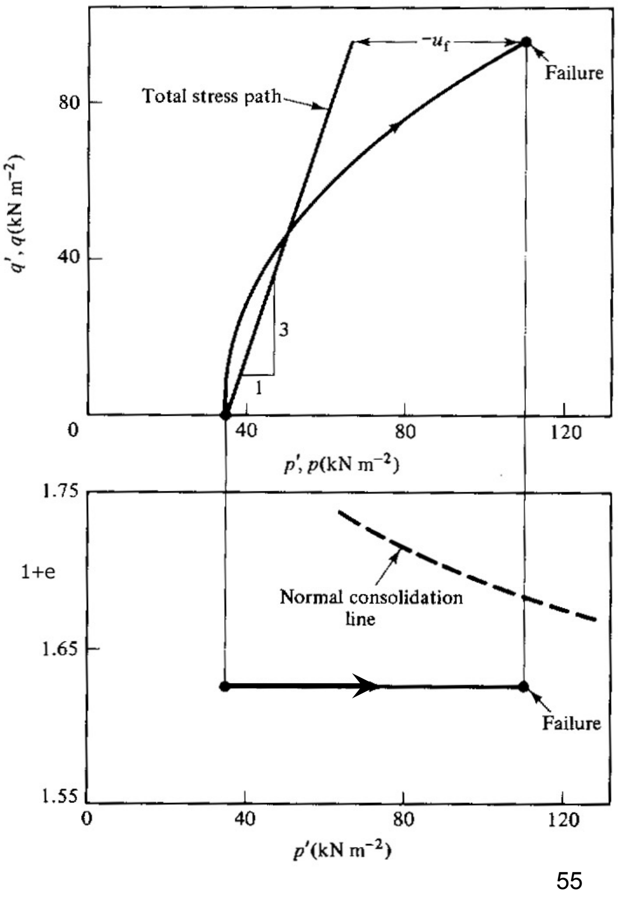
Τρείς δοκιμές με αύξουσα τάση ισότροπης στερεοποίησης



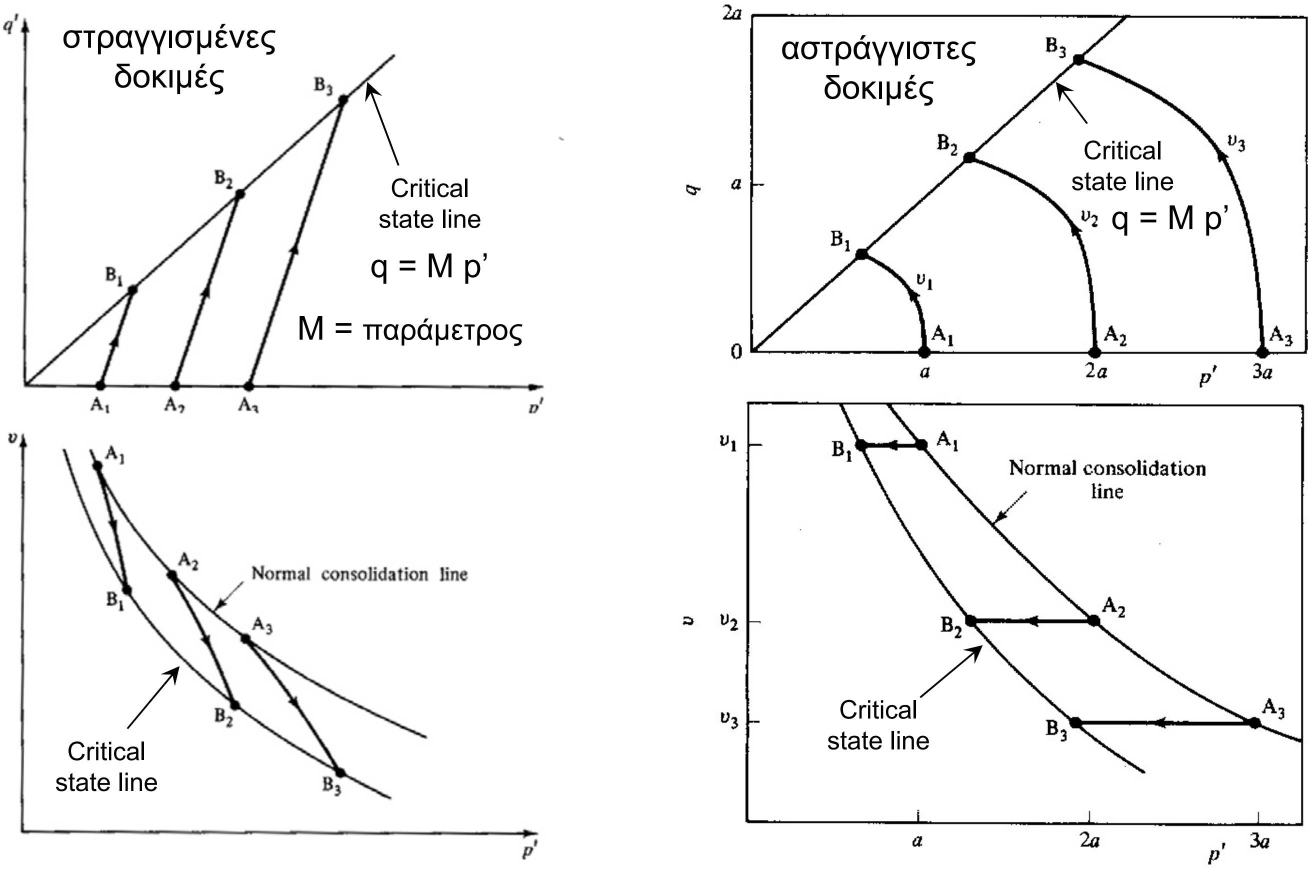


Τριαξονικές διαδρομές σε χώρο v – p' - q : Αστράγγιστη δοκιμή σε υπερστερεοποιημένη άργιλο (OCR = 24)





Ενιαία Γραμμή Κρίσιμης Κατάστασης από στραγγισμένες και αστράγγιστες δοκιμές σε μια κανονικά στερεοποιημένη άργιλο



Ενιαία Γραμμή Κρίσιμης Κατάστασης από στραγγισμένες και αστράγγιστες δοκιμές σε κανονικά στερεοποιημένα δείγματα αργίλου

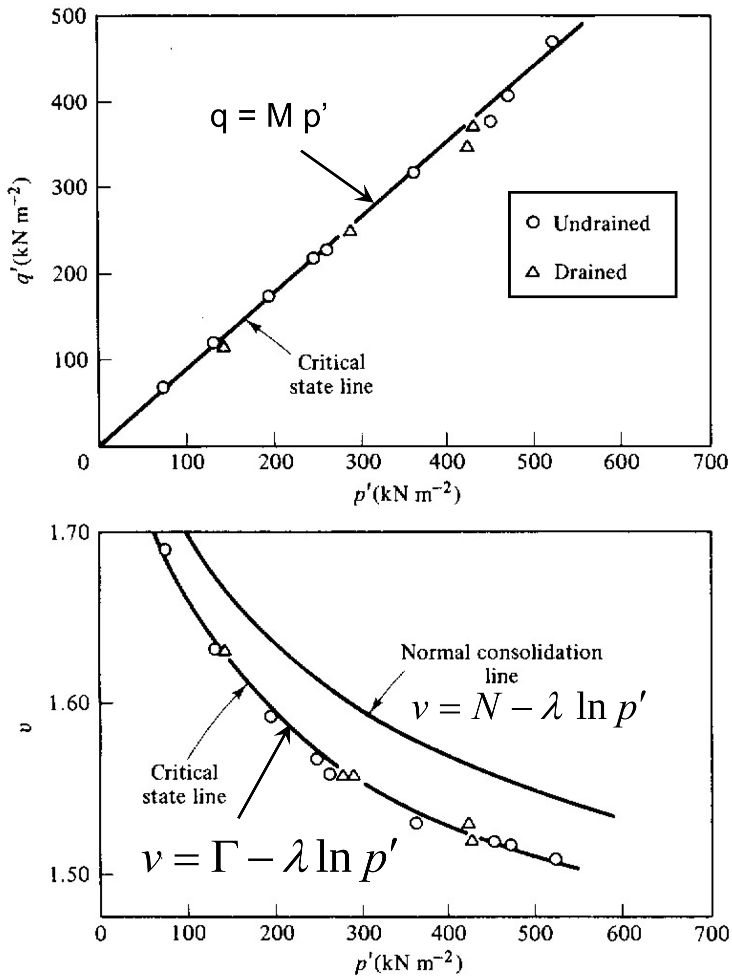
Πειραματικά δεδομένα από άργιλο Weald (Parry, 1960)

M = q / p’ = 500 / 560 = 0.893

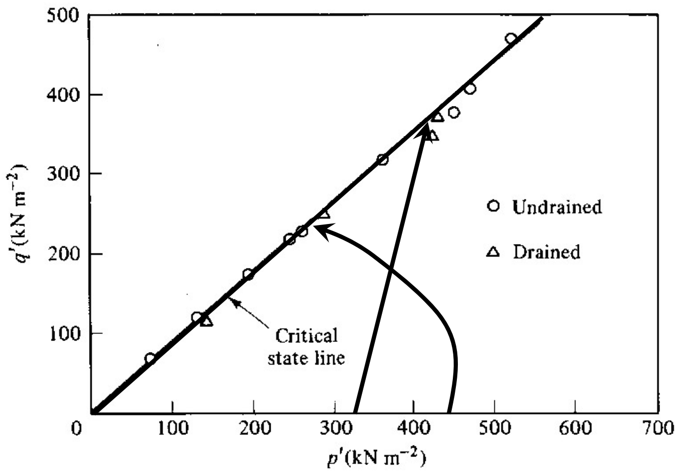
Σχέσεις ορισμού της Γραμμής Κρίσιμης Κατάστασης :

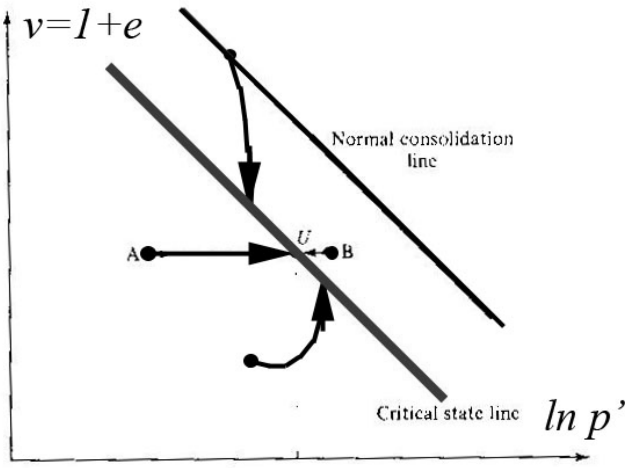
$$q = M\ p'$$

$$v = \Gamma - \lambda \ln p'$$



Ενιαία Γραμμή Κρίσιμης Κατάστασης
από στραγγισμένες και αστράγγιστες δοκιμές σε κανονικά στερεοποιημένα και υπερστερεοποιημένα δείγματα αργίλου





Σχέσεις ορισμού της Γραμμής Κρίσιμης Κατάστασης :

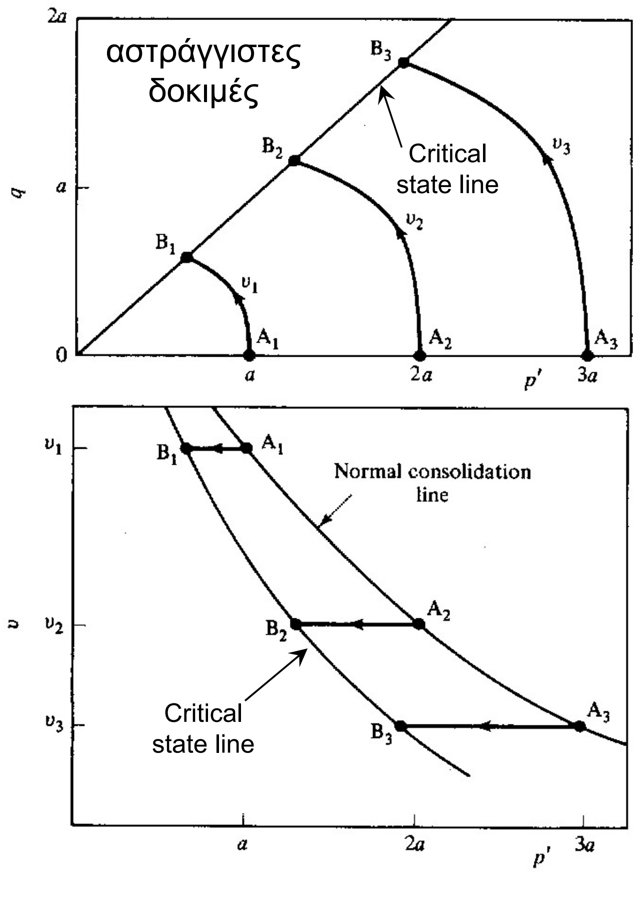
Ευθεία στο επίπεδο : q - p'

$$q = M\ p'$$

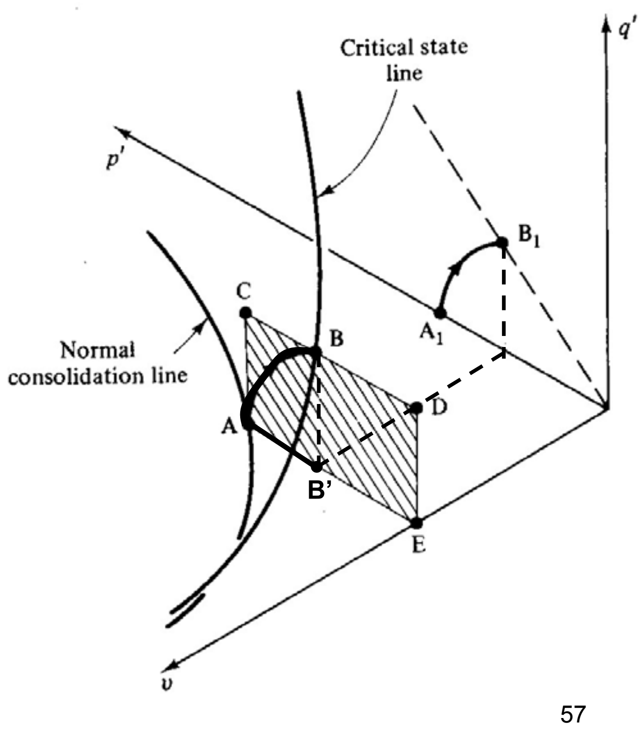
Ευθεία στο επίπεδο : v - ln p'

$$v = \Gamma - \lambda \ln p'$$

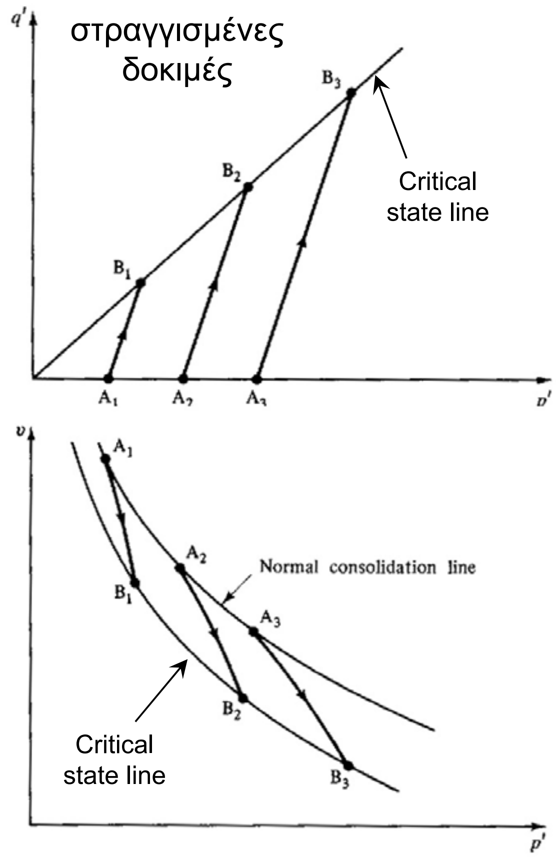
Παρουσίαση των διαδρομών τάσεων κανονικά στερεοποιημένων αργίλων σε τριδιάστατο χώρο p' – q - v



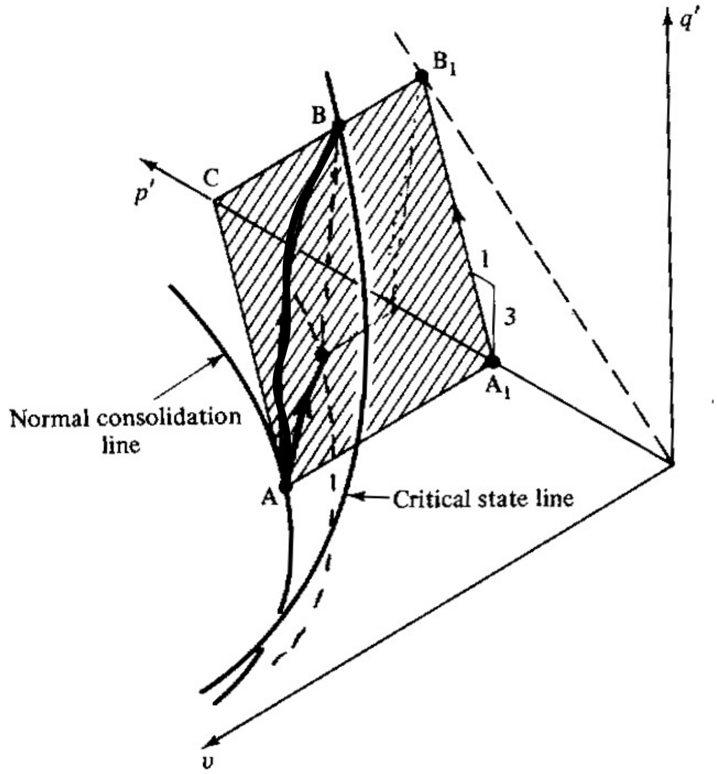
1. Αστράγγιστες δοκιμές



Παρουσίαση των διαδρομών τάσεων κανονικά στερεοποιημένων αργίλων σε τριδιάστατο χώρο p’ – q - v



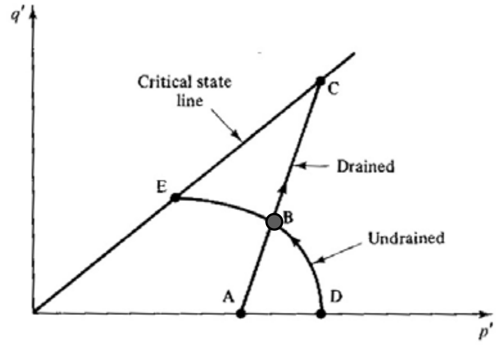
2. Στραγγισμένες δοκιμές

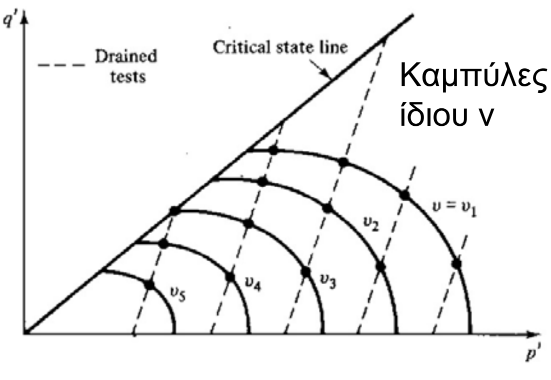


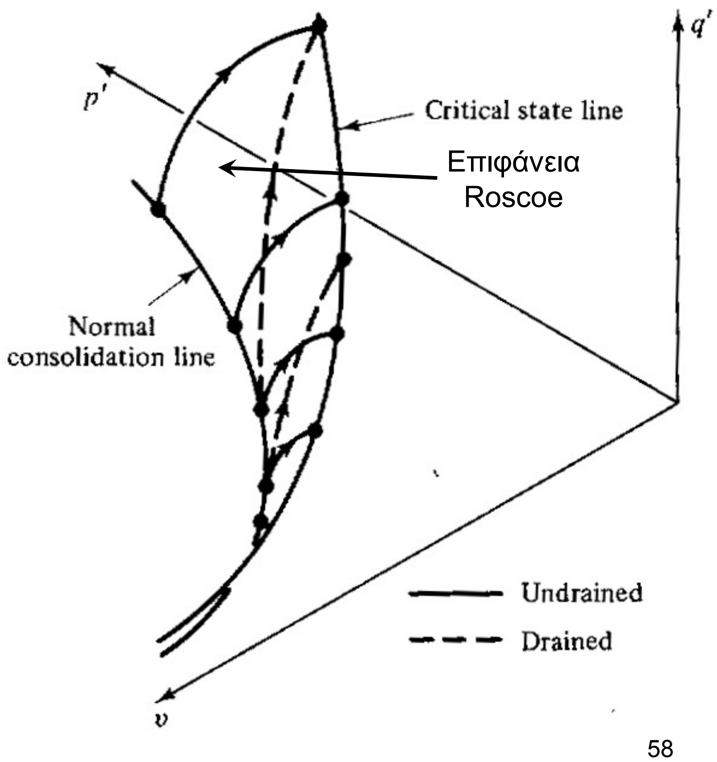
Παρουσίαση των διαδρομών τάσεων στραγγισμένων και αστράγγιστων δοκιμών σε κανονικά στερεοποιημένες αργίλους σε τριδιάστατο χώρο p’ – q - v

Τα σημεία τομής των διαδρομών τάσεων στο επίπεδο p’ – q αντιστοιχούν στον ίδιο δείκτη πόρων (και συνεπώς ίδιο v).

Επιφάνεια Roscoe : Ενιαία επιφάνεια διαδρομών τάσεων κανονικά στερεοποιημένων δειγμάτων (στραγγισμένες και αστράγγιστες δοκιμές) σε χώρο p’ – q – v.

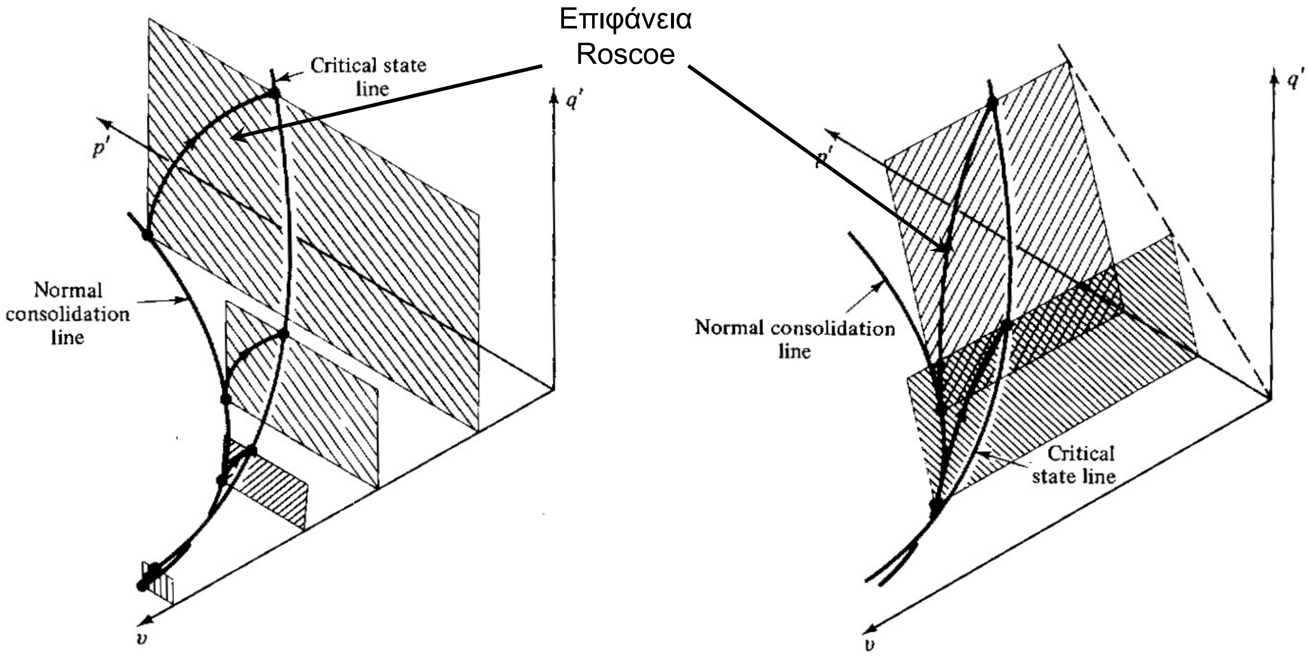






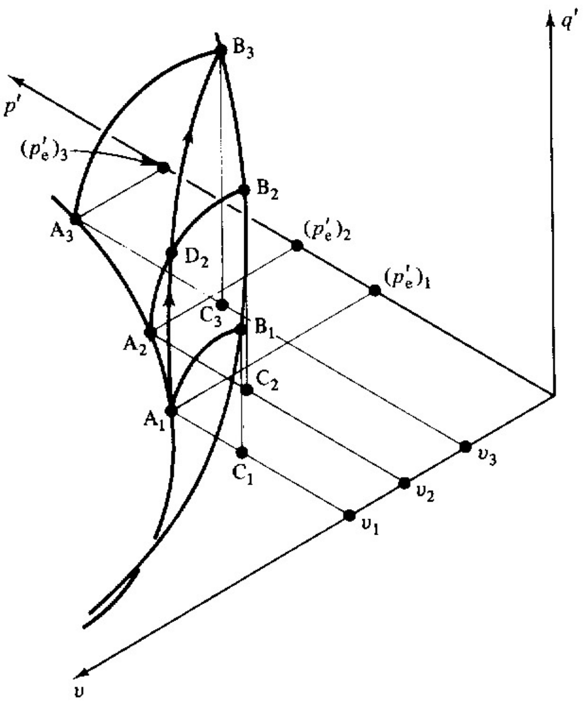
Επιφάνεια Roscoe : Όλες οι διαδρομές ενεργών τάσεων (δηλαδή από στραγγισμένες και αστράγγιστες δοκιμές) κανονικά στερεοποιημένων αργίλων ανήκουν σε ενιαία επιφάνεια στον χώρο p' – q – v.

1. Αστράγγιστες δοκιμές 2. Στραγγισμένες δοκιμές

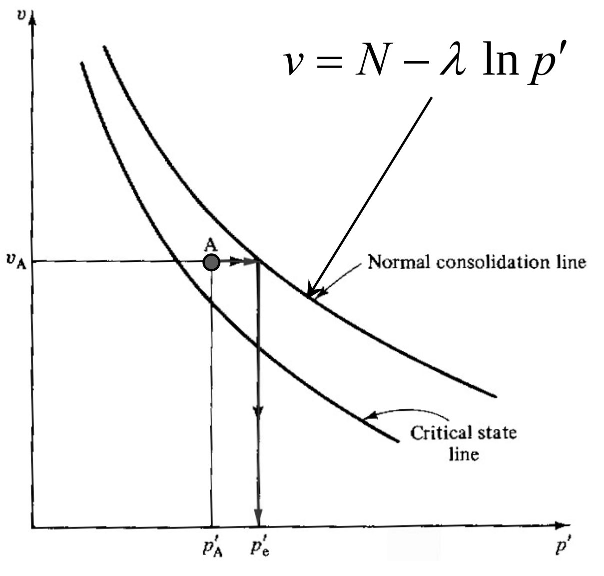


Παρουσίαση των διαδρομών τάσεων κανονικά στερεοποιημένων αργίλων σε τριδιάστατο χώρο p' – q - v

Επιφάνεια Roscoe : Κανονικοποίηση των διαδρομών τάσεων αστράγγιστων δοκιμών σε κανονικά στερεοποιημένα δείγματα με την ισότροπη τάση στερεοποίησης (p'_e)

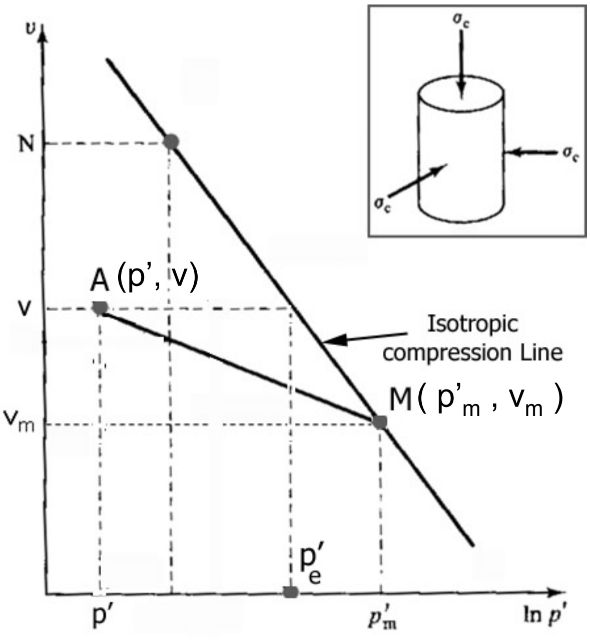


Προσδιορισμός της τάσης p'_e για τυχαία εντατική κατάσταση A (τάση p'_A, δείκτης v_A):



$$p'_e = \exp\left(\frac{N - v_A}{\lambda}\right)$$ δηλαδή : $p'_e = f(v)$

Υπολογισμός της τάσης p'_e που αντιστοιχεί σε μια τυχαία κατάσταση Α (p',v) :



1. Μέσω του v : $p'_e = f(v)$

$$p'_e = \exp\left(\frac{N - v}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

2. Μέσω της μέγιστης τάσης στερεοποίησης p'_m:

Συσχέτιση της κατάστασης Α (p', v) με την κατάσταση (p'_m , v_m) που αντιστοιχεί στο σημείο Μ (καμπύλη αποφόρτισης) :

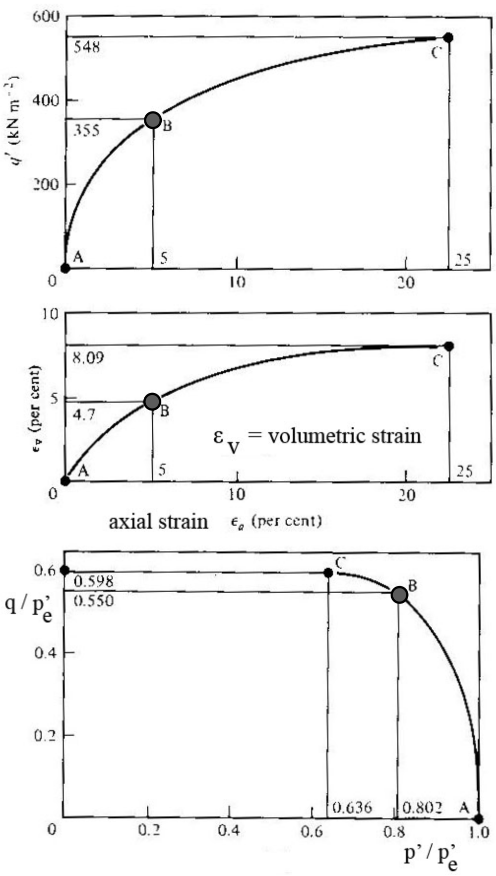
$$v = \left[N - (\lambda - \kappa)\ln p'_m\right] - \kappa \ln p' \qquad (2)$$

Συνδυασμός των (1) και (2) δίνει :

$$p'_e = p'_m \left(\frac{p'}{p'_m}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}}$$

Παρατήρηση : Στις αστράγγιστες δοκιμές, το "v" παραμένει σταθερό και συνεπώς το p'_e παραμένει σταθερό. Στις στραγγισμένες δοκιμές, το "v" μεταβάλλεται και συνεπώς το p'_e μεταβάλλεται κατά την σχέση (1)

Κανονικοποίηση της διαδρομής τάσεων στραγγισμένης δοκιμής σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο με την ισότροπη τάση στερεοποίησης (p'_e)



Παράδειγμα για άργιλο με : N = 3.25, λ = 0.2

Στερεοποίηση σε τάση p'_o = 400 kPa

Αρχικός δείκτης πόρων (μετά τη στερεοποίηση, και πριν την έναρξη της διάτμησης) : e_o =1.052

$\Rightarrow v_o = 1 + 1.052 = 2.052$

$$e = e_0 - \varepsilon_v (1 + e_o) \Rightarrow \quad v = v_o (1 - \varepsilon_v)$$

$$p'_e = \exp\left(\frac{N - v}{\lambda}\right)$$

Για ε_v = 4.7% = 0.047 $\Rightarrow$ v = 1.956 $\Rightarrow$ p'_e = 646 kPa

$\sigma'_3 = \sigma'_{3o} = p'_o$ = 400 kPa

Στη θέση όπου q = $\sigma'_1 - \sigma'_3$= 355 kPa $\Rightarrow$

σ'_1 = 755 kPa

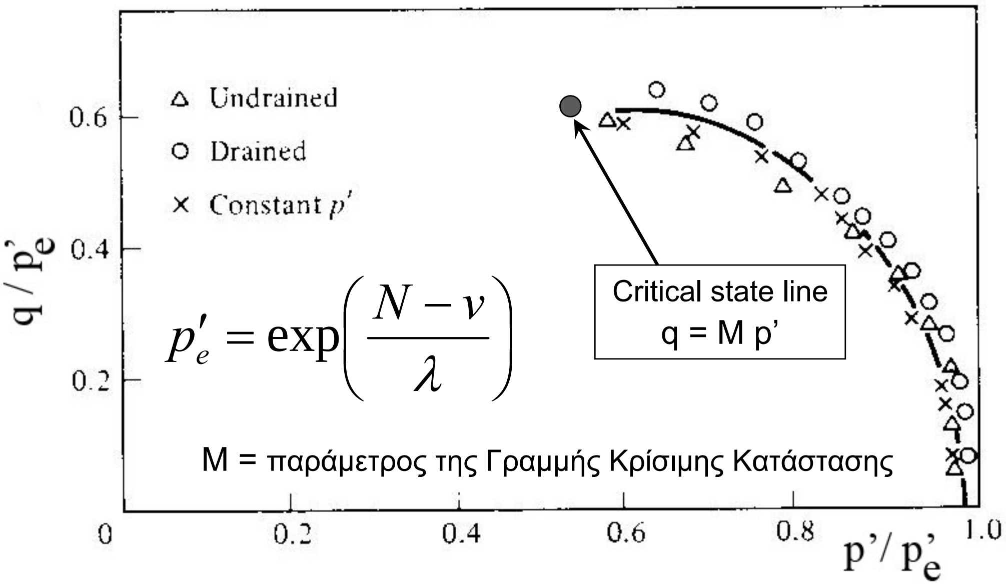
p' = (σ'_1 +2 σ'_3) / 3 = (755 + 2 x 400)/3 = 518 kPa

p' / p'_e = 518 / 646 = 0.802

q / p'_e = 355 / 646 = 0.550

Παρουσίαση των διαδρομών τάσεων κανονικά στερεοποιημένων αργίλων σε τριδιάστατο χώρο p' – q - v

Κανονικοποίηση των διαδρομών τάσεων δοκιμών σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο με την ισότροπη τάση στερεοποίησης (p'_e)

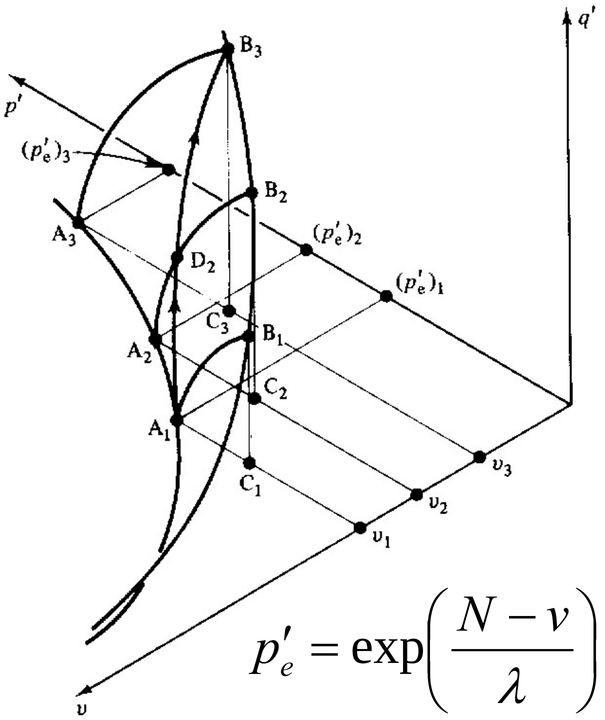


$$p'_e = \exp\left(\frac{N-v}{\lambda}\right)$$

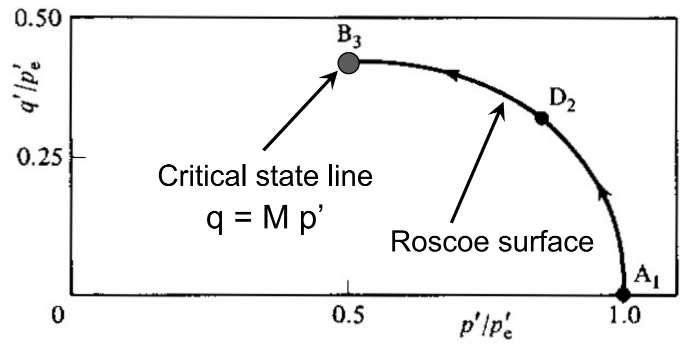
Πειραματικά αποτελέσματα αστράγγιστων, στραγγισμένων και p'=ct τριαξονικών δοκιμών σε κανονικά στερεοποιημένες αργίλους δείχνουν ότι όλες οι κανονικοποιημένες καμπύλες ταυτίζονται σε μία : επιφάνεια Roscoe

Παρουσίαση των διαδρομών τάσεων κανονικά στερεοποιημένων αργίλων σε τριδιάστατο χώρο p' – q - v

Αναλυτική περιγραφή της επιφάνειας Roscoe :



$$p'_e = \exp\left(\frac{N-v}{\lambda}\right)$$



Ολες οι καμπύλες ταυτίζονται σε μία, με εξίσωση έλλειψης (επιφάνεια Roscoe) :

$$\frac{p'}{p'_e} = \left(\frac{M^2}{M^2 + (q/p')^2}\right)^{1-\frac{\kappa}{\lambda}}$$

M = παράμετρος της Γραμμής Κρίσιμης Κατάστασης

Αναλυτική περιγραφή της επιφάνειας Roscoe :

$$\frac{p'}{p'_e} = \left(\frac{M^2}{M^2 + (q/p')^2} \right)^{1-\frac{\kappa}{\lambda}}$$

κ , λ = παράμετροι της καμπύλης συμπίεσης και αποφόρτισης

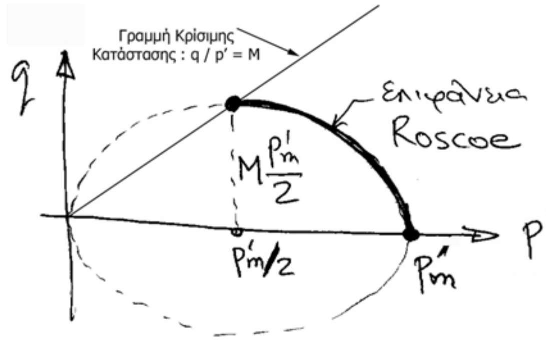
M = q / p’ στην κρίσιμη κατάσταση (παράμετρος της Γραμμής Κρίσιμης Κατάστασης)

Αλλά : $p'_e = p'_m \left(\frac{p'}{p'_m} \right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} \Rightarrow \frac{p'}{p'_e} = \left(\frac{p'}{p'_m} \right)^{1-\frac{\kappa}{\lambda}}$

Συνδυασμός των ανωτέρω σχέσεων δίνει : $\frac{p'}{p'_m} = \frac{M^2}{M^2 + (q/p')^2}$

ή : $q^2 - M^2 p' (p'_m - p') = 0$

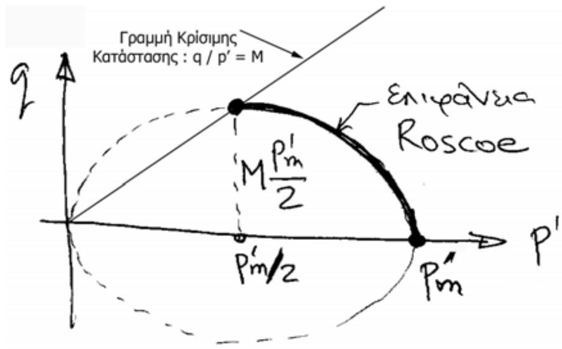
(Η επιφάνεια Roscoe είναι έλλειψη σε χώρο p’ – q)

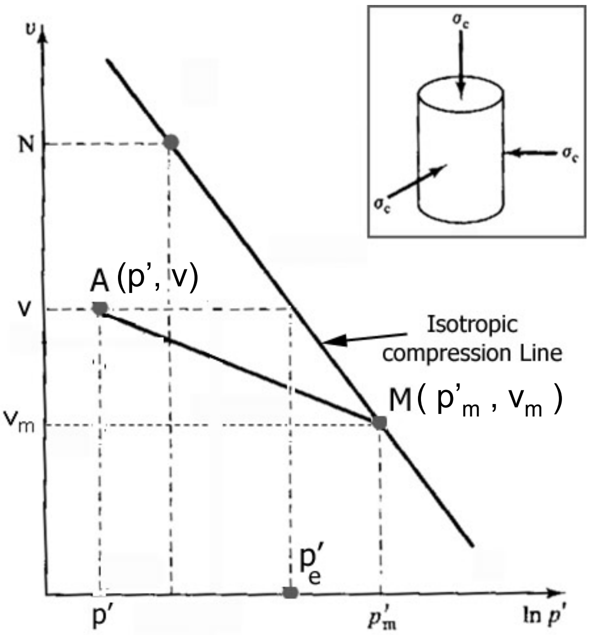


Αναλυτική περιγραφή της επιφάνειας Roscoe :

$$q^2 - M^2 p' (p'_m - p') = 0$$

(Η επιφάνεια Roscoe είναι έλλειψη σε χώρο p’ – q)





M = σταθερά (ιδιότητα του υλικού)

Η θέση και το μέγεθος της έλλειψης μεταβάλλονται με το p'_m. Η τιμή του p'_m αλλάζει κατά τη διάρκεια της φόρτισης επειδή εξαρτάται από τα “p’ “ και “v” κατά τη σχέση :

$$p'_m = \exp\left(\frac{N - v - \kappa \ln p'}{\lambda - \kappa} \right)$$

Το p'_m ονομάζεται παράμετρος κράτυνσης

Προσδιορισμός της παραμέτρου "M" της Γραμμής Κρίσιμης Κατάστασης :

Στην κρίσιμη κατάσταση :
$$M=\frac{q}{p'}=\frac{\sigma_1'-\sigma_3'}{\frac{1}{3}\left(\sigma_1'+2\sigma_3'\right)}=\frac{3\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}-1\right)}{\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}+2\right)}$$

Κατά το κριτήριο Mohr-Coulomb, στην αστοχία ισχύει για κανονικά στερεοποιημένες αργίλους (οι οποίες, ως γνωστόν, δεν έχουν συνοχή) :

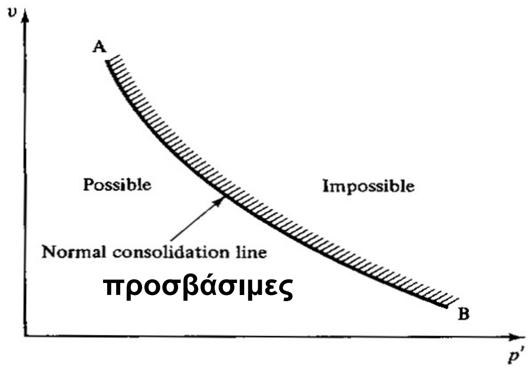
$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}=\tan^2\left(45+\frac{\phi}{2}\right)=\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}$$ (τριαξονική συμπίεση)

Συνδυασμός των ανωτέρω δίνει :
$$M=\frac{6\sin\phi}{3-\sin\phi}$$

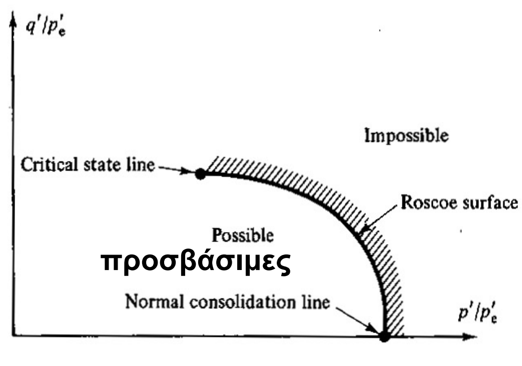
Παράδειγμα : για $\varphi=30^o \Rightarrow M = 1.20$

Προσβάσιμες και μή προσβάσιμες καταστάσεις

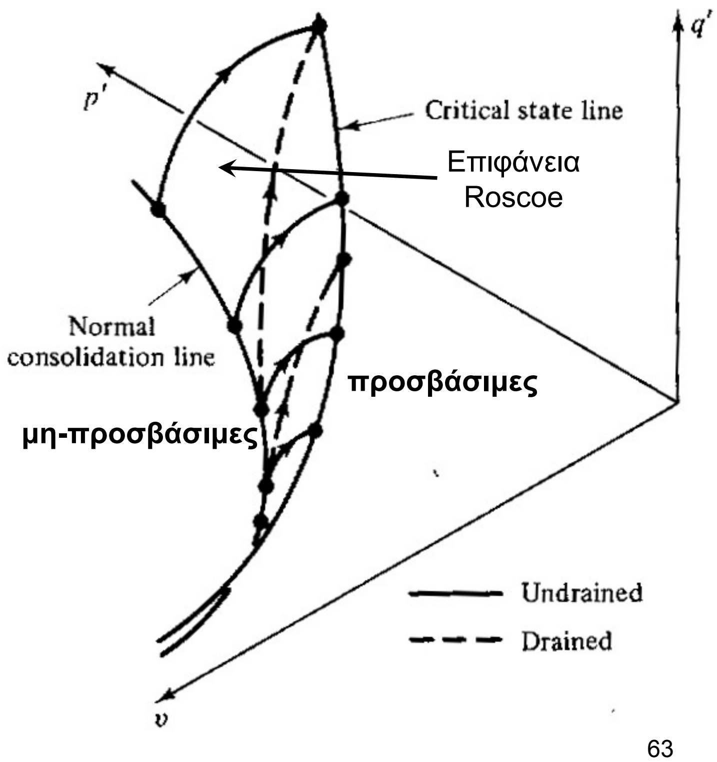
Η καμπύλη ισότροπης συμπίεσης χωρίζει τον χώρο p' – v :



Η επιφάνεια Roscoe χωρίζει τον χώρο q/p'_e – p'/p'_e :



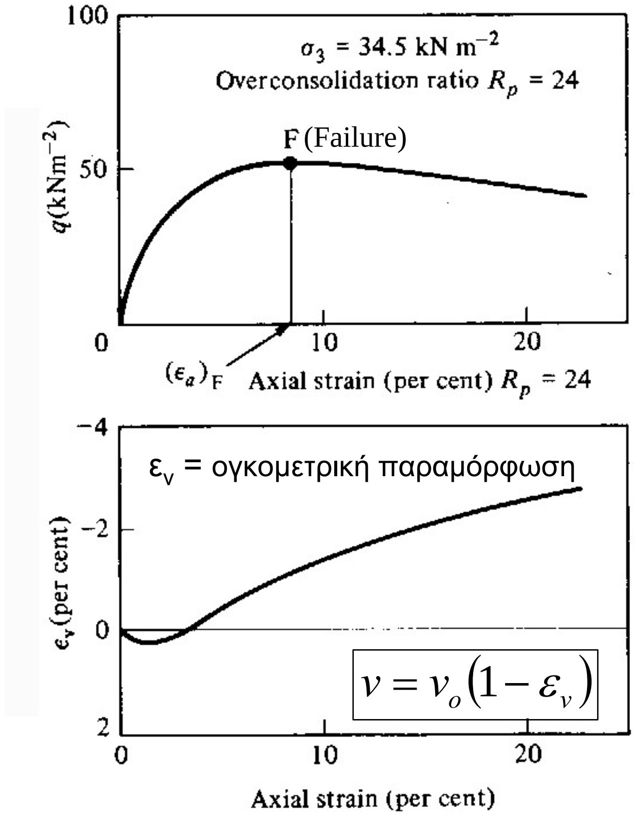
Προσβάσιμες είναι οι καταστάσεις δεξιά και κάτω από την επιφάνεια Roscoe (χώρος p' – q – v) και αντιστοιχούν σε υπερ-στερεοποιημένες αργίλους



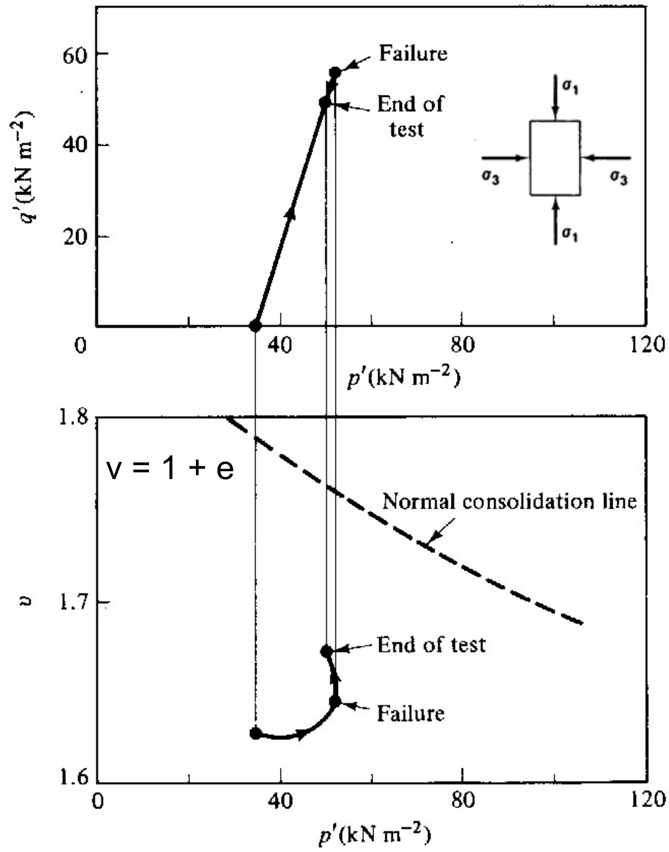
Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

Στραγγισμένη δοκιμή σε υπερστερεοποιημένη άργιλο (OCR = 24)

Στο F : Κορυφαία τιμή της αντοχής

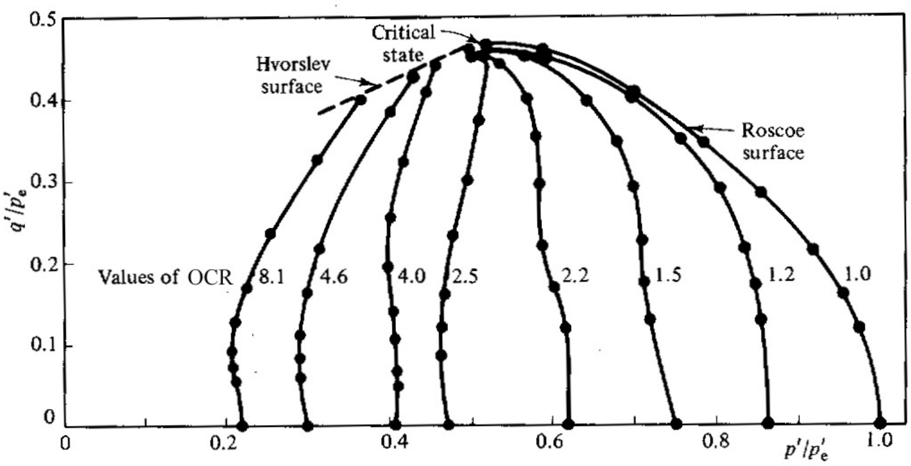


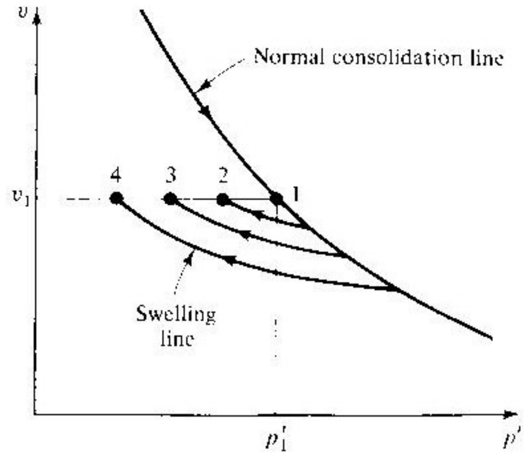
$$\boxed{v = v_o(1-\varepsilon_v)}$$



Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

Αποφόρτιση στον ίδιο δείκτη πόρων με αυξανόμενο συντελεστή υπερστερεοποίησης (OCR)





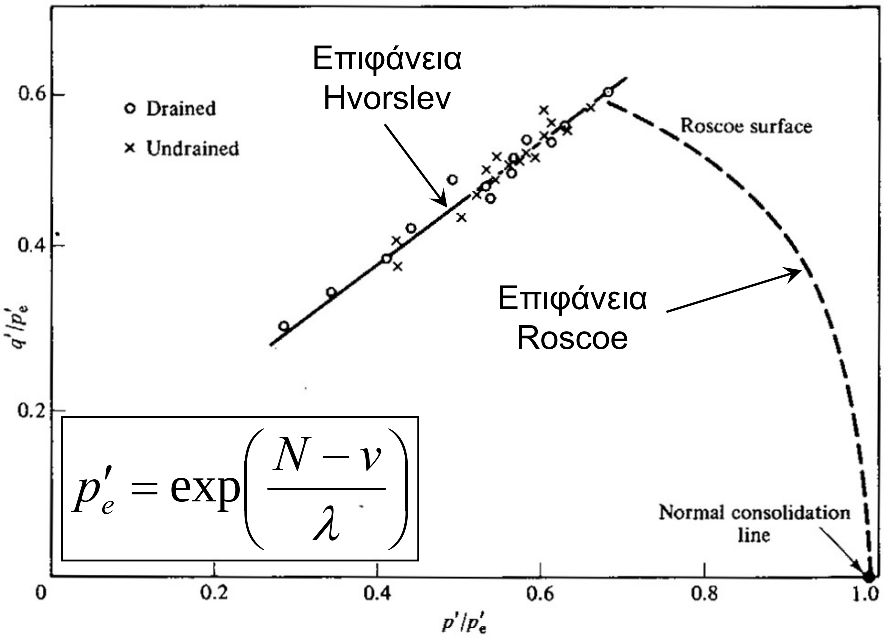
Αστράγγιστες δοκιμές σε υπερστερεοποιημένη άργιλο (διάφορα OCR)

Η κανονικοποίηση έγινε με την τάση p'_e (τάση Hvorslev), η οποία εξαρτάται μόνον από τον δείκτη πόρων (e) ή το v = 1+e

$$p'_e = \exp\left(\frac{N-v}{\lambda}\right)$$

Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

Σημεία κορυφαίας τιμής της αντοχής (Failure) από στραγγισμένες και αστράγγιστες τριαξονικές δοκιμές σε υπερστερεοποιημένη άργιλο Weald με διάφορες τιμές του OCR (Parry, 1960)



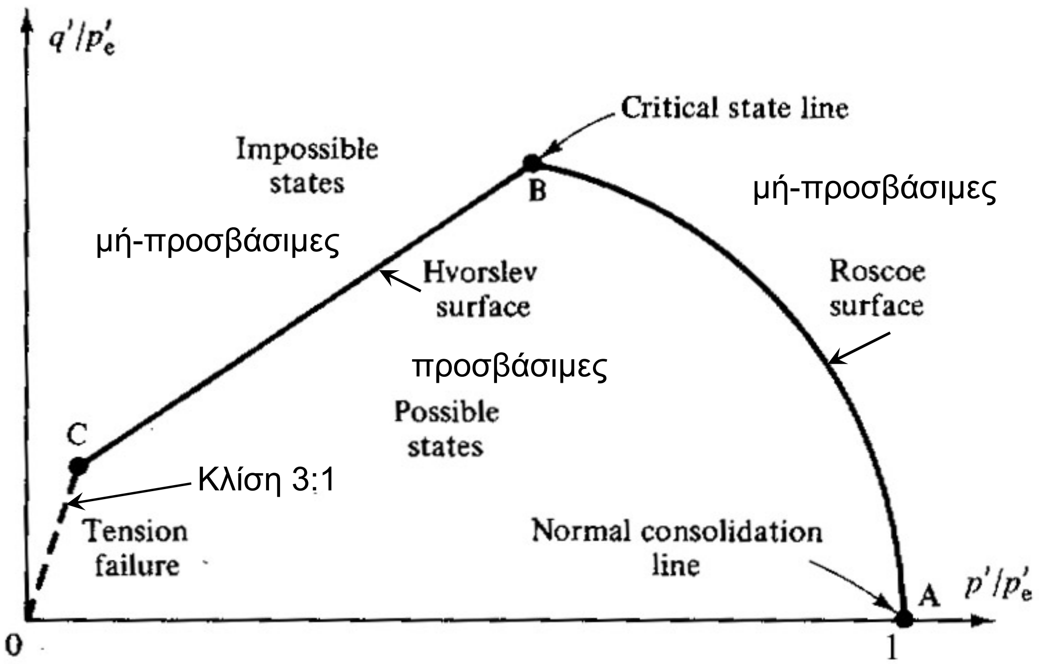
$$p'_e = \exp\left(\frac{N - v}{\lambda}\right)$$

Η κανονικοποίηση έγινε με την τάση p'_e (τάση Hvorslev), η οποία εξαρτάται μόνον από τον δείκτη πόρων (e) ή το v = 1+e

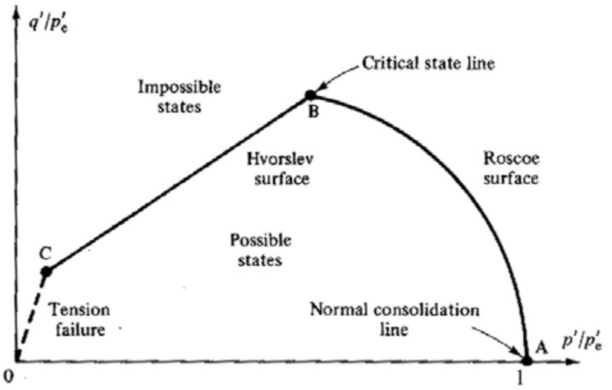
Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

Προσβάσιμες και μή-προσβάσιμες καταστάσεις στον κανονικοποιημένο χώρο p'/p'_e - q / p'_e

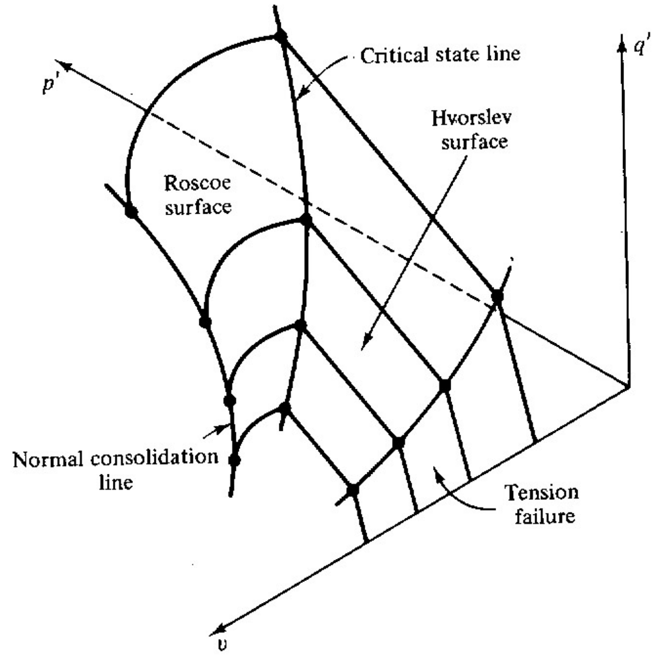
- Οι κανονικά στερεοποιημένες άργιλοι κινούνται στην επιφάνεια Roscoe.
- Οι υπερστερεοποιημένες άργιλοι κινούνται στην περιοχή των προσβάσιμων καταστάσεων και έχουν κορυφαία αντοχή στην επιφάνεια Hvorslev.



Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

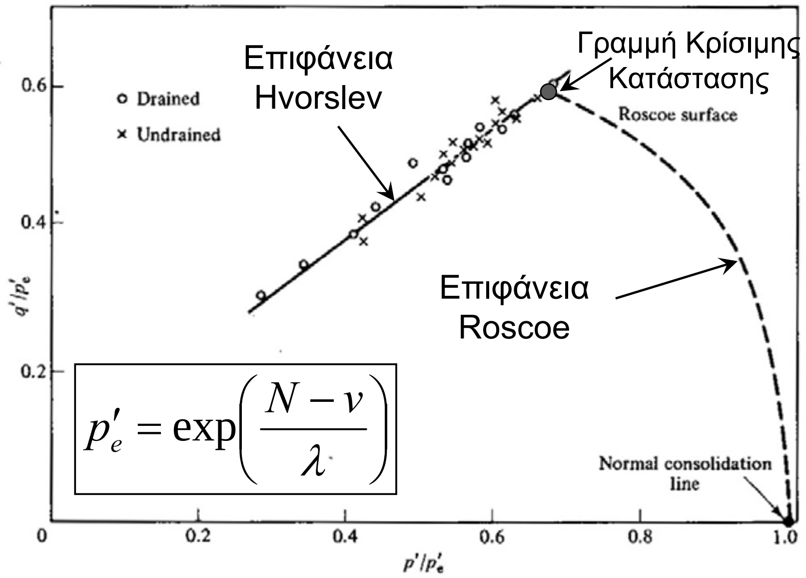


Προσβάσιμες και μή-προσβάσιμες καταστάσεις στον κανονικοποιημένο χώρο p'/p'_e - q/p'_e



Προσβάσιμες και μή-προσβάσιμες καταστάσεις στον χώρο p' - q - v

Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων



Επιφάνεια Hvorslev :

Ευθεία των σημείων κορυφαίας αντοχής υπερστερεοποιημένων αργίλων

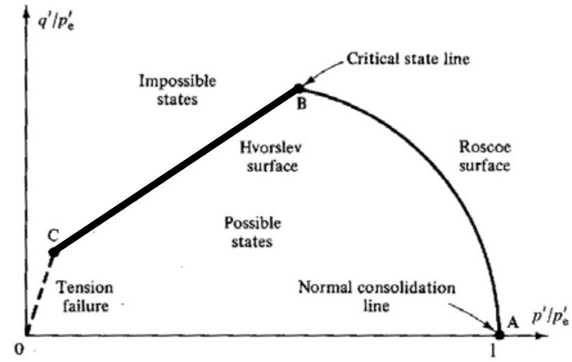
$$q/p'_e = g + h\left(p'/p'_e\right) \quad \text{ή :} \quad q = g\,\exp\left(\frac{N - v}{\lambda}\right) + h\,p'$$

όπου “g” και “h”΄είναι σταθερές

Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

Επιφάνεια Hvorslev :

$$q = g \exp\left(\frac{N - v}{\lambda}\right) + h\, p'$$



Γραμμή Κρίσιμης Κατάστασης (ΓΚΚ) :

$$q = M\, p' \qquad v = \Gamma - \lambda \ln p'$$

Αλλά η ΓΚΚ ανήκει στην επιφάνεια Hvorslev.

Συνεπώς : $g = (M - h) \exp\left(\frac{\Gamma - N}{\lambda}\right)$

Οπότε, η επιφάνεια Hvorslev γράφεται : $q = (M - h) \exp\left(\frac{\Gamma - v}{\lambda}\right) + h\, p'$

όπου : h, M, Γ, λ είναι σταθερές (ιδιότητες του υλικού)

$\Gamma, \lambda =$ παράμετροι της γραμμής Κ.Κ. σε χώρο *v , p΄*

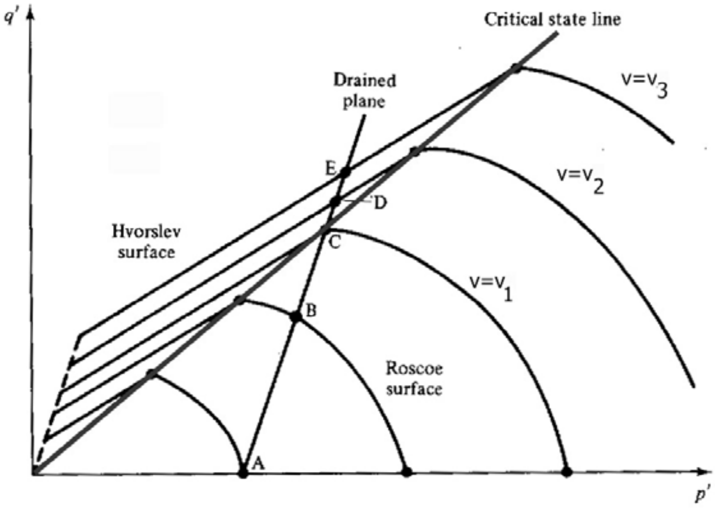
$M =$ παράμετρος της γραμμής Κ.Κ. σε χώρο *p' , q*

$h =$ κλίση των ευθειών Hvorslev

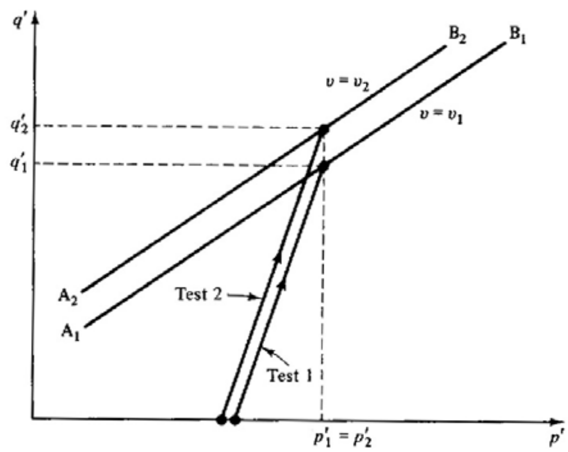
Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

Επιφάνεια Hvorslev : $q = (M - h) \exp\left(\frac{\Gamma - v}{\lambda}\right) + h\, p'$

Στο επίπεδο (p', q), για κάθε τιμή του (v) αντιστοιχεί μια ευθεία Hvorslev



Πολλαπλές ευθείες Hvoslev
για διάφορες τιμές του "v"

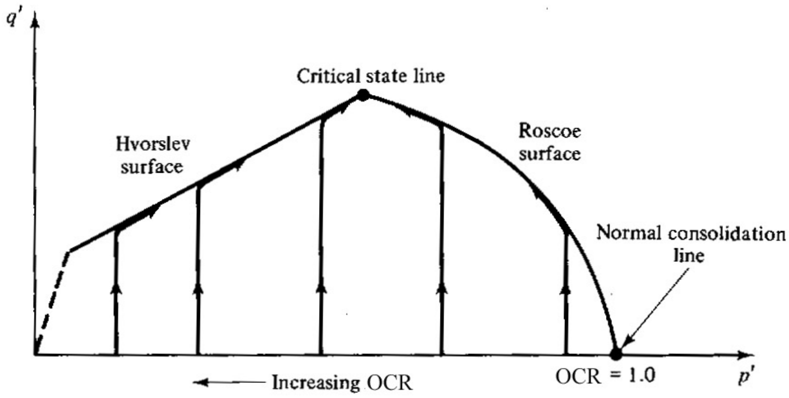


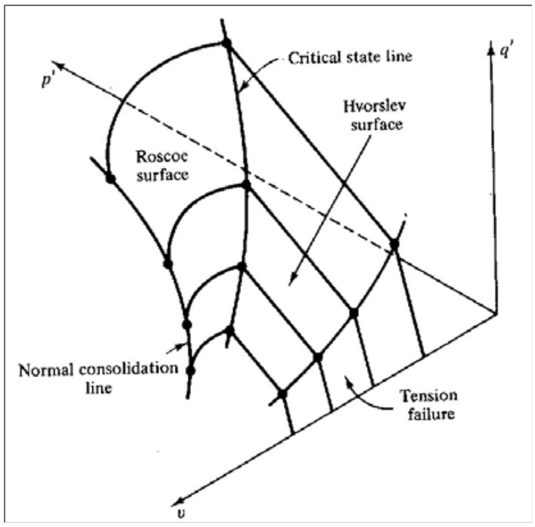
Δύο στραγγισμένες τριαξονικές δοκιμές έχουν κορυφαία αντοχή που (εν γένει) αντιστοιχεί σε διαφορετικές ευθείες Hvorslev, αφού ο δείκτης πόρων κατά την αστοχία τους διαφέρει.

Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

Εξιδανικευμένες διαδρομές τάσεων υπερστερεοποιημένων αργίλων υπό αστράγγιστες συνθήκες :

- Στην ελαστική περιοχή, p'= ct., επειδή e = ct, δηλαδή ε_{vol} = ct.
- Για μικρές τιμές του OCR οι διαδρομές τάσεων κινούνται επί της επιφάνειας Roscoe
- Για μεγάλες τιμές του OCR οι διαδρομές τάσεων κινούνται επί της επιφάνειας Hvorslev
- Όλες οι διαδρομές καταλήγουν στην Γραμμή Κρίσιμης Κατάστασης

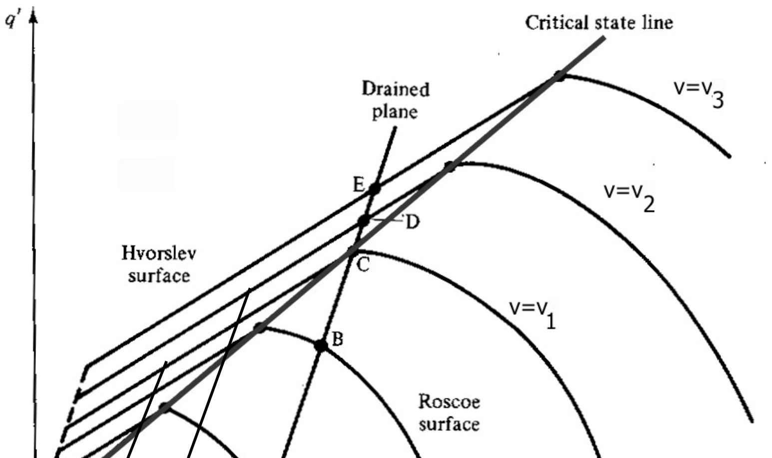


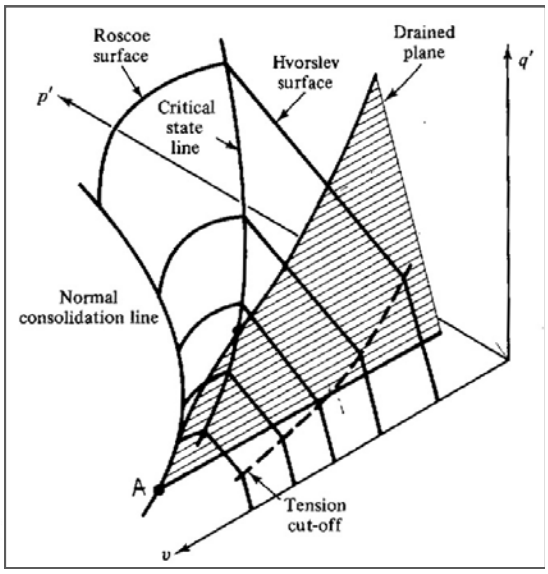


Συμπεριφορά υπερστερεοποιημένων αργίλων

Εξιδανικευμένες διαδρομές τάσεων υπερστερεοποιημένων αργίλων υπό στραγγισμένες συνθήκες (Δq / Δp' = 3 : 1)

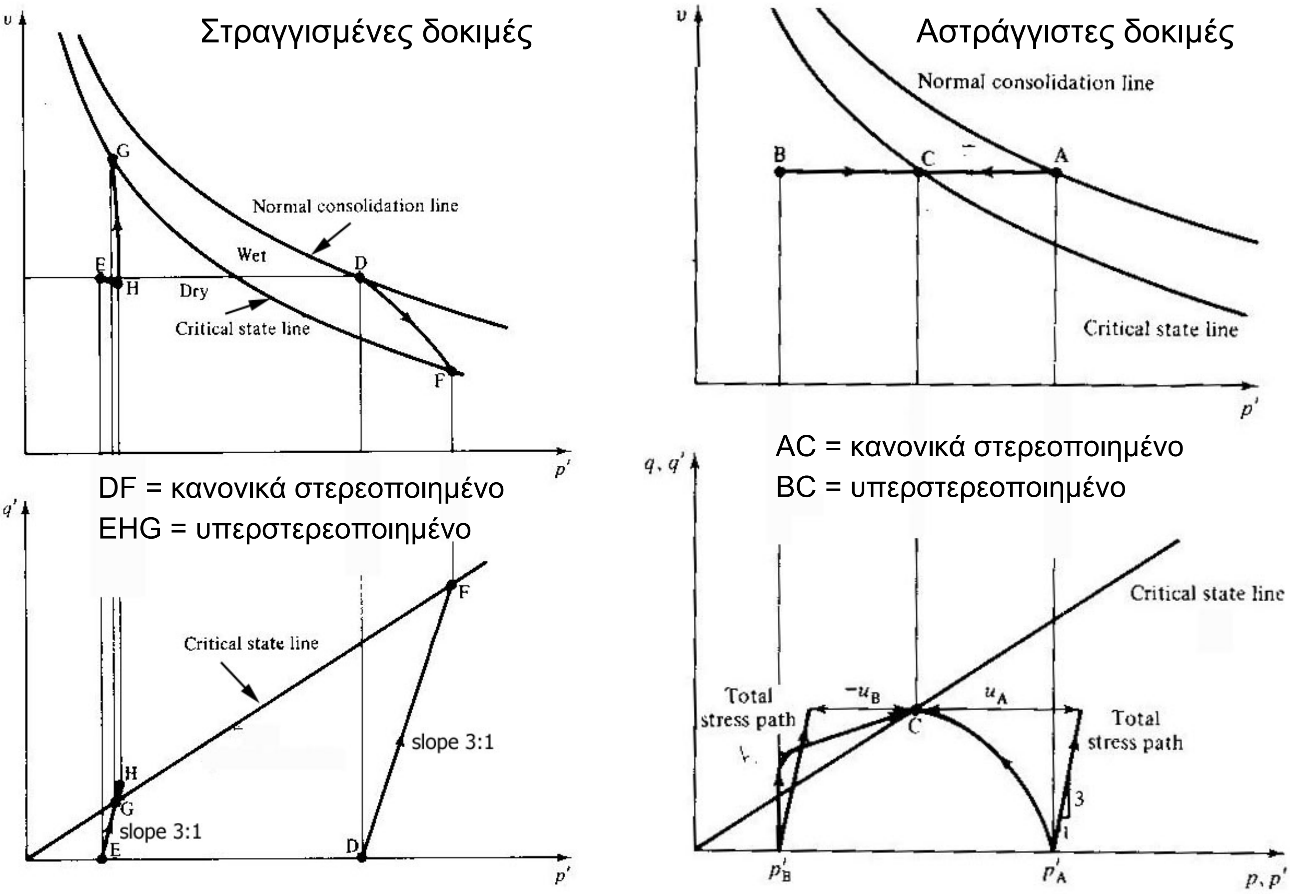
Οι διαδρομές έχουν κορυφαία αντοχή στην κατάλληλη ευθεία Hvorslev (αναλόγως του δείκτη πόρων) και καταλήγουν στη Γραμμή Κρίσιμης Κατάστασης





Στραγγισμένη διαδρομή : ABE = ανιών κλάδος, E = κορυφαία αντοχή,
EC = κατιών κλάδος, C = κρίσιμη κατάσταση

Στραγγισμένες και αστράγγιστες τριαξονικές δοκιμές σε κανονικά στερεοποιημένες και υπερστερεοποιημένες αργίλους



ΕΠΟΠΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΔΙΑΛΕΞΕΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

« ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ – Μέρος 1 »

9ο Εξ. ΠΟΛ. ΜΗΧ. - Ακαδ. Ετος 2006 - 07

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

Το Καταστατικό Προσομοίωμα Cam-Clay

20.10.2006

Καταστατικά προσομοιώματα εδαφικών υλικών

- Τα καταστατικά προσομοιώματα περιγράφουν τις σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων και, στην περίπτωση των εδαφών, τις σχέσεις ενεργών τάσεων – παραμορφώσεων
- Συνήθως δίνονται με μορφή μικρών μεταβολών (incremental form) :

$$\Delta\sigma'_{ij} = f_{ij}\left(\Delta\varepsilon_{kl}\,,\,\sigma'_{kl}\,,\,h_m\right) \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\Delta\sigma'} = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\Delta\varepsilon}\,,\,\boldsymbol{\sigma'}\,,\,\mathbf{h}\right)$$

όπου “h_m” είναι μεταβλητές (εκτός των τάσεων) που περιγράφουν την κατάσταση του υλικού (π.χ. η τάση υπερστερεοποίησης)

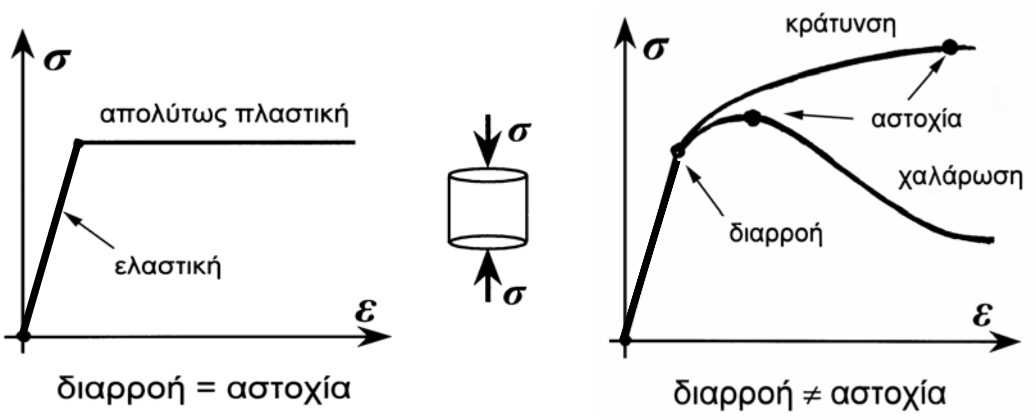
Οι σχέσεις της γραμμικής ισότροπης ελαστικότητας αποτελούν την απλούστερη περίπτωση καταστατικού προσομοιώματος :

$$\Delta\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{xx} - \nu\left(\Delta\sigma'_{yy} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xy}$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{yy} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{zz}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{yz}$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\Delta\sigma'_{zz} - \nu\left(\Delta\sigma'_{xx} + \Delta\sigma'_{yy}\right)\right] \qquad \Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\Delta\tau_{xz}$$

Καταστατικά προσομοιώματα εδαφικών υλικών

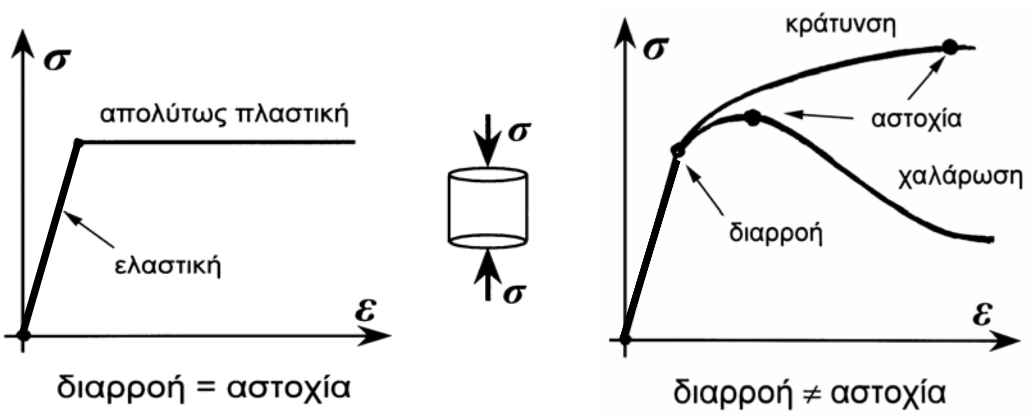


Τα περισσότερα υλικά δεν είναι γραμμικώς ελαστικά, αλλά μετά από ένα αρχικό γραμμικό κλάδο εμφανίζουν μή-γραμμική συμπεριφορά, δηλαδή εμφανίζουν ανελαστικές (ή πλαστικές) παραμορφώσεις

Τύποι ανελαστικής συμπεριφοράς :

1. Απολύτως πλαστική (παραμόρφωση χωρίς μεταβολή της τάσης)
2. Κρατυνόμενη (παραμόρφωση με αύξηση της τάσης)
3. Χαλαρούμενη (παραμόρφωση με μείωση της τάσης)

Καταστατικά προσομοιώματα εδαφικών υλικών



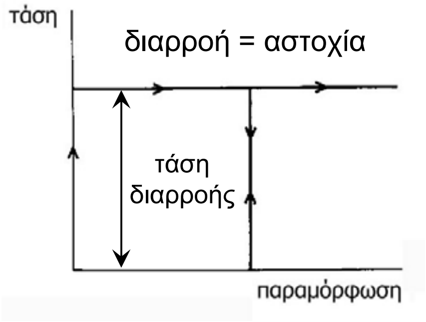
Διαρροή : Η κατάσταση κατά την οποία το υλικό αρχίζει να εμφανίζει ανελαστικές (πλαστικές) παραμορφώσεις

Αστοχία : Η κατάσταση κατά την οποία το υλικό έχει φθάσει τη μέγιστη τάση (κορυφαία αντοχή)

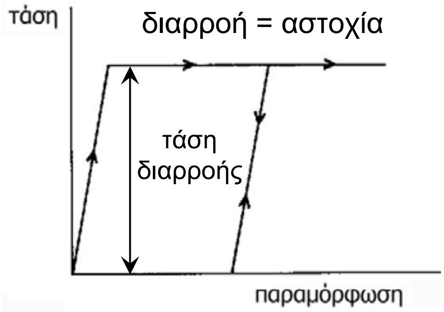
Παραμένουσα αντοχή : η τελική (μειωμένη) αντοχή ενός χαλαρούμενου υλικού σε πολύ μεγάλες παραμορφώσεις

- Σε υλικά με απολύτως πλαστική συμπεριφορά, η «διαρροή» και η «αστοχία» ταυτίζονται
- Στα υπόλοιπα υλικά, η «διαρροή» συμβαίνει πριν την «αστοχία»

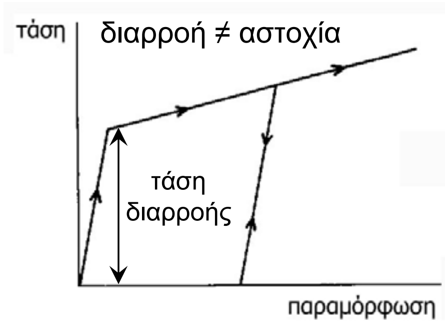
Εξιδανικευμένα ελαστο-πλαστικά καταστατικά προσομοιώματα υλικών



Απαραμόρφωτο – απολύτως πλαστικό

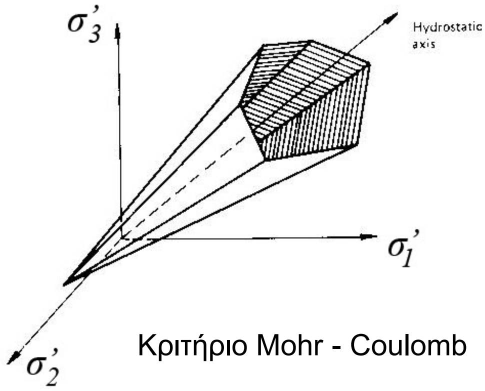


Ελαστικό – απολύτως πλαστικό



Ελαστικό – κρατυνόμενο

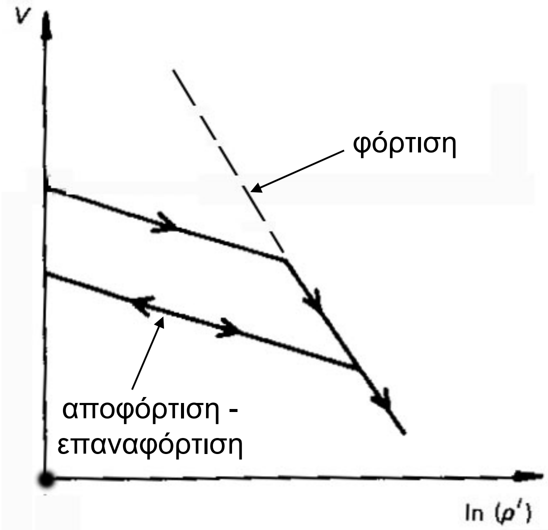
- Η τάση διαρροής συνήθως καθορίζεται με ένα από τα κριτήρια διαρροής όπως τα κριτήρια Mohr-Coulomb, Tresca, Mises, Drucker-Prager, Cam-Clay, κλπ
- Στην περίπτωση αυτή, οι ελαστικές καταστάσεις βρίσκονται στο εσωτερικό της επιφάνειας ενώ οι πλαστικές καταστάσεις (ή καταστάσεις διαρροής) βρίσκονται επί της επιφάνειας διαρροής



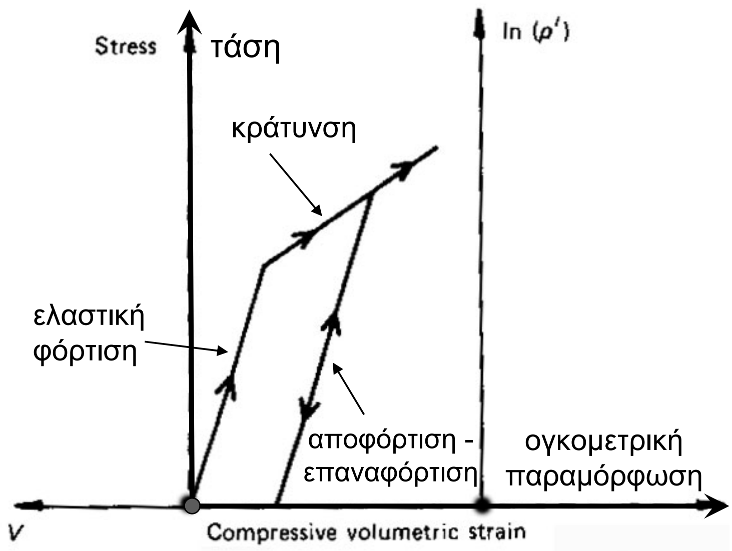
Κριτήριο Mohr - Coulomb

Ελαστο-πλαστικά καταστατικά προσομοιώματα αργιλικών εδαφών

Ελαστική – κρατυνόμενη συμπεριφορά των αργίλων κατά την ισότροπη και μονοδιάστατη συμπίεση

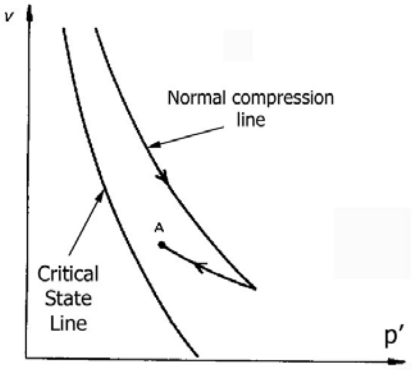


Καμπύλες δείκτη πόρων (e = v-1) ως προς τον λογάριθμο της μέσης ενεργού τάσης (p')

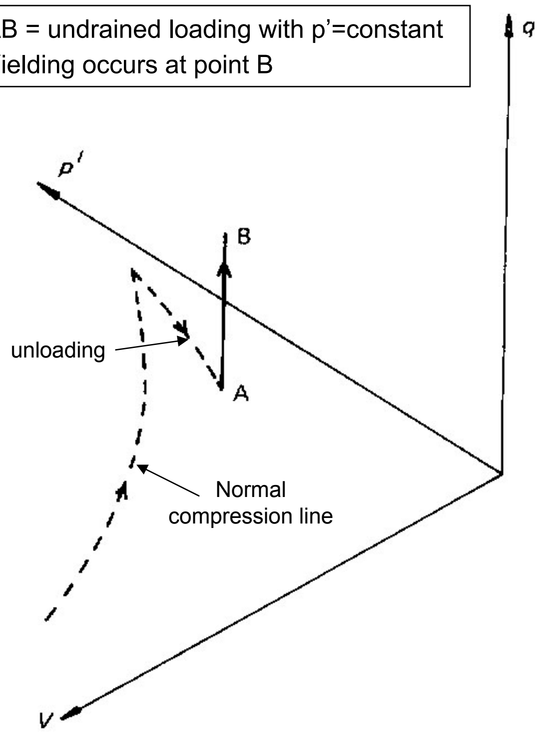


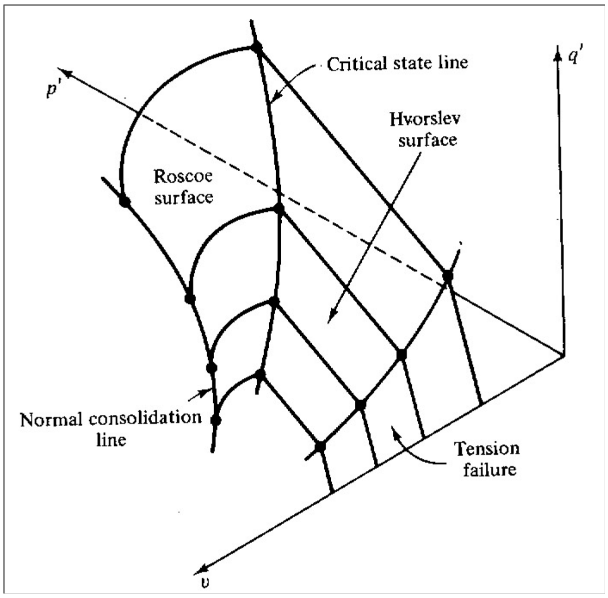
Ελαστική – κρατυνόμενη συμπεριφορά

Κατά τη θεωρία κρίσιμης κατάστασης των αργιλικών εδαφών, οι ελαστικές καταστάσεις βρίσκονται στο εσωτερικό της επιφάνειας Roscoe & Hvorslev, ενώ επί της επιφάνειας Roscoe & Hvorslev βρίσκονται οι καταστάσεις διαρροής



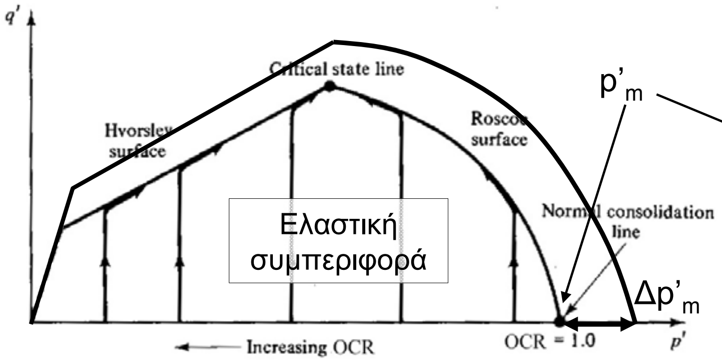
AB = undrained loading with p'=constant
Yielding occurs at point B

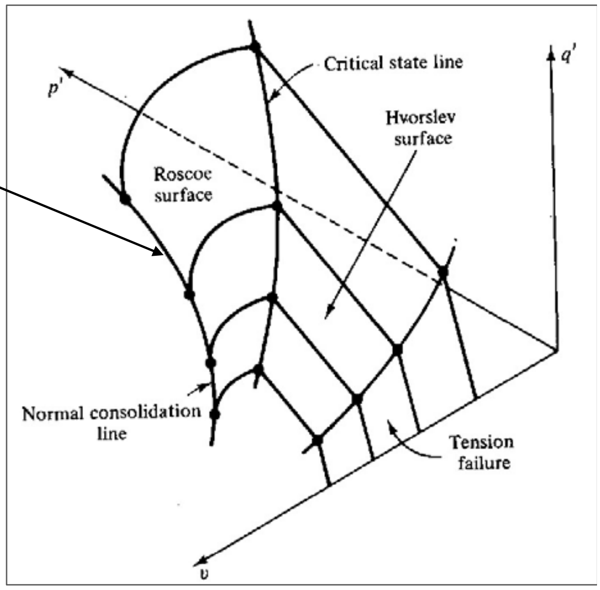




Ελαστο-πλαστικά καταστατικά προσομοιώματα αργιλικών εδαφών

Χαρακτηριστικά κράτυνσης :



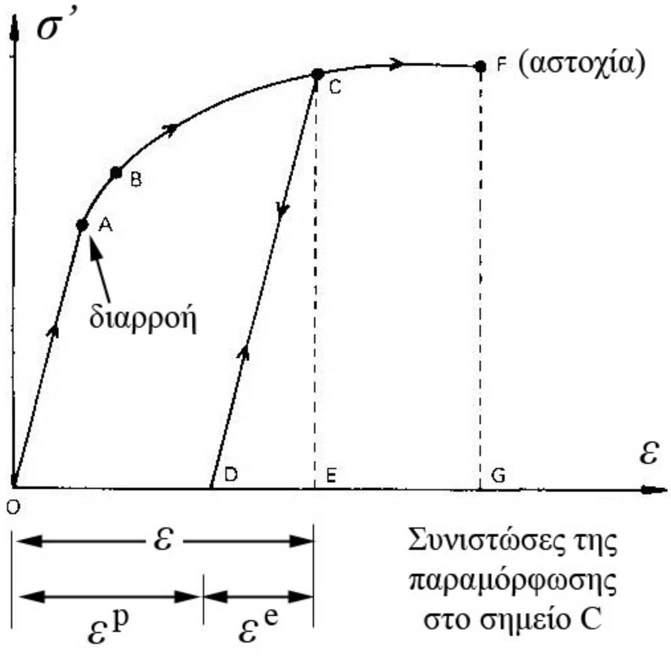


Κανονικά και ισότροπα στερεοποιημένες άργιλοι :

$$v = N - \lambda \ln p'_m \Rightarrow p'_m = \exp\left(\frac{N - v}{\lambda}\right)$$

- Η κράτυνση του υλικού στον χώρο των τάσεων (p', q) περιγράφεται μέσω της μεγέθυνσης της επιφάνειας διαρροής.
- Κατά τη θεωρία κρίσιμης κατάστασης, το μέγεθος της επιφάνειας διαρροής εξαρτάται από την τάση προστερεοποίησης (p'_m) η οποία είναι συνάρτηση του δείκτη πόρων (ή το v = 1+e).
- Συνεπώς, κατά την θεωρία Κρίσιμης Κατάστασης, η κατάσταση των αργιλικών εδαφών μπορεί να περιγραφεί μονοσήμαντα μέσω των (p', q, v).

Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Θεωρία Πλαστικότητας



Σε τυχαίο σημείο της καμπύλης τάσεων – παραμορφώσεων, η παραμόρφωση (ε) αποτελείται από μια ελαστική (ανακτήσιμη) συνιστώσα και μια πλαστική (μή-ανακτήσιμη) συνιστώσα

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p}$$

Κατά την πολυδιάστατη παραμόρφωση, η ανωτέρω σχέση ισχύει τανυστικά (δηλαδή για όλες τις συνιστώσες της παραμόρφωσης) :

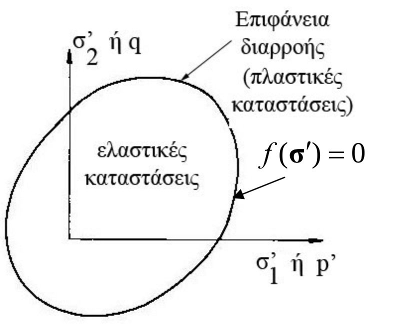
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$$

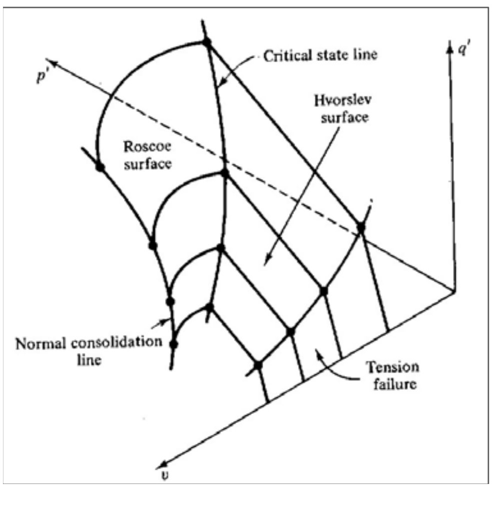
Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Θεωρία Πλαστικότητας

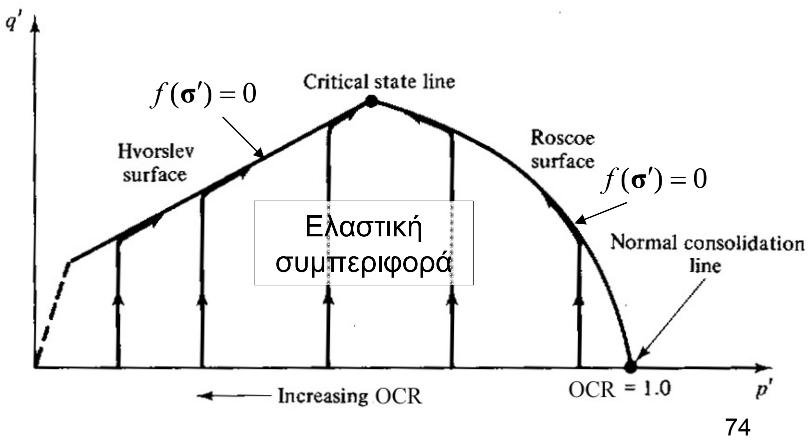
Τα μή-γραμμικά καταστατικά προσομοιώματα περιλαμβάνουν :

1. Κριτήριο (συνάρτηση) διαρροής – yield function :

- Καθορίζει το όριο των ελαστικών καταστάσεων σε χώρο τάσεων. Ελαστικές είναι οι καταστάσεις εντός της επιφάνειας διαρροής. Πλαστικές είναι οι καταστάσεις επί της επιφάνειας διαρροής
- Κατά τη θεωρία Κρίσιμης Κατάστασης, η επιφάνεια διαρροής των αργίλων είναι η επιφάνεια Roscoe & Hvorslev



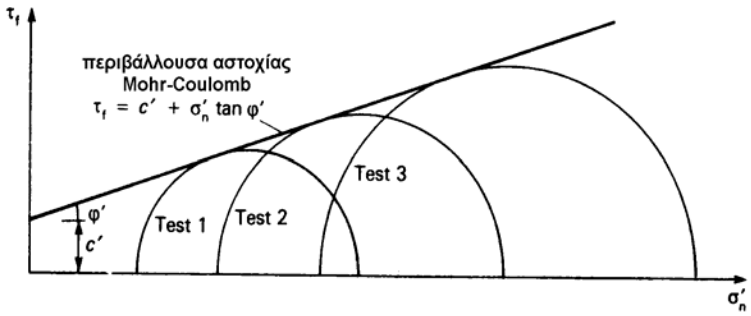




Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Θεωρία Πλαστικότητας

1. Κριτήριο (συνάρτηση) διαρροής – yield function :

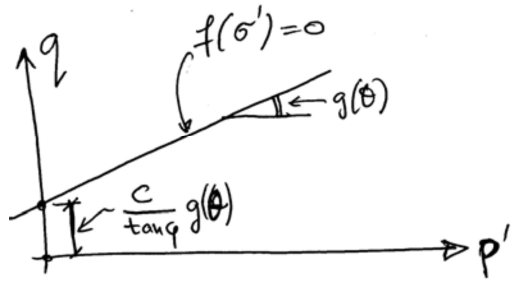
Παράδειγμα : Καταστατικό προσομοίωμα Mohr-Coulomb



ή : $\sigma_1' = \sigma_3' \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + 2c\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2}\right) - \left[\frac{c}{\tan\phi} + \left(\frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2}\right)\right]\sin\phi = 0$

Συνάρτηση διαρροής : $f(\boldsymbol{\sigma}') = q - \left(\frac{c}{\tan\phi} + p'\right) g(\theta) = 0$

όπου : $g(\theta) = \dfrac{3\sin\phi}{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta\sin\phi}$

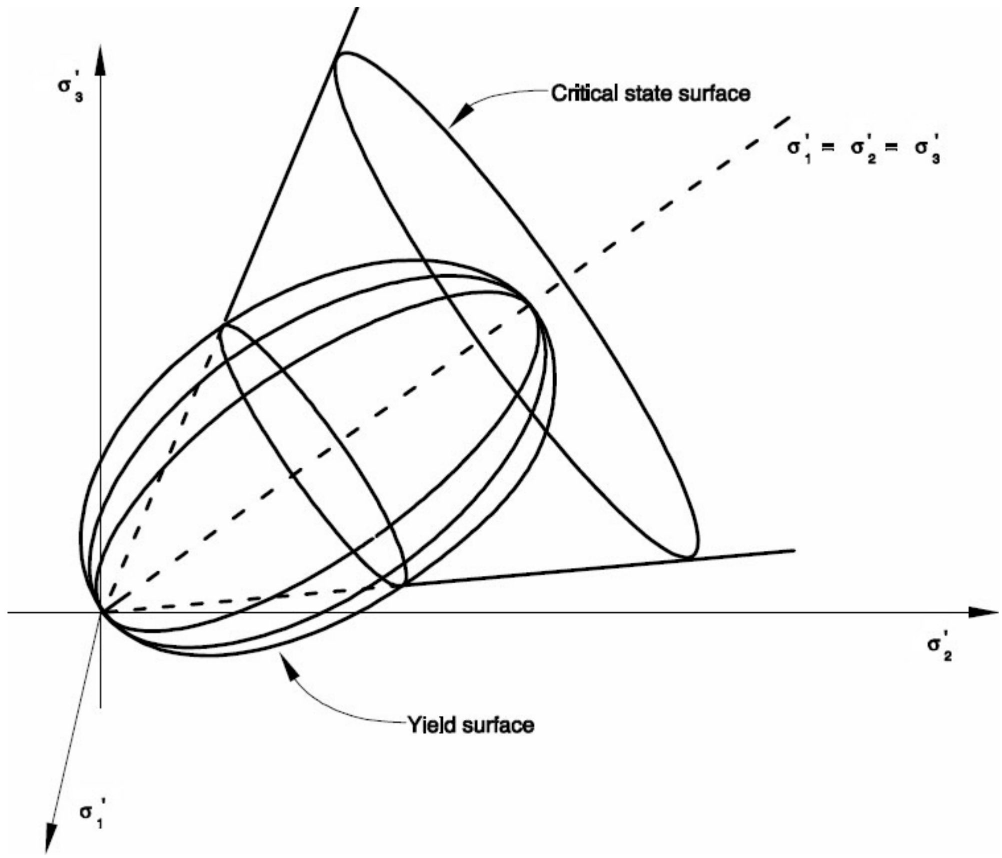


Κατά την τριαξονική δοκιμή,

θ=30° οπότε : g(θ) = 6 sinφ / (3+sinφ)

Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Θεωρία Πλαστικότητας

1. Κριτήριο (συνάρτηση) διαρροής – yield function :



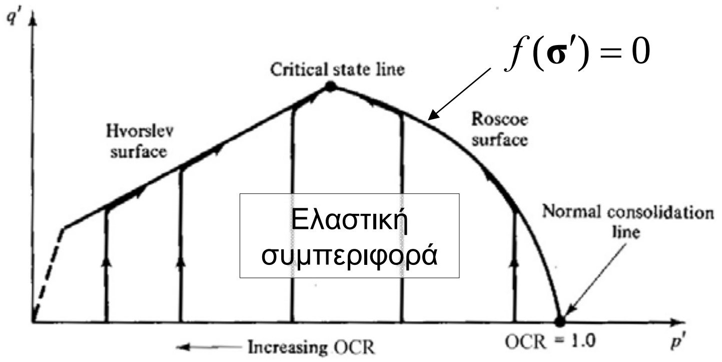
Κατά τη θεωρία κρίσιμης κατάστασης, η ελαστική συμπεριφορά περιγράφεται από την καμπύλη αποφόρτισης – επαναφόρτισης : $v = v_\kappa - \kappa \ln p'$

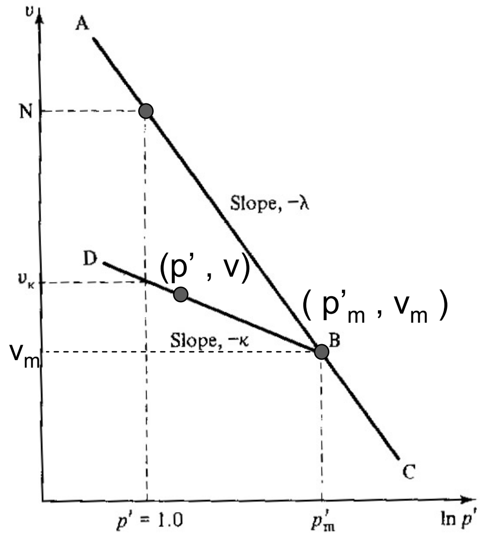
Συνεπώς, κατά την ελαστική συμπεριφορά (δηλαδή στο εσωτερικό της επιφάνειας διαρροής) η μεταβολή του (v) είναι : $\Delta v = \Delta v^e = -\kappa \dfrac{\Delta p'}{p'} \quad \Rightarrow \Delta \varepsilon^e_{vol} = \dfrac{\kappa}{v_o} \dfrac{\Delta p'}{p'}$

Πόρισμα : Η αστράγγιστη φόρτιση ή αποφόρτιση (Δv=0) στην ελαστική περιοχή ($\Delta v^e = \Delta v$) γίνεται υπό σταθερή ενεργό τάση (Δp'=0), δηλαδή η διαδρομή των ενεργών τάσεων σε χώρο (p', q) είναι κατακόρυφη.

Επί της επιφάνειας διαρροής, Δp'≠0, επειδή ($\Delta v^p \neq 0$) :

$$0 = \Delta v = \Delta v^e + \Delta v^p$$

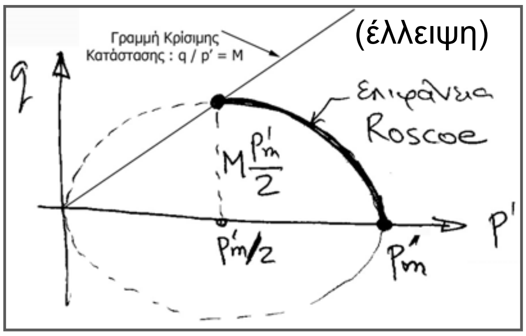




Κριτήριο (συνάρτηση) διαρροής κατά τη θεωρία Κρίσιμης Κατάστασης (Roscoe) :

$$f(p', q; v) \equiv q^2 - M^2 p'(p'_m - p') = 0$$

όπου : $p'_m = \exp\left(\dfrac{N - v - \kappa \ln p'}{\lambda - \kappa}\right)$

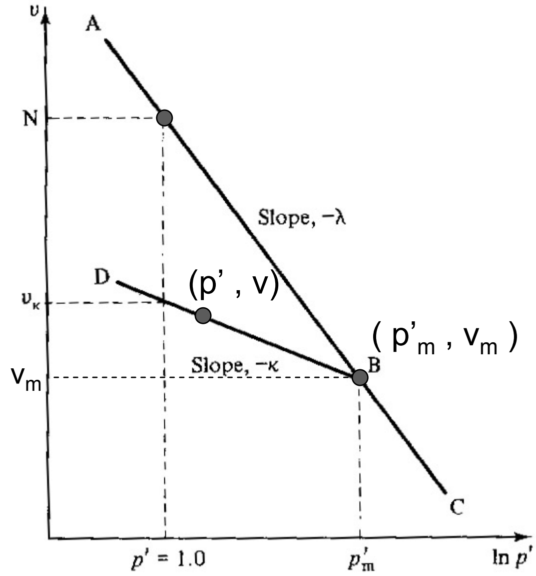


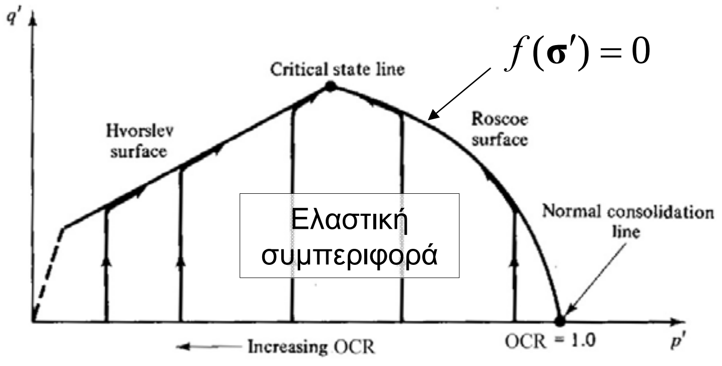
κ , λ = παράμετροι της καμπύλης συμπίεσης και αποφόρτισης

N = παράμετρος της γραμμής ισότροπης συμπίεσης

M = q / p' στην κρίσιμη κατάσταση

v = 1+e





Κριτήριο (συνάρτηση) διαρροής κατά τη θεωρία Κρίσιμης Κατάστασης (Hvorslev) :

$$f\left(p', q; v\right) \equiv q - h\,p' - \left(M - h\right)\exp\left(\frac{\Gamma - v}{\lambda}\right) = 0$$

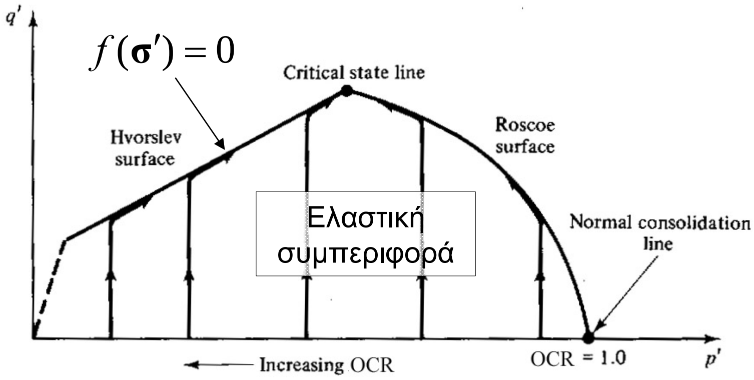
όπου : *h, M, Γ, λ* είναι σταθερές (ιδιότητες του υλικού)

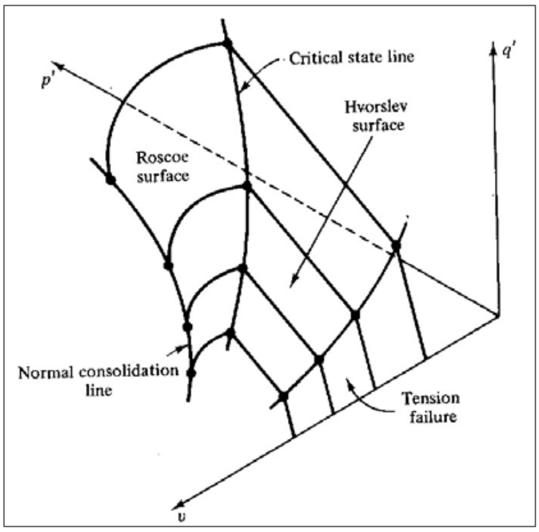
h = παράμετρος ευθείας Hvorslev

M = q / p' στην κρίσιμη κατάσταση

Γ = παράμετρος της γραμμής μονοδιάστατης συμπίεσης

λ = παράμετρος συμπιεστότητας



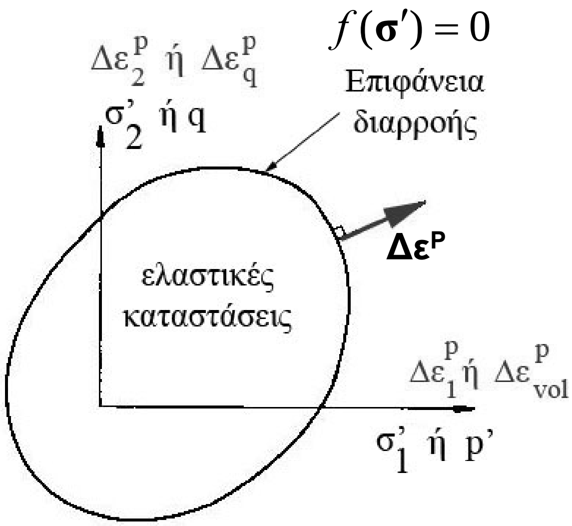


Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Θεωρία Πλαστικότητας

2. Κανόνας ροής – flow rule :

Καθορίζει τη σχέση μεταξύ των συνιστωσών της μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης (**Δε^P**)

$$\mathbf{\Delta\varepsilon^p} = \left(\Delta\Lambda\right)\,\mathbf{P}$$



$\Delta\varepsilon^P$ = διάνυσμα (τανυστής) της μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης

P = διάνυσμα (τανυστής) που καθορίζει την διεύθυνση της μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης

(ΔΛ) = μέγεθος της μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης

Ο κανόνας ροής καθορίζει τη διεύθυνση του διανύσματος **P.** Συνήθως, το **P** θεωρείται κάθετο στην επιφάνεια διαρροής (f) - συσχετισμένος κανόνας ροής - δηλαδή :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$$

Κανόνας ροής – υπολογισμός του μεγέθους της πλαστικής παραμόρφωσης (ΔΛ) :

- Το μέγεθος (ΔΛ) είναι τέτοιο ώστε εάν η μεταβολή της ενεργού τάσης γίνεται επί της επιφάνειας διαρροής (δηλαδή κάθετα στο $\partial f / \partial \sigma'$) τότε ΔΛ = 0 :

$$(\mathit{\Delta\Lambda}) \equiv \frac{1}{H}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{\Delta\sigma}'\right) = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\Delta p' + \frac{\partial f}{\partial q}\Delta q\right) \qquad (1)$$

- Εκφραση του (ΔΛ) συναρτήσει της μεταβολής της παραμόρφωσης (**Δε**) :

$$\boldsymbol{\Delta\sigma}' = \mathbf{C^e} : \boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{\mathbf{e}} = \mathbf{C^e} : \left(\boldsymbol{\Delta\varepsilon} - \boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{\mathbf{p}}\right) = \mathbf{C^e} : \left(\boldsymbol{\Delta\varepsilon} - (\mathit{\Delta\Lambda})\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\right) \quad \Rightarrow$$

Οπότε (με χρήση της σχέσης (1)) :

$$H(\mathit{\Delta\Lambda}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{\Delta\sigma}' = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{C^e} : \left(\boldsymbol{\Delta\varepsilon} - (\mathit{\Delta\Lambda})\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\right) \quad \Rightarrow$$

$$(\mathit{\Delta\Lambda}) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{C^e} : \boldsymbol{\Delta\varepsilon}}{H + \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{C^e} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} = \frac{K\dfrac{\partial f}{\partial p'}\Delta\varepsilon_{vol} + 3G\dfrac{\partial f}{\partial q}\Delta\varepsilon_q}{H + K\left(\dfrac{\partial f}{\partial p'}\right)^2 + 3G\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)^2}$$

Το (H) είναι το ελαστο-πλαστικό μέτρο και υπολογίζεται στα επόμενα

Κανόνας ροής κατά το καταστατικό μοντέλο Cam-Clay :

Συνάρτηση διαρροής (Roscoe) : $f(p', q; v) \equiv q^2 + M^2 p'(p' - p'_m) = 0$

Συσχετισμένος κανόνας ροής : $\boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{\mathbf{p}} = (\mathit{\Delta\Lambda})\ \mathbf{P}$ όπου : $\mathbf{P} = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$

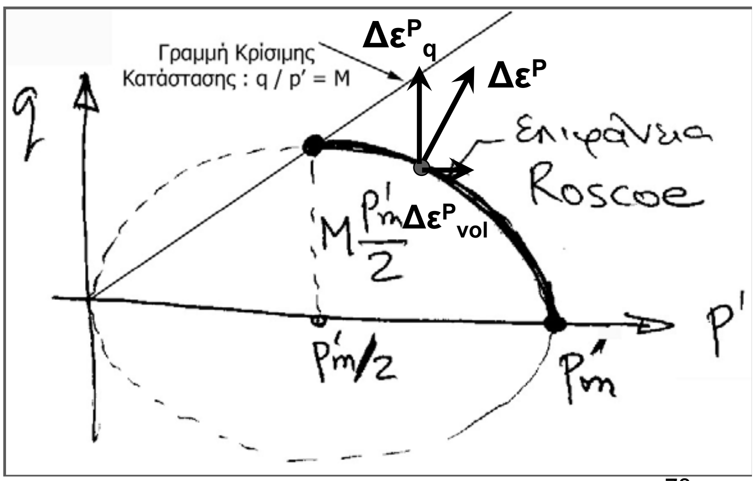
Οπότε :

$$\Delta\varepsilon^p_{vol} = (\mathit{\Delta\Lambda})\ \frac{\partial f}{\partial p'} = M^2(2p' - p'_m)\ (\mathit{\Delta\Lambda}) = \left(M^2 p' - \frac{q^2}{p'}\right)(\mathit{\Delta\Lambda})$$

$$\Delta\varepsilon^p_q = (\mathit{\Delta\Lambda})\ \frac{\partial f}{\partial q} = 2q\ (\mathit{\Delta\Lambda})$$

όπου : $\Delta\varepsilon^P_{vol}$ και $\Delta\varepsilon^P_q$ είναι οι συνιστώσες της αύξησης της πλαστικής παραμόρφωσης στους άξονες p’ και q αντιστοίχως.

$$\frac{\Delta\varepsilon^p_{vol}}{\Delta\varepsilon^p_q} = \frac{1}{2}\left(M^2\frac{p'}{q} - \frac{q}{p'}\right)$$



Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Θεωρία Πλαστικότητας

3. Κανόνας κράτυνσης – hardening rule :

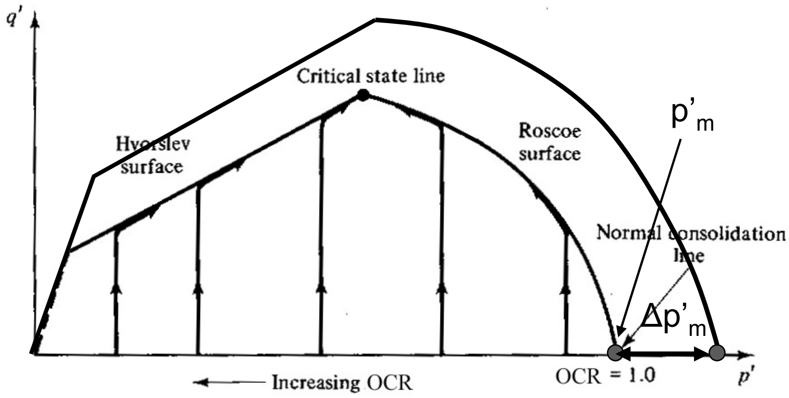
Ο κανόνας κράτυνσης περιγράφει τη μεταβολή της θέσης και του μεγέθους της επιφάνειας διαρροής λόγω της πλαστικής παραμόρφωσης

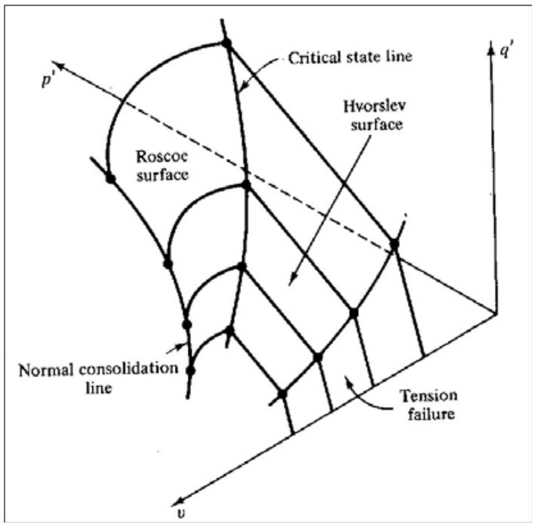
Στο μοντέλο Cam-Clay, το μέγεθος της επιφάνειας διαρροής εξαρτάται από το p'_m.

Το p'_m δεν μεταβάλλεται κατά την ελαστική φόρτιση (ή αποφόρτιση) του εδάφους, δηλαδή δεν μεταβάλλεται για διαδρομές τάσεων στο εσωτερικό της επιφάνειας διαρροής.

Η μεταβολή ($\Delta p'_m$) του p'_m κατά την πλαστική παραμόρφωση υπολογίζεται στα επόμενα.

$$f(p', q; v) \equiv q^2 + M^2 p'(p' - p'_m) = 0$$





Κανόνας κράτυνσης του μοντέλου Cam-Clay :

1. Προσδιορισμός της τιμής του p'_m στην αρχική κατάσταση :

$$p'_m = \exp\left(\frac{N - v - \kappa \ln p'}{\lambda - \kappa}\right)$$

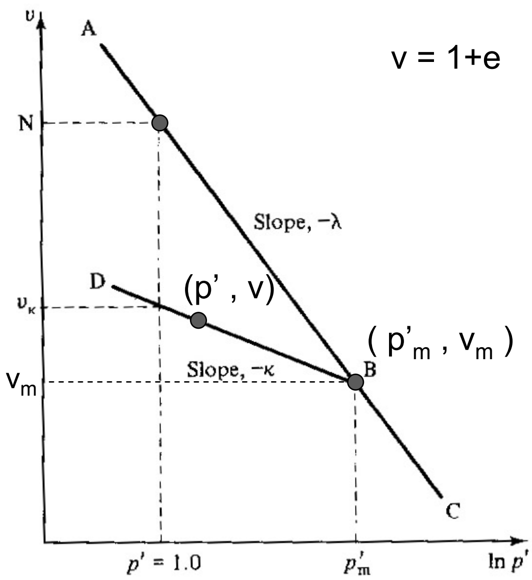
κ , λ = παράμετροι της καμπύλης συμπίεσης και αποφόρτισης

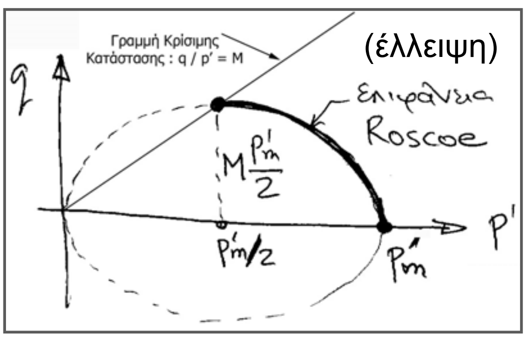
N = παράμετρος της γραμμής ισότροπης συμπίεσης

Ειδικώς, σε κανονικά στερεοποιημένη άργιλο :

$$p'_m = \exp\left(\frac{N - v}{\lambda}\right)$$

v = 1+e

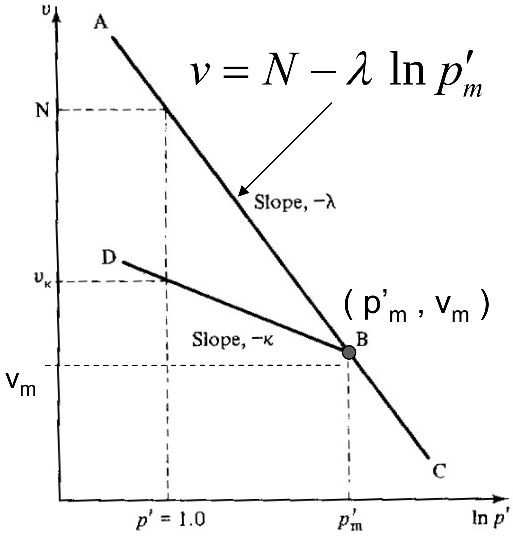




$$f(p', q; v) \equiv q^2 - M^2 p'(p'_m - p') = 0$$

Κανόνας κράτυνσης του μοντέλου Cam-Clay :

$$v = N - \lambda \ln p'_m \Rightarrow \Delta v = -\lambda \frac{\Delta p'_m}{p'_m}$$



Αναλόγως : $$\Delta v^e = -\kappa \frac{\Delta p'_m}{p'_m}$$

Επίσης : $$\Delta v^p = -v\, \Delta \varepsilon^p_{vol}$$

Οπότε : $$\Delta v = \Delta v^e + \Delta v^p \Rightarrow$$

$$\Delta v = \Delta v^e + \Delta v^p \Rightarrow -\lambda \frac{\Delta p'_m}{p'_m} = -\kappa \frac{\Delta p'_m}{p'_m} - v\, \Delta \varepsilon^p_{vol} \Rightarrow$$

$$\Delta p'_m = \left(\frac{v}{\lambda - \kappa} p'_m \right) \Delta \varepsilon^p_{vol}$$ (ογκομετρική κράτυνση)

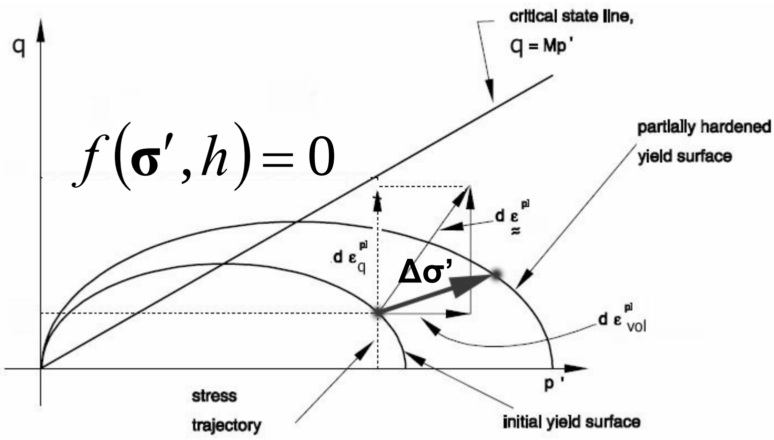
$$\mathbf{R} = \left(\frac{v}{\lambda - \kappa} p'_m \ ,\ 0 \right)$$

Γενικώς : $$\Delta h = \mathbf{R} : \boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{\mathbf{p}}$$ όπου : $$\boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \left(\Delta \varepsilon^p_{vol} \ ,\ \Delta \varepsilon^p_q \right)$$

Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Θεωρία Πλαστικότητας

Υπολογισμός του ελαστο-πλαστικού μέτρου H :

- Κατά την πλαστική παραμόρφωση, η μεταβολή των ενεργών τάσεων (Δσ’) γίνεται επί της επιφάνειας διαρροής.
- Στην περίπτωση υλικού με κράτυνση (h = παράμετρος κράτυνσης), κατά την πλαστική παραμόρφωση η επιφάνεια διαρροής μεταβάλλεται, αλλά η νέα θέση της ενεργού τάσης (σ΄) παραμένει επί της νέας επιφάνειας διαρροής.



Συνεπώς :

$$\Delta f = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{\Delta\sigma}' + \frac{\partial f}{\partial h} \Delta h = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{\Delta\sigma}' + \frac{\partial f}{\partial h} \left(\mathbf{R} : \boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{\mathbf{p}} \right) = 0$$

Ομως : $$\boldsymbol{\Delta\varepsilon}^{\mathbf{p}} = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \boldsymbol{\Delta\sigma}' \right) \mathbf{P}$$ Οπότε : $$H = -\frac{\partial f}{\partial h} \left(\mathbf{R} : \mathbf{P} \right)$$

Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Θεωρία Πλαστικότητας

Σύνοψη :

Για γνωστή επιβαλλόμενη μεταβολή της παραμόρφωσης : $\mathbf{\Delta\varepsilon} = \left(\Delta\varepsilon_{vol}, \Delta\varepsilon_q\right)$

(1) : $H = -\dfrac{\partial f}{\partial h}\left(\mathbf{R} : \mathbf{P}\right)$ όπου : $\mathbf{P} = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$ και : $\Delta h = \mathbf{R} : \mathbf{\Delta\varepsilon^p}$

(2) : $$\left(\Delta\Lambda\right) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{C^e} : \mathbf{\Delta\varepsilon}}{H + \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{C^e} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}$$

(3) : $$\mathbf{\Delta\varepsilon^p} = \left(\Delta\Lambda\right)\mathbf{P}$$

(4) : $$\mathbf{\Delta\boldsymbol{\sigma}'} = \mathbf{C^e} : \left(\mathbf{\Delta\varepsilon} - \mathbf{\Delta\varepsilon^p}\right)$$

Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Μοντέλο Cam-Clay

Δεδομένα :

1. Αρχική κατάσταση : $\left(p', q, v\right)$

$$p' = \frac{1}{3}\left(\sigma_1' + 2\sigma_3'\right)$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3$$

2. Σταθερές παράμετροι υλικού : $\left(\lambda, N, \kappa, G, M\right)$

    κ , λ = παράμετροι της καμπύλης συμπίεσης και αποφόρτισης
    N = παράμετρος της γραμμής ισότροπης συμπίεσης
    M = παράμετερος κρίσιμης κατάστασης
    G = ελαστικό μέτρο διάτμησης

3. Προσδιορισμός της αρχικής τιμής της παραμέτρου κράτυνσης p'_m :

Γενικώς (υπερστερεοποιημένες άργιλοι) : $$p'_m = \exp\left(\frac{N - v - \kappa \ln p'}{\lambda - \kappa}\right)$$

Κανονικά στερεοποιημένες άργιλοι) : $$p'_m = \exp\left(\frac{N - v}{\lambda}\right)$$

Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Μοντέλο Cam-Clay

Για γνωστή επιβαλλόμενη μεταβολή της παραμόρφωσης : $\mathbf{\Delta\varepsilon} = \left(\Delta\varepsilon_{vol}\,,\Delta\varepsilon_q\right)$

ζητείται να υπολογισθεί η νέα κατάσταση, δηλαδή τα : $\left(p', q, v\right)$ και : p'_m

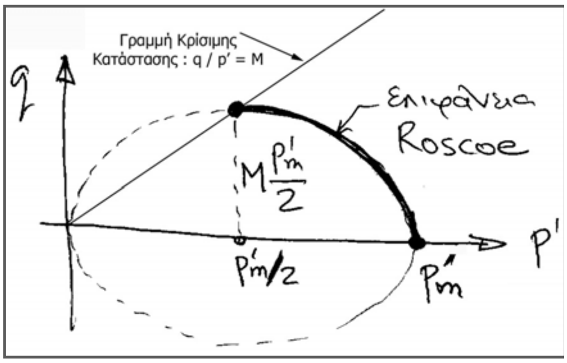
(1) : $$H = -\frac{\partial f}{\partial h}\left(\mathbf{R} : \mathbf{P}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial h} = \frac{\partial f}{\partial p'_m} = -M^2\, p'$$

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\partial f}{\partial p'}\,,\ \frac{\partial f}{\partial q}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial p'} = M^2\left(2p' - p'_m\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 2q$$

$$\mathbf{R} = \left(\frac{v}{\lambda-\kappa}\,p'_m\ ,\ 0\right)$$

Αρα :

$$H = \frac{v}{\lambda-\kappa}M^4\,p'\,p'_m\left(2p' - p'_m\right)$$



Για p' = p'_m / 2 $\Rightarrow$ H = 0 (Κρίσιμη κατάσταση)

Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Μοντέλο Cam-Clay

(2) : $$\left(\Delta\Lambda\right) = \frac{K\dfrac{\partial f}{\partial p'}\Delta\varepsilon_{vol} + 3G\dfrac{\partial f}{\partial q}\Delta\varepsilon_q}{H + K\left(\dfrac{\partial f}{\partial p'}\right)^2 + 3G\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)^2}$$

Όπου : $$K = \frac{v}{\kappa}\,p'$$

(3) : $$\mathbf{\Delta\varepsilon^p} = \left(\Delta\Lambda\right)\ \mathbf{P}$$

$$\Delta\varepsilon^p_{vol} = \left(\Delta\Lambda\right)\ \frac{\partial f}{\partial p'} = M^2\left(2p' - p'_m\right)\left(\Delta\Lambda\right) = \left(M^2 p' - \frac{q^2}{p'}\right)\left(\Delta\Lambda\right)$$

$$\Delta\varepsilon^p_q = \left(\Delta\Lambda\right)\ \frac{\partial f}{\partial q} = 2q\ \left(\Delta\Lambda\right)$$

(4) : $$\mathbf{\Delta\sigma'} = \mathbf{C^e} : \left(\mathbf{\Delta\varepsilon} - \mathbf{\Delta\varepsilon^p}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta p' = K\left(\Delta\varepsilon_{vol} - \Delta\varepsilon^p_{vol}\right)$$

$$\Delta q = 3G\left(\Delta\varepsilon_q - \Delta\varepsilon^p_q\right)$$

Καταστατικά προσομοιώματα υλικών – Μοντέλο Cam-Clay

(5) Νέα κατάσταση :

$$p' \rightarrow p' + \Delta p'$$

$$q \rightarrow q + \Delta q$$

$$v \rightarrow v + \Delta v$$ όπου : $$\Delta v = -v\,\Delta\varepsilon_{vol}$$

Επειδή : $e = e_0 - \varepsilon_{vol}\left(1 + e_o\right) \Rightarrow \Delta v = \Delta e = -v\,\Delta\varepsilon_{vol}$

$$p'_m \rightarrow p'_m + \Delta p'_m$$ όπου : $$\Delta p'_m = \left(\frac{v}{\lambda - \kappa}\,p'_m\right)\Delta\varepsilon^p_{vol}$$

Διαγωνίσματα

ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗΣ – 9^{ο} Εξάμηνο Πολ. Μηχ. - Έτος 2007 - 08
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2008
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ
(με ανοικτές σημειώσεις)

Διάρκεια 2 ώρες ***(Τα θέματα είναι ισοδύναμα)***

ΟΝΟΜΑ____

ΘΕΜΑ 1 (Εκτιμώμενος χρόνος 30 λεπτά) :

Κατάστρωση & επίλυση εξίσωσης Πεπερασμένων Διαφορών (Εκτιμώμενος χρόνος 30 λεπτά)

Αποθήκη τσιμέντου, τετραγωνικής κάτοψης ΑΒΓΔ (ΑΒ=ΒΓ=20m) και ωφέλιμου ύψους Η=5m, πρόκειται να θεμελιωθεί με γενική κοιτόστρωση από πλάκα οπλισμένου σκυροδέματος ομοιόμορφου πάχους d=30cm, η οποία είναι πακτωμένη στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ και απλά εδραζόμενη (επί αμετακίνητης πεδιλοδοκού) στις πλευρές ΓΔ και ΔΑ. Η εδαφική αντίδραση ($q_{εδ.}$) είναι μη γραμμική συνάρτηση του βέλους κάμψης (y) της κοιτόστρωσης και δίνεται από την σχέση $q_{εδ.}$ =k y με k=1000/(1+10y), όπου y σε m και k σε kN/m^3.

(α) Να διατυπωθεί η διαφορική εξίσωση υπολογισμού του βέλους κάμψης (y) της κοιτόστρωσης, πρώτα σε αλγεβρική μορφή και έπειτα σε μορφή Πεπερασμένων Διαφορών.

(β) Κατά το ίδιο τρόπο, να διατυπωθούν οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

(γ) Να περιγραφεί η γενική μορφή του (μη γραμμικού) συστήματος εξισώσεων που θα προκύψει με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών, καθώς και ένας δόκιμος αλγόριθμος μη γραμμικής αριθμητικής επίλυσης (με την βοήθεια σχήματος και διαγράμματος ροής).

Υποδείξεις:
- *Απλοποιητικά, οι απαντήσεις να δοθούν για λωρίδα της κοιτόστρωσης πλάτους b=1.00 m ($I=bd^3/12=d^3/12$), χωρισμένη σε πέντε(5) ίσα τμήματα.*
- *Το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας του Ο.Σ. να ληφθεί ως E_b =29 GPa.*
- *Το φαινόμενο ειδικό βάρος του τσιμέντου να ληφθεί ίσο προς 12kN/m^3.*

ΘΕΜΑ 2 (Εκτιμώμενος χρόνος 30 λεπτά) :

(α) Να αποδειχθεί ότι κατά την αστράγγιστη φόρτιση εδαφών με θεώρηση «γραμμικώς ελαστικής ισότροπης συμπεριφοράς», η μέση ενεργός τάση :

$$p' = \frac{1}{3}\left(\sigma_1' + 2\sigma_3'\right)$$

δεν μεταβάλλεται. Σε ποια εδάφη μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτική η ανωτέρω συμπεριφορά ;

(β) Αργιλικό δοκίμιο έχει αντοχή σε ανεμπόδιστη θλίψη $σ_1$ = 250 kPa. Η παραμόρφωση στο 50% της αντοχής είναι 1%, ενώ κατά την πλήρη αποφόρτιση από το 50% της αντοχής η παραμένουσα παραμόρφωση είναι 0.6%.
Να προσδιορισθούν οι παράμετροι του υπερβολικού προσομοιώματος, να υπολογισθεί η παραμόρφωση του δοκιμίου στο 80% της αντοχής, και να υπολογισθεί το αρχικό μέτρο ελαστικότητας του δοκιμίου.

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα

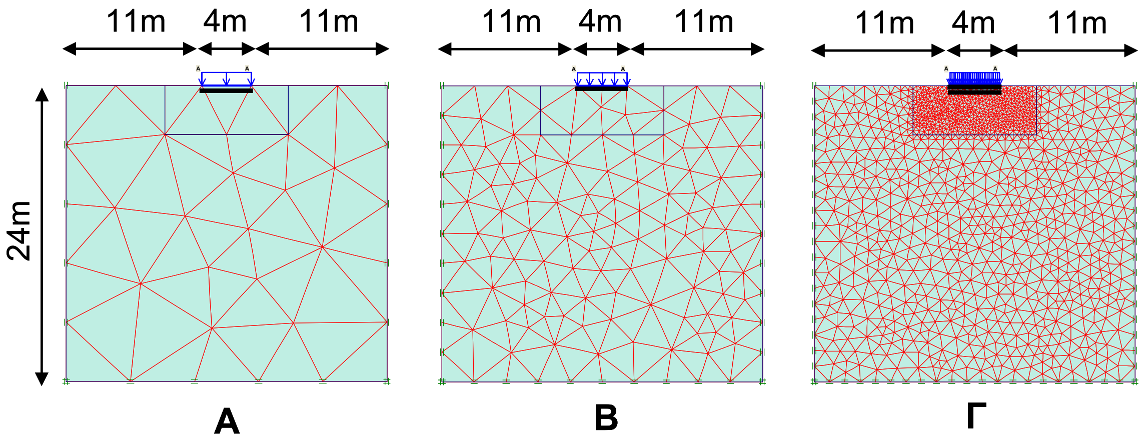
(γ) Να συσχετισθούν οι παράμετροι (M , h) της επιφάνειας Hvorslev που δίνεται από την εξίσωση (σε χώρο p’ , q) :

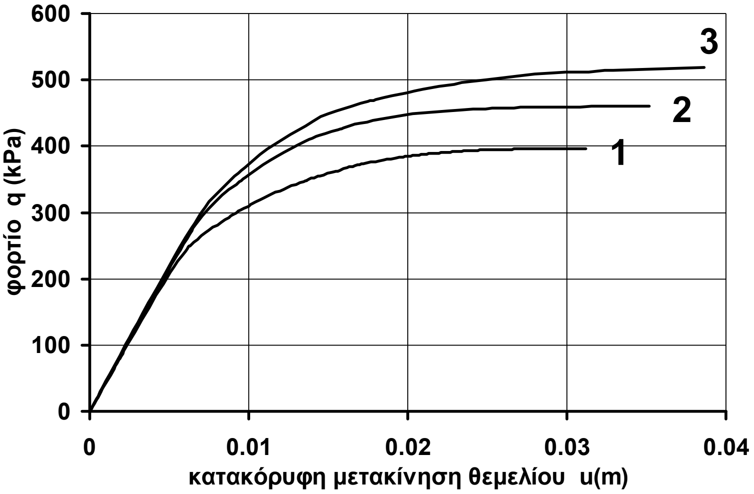
$$q = (M - h)\exp\left(\frac{\Gamma - v}{\lambda}\right) + h\,p' \qquad \text{όπου :} \quad p' = \frac{1}{3}\left(\sigma_1' + 2\sigma_3'\right) \quad \text{και} \quad q = \sigma_1' - \sigma_3'$$

Γ, λ = παράμετροι και v = 1 + e (e = δείκτης πόρων)
με τις παραμέτρους αντοχής (c , φ) του κριτηρίου αστοχίας Mohr – Coulomb υπό τριαξονική ένταση : $\sigma_1' = 2c\sqrt{N_\phi} + N_\phi\,\sigma_3'$ όπου : $N_\phi = \tan^2\left(45 + \frac{\phi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ 3 (Εκτιμώμενος χρόνος 25 λεπτά) :

Άκαμπτη πλάκα θεμελίωσης εδράζεται σε μή-γραμμικό ομοιογενές έδαφος συνοχής c και γωνία εσωτερικής τριβής φ = 0^o. Το θεμέλιο υποβάλλεται σε κατακόρυφη φόρτιση q αυξανόμενο μέχρι την αστοχία. Για την ανάλυση της απόκρισης του θεμελίου μορφώθηκαν τρία προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους μόνον ως προς την πυκνότητα της διακριτοποίησης. Ζητούνται:





(1) Αντιστοιχείστε τις καμπύλες φορτίου – μετακίνησης (1, 2, 3) με τα προσομοιώματα των πεπερασμένων στοιχείων (A, B, Γ). Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(2) Ποιό προσομοίωμα δίνει τα ακριβέστερα αποτελέσματα, κα

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα

(3) ποιό από αυτά έχει το μικρότερο υπολογιστικό κόστος ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

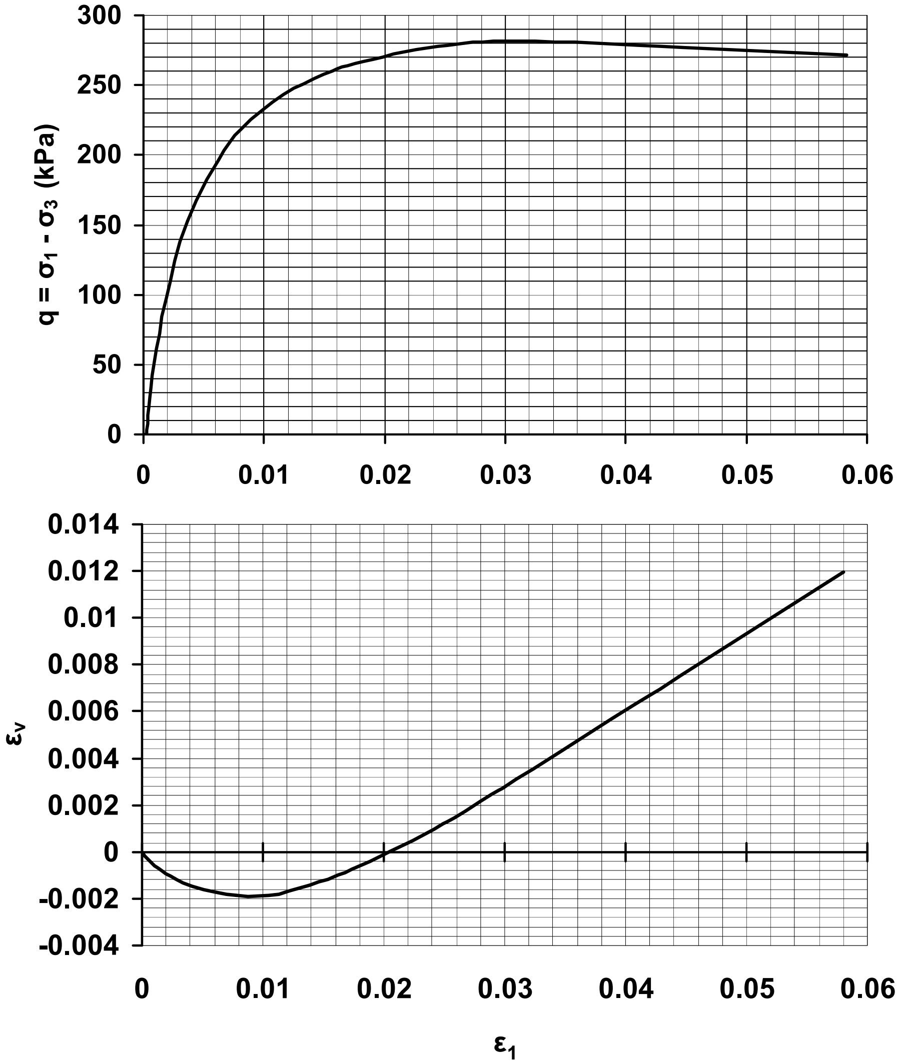
(4) Βρίσκονται τα σύνορα σε ικανή απόσταση από το θεμέλιο ώστε να μην επηρεάζουν την συμπεριφορά του ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(5) Εκτιμήστε την συνοχή του εδάφους c.

(6) Δίνεται η ελαστική (στις πολύ μικρές μετακινήσεις) δυσκαμψία του θεμελίου σε κατακόρυφη φόρτιση: $K_v \approx \dfrac{0.6E}{1-v^2}$. Για λόγο του Poisson $v = 0.3$, εκτιμήστε το μέτρο ελαστικότητας E.

ΘΕΜΑ 4 (Εκτιμώμενος χρόνος 25 λεπτά) :

Δοκίμιο άμμου (συνοχής c = 0 kPa) υποβάλλεται σε ισότροπη συμπίεση σε τριαξονική συσκευή με σ_3 = 100 kPa. Κατόπιν το δοκίμιο υποβάλλεται σε τριαξονική φόρτιση μέχρι την αστοχία.



(1) Να προσεγγισθούν γραφικά οι ανωτέρω πειραματικές καμπύλες αποκλίνουσας τάσης–κατακόρυφης παραμόρφωσης ($q - \varepsilon_1$) και ογκομετρικής παραμόρφωσης–κατακόρυφης παραμόρφωσης ($\varepsilon_v - \varepsilon_1$) στα πλαίσια ενός ελαστικού—ιδεωδώς–πλαστικού (δι-γραμμικού) καταστατικού προσομοιώματος τύπου Mohr – Coulomb.

(2) Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, εκτιμήστε: (α) Το μέτρο ελαστικότητας Ε, (β) τον λόγο του Poisson v, (γ) την γωνία εσωτερικής τριβής φ, και τέλος (δ) την γωνία διασταλτικότητας ψ του δοκιμίου.

ΤΕΛΟΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗΣ – 9ο Εξάμηνο Πολ. Μηχ. - Έτος 2007 - 08
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2008

Διάρκεια 80 λεπτά. με κλειστά βιβλία και σημειώσεις: Τα θέματα θεωρούνται ισοδύναμα

ΟΝΟΜΑ____

ΘΕΜΑ 1

(α) Από τι εξαρτάται η αναπτυσσόμενη υπερπίεση πόρων κατά την αστράγγιστη φόρτιση εδαφών ;
(β) Με ποιους τρόπους μπορεί να αναλυθεί ένα πρόβλημα αστράγγιστης φόρτισης εδαφών (με αριθμητικές μεθόδους) ;
(γ) Σχεδιάστε ποιοτικά τα διαγράμματα τάσης – παραμόρφωσης, υπερπίεσης πόρων – παραμόρφωσης και διαδρομής ενεργών τάσεων (p' – q) κατά την αστράγγιστη φόρτιση κανονικά στερεοποιημένων και υπερστερεοποιημένων αργίλων.
(δ) Σχεδιάστε ποιοτικά τα διαγράμματα τάσης – παραμόρφωσης, ογκομετρικής παραμόρφωσης – αξονικής παραμόρφωσης και διαδρομής ενεργών τάσεων (p' – q) κατά την στραγγισμένη φόρτιση κανονικά στερεοποιημένων και υπερστερεοποιημένων αργίλων.
(ε) Τι είναι η γραμμή Κρίσιμης Κατάστασης και σε ποια εδάφη εφαρμόζεται ;
(στ) Τι είναι η επιφάνεια Roscoe ;
(ζ) Τι είναι η επιφάνεια Hvorslev ;

ΘΕΜΑ 2

Για αργιλικό εδαφικό πρανές υπό τον υδροφόρο ορίζοντα, και βραχυχρόνιες συνθήκες αστοχίας:

(α) Να σχεδιασθούν οι δυνάμεις που ασκούνται σε μία κατακόρυφη λωρίδα.

(β) Ποιες είναι οι παραδοχές της Απλοποιημένης Μεθόδου Bishop (Fellenius ή Janbu) ως προς τις ανωτέρω δυνάμεις;

(γ) Να διατυπωθεί η σχέση υπολογισμού του συντελεστή ασφαλείας για κυκλική (ή τυχούσα) επιφάνεια αστοχίας που προκύπτει από τις σχέσεις αυτές.

(δ) Να περιγραφεί η διαδικασία «ψαξίματος» του ελάχιστου συντελεστή ασφαλείας, και του αντίστοιχου κρίσιμου κύκλου ολίσθησης, με κάποιο λογισμικό ανάλυσης ευστάθειας πρανών με την μέθοδο των λωρίδων (π.χ. με το SLOPE που χρησιμοποιήσατε για εξάσκηση).

ΘΕΜΑ 3

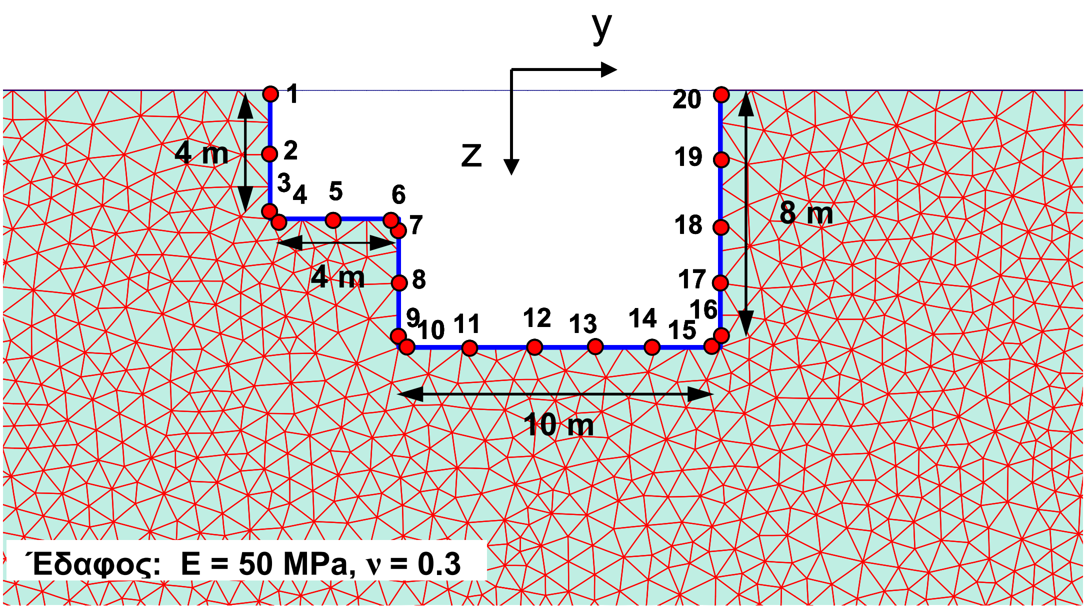
Για την ανάλυση της θεμελίωσης πολυορόφου κτιρίου μορφώνεται προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων. Η θεμελίωση, η οποία θεωρείται άκαμπτη, υποβάλλεται σε μοναδιαία κατακόρυφη μετακίνηση, και υπολογίζονται οι τάσεις έδρασης σε επιλεγμένα σημεία της σε σταθερές αποστάσεις των 2 m, οι οποίες δίνονται στον παρατιθέμενο πίνακα.

(α) Να εκτιμηθεί η κατακόρυφη δυσκαμψία της θεμελίωσης.

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα

(β) Ισχύει η σχέση $\sigma_y = K_0\ \sigma_z$, όπου $K_0 = \dfrac{\nu}{1-\nu}$, (προσεγγιστικά έστω), και γιατί (ισχύει ή δεν ισχύει);

(γ) Αν αντί της μετακίνησης ασκούσαμε στην θεμελίωση κατακόρυφο φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο σε όλο το μήκος των 14 m, *τί είδους* μετακινήσεων στην άκαμπτη θεμελίωση αναμένετε ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας (ποιοτικά).



	σ_z	σ_y	τ_{zy}
1	2830	6700	2280
2	1280	1410	2200
3	470	1450	3640
4	7130	710	340
5	2100	950	270
6	0	0	0
7	0	0	0
8	530	900	720
9	160	210	2140
10	6700	1180	500
11	3420	1480	185
12	3220	1380	50
13	3290	1400	36
14	3700	1540	175
15	8800	0	1240
16	1090	1930	4050
17	340	340	2080
18	370	720	1600
19	675	1520	1330
20	2800	7000	2000

σε kPa

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα

ΤΕΛΟΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗ:
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

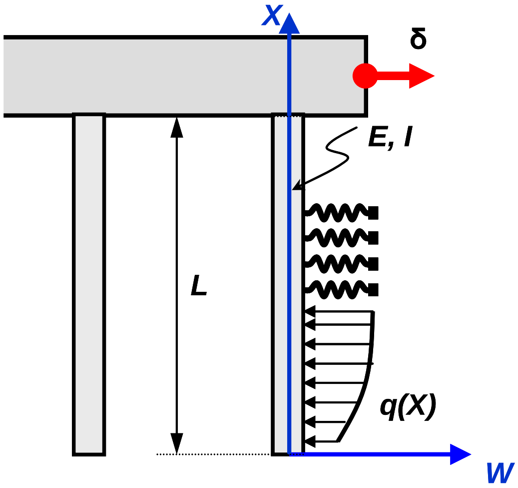
(με ανοικτές σημειώσεις. Εξαιρούνται όμως οι λυμένες ασκήσεις <u>καί</u> οι προσωπικές σημειώσεις)

Διάρκεια 1 : 30 ώρα ***(Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα)***

ΟΝΟΜΑ____

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Η πασσαλο-ομάδα του σχήματος υποβάλλεται σε <u>οριζόντια μετατόπιση **δ**</u> του πρακτικά άκαμπτου κεφαλόδεσμου (χωρίς στροφή). Απλοποιητικά να θεωρηθεί ότι ο κάθε πάσσαλος έχει σταθερή διατομή, το έδαφος είναι ομοιόμορφο με το βάθος και δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των πασσάλων.



(α) Εάν υποτεθεί ότι η εδαφική αντίδραση στον πάσσαλο είναι γραμμική συνάρτηση της αντίστοιχης μετατόπισης [δηλ. q(x) = - k W(x)],

- Να καταστρωθεί το σύστημα εξισώσεων που διέπει τον προσεγγιστικό υπολογισμό των μετατοπίσεων κατά μήκος του πασσάλου με χρήση της μεθόδου Πεπερασμένων Διαφορών (Π.Δ.). (4 ισαπέχοντες κόμβοι αρκούν).
- Με δεδομένες τις οριζόντιες μετατοπίσεις του πασσάλου, πως θα υπολογίζατε την τέμνουσα δύναμη και την ροπή που αναπτύσσονται στην ένωση με τον κεφαλόδεσμο;

(β) Σε περίπτωση μη γραμμικής εδαφικής αντίδρασης (π.χ. $q=-k_o W^a$, $a<1.0$),

- Να διατυπώσετε το ανωτέρω σύστημα εξισώσεων σε «επαυξητική» μορφή.
- Να περιγράψετε (υπό μορφή «διαγράμματος ροής» και γραφικά) έναν επαναληπτικό αλγόριθμο επίλυσης του.

ΘΕΜΑ 2

(α) Κατά την δοκιμή του συμπιεσομέτρου με φόρτιση από αρχική κατάσταση (e_o, σ'_{vo} = δείκτης πόρων , κατακόρυφη ενεργός τάση) σε τελική κατάσταση (e, σ'_v) υπολογίσθηκε η παράμετρος C_c από τη σχέση :

$$e = e_o - C_c \log\left(\frac{\sigma'_v}{\sigma'_{vo}}\right)$$

Στη συνέχεια, κατά την αποφόρτιση από την κατάσταση (e, σ'_v) στην κατάσταση (e_1, σ'_{v1}) υπολογίσθηκε η παράμετρος C_r από τη σχέση :

$$e_1 = e - C_r \log\left(\frac{\sigma'_{v1}}{\sigma'_v}\right)$$

Να υπολογισθούν οι αντίστοιχες παράμετροι (N_o, λ, κ) της θεωρίας κρίσιμης κατάστασης συναρτήσει των (e_o, σ'_{vo}, C_c, C_r) και του συντελεστή οριζόντιας γεωστατικής τάσης K_o.

(β) Να αποδειχθεί ότι κατά την αστράγγιστη φόρτιση εδαφών με θεώρηση «γραμμικώς ελαστικής ισότροπης συμπεριφοράς», η μέση ενεργός τάση :

$$p' = \frac{1}{3}\left(\sigma'_1 + 2\sigma'_3\right)$$

δεν μεταβάλλεται. Σε ποια εδάφη μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτική η ανωτέρω συμπεριφορά ;

(γ) Αργιλικό δοκίμιο έχει αντοχή σε ανεμπόδιστη θλίψη σ_1 = 250 kPa. Η παραμόρφωση στο 50% της αντοχής είναι 1%, ενώ κατά την πλήρη αποφόρτιση από το 50% της αντοχής η παραμένουσα παραμόρφωση είναι 0.6%.

Να προσδιορισθούν οι παράμετροι του υπερβολικού προσομοιώματος, να υπολογισθεί η παραμόρφωση του δοκιμίου στο 80% της αντοχής, και να υπολογισθεί το αρχικό μέτρο ελαστικότητας του δοκιμίου.

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

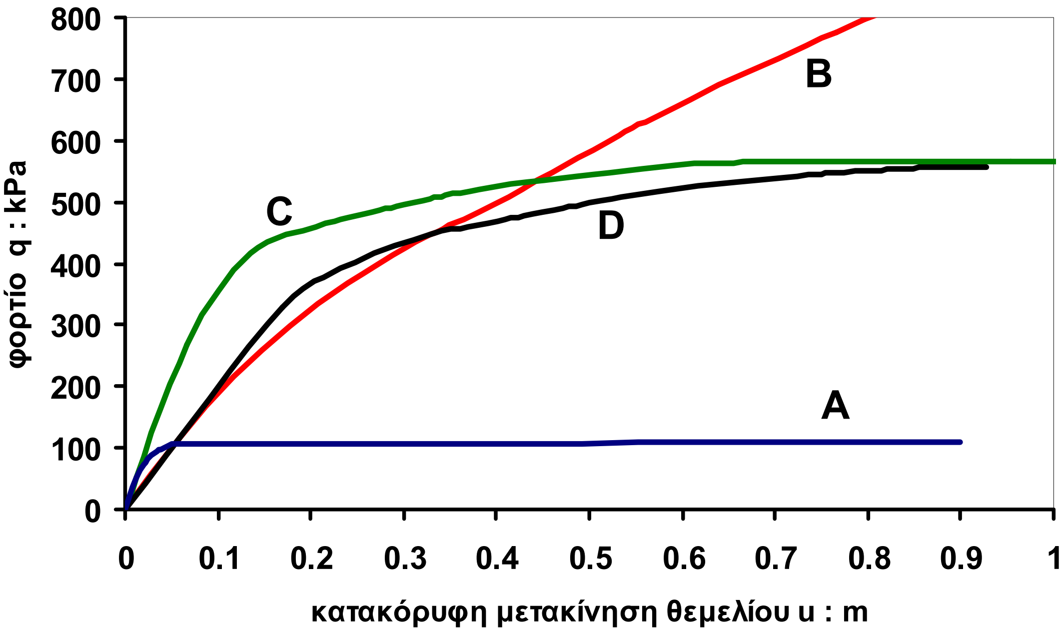
Άκαμπτη πλάκα θεμελίωσης πλάτους B = 10 m εδράζεται σε μή-γραμμικό ομοιογενές έδαφος μέτρου ελαστικότητας E = 30 MPa, και λόγου του Poisson ν = 0.3. Το θεμέλιο υποβάλλεται σε κατακόρυφη φόρτιση q αυξανόμενο μέχρι την αστοχία. Για την ανάλυση του θεμελίου μορφώθηκε προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων. Πραγματοποιήθηκαν οι εξής αναλύσεις ως προς: (α) τα χαρακτηριστικά αντοχής και παραμορφωσιμότητας του εδάφους, και (β) ως προς τις συνθήκες φόρτισης:

1. Συνοχή c = 10 kPa, γωνία τριβής φ = 30^o, γωνία διασταλτικότητας ψ = 0^o, και στραγγιζόμενες συνθήκες φόρτισης.

2. Συνοχή c = 10 kPa, γωνία τριβής φ = 30^o, γωνία διασταλτικότητας ψ = 0^o, και αστράγγιστες συνθήκες φόρτισης.

3. Συνοχή c = 100 kPa, γωνία τριβής φ = 0^o, γωνία διασταλτικότητας ψ = 0^o, και αστράγγιστες συνθήκες φόρτισης.

4. Συνοχή c = 100 kPa, γωνία τριβής φ = 0^o, γωνία διασταλτικότητας ψ = 0^o, και στραγγιζόμενες συνθήκες φόρτισης.



Ζητούνται:

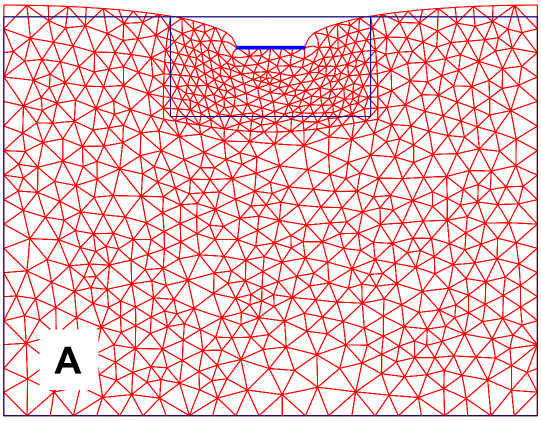
(α) Αντιστοιχείστε τις καμπύλες φορτίου – μετακίνησης (A, B, C, D) με τις αναλύσεις (1, 2, 3, 4). Αιτιολογείστε με συνοπτική σαφήνεια την απάντησή σας.

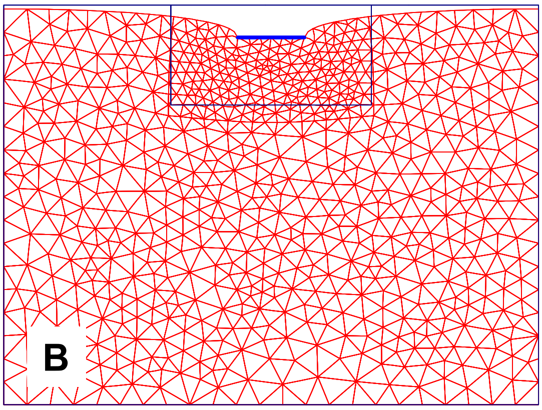
(β) Σχεδιάστε σκαριφηματικά το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων με έμφαση στις περιοχές πύκνωσης του καννάβου και στις συνοριακές συνθήκες. Εκτιμήστε τις αποστάσεις που πρέπει να έχουν τα σύνορα από το θεμέλιο ώστε να μην επηρεάζεται η συμπεριφορά του. Επηρεάζουν οι συνθήκες φόρτισης (στραγγιζόμενες ή αστράγγιστες) τις αποστάσεις αυτές ; Αιτιολογείστε συνοπτικά τις απαντήσεις σας.

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα

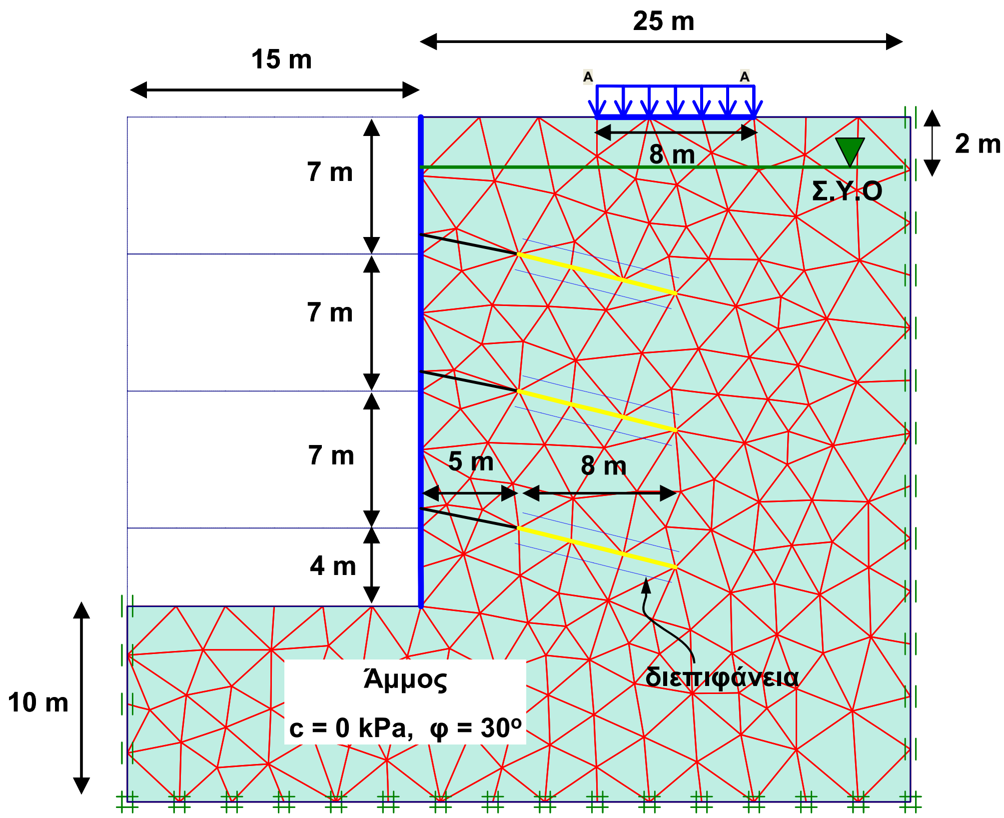
ΘΕΜΑ 4

(α) Ποιός από τους κάτωθι παραμορφωμένους καννάβους πεπερασμένων στοιχείων αντιστοιχεί σε στραγγιζόμενες συνθήκες φόρτισης, και ποίος σε αστράγγιστες ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.





(β) Δίνεται το προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων τοίχου αντιστήριξης με αγκύρια.



Να επισημανθούν πιθανά σφάλματα:

(1) στον σχεδιασμό του έργου, και

(2) στο αριθμητικό ομοίωμα.

Αιτιολογείστε συνοπτικά τις απαντήσεις σας.

ΤΕΛΟΣ