ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πτυχες Γεωμετριας Με Στρεψη Στο Πρωιμο Συμπαν Και Ο Σχετικος Φορμαλισμος

Προπτυχιακή Διπλωματική Εργασία του Γεώργιου Παναγόπουλου

Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

Επιβλεπων

Νικολαος Ε. Μαυροματος

Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Φυσικής

Τριμελης Επιτροπη

Νικολαος Ε. Μαυροματος

Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Φυσικής

Κωνσταντινος Ν. Αναγνωστοπουλος

Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Φυσικής

Χριστοφορος Κουβαρης

Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Φυσικής

Abstract

This thesis explores gravitational theories with the presence of torsion. In the first chapter, after a brief introduction to the tetrad and differential forms formalisms, the Einstein-Cartan theory is developed. The Einstein-Cartan theory is a minimal extension of General Relativity that assumes a non-vanishing torsion. In the second chapter, the theory of Quantum Electrodynamics is considered in contorted spacetimes, with a dual purpose. The first is to show that in such a theory, spin is connected to torsion, much like mass is connected to curvature in General Relativity. The second is to show that, by making a reasonable assumption, torsion can be physically realized as an axion due to the anomaly present in the axial current in Quantum Electrodynamics. Finally, in the third chapter we consider a string-inspired model, in which the field strength of the Kalb-Ramond field takes on the role of torsion and thus behaves analogously with the torsion in Einstein-Cartan theory, producing an axionic degree of freedom. This theory is explored further, showing how, due to the anomalies present in the string theory, gravitational wave condensates in the early universe can explain inflation. This is done through an alternative cosmological model to Λ-Cold Dark Matter (ΛCDM), called the Running Vacuum Model.

Keywords

Torsion, contorsion, tetrads, spin connection, differential forms, Cartan equations, Einstein-Cartan theory, Quantum Electrodynamics (QED) in contorted spacetime, anomaly, axions, strings, Kalb-Rammond field, Hirzebruch-Pontryagin topological density, Cotton tensor, gravitational wave condensate, running vacuum model, inflation.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξερευνά βαρυτικές θεωρίες με την παρουσία στρέψης. Στο πρώτο κεφάλαιο, μετά από μία σύντομη εισαγωγή στις έννοιες των τετράδων και των διαφορικών μορφών, αναπτύσσεται η θεωρία Einstein-Cartan. Η θεωρία Einstein-Cartan είναι μία ελάχιστη επέκταση της Γενικής Σχετικότητας που υποθέτει μία μη μηδενική στρέψη. Στο δεύτερο κεφάλαιο, εξετάζεται η θεωρία της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής σε χωροχρόνους με στρέψη, με διπλό σκοπό. Ο πρώτος είναι να δείξει ότι σε μια τέτοια θεωρία, το σπιν συνδέεται με τη στρέψη, όπως η μάζα συνδέεται με την καμπυλότητα στη Γενική Σχετικότητα. Ο δεύτερος είναι να δείξει ότι, κάνοντας μία λογική υπόθεση, η στρέψη μπορεί να εμφανιστεί φυσικά ως ένα αξιόνιο λόγω της ανωμαλίας που υπάρχει στο χειραλικό ρεύμα στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται ένα μοντέλο εμπνευσμένο από την θεωρία χορδών, στο οποίο η ένταση του πεδίου Kalb-Rammond αναλαμβάνει το ρόλο της στρέψης και συνεπώς συμπεριφέρεται ανάλογα με τη στρέψη στη θεωρία Einstein-Cartan, παράγοντας έναν αξιονικό βαθμό ελευθερίας. Αυτή η θεωρία εξερευνάται περαιτέρω, δείχνοντας πώς, λόγω των ανωμαλιών που υπάρχουν στη θεωρία των χορδών, τα συμπυκνώματα βαρυτικών κυμάτων στο πρώιμο σύμπαν μπορούν να εξηγήσουν τον πληθωρισμό. Αυτό γίνεται μέσω ενός εναλλακτικού κοσμολογικού μοντέλου ως προς το ΛCDM (Λ-Cold Dark Matter - Ψυχρή Σκοτεινή Ύλη), που ονομάζεται Μοντέλο Τρεχούμενου Κενού (Running Vacuum Model).

Λέξεις Κλειδιά

Στρέψη (torsion), συστροφή (contorsion), τετράδες (tetrads), σύνδεση σπιν (spin connection), διαφορικές μορφές (differential forms), εξισώσεις Cartan (Cartan equations), θεωρία Einstein-Cartan (Einstein-Cartan theory), Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε συστραμμένο συνεστραμμένο χωροχρόνο (Quantum Electrodynamics in contorted spacetime), ανωμαλία (anomaly), αξιόνια (axions), χορδές (strings), πεδίο Kalb-Ramond (Kalb-Ramond field), τοπολογική πυκνότητα Hirzebruch-Pontryagin (Hirzebruch-Pontryagin topological density), τανυστής Cotton (Cotton tensor), συμπύκνωμα βαρυτικών κυμάτων (gravitational wave condensate), Μοντέλο Τρεχούμενου Κενού (Running Vacuum Model), πληθωρισμός (inflation).

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στις προσπάθειές μου να ολοκληρώσω αυτήν την διπλωματική εργασία και συνεπώς τον προπτυχιακό τίτλο σπουδών μου. Πρώτα και κύρια, τους γονείς μου, Ρένα και Γιάννη, οι οποίοι ικανοποιούσαν την περιέργειά μου για τον κόσμο ως παιδί, υποστήριξαν άνευ όρων το ενδιαφέρον μου για την επιστήμη και μου επέτρεψαν να εστιάσω πλήρως στις σπουδές μου. Δεύτερον, τον επιβλέπων μου Καθηγητή Νικόλαο Μαυρόματο, που με εισήγαγε σε αυτό το συναρπαστικό θέμα για την διπλωματική μου εργασία, αλλά και για την ανεκτίμητη καθοδήγησή του μέσα από όλες τις άγνωστες έννοιες σε αυτόν τον τομέα της φυσικής. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και συμφοιτητές μου, με τους οποίους μοιράστηκα αυτό το πενταετές ταξίδι γνώσης και βελτίωσης. Οι συζητήσεις, συνεργασίες και η εποικοδομητική ανατροφοδότησή τους υπήρξαν καθοριστικές στην διαμόρφωση της εξέλιξής μου ως φυσικός.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Καμπυλωμένος Χωροχρόνος με Στρέψη

Η θεωρία της Γενικής Σχετικότητας έχει αποδειχθεί ως μία από τις πιο επιτυχημένες φυσικές θεωρίες που έχουμε. Σήμερα, περισσότερα από εκατό χρόνια μετά την αρχική διατύπωση της, οι προβλέψεις της Γενικής Σχετικότητας συνεχίζουν να επιβεβαιώνονται πειραματικά με εκπληκτική ακρίβεια. Ωστόσο, υπάρχει ένα σημαντικό μειονέκτημα σε αυτήν τη θεωρία: δεν είναι κβαντική. Η Γενική Σχετικότητα είναι μια καθαρά κλασική θεωρία. Πιστεύεται ευρέως ότι υπάρχει μια θεμελιώδης θεωρία στην οποία ακόμα και η βαρύτητα είναι κβαντισμένη, και η Γενική Σχετικότητα δεν είναι παρά το μακροσκοπικό όριο αυτής της θεωρίας. Υπάρχουν πολλές προσπάθειες να κατασκευαστεί μια κβαντική θεωρία της βαρύτητας, όπως η Θεωρία Χορδών (String Theory), η Κβαντική Βαρύτητα Βρόχων (Loop Quantum Gravity) κλπ. Αυτές είναι εξαιρετικές προσπάθειες με πολύ βάθος και κάποια στιγμή θα δοκιμαστούν πειραματικά. Μια πιο μινιμαλιστική προσέγγιση, ή μάλλον, ένα μικρό βήμα προς τη συμφιλίωση της Γενικής Σχετικότητας με την Κβαντική Θεωρία Πεδίου, είναι να γενικευθεί η θεωρία του Einstein. Πώς; Στην τυπική μας θεωρία του καμπυλωμένου χωροχρόνου, μόνο η μάζα/ενέργεια των αντικειμένων παίζει ρόλο. Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι η ύλη έχει και άλλες εσωτερικές ιδιότητες. Η πιο σημαντική και προφανής είναι το *σπιν* των σωματιδίων. Στην πραγματικότητα, το σπιν προκύπτει ως ένας κβαντικός αριθμός από τις αναπαραστάσεις της ομάδας Poincaré, η οποία περιγράφει τις συμμετρίες του χωροχρόνου Minkowski (επίπεδος χωροχρόνος) [1]. Είναι λογικό, λοιπόν, να προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας κατά το ελάχιστο δυνατό, ώστε να συμπεριλάβουμε το σπιν. Αυτό το κεφάλαιο θα είναι μια εισαγωγή σε μια τέτοια θεωρία, που ονομάζεται θεωρία Einstein-Cartan, όπου το σπιν συμπεριλαμβάνεται με τον απλούστερο τρόπο, υποθέτοντας ότι η στρέψη, σε αντίθεση με τη Γενική Σχετικότητα, δεν είναι μηδενική.

1.1 Φορμαλισμός Τετράδων

Για να ενσωματώσουμε τη στρέψη στην υπάρχουσα θεωρία της Γενικής Σχετικότητας, είναι χρήσιμο να την εκφράσουμε σε μια διαφορετική, αλλά ισοδύναμη διατύπωση, που ονομάζεται φορμαλισμός *τετράδων* ή *vielbein*[1], η οποία περιλαμβάνει την κατασκευή ενός ορθοκανονικού τετραδιανυσματικού συστήματος σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας (manifold) του χωροχρόνου. Ας είναι (M, g) η Riemann πολλαπλότητα του χωροχρόνου με μετρική g. Η τυπική έκφραση για τη μετρική σε ένα χάρτη (chart) $U \subseteq M$ (μια τοπική "περιοχή" του χωροχρόνου) με τοπικές συντεταγμένες x^μ είναι:

$$\boxed{g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{1.1.1}$$

όπου τα $g_{\mu\nu}$ είναι οι *συνιστώσες* της μετρικής g και το $dx^\mu dx^\nu$ είναι το *συμμετρικό γινόμενο*[2] του dx^μ με το dx^ν, που είναι οι 1-μορφές (one-forms) του συν-συστήματος συντεταγμένων (coordinate coframe) (dx^μ). Γενικά, οι συνιστώσες της μετρικής εξαρτώνται από τις τοπικές συντεταγμένες x^μ του χωροχρόνου, δηλαδή $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$. Γνωρίζοντας, ωστόσο, ότι ο χωροχρόνος είναι τοπικά επίπεδος, καθίσταται δυνατό να βρούμε μία εναλλακτική διατύπωση στην οποία η έκφραση της μετρικής εξαρτάται από τη μετρική Minkowski[3] η_{ab} του εφαπτόμενου χώρου (tangent space) της πολλαπλότητας σε κάθε σημείο. Αυτός είναι ο λεγόμενος φορμαλισμός τετράδων.

[1] Η λέξη vielbein προέρχεται από τις γερμανικές λέξεις "viele" ("πολλά") και "beine" ("πόδια"). Σε τέσσερις διαστάσεις χωροχρόνου, χρησιμοποιείται μερικές φορές ο όρος vierbein, όπου το vier ("τέσσερα") αντικαθιστά το viele.

[2] Το συμμετρικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2}(dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\mu)$$

όπου το $\otimes$ είναι το τανυστικό γινόμενο δύο τανυστών. Μπορούμε στη συνέχεια να κάνουμε έναν γρήγορο χειρισμό και αλλαγή των δεικτών για να δείξουμε ότι:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\nu\mu} dx^\nu \otimes dx^\mu) = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

[3] Χρησιμοποιείται η σύμβαση $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$, όπως στις περισσότερες εργασίες που ασχολούνται με τη Γενική Σχετικότητα.

1.1.1 Τετράδες

Η διατύπωση τετράδων είναι ουσιαστικά μια αλλαγή βάσης από το σύστημα συντεταγμένων σε ένα γενικό ορθοκανονικό σύστημα στη πολλαπλότητά μας. Ακολουθώντας την πηγή [2], μπορούμε να φανταστούμε τη δημιουργία μιας ορθοκανονικής βάσης διανυσμάτων $\hat{e}_a|_p$ σε κάθε σημείο $p \in M$ της πολλαπλότητας του χωροχρόνου. Εφόσον η βάση είναι ορθοκανονική και ο χωροχρόνος είναι τοπικά επίπεδος, σε κάθε σημείο έχουμε ότι οι συνιστώσες σε αυτήν τη βάση δεν είναι τίποτα περισσότερο από τις συνιστώσες της μετρικής Minkowski:

$$g(\hat{e}_a|_p, \hat{e}_b|_p) = \eta_{ab}|_p$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία σε όλα τα σημεία του χάρτη που βρισκόμαστε, αποκτούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα $\hat{e}_a$ και η παραπάνω συνθήκη γίνεται:

$$\boxed{g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \eta_{ab}} \tag{1.1.2}$$

Έχουμε ακολουθήσει τις τυπικές συμβάσεις και χρησιμοποιούμε λατινικούς δείκτες $a, b, c, d, \ldots$ κλπ. όταν εξετάζεται επίπεδος χωροχρόνος. Το σύστημα συντεταγμένων συμβολίζεται ως $\hat{e}\mu \equiv \partial\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ και συνδέεται με αυτό το νέο σύστημα $\hat{e}_a$ μέσω ενός μετασχηματισμού βάσης:

$$\boxed{\hat{e}_\mu = \hat{e}_\mu{}^a\, \hat{e}_a} \tag{1.1.3}$$

Η νέα βάση (σύστημα) $\hat{e}a$ ονομάζεται *βάση τετράδων ή vierbein*, ενώ ο πίνακας μετασχηματισμού $\hat{e}\mu^a = \hat{e}\mu^a(x)$ (ο οποίος εξαρτάται από τα σημεία του χωροχρόνου x) ονομάζεται *πεδίο τετράδων* ή *πεδίο vierbein*. Το αντίστροφο του πεδίου τετράδων συμβολίζεται ως $(\hat{e}\mu^a)^{-1} = \hat{e}^\mu{}_a$ και ικανοποιεί τις συνθήκες ορθογωνιότητας:

$$\boxed{\hat{e}_\mu{}^a\, \hat{e}^\mu{}_b = \delta^a_b} \tag{1.1.4}$$

$$\boxed{\hat{e}^\mu{}_a\, \hat{e}_\nu{}^a = \delta^\mu_\nu} \tag{1.1.5}$$

όπου το δ δηλώνει το δέλτα του Kronecker. Σύμφωνα με τη δυαδικότητα διανύσματος-συνδιανύσματος (vector-covector duality), η δυαδική της (1.1.3) είναι:

$$\boxed{\hat{e}^\mu = \hat{e}^\mu{}_a\, \hat{e}^a} \tag{1.1.6}$$

όπου τα $\hat{e}^\mu \equiv dx^\mu$ είναι οι 1-μορφές του συν-συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή:

$$\boxed{dx^\mu = \hat{e}^\mu{}_a\, \hat{e}^a} \tag{1.1.7}$$

Επομένως, η μετρική μπορεί να γραφεί ως (εξ. (1.1.1)):

$$g = g_{\mu\nu}(\hat{e}^\mu{}_a\, \hat{e}^a)\,(\hat{e}^\nu{}_b\, \hat{e}^b) = g_{\mu\nu}(\hat{e}^\mu{}_a\, \hat{e}^\nu{}_b)\,(\hat{e}^a\, \hat{e}^b)$$

Εφαρμόζοντας την συνθήκη (1.1.2), καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned} g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) =& g_{\mu\nu}\hat{e}^\mu{}_a\, \hat{e}^\nu{}_b\, \hat{e}^a\, \hat{e}^b\, \hat{e}_a\, \hat{e}_b = \eta_{ab} \Rightarrow \\ \Rightarrow g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) =& g_{\mu\nu}\hat{e}^\mu{}_a\, \hat{e}^\nu{}_b\, \delta^a_a\, \delta^b_b = \eta_{ab} \Rightarrow g_{\mu\nu}\hat{e}^\mu{}_a\, \hat{e}^\nu{}_b = \eta_{ab} \end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας αυτή την τελευταία σχέση, καταλήγουμε στο ότι οι συνιστώσες της μετρικής μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\hat{e}_\mu{}^a\, \hat{e}_\nu{}^b} \tag{1.1.8}$$

Τα πεδία τετράδων $\hat{e}_\mu{}^a(x)$ μπορούν να θεωρηθούν ως συνιστώσες ενός $(1,1)$ τανυστή e σε ένα "μικτό" σύστημα με συνιστώσες τόσο καμπυλωμένου όσο και επίπεδου χωροχρόνου:

$$\boxed{e = \hat{e}_\mu{}^a dx^\mu \otimes \hat{e}_a} \tag{1.1.9}$$

Αν θεωρήσουμε ένα διάνυσμα v, μπορούμε να το εκφράσουμε είτε στη καμπυλωμένη είτε στη επίπεδη βάση:

$$\begin{gathered} \boxed{v = v^\mu \hat{e}_\mu} \\ \boxed{v = v^a \hat{e}_a} \end{gathered} \tag{1.1.10}$$

Ενεργώντας σε οποιαδήποτε από αυτά τα διανύσματα με τον τανυστή τετράδων e, αποκτούμε το ίδιο διάνυσμα αλλά σε διαφορετική βάση. Έτσι, ο τανυστής τετράδων είναι στην πραγματικότητα ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Ο νόμος μετασχηματισμού του διανύσματος (και του αντίστροφού του) που προκύπτουν είναι:

$$\begin{gathered} \boxed{v^a = \hat{e}_\mu{}^a v^\mu} \\ \boxed{v^\mu = \hat{e}^\mu{}_a v^a} \end{gathered} \tag{1.1.11}$$

1.1.2 Τοπικοί Μετασχηματισμοί Lorentz

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε μετασχηματισμούς συστήματος συντεταγμένων μεταξύ διαφορετικών βάσεων τετράδων. Η μόνη απαίτηση που πρέπει να πληρωθεί είναι ότι ο μετασχηματισμός πρέπει να διατηρεί την ορθογωνιότητα. Εφόσον οι τετράδες θεωρούνται τοπικά σε περιοχές επίπεδου χωροχρόνου με τη μετρική Minkowski, οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι ακριβώς ο τύπος μετασχηματισμών που αναζητούμε. Έτσι, έχουμε ότι μια αλλαγή βάσης τετράδων μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\boxed{\hat{e}_{a'} = \Lambda^{a}{}_{a'}(x)\hat{e}_{a}} \tag{1.1.12}$$

όπου τα $\Lambda^{a}{}_{a'}(x)$ δηλώνουν τις συνιστώσες του τανυστή του μετασχηματισμού Lorentz. Φυσικά, η μετρική Minkowski παραμένει αναλλοίωτη υπό τους μετασχηματισμούς Lorentz:

$$\Lambda^{a}{}_{a'}\Lambda^{b}{}_{b'}\eta_{ab} = \eta_{a'b'}$$

Λόγω της τοπικής φύσης αυτών των μετασχηματισμών Lorentz, τους ονομάζουμε *Τοπικούς Μετασχηματισμούς Lorentz*. Ουσιαστικά, τώρα έχουμε έναν "κανόνα" για να μετασχηματίσουμε τόσο (άνω και κάτω) λατινικούς και ελληνικούς δείκτες. Έτσι, υποθέτοντας ότι έχουμε έναν τανυστή $T^{a\mu}{}_{b\nu}$ με όλους τους 4 τύπους δεικτών, αυτός μετασχηματίζεται ως:

$$\boxed{T^{a'\mu'}{}_{b'\nu'} = \Lambda^{a'}{}_{a}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\Lambda^{b}{}_{b'}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}T^{a\mu}{}_{b\nu}} \tag{1.1.13}$$

Οι αλλαγές συστήματος συντεταγμένων στον καμπυλωμένο χωροχρόνο (Ελληνικοί δείκτες) ονομάζονται *Γενικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων*.

1.1.3 Η Σύνδεση Σπιν

Γνωρίζουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τετραδιανύσματος εκφρασμένου στη καμπυλωμένη βάση είναι:

$$\boxed{\bar{\nabla}_{\mu}v^{\nu} = \partial_{\mu}v^{\nu} + \bar{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda}\,v^{\lambda}} \tag{1.1.14}$$

όπου η γραμμή πάνω από το σύμβολο $\bar{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda}$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι αυτό δεν είναι το συνηθισμένο σύμβολο Christoffel της σύνδεσης Levi-Civita, καθώς δεν είναι συμμετρικό, δηλαδή:

$$\bar{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda} - \bar{\Gamma}^{\mu}_{\nu\lambda} \neq 0$$

που σημαίνει ότι υπάρχει μη μηδενική στρέψη και εξετάζουμε μια γενική συγγενή (affine) σύνδεση. Ομοίως, η γραμμή πάνω από το σύμβολο παραγώγου $\bar{\nabla}$ δηλώνει ότι εξετάζεται η σύνδεση που περιλαμβάνει στρέψη (ή αλλιώς, συνεστραμμένη σύνδεση). Τώρα, ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα v εκφράζεται στη επίπεδη βάση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μια διαφορετική σύνδεση τέτοια ώστε η συναλλοίωτη παράγωγος να εκφράζεται με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως, δηλαδή ως:

$$\boxed{\bar{\nabla}_{\mu}v^{a} = \partial_{\mu}v^{a} + \bar{\omega}_{\mu}{}^{a}{}_{b}\,v^{b}} \tag{1.1.15}$$

Αυτή η νέα σύνδεση $\bar{\omega}_{\mu}{}^{a}{}_{b}$ που σχετίζεται με τους λατινικούς δείκτες ονομάζεται *σύνδεση σπιν*[4]. Η γραμμή από πάνω δηλώνει την παρουσία στρέψης όπως προηγουμένως. Μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές της σύνδεσης σπιν συναρτήσει των συμβόλων $\bar{\Gamma}$, εκφράζοντας τον τανυστή $\bar{\nabla}v$ στις δύο διαφορετικές βάσεις. Για την καμπυλωμένη βάση, έχουμε ότι:

$$\bar{\nabla}v = (\bar{\nabla}_{\mu}v^{\nu})dx^{\mu}\otimes\partial_{\nu} = (\partial_{\mu}v^{\nu} + \bar{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda}\,v^{\lambda})dx^{\mu}\otimes\partial_{\nu} \tag{1.1.16}$$

Για την επίπεδη βάση, έχουμε ότι:

$$\bar{\nabla}v = (\bar{\nabla}_{\mu}v^{a})dx^{\mu}\otimes\hat{e}_{a} = (\partial_{\mu}v^{a} + \bar{\omega}_{\mu}{}^{a}{}_{b}\,v^{b})dx^{\mu}\otimes\hat{e}_{a} \tag{1.1.17}$$

Γνωρίζουμε ότι $\hat{e}_{a} = \hat{e}^{\rho}{}_{a}\,\hat{e}_{\rho} = \hat{e}^{\rho}{}_{a}\,\partial_{\rho}$ και $v^{a} = \hat{e}_{\nu}{}^{a}v^{\nu}$ και άρα η Εξίσωση (1.1.17) γίνεται:

$$\bar{\nabla}v = [\partial_{\mu}(\hat{e}_{\nu}{}^{a}v^{\nu}) + \bar{\omega}_{\mu}{}^{a}{}_{b}\,(\hat{e}_{\nu}{}^{b}v^{\nu})]dx^{\mu}\otimes(\hat{e}^{\rho}{}_{a}\,\partial_{\rho})$$

το οποίο μας δίνει:

$$\bar{\nabla}v = (v^{\nu}\hat{e}^{\rho}{}_{a}\partial_{\mu}\hat{e}_{\nu}{}^{a} + \partial_{\mu}v^{\rho} + \bar{\omega}_{\mu}{}^{a}{}_{b}\,\hat{e}_{\nu}{}^{b}v^{\nu}\hat{e}^{\rho}{}_{a})dx^{\mu}\otimes\partial_{\rho}$$

[4] Η τοποθέτηση του δείκτη μ είναι καθαρά συμβατική. Μια διαφορετική σύμβαση θα ήταν να τον τοποθετήσουμε δεξιά, δηλαδή να είχαμε $\bar{\omega}^{a}{}_{b\mu}$.

όπου έχουμε κάνει την συστολή δεικτών $\hat{e}_\nu{}^a \hat{e}_a{}^\rho = \delta^\rho_\nu$. Μετονομάζοντας τους δείκτες $\rho \to \nu \to \lambda$ παίρνουμε ότι:

$$\bar{\nabla} v = (\partial_\mu v^\nu + v^\lambda \hat{e}^\nu{}_a \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b\, \hat{e}_\lambda{}^b v^\lambda \hat{e}^\nu{}_a) dx^\mu \otimes \partial_\nu \tag{1.1.18}$$

Έπειτα, συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1.1.16) και (1.1.18) βρίσκουμε ότι:

$$\bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda}\, v^\lambda = v^\lambda \hat{e}^\nu{}_a \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b\, \hat{e}_\lambda{}^b v^\lambda \hat{e}^\nu{}_a$$

Καθώς αυτό πρέπει να ισχύει για κάθε v^λ, έχουμε ότι η σχέση μεταξύ των συντελεστών της συγγενούς σύνδεσης και της σύνδεσης σπιν είναι:

$$\boxed{\bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} = \hat{e}^\nu{}_a \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b\, \hat{e}_\lambda{}^b \hat{e}^\nu{}_a} \tag{1.1.19}$$

Μπορούμε εύκολα να αντιστρέψουμε την παραπάνω σχέση και να λύσουμε ως προς τους συντελεστές της σύνδεσης σπιν:

$$\boxed{\bar{\omega}_\mu{}^a{}_b = \hat{e}^\lambda{}_b\, \hat{e}_\nu{}^a\, \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} - \hat{e}^\lambda{}_b\, \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a} \tag{1.1.20}$$

Τώρα, αν πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές με την ποσότητα $\hat{e}_\sigma{}^b$ τότε παίρνουμε ότι:

$$\bar{\omega}_\mu{}^a{}_b \hat{e}_\sigma{}^b = \hat{e}^\lambda{}_b\, \hat{e}_\nu{}^a\, \hat{e}_\sigma{}^b\, \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} - \hat{e}^\lambda{}_b\, \hat{e}_\sigma{}^b\, \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a = \hat{e}_\nu{}^a\, \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\sigma} - \partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a$$

Με την αναδιάταξη των όρων στη μία πλευρά καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a - \hat{e}_\nu{}^a\, \bar{\Gamma}^\nu_{\mu\sigma} + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b \hat{e}_\sigma{}^b = 0$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε αυτήν την σχέση ως μια συναλλοίωτη παράγωγο του πεδίου τετράδων $\hat{e}_\sigma{}^a$, δηλαδή:

$$\bar{\nabla}_\mu \hat{e}_\nu{}^a = \partial_\mu \hat{e}_\nu{}^a - \hat{e}_\sigma{}^a\, \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b \hat{e}_\nu{}^b$$

όπου έχουμε μετονομάσει τους δείκτες $\nu \leftrightarrow \sigma$. O όρος "συναλλοίωτη παράγωγος" χρησιμοποιείται όχι για να αναφερθεί στην συνηθισμένη συναλλοίωτη παράγωγο που συναντάται στη Γενική Σχετικότητα, η οποία θεωρεί μόνο την συγγενή σύνδεση $\bar{\Gamma}$ σε σχέση με τους ελληνικούς δείκτες, αλλά σε ένα ευρύτερο/γενικευμένο πλαίσιο όπου οι λατινικοί δείκτες θεωρούνται σε σχέση με τη σύνδεση σπιν $\bar{\omega}$. Έτσι, έχουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου τετράδων μηδενίζεται:

$$\boxed{\bar{\nabla}_\mu \hat{e}_\nu{}^a = \partial_\mu \hat{e}_\nu{}^a - \hat{e}_\sigma{}^a\, \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b \hat{e}_\nu{}^b = 0} \tag{1.1.21}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρχική υπόθεση που τελικά λειτουργεί ως καθοριστική σχέση για τη σύνδεση σπιν. Γι' αυτό και ονομάζεται *αξίωμα τετράδων*. Ωστόσο, καθώς το σημείο εκκίνησής μας ήταν διαφορετικό, αυτό το αποτέλεσμα είναι κάπως αναμενόμενο, δεδομένου ότι $\hat{e}_\nu{}^a$ είναι οι συνιστώσες του τανυστή e, ο οποίος όπως είδαμε είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Ένα άλλο σημαντικό ερώτημα σχετικά με τους συντελεστές της σύνδεσης σπιν είναι ο τρόπος που μετασχηματίζονται. Όπως και τα σύμβολα $\bar{\Gamma}$, τα οποία προκύπτουν από την συγγενή σύνδεση, δεν αναμένουμε οι συντελεστές της σύνδεσης σπιν να είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή. Το σημείο εκκίνησής μας για να βρούμε αυτόν τον νόμο μετασχηματισμού είναι το γεγονός ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανύσματος v στη επίπεδη βάση πρέπει να είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz[3]. Επομένως, αν:

$$\bar{\nabla}_\mu v^a = \partial_\mu v^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b v^b$$

τότε η σχέση:

$$\boxed{\bar{\nabla}_\mu v^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a \bar{\nabla}_\mu v^a} \tag{1.1.22}$$

πρέπει να ισχύει. Έχουμε ότι

$$\bar{\nabla}_\mu v^{a'} = \bar{\nabla}_\mu (\Lambda^{a'}{}_a\, v^a) = (\bar{\nabla}_\mu \Lambda^{a'}{}_a) v^a + \Lambda^{a'}{}_a \bar{\nabla}_\mu v^{a'}$$

και επομένως ο μόνος τρόπος για να ισχύει η συνθήκη αναλλοιώτητας κατά Lorentz που επιβάλαμε είναι αν:

$$\boxed{\bar{\nabla}_\mu \Lambda^{a'}{}_a = 0} \tag{1.1.23}$$

Γνωρίζουμε πώς να υπολογίζουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους $(1,1)$ τανυστών (και, γενικά, των (k,l) τανυστών) και έτσι υπολογίζουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο του $\Lambda^{a'}{}_b$, η οποία γνωρίζουμε ότι θα πρέπει να είναι μηδέν:

$$\boxed{\bar{\nabla}_\mu \Lambda^{a'}{}_b = \partial_\mu \Lambda^{a'}{}_b + \bar{\omega}_\mu{}^{a'}{}_c \Lambda^c{}_b - \bar{\omega}_\mu{}^c{}_b \Lambda^{a'}{}_c = 0} \tag{1.1.24}$$

όπου ο άνω δείκτης έχει έναν θετικό όρο διόρθωσης και ο κάτω δείκτης έχει έναν αρνητικό. Πολλαπλασιάζουμε με $\Lambda^b{}_{b'}$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\Lambda^b{}_{b'}\partial_\mu\Lambda^{a'}{}_b + \bar{\omega}_\mu{}^{a'}{}_c\,\Lambda^b{}_{b'}\Lambda^c{}_b - \bar{\omega}_\mu{}^c{}_b\,\Lambda^b{}_{b'}\Lambda^{a'}{}_c = 0 \Rightarrow \\ \Lambda^b{}_{b'}\partial_\mu\Lambda^{a'}{}_b + \bar{\omega}_\mu{}^{a'}{}_{b'} - \bar{\omega}_\mu{}^c{}_b\,\Lambda^b{}_{b'}\Lambda^{a'}{}_c = 0\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

και άρα:

$$\boxed{\bar{\omega}_\mu{}^{a'}{}_{b'} = \bar{\omega}_\mu{}^c{}_b\,\Lambda^b{}_{b'}\Lambda^{a'}{}_c - \Lambda^b{}_{b'}\partial_\mu\Lambda^{a'}{}_b} \tag{1.1.26}$$

Μπορεί να φανεί ξεκάθαρα ότι οι συντελεστές της σύνδεσης σπιν δεν πρέπει να μετασχηματίζονται όπως ένας τανυστής προκειμένου η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανύσματος να μετασχηματίζεται σωστά.

1.2 Ο Ρόλος των Διαφορικών Μορφών

Ο νέος μας φορμαλισμός, που περιλαμβάνει λατινικούς (επίπεδους) δείκτες, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ ισχυρό υπολογιστικό εργαλείο: την εξωτερική άλγεβρα (exterior algebra) των διαφορικών μορφών. Γνωρίζουμε ότι ένα αντικείμενο όπως το X_μ είναι μια 1-μορφή, ένα αντισυμμετρικό αντικείμενο όπως το $A_{\mu\nu}$ είναι μια 2-μορφή και ούτω καθεξής. Αλλά τι γίνεται με ένα αντικείμενο όπως το $X_\mu{}^a$; Με την πρώτη ματιά, κάποιος θα έλεγε ότι αυτό δεν είναι μια διαφορική μορφή. Ωστόσο, το γεγονός ότι το a είναι ένας λατινικός (επίπεδος) δείκτης μας επιτρέπει να κάνουμε μια πολύ σημαντική αλλαγή στην οπτική μας γωνία: Μπορούμε να δούμε το $X_\mu{}^a$ ως μια 1-μορφή που λαμβάνει ως τιμές διανύσματα! Για κάθε τιμή του κάτω δείκτη μ, το $X_\mu{}^a$ είναι ένα τετραδιάνυσμα λόγω του δεύτερου, άνω επίπεδου δείκτη a. Σε αυτό το πνεύμα, οποιοσδήποτε τανυστής που έχει οποιονδήποτε αριθμό κάτω ελληνικών δεικτών που είναι εντελώς αντισυμμετρικοί και οποιονδήποτε αριθμό λατινικών δεικτών μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαφορική μορφή που λαμβάνει ως τιμές τανυστές. Για παράδειγμα, ο τανυστής $A_{\mu\nu}{}^a{}_b$, όπου οι μ,ν είναι αντισυμμετρικοί, μπορεί να θεωρηθεί ως μια 2-μορφή που λαμβάνει ως τιμές $(1,1)$ τανυστές. Ως εκ τούτου, οι "συνηθισμένες" διαφορικές μορφές όπως το X_μ είναι απλώς διαφορικές μορφές που λαμβάνουν ως τιμές βαθμωτές ποσότητες. Με την εφαρμογή αυτού του "κανόνα", οι συντελεστές της σύνδεσης σπιν $\bar{\omega}_\mu{}^a{}_b$ είναι 1-μορφές που λαμβάνουν ως τιμές $(1,1)$ τανυστές. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να "καταργήσουμε"/αποκρύψουμε τον ελληνικό δείκτη γράφοντας τον συντελεστή της σύνδεσης σπιν ως μία 1-μορφή[5]:

$$\boxed{\boldsymbol{\bar{\omega}}^a{}_b = \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b\,dx^\mu} \tag{1.2.1}$$

όπου η έντονη γραφή έχει χρησιμοποιηθεί για να υποδείξει τη 1-μορφή ως γεωμετρικό αντικείμενο και όχι απλώς ως τις συνιστώσες συναρτήσεις της. Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική παράγωγος (exterior derivative) μιας 1-μορφής X_μ είναι μια 2-μορφή που δίνεται από την σχέση:

$$(dX)_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu$$

και έτσι, για μια 1-μορφή με τιμή τετραδιανύσματος $X_\mu{}^a$ έχουμε ότι:

$$\boxed{(dX)_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu X_\nu{}^a - \partial_\nu X_\mu{}^a} \tag{1.2.2}$$

Ωστόσο, αυτή η παράγωγος δεν ικανοποιεί τις ανάγκες μας. Αυτό συμβαίνει γιατί, ενώ μετασχηματίζεται ως μια 2-μορφή υπό Γενικές Μετασχηματισμούς Συντεταγμένων (ελληνικοί δείκτες), *δεν* μετασχηματίζεται όπως ένα τετραδιάνυσμα υπό Τοπικές Μετασχηματισμούς Lorentz (λατινικοί δείκτες). Για να διορθώσουμε αυτήν την αστοχία, πρέπει να εισαγάγουμε έναν νέο τελεστή παραγώγων, την *εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγο*, η οποία ορίζεται ως:

$$\boxed{(\bar{D}X)_{\mu\nu}{}^a = (dX)_{\mu\nu}{}^a + (\bar{\omega}\wedge X)_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu X_\nu{}^a - \partial_\nu X_\mu{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b X_\nu{}^b - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b X_\mu{}^b} \tag{1.2.3}$$

όπου το $\wedge$ συμβολίζει το λεγόμενο γινόμενο wedge των διαφορικών μορφών και η γραμμή πάνω από την παράγωγο υποδηλώνει ότι χρησιμοποιείται μια σύνδεση στην οποία η στρέψη είναι μη-μηδενική. Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση είναι ίση με:

$$\boxed{(\bar{D}X)_{\mu\nu}{}^a = \bar{\nabla}_\mu X_\nu{}^a - \bar{\nabla}_\nu X_\mu{}^a} \tag{1.2.4}$$

Με έντονη γραφή, αποκρύπτοντας τους ελληνικούς δείκτες, η εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγος μιας p-μορφής που λαμβάνει ως τιμές τετραδιανύσματα εκφράζεται ως:

$$\boxed{(\boldsymbol{\bar{D}X})^a = (\boldsymbol{\bar{D}X}^a) = \boldsymbol{dX}^a + \boldsymbol{\bar{\omega}}^a{}_b\wedge\boldsymbol{X}^b} \tag{1.2.5}$$

[5] Δεδομένου ότι ο δείκτης μ θα συσταλεί ούτως ή άλλως, καθίσταται πιο σαφές γιατί υπάρχουν διαφορετικές συμβάσεις για την τοποθέτησή του. Στις περισσότερες περιπτώσεις, θα χρησιμοποιούμε τις συνεσταλμένες μορφές των συντελεστών σύνδεσης.

Αυτός ο ορισμός της εξωτερικής συναλλοίωτης παραγώγου μπορεί να επεκταθεί σε οποιαδήποτε p-μορφή $\boldsymbol{X}^{a\cdots}{}_{b\ldots}$ που λαμβάνει ως τιμές τανυστές, όπως δίνεται στην πηγή [4]:

$$\boxed{(\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{X})^{a\cdots}{}_{b\ldots} = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{X})^{a\cdots}{}_{b\ldots} + (\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_c \wedge \boldsymbol{X}^{c\cdots}{}_{b\ldots}) + \cdots - (-1)^p(\boldsymbol{X}^{a\cdots}{}_{d\ldots} \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}^d{}_b) - \cdots} \tag{1.2.6}$$

Για να συνοψίσουμε, έχουμε κάνει δύο πράγματα:

1. Έχουμε αλλάξει την οπτική μας γωνία, βλέποντας τους τανυστές με μικτούς ελληνικούς και λατινικούς δείκτες ως διαφορικές μορφές με ελληνικούς δείκτες, που λαμβάνουν ως τιμές τανυστές. Αυτό μας επιτρέπει να αποσυμφορήσουμε τις εξισώσεις μας από την πληθώρα δεικτών, διατηρώντας μόνο τους λατινικούς (επίπεδους) δείκτες, κάτι το οποίο γίνεται εφικτό αναπαριστώντας αυτές τις διαφορικές μορφές ως γεωμετρικά αντικείμενα και όχι ως τις συνιστώσες τους (αποκρύπτοντας έτσι τους ελληνικούς δείκτες).

2. Έχουμε ορίσει έναν κατάλληλο τελεστή παραγώγων (την εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγο) για τις διαφορικές τιμές που λαμβάνουν ως τιμές τανυστές, ο οποίος ενσωματώνει τη σύνδεση σπιν.

Θα χρησιμοποιήσουμε εκτενώς τη σημειογραφία και τα εργαλεία που παρουσιάστηκαν παραπάνω στο υπόλοιπο του κειμένου.

1.3 Οι Εξισώσεις Δομής του Cartan

Τώρα που έχουμε καθορίσει τον φορμαλισμό μας σε όρους τετραδών και διαφορικών μορφών, μπορούμε να προχωρήσουμε και να εκφράσουμε πολλές έννοιες της Γενικής Σχετικότητας με τις οποίες είμαστε γνώριμου με αυτούς τους νέους όρους.

1.3.1 Συμβατότητα της Μετρικής

Η συνθήκη συμβατότητας της μετρικής (metric compatibility condition) στη Γενική Σχετικότητα εκφράζεται ως μια συνθήκη μηδενισμού της συναλλοίωτης παραγώγου της μετρικής:

$$\boxed{\bar\nabla g = 0} \tag{1.3.1}$$

Συναρτήσει των vielbein, αυτό εκφράζεται ως:

$$\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\eta}_{ab} = 0 \Rightarrow \bar\nabla_\mu \eta_{ab} = \cancelto{0}{\partial_\mu \eta_{ab}} - \bar\omega_\mu{}^c{}_a\, \eta_{cb} - \bar\omega_\mu{}^c{}_b\, \eta_{ac} = -\bar\omega_{\mu ab} - \bar\omega_{\mu ba} = 0$$

το οποίο μεταφράζεται στο ότι οι δύο λατινικοί δείκτες είναι αντισυμμετρικοί:

$$\boxed{\bar\omega_{\mu ab} = -\bar\omega_{\mu ba}} \tag{1.3.2}$$

ή, ισοδύναμα:

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\omega}}_{ab} = -\bar{\boldsymbol{\omega}}_{ba}} \tag{1.3.3}$$

1.3.2 Στρέψη

Ξέρουμε ότι η στρέψη στη Γενική Σχετικότητα είναι ένας τανυστής με συνιστώσες[6]:

$$\boxed{T^\lambda{}_{\mu\nu} = \bar\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \bar\Gamma^\lambda_{\nu\mu}} \tag{1.3.4}$$

Θέλουμε να εκφράσουμε το παραπάνω με Λατινικούς δείκτες. Έχουμε[7]:

$$\boxed{T^\lambda{}_{\mu\nu} = \hat{e}^\lambda{}_a T^a{}_{\mu\nu}} \tag{1.3.5}$$

[6] Δεδομένου ότι οι συντελεστές της σύνδεσης $\bar\Gamma$ δεν είναι τανυστές, συνήθως δεν τηρούμε αυστηρά τη σημειογραφία των δεικτών και γράφουμε τον πάνω δείκτη απευθείας πάνω από τον πρώτο κάτω δείκτη. Ωστόσο, καθώς η διαφορά αυτών των δύο συμβόλων $\bar\Gamma$ είναι ένας τανυστής, είμαστε υποχρεωμένοι να *επιλέξουμε* μια θέση για τον πάνω δείκτη. Εδώ ακολουθούμε τη σύμβαση να τοποθετείται στην αριστερή πλευρά, αντί για τη δεξιά.

[7] Σε άλλες πηγές, χρησιμοποιείται η μορφή $T^\lambda{}_{\mu\nu} = -\hat{e}^\lambda{}_a T^a{}_{\mu\nu}$. Αυτό το συμβατικό μείον μπορεί να αναχθεί στη σύμβαση που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας στον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου. Πιο συγκεκριμένα, ενώ εδώ χρησιμοποιούμε $\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda$, άλλες πηγές χρησιμοποιούν$\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\omega_\lambda$. Για να διατηρηθεί το τελικό αποτέλεσμα (Εξίσωση (1.3.8)), η εισαγωγή αυτού του μείον είναι απαραίτητη.

Από την Εξίσωση (1.1.19) έχουμε ότι:

$$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \hat{e}^{\lambda}{}_a \partial_\mu \hat{e}_\nu{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, \hat{e}_\nu{}^c \hat{e}^{\lambda}{}_a$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} T^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \hat{e}^{\lambda}{}_a \partial_\mu \hat{e}_\nu{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, \hat{e}_\nu{}^c \hat{e}^{\lambda}{}_a - \hat{e}^{\lambda}{}_a \partial_\nu \hat{e}_\mu{}^a - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\, \hat{e}_\mu{}^c \hat{e}^{\lambda}{}_a \Rightarrow \\ T^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \hat{e}^{\lambda}{}_a (\partial_\mu \hat{e}_\nu{}^a - \partial_\nu \hat{e}_\mu{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, \hat{e}_\nu{}^c - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\, \hat{e}_\mu{}^c) \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Συγκρίνοντας τις Εξισώσεις (1.3.5) και (1.3.6) βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{e}_\nu{}^a - \partial_\nu \hat{e}_\mu{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, \hat{e}_\nu{}^c - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\, \hat{e}_\mu{}^c} \tag{1.3.7}$$

Αναγνωρίζουμε το παραπάνω ως την εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγο της 1-μορφής $\hat{\boldsymbol{e}}^a$ που λαμβάνει ως τιμές τετραδιανύσματα (δες Εξίσωση (1.2.3)). Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{\boldsymbol{T}^a = \overline{\boldsymbol{D}}\hat{\boldsymbol{e}}^a = \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^a + \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b} \tag{1.3.8}$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται *Πρώτη Εξίσωση Δομής του Cartan*.

1.3.3 Καμπυλότητα

Μπορούμε να δουλέψουμε παρόμοια στην περίπτωση του τανυστή καμπυλότητας. Στη Γενική Σχετικότητα, ο τανυστής καμπυλότητας δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{\overline{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\Gamma}^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\sigma} + \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\sigma} - \bar{\Gamma}^{\rho}_{\nu\lambda}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\sigma}} \tag{1.3.9}$$

Μπορούμε να αλλάξουμε δύο από τους δείκτες σε επίπεδους και να εκφράσουμε την καμπυλότητα σε όρους της σύνδεσης spin ως:

$$\boxed{\overline{R}^{a}{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c \bar{\omega}_\nu{}^c{}_b - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c \bar{\omega}_\mu{}^c{}_b} \tag{1.3.10}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να μεταβούμε σε επίπεδους δείκτες χρησιμοποιώντας τα vielbeins:

$$\boxed{\overline{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \hat{e}^{\rho}{}_a\, \hat{e}_\sigma{}^b\, \overline{R}^{a}{}_{b\mu\nu}} \tag{1.3.11}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (1.1.19) λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{\Gamma}^{\rho}_{\nu\sigma} &= \partial_\mu (\hat{e}^{\rho}{}_a \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^a + \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\, \hat{e}_\sigma{}^c \hat{e}^{\rho}{}_a) = \\ &= (\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_a)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^a) + \hat{e}^{\rho}{}_a (\partial_\mu \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^a) + (\partial_\mu \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c)\, \hat{e}_\sigma{}^c \hat{e}^{\rho}{}_a + \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\, (\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^c) \hat{e}^{\rho}{}_a + \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\, \hat{e}_\sigma{}^c (\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_a) \end{aligned}$$

και:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\sigma} &= \partial_\nu (\hat{e}^{\rho}{}_a \partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, \hat{e}_\sigma{}^c \hat{e}^{\rho}{}_a) = \\ &= (\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_a)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a) + \hat{e}^{\rho}{}_a (\partial_\nu \partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a) + (\partial_\nu \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c)\, \hat{e}_\sigma{}^c \hat{e}^{\rho}{}_a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, (\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^c) \hat{e}^{\rho}{}_a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, \hat{e}_\sigma{}^c (\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_a) \end{aligned}$$

αλλά και:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\sigma} &= (\hat{e}^{\rho}{}_a \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, \hat{e}_\lambda{}^c \hat{e}^{\rho}{}_a) \left(\hat{e}^{\lambda}{}_b \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b + \bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\, \hat{e}_\sigma{}^d \hat{e}^{\lambda}{}_b\right) \\ &= \hat{e}^{\rho}{}_a \hat{e}^{\lambda}{}_b \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b + \hat{e}^{\rho}{}_a\, \hat{e}_\sigma{}^d\, \hat{e}^{\lambda}{}_b\, \bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\, \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a + \\ &+ \underbrace{\hat{e}_\lambda{}^c \hat{e}^{\lambda}{}_b}_{=\delta^c_b} \hat{e}^{\rho}{}_a\, \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b + \underbrace{\hat{e}_\lambda{}^c\, \hat{e}^{\lambda}{}_b}_{=\delta^c_b}\, \hat{e}^{\rho}{}_a\, \hat{e}_\sigma{}^d\, \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\, \bar{\omega}_\nu{}^b{}_d = \\ &= \hat{e}^{\rho}{}_a \hat{e}^{\lambda}{}_b \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b + \hat{e}^{\rho}{}_a\, \hat{e}_\sigma{}^d\, \hat{e}^{\lambda}{}_b\, \bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\, \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a + \hat{e}^{\rho}{}_a\, \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b + \hat{e}^{\rho}{}_a\, \hat{e}_\sigma{}^d\, \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b\, \bar{\omega}_\nu{}^b{}_d \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{\rho}_{\nu\lambda}\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\sigma} &= (\hat{e}^{\rho}{}_a \partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a + \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\, \hat{e}_\lambda{}^c \hat{e}^{\rho}{}_a) \left(\hat{e}^{\lambda}{}_b \partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b + \bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\, \hat{e}_\sigma{}^d \hat{e}^{\lambda}{}_b\right) \\ &= \hat{e}^{\rho}{}_a \hat{e}^{\lambda}{}_b \partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a \partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b + \hat{e}^{\rho}{}_a\, \hat{e}_\sigma{}^d\, \hat{e}^{\lambda}{}_b\, \bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\, \partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a + \hat{e}^{\rho}{}_a\, \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b \partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b + \hat{e}^{\rho}{}_a\, \hat{e}_\sigma{}^d\, \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b\, \bar{\omega}_\mu{}^b{}_d \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\bar{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} &= (\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_a)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^a) + \cancel{\hat{e}^{\rho}{}_a(\partial_\mu\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^a)} + (\partial_\mu \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c)\,\hat{e}_\sigma{}^c \hat{e}^{\rho}{}_a + \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\,(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^c)\hat{e}^{\rho}{}_a + \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\,\hat{e}_\sigma{}^c(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_a) \\
&- (\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_a)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a) - \cancel{\hat{e}^{\rho}{}_a(\partial_\nu\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a)} - (\partial_\nu \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c)\,\hat{e}_\sigma{}^c \hat{e}^{\rho}{}_a - \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\,(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^c)\hat{e}^{\rho}{}_a - \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\,\hat{e}_\sigma{}^c(\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_a) \\
&+ \hat{e}^{\rho}{}_a \hat{e}^{\lambda}{}_b \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b + \hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^d\,\hat{e}^{\lambda}{}_b\,\bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\,\partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a + \hat{e}^{\rho}{}_a\,\bar{\omega}_\mu{}^a{}_b \partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b + \hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^d\,\bar{\omega}_\mu{}^a{}_b\,\bar{\omega}_\nu{}^b{}_d \\
&- \hat{e}^{\rho}{}_a \hat{e}^{\lambda}{}_b \partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a \partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b - \hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^d\,\hat{e}^{\lambda}{}_b\,\bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\,\partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a - \hat{e}^{\rho}{}_a\,\bar{\omega}_\nu{}^a{}_b \partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b - \hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^d\,\bar{\omega}_\nu{}^a{}_b\,\bar{\omega}_\mu{}^b{}_d
\end{aligned}$$

Μετά την αναδιάταξη κάποιων όρων και την μετονομασία κάποιων δεικτών, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\bar{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} &= \hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^b\Big[\partial_\mu \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\,\bar{\omega}_\nu{}^c{}_b - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\,\bar{\omega}_\mu{}^c{}_b\Big] + \Big[(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_a)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^a) - (\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_a)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a)\Big] \\
&+ \hat{e}_\sigma{}^c\Big[\bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\,(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_a) - \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\,(\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_a)\Big] + \hat{e}^{\rho}{}_a\cancel{\Big[\bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\,(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^c) - \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\,(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^c)\Big]} + \hat{e}^{\rho}{}_a\cancel{\Big[\bar{\omega}_\mu{}^a{}_b(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b) - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b)\Big]} \\
&+ \hat{e}^{\rho}{}_a \hat{e}^{\lambda}{}_b\Big[(\partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b) - (\partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b)\Big] + \hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^d\,\hat{e}^{\lambda}{}_b\Big[\bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\,(\partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a) - \bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\,(\partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a)\Big]
\end{aligned}$$

Για να προχωρήσουμε με τους υπολογισμούς, χρειαζόμαστε μία χρήσιμη ταυτότητα. Έχουμε ότι:

$$\partial_\mu(\hat{e}^{\lambda}{}_a \hat{e}_\tau{}^a) = (\partial_\mu \hat{e}_\tau{}^a)\hat{e}^{\lambda}{}_a + \hat{e}_\tau{}^a(\partial_\mu \hat{e}^{\lambda}{}_a)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\partial_\mu(\hat{e}^{\lambda}{}_a \hat{e}_\tau{}^a) = \partial_\mu \delta^{\lambda}_{\tau} = 0$$

Επομένως, λαμβάνουμε την ταυτότητα:

$$\boxed{(\partial_\mu \hat{e}_\tau{}^a)\hat{e}^{\lambda}{}_a = -\hat{e}_\tau{}^a(\partial_\mu \hat{e}^{\lambda}{}_a)} \tag{1.3.12}$$

το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να ανταλλάξουμε τα vielbein στην παράγωγο, λαμβάνοντας ένα αρνητικό πρόσημο. Έχοντας αυτό κατά νου, κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
\hat{e}^{\rho}{}_a\Big[\hat{e}^{\lambda}{}_b(\partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b) - \hat{e}^{\lambda}{}_b(\partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b)\Big] &= \hat{e}^{\rho}{}_a\Big[-\hat{e}_\lambda{}^a(\partial_\mu \hat{e}^{\lambda}{}_b)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b) + \hat{e}_\lambda{}^a(\partial_\nu \hat{e}^{\lambda}{}_b)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b)\Big] \\
= \delta^{\rho}_{\lambda}\Big[-(\partial_\mu \hat{e}^{\lambda}{}_b)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b) + (\partial_\nu \hat{e}^{\lambda}{}_b)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b)\Big] &= \Big[-(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_b)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b) + (\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_b)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b)\Big]
\end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^d\Big[\hat{e}^{\lambda}{}_b\,\bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\,(\partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^a) - \hat{e}^{\lambda}{}_b\,\bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\,(\partial_\nu \hat{e}_\lambda{}^a)\Big] &= \hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^d\Big[-\hat{e}_\lambda{}^a\,\bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\,(\partial_\mu \hat{e}^{\lambda}{}_b) + \hat{e}_\lambda{}^a\,\bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\,(\partial_\nu \hat{e}^{\lambda}{}_b)\Big] \\
= \delta^{\rho}_{\lambda}\,\hat{e}_\sigma{}^d\Big[-\bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\,(\partial_\mu \hat{e}^{\lambda}{}_b) + \bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\,(\partial_\nu \hat{e}^{\lambda}{}_b)\Big] &= \hat{e}_\sigma{}^d\Big[-\bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\,(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_b) + \bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\,(\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_b)\Big]
\end{aligned}$$

Άρα, αν αντικαταστήσουμε πίσω στην έκφραση για τον τανυστή καμπυλότητας, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\bar{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \hat{e}^{\rho}{}_a\,\hat{e}_\sigma{}^b&\Big[\partial_\mu \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\,\bar{\omega}_\nu{}^c{}_b - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\,\bar{\omega}_\mu{}^c{}_b\Big] \\
&+ \cancel{\Big[(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_a)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^a) - (\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_a)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^a)\Big]} \\
&+ \hat{e}_\sigma{}^c\cancel{\Big[\bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\,(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_a) - \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\,(\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_a)\Big]} \\
&+ \cancel{\Big[-(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_b)(\partial_\nu \hat{e}_\sigma{}^b) + (\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_b)(\partial_\mu \hat{e}_\sigma{}^b)\Big]} \\
&+ \hat{e}_\sigma{}^d\cancel{\Big[-\bar{\omega}_\nu{}^b{}_d\,(\partial_\mu \hat{e}^{\rho}{}_b) + \bar{\omega}_\mu{}^b{}_d\,(\partial_\nu \hat{e}^{\rho}{}_b)\Big]}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι εκτός από τον πρώτο εξαφανίζονται και άρα:

$$\overline{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \hat{e}^{\rho}{}_{a}\hat{e}_{\sigma}{}^{b}(\partial_\mu \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu\bar{\omega}_\mu{}^a{}_b + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\bar{\omega}_\nu{}^c{}_b - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\bar{\omega}_\mu{}^c{}_b) \tag{1.3.13}$$

Επομένως, με άμεση σύγκριση των Εξισώσεων (1.3.11) and (1.3.13) παρατηρούμε ότι:

$$\overline{R}^{a}{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\omega}_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu\bar{\omega}_\mu{}^a{}_b + \bar{\omega}_\mu{}^a{}_c\bar{\omega}_\nu{}^c{}_b - \bar{\omega}_\nu{}^a{}_c\bar{\omega}_\mu{}^c{}_b$$

Αυτό είναι και το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αναγνωρίζουμε τους πρώτους δύο όρους της σχέσης καμπυλότητας ως την εξωτερική παράγωγο του $\bar{\omega}$ και τους τελευταίους δύο όρους ως το γινόμενο wedge του $\bar{\omega}$ με τον εαυτό του. Έτσι, έχουμε μια ισοδύναμη έκφραση:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{R}}^{a}{}_{b} = \boldsymbol{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}^{a}{}_{b} + \bar{\boldsymbol{\omega}}^{a}{}_{c} \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}^{c}{}_{b}} \tag{1.3.14}$$

Αυτή είναι γνωστή ως η *Δεύτερη Εξίσωση Δομής του Cartan*.

1.3.4 Οι Ταυτότητες Bianchi

Με την εφαρμογή πολλαπλών εξωτερικών συναλλοίωτων παραγώγων στην τετράδα ως 1-μορφή, αποκτούμε τις ταυτότητες Bianchi, γνωστές από τη Γενική Σχετικότητα, στον νέο μας φορμαλισμό. Η εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγος της 1-μορφής της στρέψης είναι:

$$\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{T}^a = \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{2}}\hat{\boldsymbol{e}}^a = \overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^a + \overline{\boldsymbol{D}}(\bar{\boldsymbol{\omega}}^a_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b)$$

Έχουμε ότι:

$$\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^a = \cancelto{0}{\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{2}}\hat{\boldsymbol{e}}^a} + \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^b = \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^b$$

και:

$$\overline{\boldsymbol{D}}(\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b) = \boldsymbol{d}(\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b) + \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}^b{}_c \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^c = \boldsymbol{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b - \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^b + \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}^b{}_c \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^c$$

Άρα:

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{T}^a &= \cancel{\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^b} + \boldsymbol{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b - \cancel{\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^b} + \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}^b{}_c \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^c \\ &= \boldsymbol{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b + \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}^b{}_c \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^c = (\boldsymbol{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b + \bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{\boldsymbol{\omega}}^b{}_c) \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^c\end{aligned}$$

Μετονομάζοντας τους δείκτες $b \leftrightarrow c$ φτάνουμε στην σχέση:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{T}^a = \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{2}}\hat{\boldsymbol{e}}^a = \overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b} \tag{1.3.15}$$

Αυτή η εξίσωση είναι στην πραγματικότητα η *Πρώτη Ταυτότητα Bianchi* της Γενικής Σχετικότητας [2]:

$$\boxed{\overline{R}^{\rho}{}_{[\sigma\mu\nu]} = 0} \tag{1.3.16}$$

Σημειώνουμε ότι η απόδειξη της πρώτης ταυτότητας Bianchi που παρουσιάστηκε παραπάνω δεν εμπεριείχε καμία υπόθεση για το $\hat{e}^a$ εκτός από το ότι είναι μια διαφορική μορφή που λαμβάνει ως τιμές τετραδιανύσματα. Επομένως, ο τύπος είναι έγκυρος για οποιαδήποτε p-μορφή διαφορικής μορφής $\boldsymbol{\lambda}^a$ που λαμβάνει ως τιμές τετραδιανύσματα:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\lambda}^a = \overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{\lambda}^b} \tag{1.3.17}$$

Τώρα, ας υπολογίσουμε μια επιπλέον εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγο, δηλαδή να υπολογίσουμε την ποσότητα $\overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\lambda}^a$. Μπορούμε να την υπολογίσουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους. Πρώτον,

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\lambda}^a = \overline{\boldsymbol{D}}(\overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\lambda}^a) = \overline{\boldsymbol{D}}(\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{\lambda}^b) = (\overline{\boldsymbol{D}}\,\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{\lambda}^b) + (\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b \wedge \overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\lambda}^b) \tag{1.3.18}$$

Ωστόσο, έχουμε επίσης ότι

$$\overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\lambda}^a = \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{2}}(\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\lambda}^a) = \overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b \wedge \overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\lambda}^b \tag{1.3.19}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ποσότητα $\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\lambda}^a$ αντί για $\boldsymbol{\lambda}^a$ στην Εξίσωση (1.3.17). Συγκρίνοντας τις Εξισώσεις (1.3.18) και (1.3.19) συμπεραίνουμε ότι:

$$\overline{\boldsymbol{D}}\,\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b \wedge \boldsymbol{\lambda}^b = 0$$

Αφού το $\boldsymbol{\lambda}^a$ μπορεί να είναι μια αυθαίρετη p-μορφή με τιμή τετραδιάνυσμα, επιλέγουμε να είναι μια 0-μορφή, δηλαδή ένα απλό τετραδιάνυσμα $\boldsymbol{\lambda}^a = X^a$. Κάνοντας αυτό, το γινόμενο wedge απλοποιείται σε ένα κανονικό γινόμενο:

$$(\overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b)X^b = 0$$

Εφόσον αυτή η ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε αυθαίρετα επιλεγμένο τέτοιο τετραδιάνυσμα, καταλήγουμε ότι η ακόλουθη εξίσωση πρέπει να ισχύει:

$$\overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b = 0$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της εξωτερικής συναλλοίωτης παραγώγου, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b = \boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b + \overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{R}}^c{}_b - \overline{\boldsymbol{R}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b = 0} \tag{1.3.20}$$

που είναι στην πραγματικότητα η *Δεύτερη (Διαφορική) Ταυτότητα του Bianchi* της Γενικής Σχετικότητας [2]:

$$\boxed{\overline{\nabla}_{[\lambda|}\overline{R}^{\rho}{}_{\sigma|\mu\nu]} = 0} \tag{1.3.21}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b$:

$$\overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b = \overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_b + \overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) = \overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_b) + \overline{\boldsymbol{D}}(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b)$$

Έχουμε ότι:

$$\overline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_b) = \cancelto{0}{(\boldsymbol{d}^2\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_b)} + (\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) - (\boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) = (\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) - (\boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) = \boldsymbol{d}(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b)$$

και:

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{D}}(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) &= \boldsymbol{d}(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) + (\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_d \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^d{}_b) + (\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_d \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^d{}_b) \\ &= \boldsymbol{d}(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) + 2(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_d \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^d{}_b)\end{aligned}$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$\overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b = 2\boldsymbol{d}(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) + 2(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_d \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^d{}_b)$$

Η Δεύτερη Ταυτότητα Bianchi μπορεί τότε να γραφεί ως:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b = \boldsymbol{d}(\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_b) + (\overline{\boldsymbol{\varpi}}^a{}_c \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^c{}_d \wedge \overline{\boldsymbol{\varpi}}^d{}_b) = 0} \tag{1.3.22}$$

1.4 Ο Τανυστής Συστροφής

Υποθέτοντας μια συνεστραμμένη σύνδεση $\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ είναι δυνατόν να δείξουμε ότι [5]

$$\boxed{\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(T^\lambda{}_{\mu\nu} + T_\mu{}^\lambda{}_\nu + T_\nu{}^\lambda{}_\mu)} \tag{1.4.1}$$

όπου τα $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ είναι τα σύμβολα Christoffel της Γενικής Σχετικότητας που δεν συμπεριλαμβάνουν την στρέψη και άρα είναι συμμετρικά,

$$\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}} \tag{1.4.2}$$

και τα $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ είναι οι συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας. Επομένως, είναι δυνατόν να διαχωριστεί η συγγενής σύνδεση σε δύο μέρη, ένα ελεύθερο από στρέψη μέρος $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ και ένα συνεστραμμένο μέρος $K^\lambda{}_{\mu\nu}$:

$$\boxed{\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + K^\lambda{}_{\mu\nu}} \tag{1.4.3}$$

Το συνεστραμμένο μέρος $K^\lambda{}_{\mu\nu}$ είναι ένας τανυστής (καθώς ορίζεται με βάση τον τανυστή στρέψης), τον οποίο ονομάζουμε τανυστή συστροφής[8]

$$\boxed{K^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^\lambda{}_{\mu\nu} + T_\mu{}^\lambda{}_\nu + T_\nu{}^\lambda{}_\mu)} \tag{1.4.4}$$

[8] Υπάρχουν *τέσσερεις* διαφορετικές εκφράσεις για τον τανυστή συστροφής, οι οποίες βασίζονται σε δύο επιλογές συμβάσεων:

i Την επιλογή του ορισμού της συναλλοίωτης παραγώγου: Είτε $\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda$ (Επιλογή (1α)), είτε $\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\omega_\lambda$ (Επιλογή (1β))

ii Την επιλογή του ορισμού του τανυστή στρέψης: Είτε $T^\lambda{}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu}$ (Επιλογή (2α)), είτε $T^\lambda{}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ (Επιλογή (2β))

Ο τανυστής στρέψης είναι αντισυμμετρικός στους κάτω δείκτες του:

$$\boxed{T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -T^{\lambda}{}_{\nu\mu}} \tag{1.4.5}$$

Βασιζόμενοι στο παραπάνω μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ο τανυστής συστροφής είναι αντισυμμετρικός στον 1ο και 3ο δείκτη του:

$$\boxed{K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\nu\mu\lambda}} \tag{1.4.6}$$

Ανάλογα, η συνεστραμμένη σύνδεση σπιν $\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b$ μπορεί να διαχωριστεί σε ένα τμήμα χωρίς στρέψη $\boldsymbol{\omega}^a{}_b$ και σε ένα τμήμα $\boldsymbol{K}^a{}_b$ που εμπεριέχει όλη την πληροφορία σχετικά με την στρέψη:

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b = \boldsymbol{\omega}^a{}_b + \boldsymbol{K}^a{}_b \Rightarrow \bar{\omega}_\mu{}^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b + K^a{}_{\mu b}} \tag{1.4.7}$$

όπου $\boldsymbol{K}^a{}_b$ είναι ξανά η *συστροφή*, αυτή τη φορά εκπεφρασμένη χρησιμοποιώντας Λατινικούς δείκτες. Το τμήμα χωρίς στρέψη ορίζεται έτσι ώστε:

$$\boxed{\boldsymbol{D}\hat{\boldsymbol{e}}^a = \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{e}}^a + \boldsymbol{\omega}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b = 0} \tag{1.4.8}$$

Δηλαδή, η συνεισφορά στην στρέψη από το $\boldsymbol{\omega}^a{}_b$ είναι μηδέν. Είναι, στην συνέχεια, εύκολο να δείξουμε ότι:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}^a{}_b \wedge} \tag{1.4.9}$$

Σημειώνουμε ότι έχουμε ορίσει μία εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγο χωρίς γραμμή από πάνω, $\boldsymbol{D}$, η οποία ορίζεται όπως η $\overline{\boldsymbol{D}}$, αλλά με $\boldsymbol{\omega}^a{}_b$ αντί για $\bar{\boldsymbol{\omega}}^a{}_b$. Αυτό, με τη σειρά του, μας δίνει ότι η ποσότητα $\boldsymbol{\omega}_{ab}$ είναι αντισυμμετρική:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_{ab} = -\boldsymbol{\omega}_{ba}} \tag{1.4.10}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από την Συνθήκη Συμβατότητας της Μετρικής, όπως και προηγουμένως. Η 1-μορφή της στρέψης ορίζεται από την συστολή[9]:

$$\boxed{\boldsymbol{K}^a{}_c = K^a{}_{bc}\,\hat{\boldsymbol{e}}^b = K^a{}_{\mu c}\,dx^\mu} \tag{1.4.11}$$

όπου οι συνιστώσες $K^a{}_{bc}$ δίνονται από:

$$\boxed{K_{abc} = \frac{1}{2}(T_{abc} + T_{bac} + T_{cab})} \tag{1.4.12}$$

Δεδομένου ότι οι πρώτος και τρίτος δείκτης είναι αντισυμμετρικοί,

$$\boxed{K_{abc} = -K_{cba}} \tag{1.4.13}$$

ακολουθεί ότι οι συνιστώσες της 1-μορφής της συστροφής είναι αντισυμμετρικές:

$$\boxed{\boldsymbol{K}_{ab} = -\boldsymbol{K}_{ba}} \tag{1.4.14}$$

Επιπλέον, μέσω της Εξίσωσης-Ορισμού (1.3.8) για την στρέψη και της Εξίσωσης (1.4.8) είναι τετριμμένο να δείξουμε ότι:

$$\boxed{\boldsymbol{T}^a = \boldsymbol{K}^a{}_b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b} \tag{1.4.15}$$

Επιβεβαιώνουμε έτσι ότι η πληροφορία σχετικά με την στρέψη συμπεριλαμβάνεται εξ' ολοκλήρου στην συστροφή. Επιπλέον, έχουμε ότι:

$$2(K_{abc} - K_{acb}) = T_{abc} + T_{bac} + T_{cab} - T_{acb} - T_{cab} - T_{bac} = 2T_{abc}$$

Στη συνέχεια, σύμφωνα με τον συνδυασμό μας από επιλογές συμβάσεων, αποκτούμε διαφορετικές εκφράσεις για τις συνιστώσες του τανυστή συστροφής:

i (1α) & (2α): $K_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\lambda\mu})$ & αντισυμμετρικός στον 1ο και 3ο δείκτη: $K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\nu\mu\lambda}$ (χρησιμοποιούμε αυτόν τον συνδυασμό)

ii (1α) & (2β): $K_{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{2}(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\lambda\mu})$ & αντισυμμετρικός στον 1ο και 3ο δείκτη: $K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\nu\mu\lambda}$

iii (1β) & (2α): $K_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu\nu} - T_{\mu\lambda\nu} - T_{\nu\lambda\mu})$ & αντισυμμετρικός στον 1ο και 2ο δείκτη: $K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\mu\lambda\nu}$

iv (1β) & (2β): $K_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\lambda\mu} - T_{\lambda\mu\nu})$ & αντισυμμετρικός στον 2ο και 3ο δείκτη: $K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\lambda\nu\mu}$

[9] Ο δείκτης που συστέλλεται είναι αυτός που δεν διαθέτει καμία συμμετρία. Παρομοίως, στις άλλες συμβάσεις που περιγράψαμε, η 1-μορφή της συστροφής ορίζεται από την συστολή του κάτω δείκτη που δεν έχει συμμετρίες.

Έτσι, παίρνουμε την ιδιότητα:

$$\boxed{T^a{}_{bc} = 2K^a{}_{[bc]} = (K^a{}_{bc} - K^a{}_{cb})} \tag{1.4.16}$$

Έχοντας κατά νου όλα τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε μια 2-μορφή καμπυλότητας χωρίς στρέψη ως [4]:

$$\boxed{\boldsymbol{R}^a{}_b = \boldsymbol{d\omega}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b} \tag{1.4.17}$$

Η καμπυλότητα αυτή ικανοποιεί την ταυτότητα Bianchi:

$$\boxed{\boldsymbol{DR}^a{}_b = 0} \tag{1.4.18}$$

Αναπτύσσοντας την Εξίσωση (1.3.14) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b &= \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\omega}^a{}_b + \boldsymbol{K}^a{}_b) + (\boldsymbol{\omega}^a{}_c + \boldsymbol{K}^a{}_c) \wedge (\boldsymbol{\omega}^c{}_b + \boldsymbol{K}^c{}_b) \\
&= \underbrace{\boldsymbol{d\omega}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b}_{=\boldsymbol{R}^a{}_b} + \underbrace{\boldsymbol{dK}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge \boldsymbol{K}^c{}_b + \boldsymbol{K}^a{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b}_{\boldsymbol{DK}^a{}_b} + \boldsymbol{K}^a{}_c \wedge \boldsymbol{K}^c{}_b
\end{aligned}$$

Έτσι, η συστραμμένη 2-μορφή καμπυλότητας μπορεί να εκφραστεί σε όρους της 2-μορφής καμπυλότητας χωρίς στρέψη και της 1-μορφής συστροφής:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{R}}^a{}_b = \boldsymbol{R}^a{}_b + \boldsymbol{DK}^a{}_b + \boldsymbol{K}^a{}_c \wedge \boldsymbol{K}^c{}_b} \tag{1.4.19}$$

1.5 Φορμαλισμός Lagrange της Θεωρίας Einstein-Cartan

Στην Γενική Σχετικότητα, οι εξισώσεις του Einstein στην απουσία ύλης προκύπτουν από την λεγόμενη δράση Einstein-Hilbert:

$$\boxed{S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\,d^4x} \tag{1.5.1}$$

Όπου R είναι η (χωρίς στρέψη) βαθμωτή καμπυλότητα Ricci και G είναι η σταθερά της βαρύτητας του Νεύτωνα. Στη συνεστραμμένη μας θεωρία, έχει νόημα να αντικαταστήσουμε απλώς την βαθμωτή καμπυλότητα Ricci χωρίς στρέψη με την αντίστοιχη *με* στρέψη $\overline{R}$. Ως εκ τούτου, το σημείο εκκίνησης για τη δράση σε μια θεωρία βαρύτητας με στρέψη είναι:

$$\boxed{S_G = \frac{1}{16\pi G}\int \overline{R}\sqrt{-g}\,d^4x} \tag{1.5.2}$$

Θα δείξουμε ότι (ακολουθώντας την πηγή [6]) ότι αυτός ο όρος μπορεί να γραφεί συναρτήσει διαφορικών μορφών ως:

$$\boxed{S_G = \frac{1}{16\pi G}\int \overline{\boldsymbol{R}}_{ab} \wedge *(\hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b)} \tag{1.5.3}$$

Απόδειξη

Καταρχάς, έχουμε ότι η διαφορική μορφή καμπυλότητας μπορεί να γραφτεί ως η συστολή του τανυστή καμπυλότητας Riemann:

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{ab} = \frac{1}{2}\overline{R}_{ab\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Επιπλέον, ο αστερίσκος δηλώνει τον δυαδικό Hodge (Hodge dual), ο οποίος για μια p-μορφή A σε έναν D-διάστατο χώρο ορίζεται ως:

$$\boxed{*A = \frac{1}{(D-p)!}A^{\mu_1\cdots\mu_p}\,\eta_{\mu_1\ldots\mu_p\ldots\mu_D}dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D}} \tag{1.5.4}$$

όπου το η χρησιμοποιείται ως συμβολισμός για τον *τανυστή* Levi-Civita:

$$\boxed{\eta_{\mu_1\ldots\mu_D} = \sqrt{-g}\,\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_D}} \tag{1.5.5}$$

Επομένως, μπορούμε να δούμε ότι:

$$*(\hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b) = \frac{1}{2}\hat{e}^{a\rho}\hat{e}^{b\sigma}\eta_{\rho\sigma\kappa\lambda}\,dx^\kappa \wedge dx^\lambda$$

και άρα παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{16\pi G}\int \left[\frac{1}{2}\overline{R}_{ab\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu\right] \wedge \left[\frac{1}{2}\hat{e}^{a\rho}\hat{e}^{b\sigma}\eta_{\rho\sigma\kappa\lambda}\, dx^\kappa \wedge dx^\lambda\right] \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int \frac{1}{4}\overline{R}_{ab\mu\nu}\hat{e}^{a\rho}\hat{e}^{b\sigma}\eta_{\rho\sigma\kappa\lambda}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\kappa \wedge dx^\lambda \end{aligned}$$

Έπειτα, χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$\boxed{dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D} = \sqrt{-g}\,\eta^{\mu_1\ldots\mu_D}\, d^D x} \tag{1.5.6}$$

λαμβάνουμε ότι:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G}\int \frac{1}{4}\overline{R}^{ab}{}_{\mu\nu}\hat{e}_a{}^\rho\hat{e}_b{}^\sigma\eta_{\rho\sigma\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu\kappa\lambda}\sqrt{-g}\, d^4x$$

Για την συστολή του τανυστή Levi-Civita με τον εαυτό του, έχουμε την ταυτότητα:

$$\boxed{\eta_{\nu_1\ldots\nu_D}\eta^{\mu_1\cdots\mu_D} = (D-p)!\,\delta^{\mu_1\cdots\mu_D}_{\nu_1\ldots\nu_D}} \tag{1.5.7}$$

όπου έχουμε υιοθετήσει την σύμβαση $\epsilon_{0123} = +1$ και $\delta^{\mu_1\cdots\mu_D}_{\nu_1\ldots\nu_D}$ είναι το *γενικευμένο σύμβολο Kronecker delta* το οποίο ορίζεται ως η ορίζουσα:

$$\boxed{\delta^{\mu_1\cdots\mu_D}_{\nu_1\ldots\nu_D} = \begin{vmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \cdots & \delta^{\mu_1}_{\nu_D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{\mu_D}_{\nu_1} & \cdots & \delta^{\mu_D}_{\nu_D} \end{vmatrix}} \tag{1.5.8}$$

Έχοντας αυτό κατά νου, παίρνουμε ότι:

$$\eta_{\rho\sigma\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu\kappa\lambda} = 2(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)$$

και άρα η δράση μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{16\pi G}\int \frac{1}{2}\overline{R}^{ab}{}_{\mu\nu}\hat{e}_a{}^\rho\hat{e}_b{}^\sigma(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho)\sqrt{-g}\, d^4x = \frac{1}{16\pi G}\int \frac{1}{2}\overline{R}^{ab}{}_{\mu\nu}(\hat{e}_a{}^\mu\hat{e}_b{}^\nu - \hat{e}_a{}^{b\nu}\hat{e}_b{}^\mu)\sqrt{-g}\, d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int \frac{1}{2}(\overline{R}^{ab}{}_{ab} - \overline{R}^{ab}{}_{ba})\sqrt{-g}\, d^4x = \frac{1}{16\pi G}\int \overline{R}^{ab}{}_{ab}\sqrt{-g}\, d^4x \end{aligned}$$

Αναγνωρίζουμε την ποσότητα $\overline{R}^{ab}{}_{ab}$ ως την βαθμωτή καμπυλότητα Ricci:

$$\overline{R} = \overline{R}_{ab}\eta^{ab} = \overline{R}^c{}_{acb}\eta^{ab} = \overline{R}^{cb}{}_{cb}$$

και έτσι έχουμε δείξει ότι:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G}\int \overline{R}\sqrt{-g}\, d^4x \tag{1.5.9}$$

Ακριβώς όπως επιθυμούσαμε.

Αναπτύσσοντας την 2-μορφή καμπυλότητας στην Εξίσωση (1.5.3), λαμβάνουμε τρεις όρους:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G}\int (\boldsymbol{R}^a{}_b + \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}^a{}_b + \boldsymbol{K}^a{}_c \wedge \boldsymbol{K}^c{}_b) \wedge *(\hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b) \tag{1.5.10}$$

Ο πρώτος όρος είναι η γνώριμη δράση Einstein-Hilbert από την Γενική Σχετικότητα:

$$\boxed{S_{G_1} = S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G}\int \boldsymbol{R}^a{}_b \wedge *(\hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b)} \tag{1.5.11}$$

Ο δεύτερος όρος προκύπτει τελικώς να είναι ένας επιφανειακός όρος:

$$S_{G_2} = \frac{1}{16\pi G}\int \boldsymbol{D}\boldsymbol{K}^a{}_b \wedge *(\hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b) = \int \boldsymbol{d}(\boldsymbol{K}^a{}_b \wedge *(\hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b)) = \int_{\partial M} (\boldsymbol{K}^a{}_b \wedge *(\hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b)) \tag{1.5.12}$$

Ο όρος αυτός δεν συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης και συνεπώς μπορεί να αγνοηθεί. Ο τελευταίος όρος εμπεριέχει όλη την πληροφορία σχετικά με την στρέψη:

$$\boxed{S_{G_3} = \frac{1}{16\pi G}\int (\boldsymbol{K}^a{}_c \wedge \boldsymbol{K}^c{}_b) \wedge *(\hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b)} \tag{1.5.13}$$

Αν επιστρέψουμε στον προηγούμενό μας συμβολισμό, αυτός ο όρος μπορεί να γραφεί ως:

$$\boxed{S_{G_3} = \frac{1}{16\pi G}\int \Delta\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{1.5.14}$$

όπου το Δ είναι ένας παράγοντας ο οποίος προκύπτει από τις συστολές του τανυστή συστροφής[10]. Επομένως, η πλήρης βαρυτική δράση υπό την παρουσία στρέψης είναι:

$$\boxed{S_G = \frac{1}{16\pi G}\int (R+\Delta)\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{1.5.15}$$

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε ότι αυτός ο παράγοντας Δ μπορεί να διαχωριστεί περαιτέρω και μόνο μέρος του είναι σημαντικό για τη θεωρία μας.

[10] Χρησιμοποιώντας την σύμβαση iii όπως αυτές παρουσιάζονται στην υποσημείωση 7, αυτός ο όρος είναι:

$$\Delta = K^{\lambda}{}_{\mu\nu}K^{\nu\mu}{}_{\lambda} - K^{\mu\nu}{}_{\nu}K_{\mu\lambda}{}^{\lambda} = T^{\nu}{}_{\nu\mu}T^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{\mu} - \frac{1}{2}T^{\mu}{}_{\nu\lambda}T^{\nu\lambda}{}_{\mu} + \frac{1}{4}T_{\mu\nu\lambda}T^{\mu\nu\lambda}$$

Κεφάλαιο 2

Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε Χωροχρόνους με Στρέψη

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (Quantum Electrodynamics - QED) σε καμπύλο χωροχρόνο με μη μηδενική στρέψη. Έχουμε ήδη μια περιγραφή (τη δράση) για ένα χωρόχρονο Einstein-Cartan με στρέψη. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα προσθέσουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μαζί με ένα πεδίο φερμιόνων που συζεύγνυται με αυτό, ενώ βρίσκεται σε ένα καμπύλο χωροχρόνο με στρέψη. Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε στην εύρεση των εξισώσεων κίνησης και θα δούμε ότι η παρουσία της στρέψης τροποποιεί την εξίσωση Dirac. Τέλος, κάνοντας κάποιες επιπλέον υποθέσεις, θα δούμε πώς η στρέψη μπορεί να "μεταστοιχειωθεί" σε ένα αξιόνιο με το οποίο αλληλεπιδρά το φερμιόνιο.

2.1 Η Δράση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής με Στρέψη

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάσαμε τη βαρυτική δράση που περιγράφει έναν καμπύλο χωροχρόνο με στρέψη. Για να περιγράψουμε την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED) σε αυτό το χωροχρονικό υπόβαθρο, πρέπει να προσθέσουμε δύο επιπλέον όρους στην δράση: Έναν όρο που συνδέει τα φερμιόνια με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε ένα καμπύλο χωροχρόνο με στρέψη, και έναν όρο που περιγράφει το ίδιο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Για να το κάνουμε αυτό, όμως, πρέπει να ορίσουμε μια κατάλληλη συναλλοίωτη παράγωγο που δρα σε σπινόρες.

2.1.1 Η Βαρυτική Συναλλοίωτη Παράγωγος Σπινόρων

Η κατάλληλη συναλλοίωτη παράγωγος σπινόρων ονομάζεται βαρυτική συναλλοίωτη παράγωγος και ορίζεται ως [4]:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{D}}\psi = \boldsymbol{d}\psi - \frac{i}{4}\bar{\boldsymbol{\omega}}_{ab}\sigma^{ab}\psi \Leftrightarrow \overline{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \frac{i}{4}\bar{\omega}_{\mu ab}\sigma^{ab}\psi} \tag{2.1.1}$$

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{D}}\bar{\psi} = \boldsymbol{d}\bar{\psi} + \frac{i}{4}\bar{\boldsymbol{\omega}}_{ab}\bar{\psi}\sigma^{ab} \Leftrightarrow \overline{D}_\mu\bar{\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} + \frac{i}{4}\bar{\omega}_{\mu ab}\bar{\psi}\sigma^{ab}} \tag{2.1.2}$$

όπου το σ^{ab} ορίζεται σε σχέση με τους πίνακες γ σε επίπεδο χωροχρόνο[11]:

$$\boxed{\sigma^{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b]} \tag{2.1.3}$$

2.1.2 Δράση για Σπίνορες σε Καμπυλωμένο Χωροχρόνο με Στρέψη

Για να εκφράσουμε ένα σπινοριακό πεδίο που είναι συζευγμένο με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε ένα καμπύλο χωροχρονικό υπόβαθρο με στρέψη, χρειάζεται απλώς να προσαρμόσουμε τη γνωστή δράση ελεύθερων φερμιονικών πεδίων σε χωροχρόνο Minkowski, που δίνεται ως εξής,

$$S_{QED}^{Flat} = \frac{i}{2}\int (\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\, d^4x = \int \frac{1}{2}(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + h.c.)\, d^4x \tag{2.1.4}$$

[11] Αυτές είναι οι γνωστοί πίνακες γ που χρησιμοποιούνται στις Κβαντικές Θεωρίες Πεδίου. Οι πίνακες γ με ελληνικούς δείκτες, που θα συναντηθούν αργότερα στο κείμενο, εξαρτώνται από τις συντεταγμένες του χωροχρόνου, σε αντίθεση με τους πίνακες που έχουν λατινικούς δείκτες, οι οποίοι είναι σταθερές.

ώστε να ληφθεί υπόψη η σύζευξη με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και το βαρυτικό υπόβαθρο. Αυτό γίνεται απλά αντικαθιστώντας την μερική παράγωγο με μια συναλλοίωτη παράγωγο:

$$\boxed{\overline{\mathcal{D}}_\mu = \overline{D}_\mu - ieA_\mu} \tag{2.1.5}$$

Όπου $\overline{\boldsymbol{D}}_\mu$ είναι η βαρυτική συναλλοίωτη παράγωγος, A_μ είναι το πεδίο των φωτονίων και $e^2 = 4\pi\alpha$, όπου α είναι η σταθερά λεπτής υφής (η σταθερά σύζευξης της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής). έλος, χρειάζεται να αντικαταστήσουμε το d^4x με $\sqrt{-g}\,d^4x$ προκειμένου να έχουμε αναλλοιώτητα των διαφορομορφισμών (diffeomorphism invariance). Έτσι, η δράση για την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε καμπύλο χωροχρόνο με στρέψη είναι:

$$\boxed{S_{QED}^{Curved+Torsion} = \frac{1}{2}\int (i\bar{\psi}\gamma^\mu(\overline{\mathcal{D}}_\mu\psi) + h.c.)\sqrt{-g}\,d^4x} \tag{2.1.6}$$

Όταν αναπτύξουμε το παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} S_{QED}^{Curved+Torsion} &= \frac{1}{2}\int \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu[(\overline{D}_\mu - ieA_\mu)\psi] + h.c.\right]\sqrt{-g}\,d^4x \\ &= \frac{1}{2}\int \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu\overline{D}_\mu\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + h.c.\right]\sqrt{-g}\,d^4x \\ &= \frac{1}{2}\int \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu\overline{D}_\mu\psi - i(\overline{D}_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g}\,d^4x + e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να χωρίσουμε τη βαρυτική συναλλοιωτή παράγωγο σε μέρη με και χωρίς στρέψη. Πιο συγκεκριμένα, για $\bar{\omega}_{\mu ab} = \omega_{\mu ab} + K_{a\mu b}$ οι Εξισώσεις (2.1.1) και (2.1.2) γίνονται:

$$\boxed{\overline{D}_\mu\psi = D_\mu\psi - \frac{i}{4}K_{a\mu b}\sigma^{ab}\psi} \tag{2.1.7}$$

$$\boxed{\overline{D}_\mu\bar{\psi} = D_\mu\bar{\psi} + \frac{i}{4}K_{a\mu b}\psi\sigma^{ab}} \tag{2.1.8}$$

Η προκύπτουσα δράση μετά τον διαχωρισμό μπορεί επομένως να αποδειχθεί εύκολα ότι έχει τους παρακάτω τρεις όρους:

$$\begin{aligned} S_{QED}^{Curved+Torsion} =& \frac{1}{2}\int \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - i(D_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g}\,d^4x + e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x \\ &+ \frac{1}{8}\int \bar{\psi}\{\gamma^c,\sigma^{ab}\}\psi K_{acb}\sqrt{-g}\,d^4x \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα [4]:

$$\boxed{\{\gamma^c,\sigma^{ab}\} = 2\epsilon^{abc}{}_d\gamma^d\gamma^5} \tag{2.1.9}$$

Βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} S_{QED}^{Curved+Torsion} &= \frac{1}{2}\int \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - i(D_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g}\,d^4x + e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x \\ &+ \frac{1}{4}\int \epsilon^{abc}{}_d\bar{\psi}\gamma^d\gamma^5\psi K_{acb}\sqrt{-g}\,d^4x \end{aligned}$$

Οι πρώτοι δύο όροι είναι οι όροι δράσης της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής σε καμπύλο χωροχρόνο *χωρίς* στρέψη:

$$\boxed{S_{QED}^{Curved} = \frac{1}{2}\int \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - i(D_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g}\,d^4x + e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x} \tag{2.1.10}$$

Τώρα εστιάζουμε στον τρίτο όρο που περιέχει την στρέψη, $S_{QED}^{Torsion} = \frac{1}{4}\int \epsilon^{abc}{}_d\bar{\psi}\gamma^d\gamma^5\psi K_{acb}\sqrt{-g}\,d^4x$. Το σύμβολο Levi-Civita συστέλλεται με τον τανυστή συστροφής και έτσι μόνο το εντελώς αντισυμμετρικό μέρος της συστροφής έχει μη μηδενική συνεισφορά, δηλαδή είναι το $K_{[acb]}$ το οποίο συζεύγνυται με τον σπίνορα. Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\boxed{T_{[acb]} = -2K_{[acb]}} \tag{2.1.11}$$

Έτσι, ορίζοντας την 3-μορφή της στρέψης:

$$\boxed{\boldsymbol{T} = \frac{1}{3!} T_{abc}\, \hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^c} \tag{2.1.12}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα:

$$\boxed{S_d = \frac{1}{3!} \epsilon^{abc}{}_d T_{abc}} \tag{2.1.13}$$

είναι μια 1-μορφή που είναι η δυαδική κατά Hodge της 3-μορφής της στρέψης:

$$\boxed{\boldsymbol{S} = *\boldsymbol{T}} \tag{2.1.14}$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{1}{3!} \epsilon^{acb}{}_d T_{acb} = \frac{1}{3!} \epsilon^{acb}{}_d T_{[acb]} = -\frac{2}{3!} \epsilon^{acb}{}_d K_{[acb]} \Rightarrow \epsilon^{acb}{}_d K_{[acb]} = -3 S_d$$

Κρατώντας τα παραπάνω, ο τελευταίος όρος στην δράση μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{1}{4} \int \epsilon^{abc}{}_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi K_{acb} \sqrt{-g}\, d^4x = \frac{1}{4} \int \epsilon^{abc}{}_d \bar{\psi} \gamma^d \gamma^5 \psi K_{[acb]} \sqrt{-g}\, d^4x = -\frac{3}{4} \int S_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \sqrt{-g} d^4x$$

Επιπλέον, αναγνωρίζουμε την ποσότητα

$$\boxed{(j^5)^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi} \tag{2.1.15}$$

ως το χειραλικό φερμιονικό ρεύμα. Επομένως, ο όρος της δράσης που εμπεριέχει την σύζευξη των φερμιονίων με την στρέψη μπορεί να γραφεί ως:

$$-\frac{3}{4} \int S_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \sqrt{-g}\, d^4x = -\frac{3}{4} \int S_\mu (j^5)^\mu \sqrt{-g}\, d^4x = -\frac{3}{4} \int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{j^5}$$

Απόδειξη

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο όρος που περιλαμβάνει την στρέψη μπορεί να γραφεί συναρτήσει διαφορικών μορφών όπως υποδείχθηκε παραπάνω. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε πρώτα τον ορισμό για τον δυαδικό Hodge (Εξίσωση (1.5.4)):

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4} \int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{j^5} &= -\frac{3}{4} \int S_\mu dx^\mu \wedge \frac{1}{3!} (j^5)^\rho \eta_{\rho\nu\kappa\lambda} dx^\nu \wedge dx^\kappa dx^\lambda \\
&= -\frac{3}{4} \int \frac{1}{3!} S_\mu (j^5)^\rho \underbrace{\eta_{\rho\nu\kappa\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\kappa dx^\lambda}_{=\sqrt{-g}\eta^{\mu\nu\kappa\lambda} d^4x} \\
&= -\frac{3}{4} \int \frac{1}{3!} S_\mu (j^5)^\rho \underbrace{\eta_{\rho\nu\kappa\lambda} \eta^{\mu\nu\kappa\lambda}}_{=6\delta^\mu_\rho} \sqrt{-g} d^4x \\
&= -\frac{3}{4} \int S_\mu (j^5)^\mu \sqrt{-g}\, d^4x
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε αποδείξει αυτό που επιθυμούσαμε.

Η δράση, τελικά, λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$\boxed{S_{QED}^{Curved+Torsion} = S_{QED}^{Curved} + S_{QED}^{Torsion} = S_{QED}^{Curved} - \frac{3}{4} \int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{j^5}} \tag{2.1.16}$$

2.1.3 Η Δράση του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

Πρέπει τώρα να εξετάσουμε τη δράση για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Εδώ, θα επιλέξουμε την ίδια δράση με αυτήν που χρησιμοποιείται για την συνηθισμένη Κβαντική Ηλεκτροδυναμική. Αυτό σημαίνει ότι υποθέτουμε ότι το φωτόνιο δεν συζεύγνυται με την στρέψη. Συνεπώς, ασχολούμαστε με την πιο απλοϊκή περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η δράση που εξετάζουμε είναι:

$$\boxed{S_{EM} = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x} \tag{2.1.17}$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφεί συναρτήσει διαφορικών μορφών ως:

$$\boxed{S_{EM} = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{F} \wedge *\boldsymbol{F}} \tag{2.1.18}$$

2.1.4 Η Βαρυτική Δράση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι το μέρος της βαρυτικής δράσης που εμπεριέχει την στρέψη εκφράζεται μέσω του βαθμωτού μεγέθους Δ. Ομοίως, είδαμε ότι το μέρος της φερμιονικής δράσης που εμπεριέχει την στρέψη μπορεί να εκφραστεί μέσω του τανυστή S_d, ο οποίος είναι μια συστολή του τανυστή στρέψης. Ο τανυστής συστροφής είναι ένας τετραδιάστατος τανυστής τάξης 3 με 48 συνιστώσες. Η αντισυμμετρία του μεταξύ του πρώτου και τρίτου δείκτη επιβάλλει ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών του τανυστή συστροφής είναι 24. Αυτό συμβαίνει επειδή, για το K_{abc} υπάρχουν 16 συνολικοί συνδυασμοί των a και c, και μόνο 6 από αυτούς είναι ανεξάρτητοι λόγω της αντισυμμετρίας σε αυτούς τους δείκτες. Για καθέναν από αυτούς τους συνδυασμούς, έχουμε 4 συνιστώσες (διαφορετικές τιμές του b) για ένα συνολικό αριθμό $4 \times 6 = 24$ συνιστωσών[12]. Μπορούμε να ελέγξουμε (μέσω των Πινάκων Young[13]) ότι η αποσύνθεση του τανυστή συστροφής σε μη-αναγωγήσιμα (irreducible) μέρη είναι [7]:

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{4_A} \oplus \mathbf{20} = \mathbf{4_A} \oplus \mathbf{4_B} \oplus \mathbf{16} \tag{2.1.19}$$

όπου έχουμε βάλει υποσημειώσεις στα δύο διαφορετικά $\mathbf{4}$ μέρη της αποσύνθεσης για να τα ξεχωρίσουμε. Το τετραδιάνυσμα S_d προκύπτει να είναι το $\mathbf{4_A}$ μέρος και άρα μπορούμε να πούμε ότι:

$$\boxed{K_{abc} = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}S^d + \hat{K}_{abc}} \tag{2.1.20}$$

όπου $\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}S^d$ είναι το $\mathbf{4}$ κομμάτι και $\hat{K}_{abc}$ είναι το 20 κομμάτι, το οποίο δεν δίνεται καθώς δεν θα είναι σχετικό στο μέλλον. Αυτό, με τη σειρά του, οδηγεί στο γεγονός ότι τοΔ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\boxed{\Delta = \frac{3}{2}S_dS^d + \hat{\Delta}} \tag{2.1.21}$$

όπου το $\hat{\Delta}$ δίνεται από την ίδια εξίσωση με το Δ μόνο που το $\hat{K}$ αντικαθιστά το K, δηλαδή από τις συστολές του μέρους 20 του τανυστή συστροφής. Με αυτό κατά νου, η βαρυτική δράση χωρίζεται σε τρία μέρη:

$$\boxed{S_G = \frac{1}{16\pi G}\int (R+\hat{\Delta})\sqrt{-g}\,d^4x + \frac{3}{32\pi G}\int S_dS^d\sqrt{-g}\,d^4x} \tag{2.1.22}$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\int S_dS^d\sqrt{-g}\,d^4x = \int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{S}$$

Έτσι, η βαρυτική δράση είναι:

$$\boxed{S_G = \frac{1}{16\pi G}\int (R+\hat{\Delta})\sqrt{-g}\,d^4x + \frac{3}{32\pi G}\int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{S}} \tag{2.1.23}$$

2.2 Οι Εξισώσεις Κίνησης

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη συνολική δράση που περιλαμβάνει το βαρυτικό υπόβαθρο, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και το φερμιόνιο που αλληλεπιδρά και με τα δύο:

$$\boxed{\begin{aligned} S = &\frac{1}{16\pi G}\int (R+\hat{\Delta})\sqrt{-g}\,d^4x + \frac{3}{32\pi G}\int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{S} - \frac{1}{2}\int \boldsymbol{F} \wedge *\boldsymbol{F} \\ &+ \frac{1}{2}\int \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu \boldsymbol{D}_\mu\psi - i(\boldsymbol{D}_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g}\,d^4x + e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{3}{4}\int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{j^5} \end{aligned}} \tag{2.2.1}$$

Με τη μεταβολή ως προς τα $A_\mu, S_\mu, \psi, \bar{\psi}$ και την μετρική, αποκτούμε τις εξισώσεις του Maxwell, μια εξίσωση κίνησης για την στρέψη, μια τροποποιημένη εξίσωση Dirac και τροποποιημένες εξισώσεις Einstein.

[12] Μια άλλη προσέγγιση είναι να δούμε το K_{abc} ως έναν αντισυμμετρικό 2-τανυστή για κάθε τιμή του b. Κάθε αντισυμμετρικός 2-τανυστής έχει 6 ανεξάρτητες συνιστώσες, και έτσι τέσσερεις από αυτούς (ένας για κάθε τιμή του b) έχουν $4 \times 6 = 24$ ανεξάρτητες συνιστώσες.

[13] Δεδομένου ότι αποσυνθέτουμε στην ομάδα $SO(1,3)$, υπάρχουν πρόσθετοι κανόνες που πρέπει να λάβουμε υπόψιν [7].

2.2.1 Οι Εξισώσεις Maxwell

Ας εξετάσουμε αρχικά τη μεταβολή της δράσης ως προς το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A_μ. Οι περισσότεροι όροι δεν περιέχουν το πεδίο αυτό και επομένως η μεταβολή τους είναι μηδενική. Οι μόνοι όροι που συνεισφέρουν είναι

$$\begin{aligned} S_{Maxwell} &= e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{1}{2}\int \boldsymbol{F}\wedge *\boldsymbol{F} \\ &= e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Η μεταβολή αυτής της δράσης δίνει τις συνηθισμένες εξισώσεις Maxwell, οι οποίες, συναρτήσει διαφορικών μορφών, γράφονται ως [4]:

$$\boxed{\boldsymbol{dF} = 0} \tag{2.2.3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d} * \boldsymbol{F} = *\boldsymbol{j}} \tag{2.2.4}$$

όπου η ποσότητα

$$\boxed{j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi} \tag{2.2.5}$$

είναι το τετραρεύμα, δηλαδή το ρεύμα Noether της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής.

2.2.2 Η Εξίσωση Κίνησης της Στρέψης

Τώρα, ας μεταβάλουμε τη συνολική δράση S ως προς την στρέψη S_μ. Και πάλι, μόνο οι όροι που περιέχουν το πεδίο της στρέψης συνεισφέρουν και έτσι το κομμάτι της δράσης που έχει μηδενική μεταβολή ως προς το S_μ είναι:

$$\begin{aligned} S_{Torsion} &= \frac{3}{32\pi G}\int \boldsymbol{S}\wedge *\boldsymbol{S} - \frac{3}{4}\int \boldsymbol{S}\wedge *\boldsymbol{j^5} \\ &= \frac{3}{32\pi G}\int S_\mu S^\mu\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{3}{4}\int S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\,d^4x \\ &= \frac{3}{32\pi G}\int g^{\mu\nu}S_\mu S_\nu\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{3}{4}\int S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\,d^4x \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Με τη μεταβολή αυτής της δράσης ως προς το S_μ αποκτούμε την εξίσωση κίνησης για την στρέψη:

$$\boxed{S_\mu = 4\pi G\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi = 4\pi G j^5_\mu} \tag{2.2.7}$$

Συναρτήσει διαφορικών μορφών, αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\boxed{\boldsymbol{S} = 4\pi G\boldsymbol{j^5}} \tag{2.2.8}$$

Ας αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα.

Απόδειξη

Ξεκινάμε με την δράση:

$$S_{Torsion} = \frac{3}{32\pi G}\int g^{\mu\nu}S_\mu S_\nu\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{3}{4}\int S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\,d^4x$$

Η μεταβολή της $S_{Torsion}$ ως προς το πεδίο S_μ δίνεται από

$$\delta S_{Torsion} = S_{Torsion}[S_\mu + \delta S_\mu] - S_{Torsion}[S_\mu]$$

όπου οι τετράγωνες παρενθέσεις υποδεικνύουν την συναρτησιακή εξάρτηση της δράσης από την συνάρτηση της στρέψης S_μ. Πρέπει, επομένως, να υπολογίσουμε την ποσότητα $S_{Torsion}[S_\mu + \delta S_\mu]$:

$$\begin{aligned} S_{Torsion}[S_\mu + \delta S_\mu] &= \frac{3}{32\pi G}\int g^{\mu\nu}(S_\mu + \delta S_\mu)(S_\nu + \delta S_\nu)\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{3}{4}\int(S_\mu + \delta S_\mu)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\,d^4x \\ &= S_{Torsion}[S_\mu] + \frac{3}{32\pi G}\int g^{\mu\nu}(S_\mu\delta S_\nu + S_\nu\delta S_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x \\ &- \frac{3}{4}\int \delta S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\,d^4x + \mathcal{O}(\delta S^2) \end{aligned}$$

Αγνοούμε όρους που είναι δεύτερης τάξης στην μεταβολή της στρέψης και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta S_{Torsion} &= \frac{3}{32\pi G}\int g^{\mu\nu}(S_\mu \delta S_\nu + S_\nu \delta S_\mu)\sqrt{-g}\, d^4x - \frac{3}{4}\int \delta S_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\, d^4x \\ &= \frac{3}{16\pi G}\int S^\mu \delta S_\mu \sqrt{-g}\, d^4x - \frac{3}{4}\int \delta S_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\, d^4x \\ &= \int \left[\frac{3}{16\pi G}S_\mu - \frac{3}{4}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\right]\delta S_\mu \sqrt{-g}\, d^4x\end{aligned}$$

Η αρχή μεταβολών επιτάσσει ότι:

$$\delta S_{Torsion} = \int \frac{\delta S_{Torsion}}{\delta S_\mu}\delta S_\mu$$

Οι εξισώσεις κίνησης σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\frac{\delta S_{Torsion}}{\delta S_\mu} = 0$$

Στην περίπτωσή μας, έχουμε:

$$\frac{\delta S_{Torsion}}{\delta S_\mu} = \frac{3}{16\pi G}S_\mu - \frac{3}{4}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$$

Άρα, η εξίσωση κίνησης της στρέψης είναι:

$$\frac{3}{16\pi G}S_\mu - \frac{3}{4}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = 0$$

Αυτό μπορεί να απλοποιηθεί ώστε να λάβουμε το αποτέλεσμα:

$$S_\mu = 4\pi G\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi = 4\pi G j^5_\mu$$

Αυτή είναι και η επιθυμητή σχέση.

Αυτή η σχέση αναδεικνύει τη σχέση μεταξύ σπιν και βαρύτητας που είναι χαρακτηριστική των θεωριών Einstein-Cartan. Στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης έχουμε τη 1-μορφή $\boldsymbol{S}$, μια γεωμετρική ποσότητα σχετική με την στρέψη, και στην δεξιά πλευρά έχουμε το χειραλικό φερμιονικό ρεύμα, το οποίο περιέχει σπινόρες, δηλαδή τις αναπαραστάσεις σπιν $\frac{1}{2}$ της ομάδας Lorentz.

2.2.3 Η Τροποποιημένη Εξίσωση Dirac

Στη συνέχεια, η μεταβολή της δράσης ως προς το σπινοριακό πεδίο θα πρέπει να μας δώσει την εξίσωση κίνησης για αυτόν τον τύπο πεδίου. Φυσικά, αναμένουμε αυτή την εξίσωση να είναι μια γενικευμένη μορφή της εξίσωσης Dirac που λαμβάνει υπόψη την ύπαρξη καμπυλότητας και στρέψης στο χωροχρονικό υπόβαθρο. Θα μεταβάλουμε ως προς το $\bar{\psi}$, όπως συνήθως γίνεται, προκειμένου να αποκτήσουμε αυτή την εξίσωση. Φυσικά, μόνο οι όροι της δράσης που περιέχουν το $\bar{\psi}$ συμβάλλουν στη μεταβολή και επομένως η σχετική δράση είναι:

$$\begin{aligned}S_{Fermion} &= \frac{1}{2}\int\left[i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - iD_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g}\, d^4x + e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\, d^4x - \frac{3}{4}\int \boldsymbol{S}\wedge *\boldsymbol{j^5} \\ &= \frac{1}{2}\int\left[i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - iD_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g}\, d^4x + e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\, d^4x - \frac{3}{4}\int S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\, d^4x\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Μεταβάλλοντας ως προς το $\bar{\psi}$ λαμβάνουμε την τροποποιημένη εξίσωση Dirac:

$$\boxed{i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - \frac{3}{4}S_\mu\gamma^\mu\gamma^5\psi = 0} \tag{2.2.10}$$

Θα δείξουμε τώρα την απόδειξη αυτής της σχέσης.

Απόδειξη

Για άλλη μια φορά, η μεταβολή ως προς το $\bar{\psi}$ δίνεται από την σχέση:

$$\delta S_{Fermion} = S_{Fermion}[\bar{\psi} + \delta\bar{\psi}] - S[\bar{\psi}]$$

και

$$\delta S_{Fermion} = \int \frac{\delta S_{Fermion}}{\delta\bar{\psi}} \delta\bar{\psi}$$

Απαιτούμε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{\delta S_{Fermion}}{\delta\bar{\psi}} = 0$$

Ας κάνουμε τους υπολογισμούς. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
S_{Fermion}[\bar{\psi} + \delta\bar{\psi}] &= \frac{1}{2} \int \left[i(\bar{\psi} + \delta\bar{\psi})\gamma^\mu D_\mu \psi - i[D_\mu(\bar{\psi} + \delta\bar{\psi})]\gamma^\mu \psi \right] \sqrt{-g}\, d^4x \\
&+ e \int (\bar{\psi} + \delta\bar{\psi})\gamma^\mu \psi A_\mu \sqrt{-g}\, d^4x - \frac{3}{4} \int S_\mu (\bar{\psi} + \delta\bar{\psi})\gamma^\mu \gamma^5 \psi \sqrt{-g}\, d^4x \\
&= S_{Fermion}[\bar{\psi}] + \frac{1}{2} \int \left[i\delta\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - i(D_\mu \delta\bar{\psi})\gamma^\mu \psi \right] \sqrt{-g}\, d^4x \\
&+ e \int \delta\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \sqrt{-g}\, d^4x - \frac{3}{4} \int S_\mu \delta\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^5 \psi \sqrt{-g}\, d^4x
\end{aligned}$$

Για τον όρο που εμπεριέχει την συναλλοίωτη παράγωγο της μεταβολής $\delta\bar{\psi}$, μπορούμε να κάνουμε ολοκήρωση κατά παράγοντες:

$$-\frac{1}{2} \int i(D_\mu \delta\bar{\psi})\gamma^\mu \psi \sqrt{-g}\, d^4x = \cancelto{0}{\frac{1}{2} \int D_\mu (i\delta\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) \sqrt{-g}\, d^4x} + \frac{1}{2} \int iD_\mu(\gamma^\mu \psi)\delta\bar{\psi} \sqrt{-g}\, d^4x$$

όπου ο όρος της πλήρης παραγώγου, μέσω Θεωρήματος Stokes, προκύπτει να είναι ένας επιφανειακός όρος και άρα μηδενίζεται. Επομένως, καταλήγουμε τελικά στο ότι:

$$\begin{aligned}
\delta S_{Fermion} &= \frac{1}{2} \int \left[i\delta\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi + iD_\mu(\gamma^\mu \psi)\delta\bar{\psi} \right] \sqrt{-g}\, d^4x \\
&+ e \int \delta\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \sqrt{-g}\, d^4x - \frac{3}{4} \int S_\mu \delta\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^5 \psi \sqrt{-g}\, d^4x
\end{aligned}$$

Έχουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$D_\mu(\gamma^\mu \psi) = (D_\mu \gamma^\mu)\psi + \gamma^\mu D_\mu \psi$$

Επιπλέον, μπορούμε να δείξουμε, χρησιμοποιώντας την συνθήκη συμβατότητας της μετρικής, ότι [8]:

$$\boxed{D_\mu \gamma^\nu = 0} \tag{2.2.11}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, λαμβάνουμε ότι:

$$D_\mu(\gamma^\mu \psi) = \gamma^\mu D_\mu \psi$$

Συνεπώς, η μεταβολή της δράσης γίνεται:

$$\begin{aligned}
\delta S_{Fermion} &= \int \left[i\gamma^\mu D_\mu \psi + e\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{3}{4} S_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi \right] \delta\bar{\psi} \sqrt{-g}\, d^4x \\
&= \int \left[i\gamma^\mu D_\mu \psi - ie\gamma^\mu \psi i A_\mu - \frac{3}{4} S_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi \right] \delta\bar{\psi} \sqrt{-g}\, d^4x \\
&= \int \left[i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \frac{3}{4} S_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi \right] \delta\bar{\psi} \sqrt{-g}\, d^4x
\end{aligned}$$

Απαιτώντας τον μηδενισμό της μεταβολής της δράσης προκύπτει η τροποποιημένη εξίσωση Dirac:

$$i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \frac{3}{4} S_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi = 0$$

Αυτό είναι και το επιθυμητό αποτέλεσμα.

2.2.4 Οι Εξισώσεις Einstain και ο Τανυστής Ενέργειας-Ορμής

Τέλος, μεταβάλλοντας ως προς την μετρική λαμβάνουμε τις εξισώσεις Einstein:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}} \tag{2.2.12}$$

με την διαφορά με την συμβατική Γενική Σχετικότητα να έγκειται στο γεγονός ότι ο τανυστής ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$ τώρα εμπεριέχει επιπλέον όρους λόγω της ύπαρξης της στρέψης. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι [4]:

$$T_{\mu\nu} = T^A_{\mu\nu} + T^\psi_{\mu\nu} + T^S_{\mu\nu}$$

όπου το κομμάτι [9]:

$$\boxed{T^A_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}} \tag{2.2.13}$$

είναι ο γνώριμος τανυστής ενέργειας-ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, όπως αυτός ορίζεται στην Γενική Σχετικότητα απουσία στρέψης. Επιπλέον, η ποσότητα

$$\boxed{T^\psi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left[i\bar{\psi}\gamma_{(\mu}\mathcal{D}_{\nu)}\psi - i(\mathcal{D}_{(\mu}\bar{\psi})\gamma_{\nu)}\psi\right] + \frac{3}{4}S_{(\mu}\bar{\psi}\gamma_{\nu)}\gamma^5\psi} \tag{2.2.14}$$

είναι ο συμμετρικός τανυστής ενέργειας-ορμής για έναν φερμιονικό παράγοντα στο κέλυφος (on-shell), ο οποίος περιλαμβάνει μια συνεισφορά από την στρέψη. Θα αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα.

Απόδειξη

Η απόδειξη του μέρους του τανυστή ενέργειας-ορμής για τον φερμιονικό παράγοντα on-shell προέρχεται από το κομμάτι της δράσης που περιέχει τον σπίνορα ψ, δηλαδή από το ίδιο κομμάτι που μας έδωσε την τροποποιημένη εξίσωση Dirac:

$$S_{Fermion} = \frac{1}{2}\int\left[i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - iD_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g}\,d^4x + e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{3}{4}\int S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\,d^4x$$

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής για έναν φερμιονικό παράγοντα on-shell ορίζεται ως:

$$\boxed{T^\psi_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{Fermion}}{\delta g^{\mu\nu}}} \tag{2.2.15}$$

και έτσι για να υπολογίσουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής πρέπει να βρούμε τη μεταβολή του $S_{Fermion}$ ως προς το $\delta g^{\mu\nu}$. Πριν πάρουμε τη μεταβολή αυτής της δράσης, αναπτύσσουμε τις βαρυτικές συναλλοίωτες παραγώγους σύμφωνα με τις Εξισώσεις (2.1.1) και (2.1.2) και παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}S_{Fermion} = \frac{1}{2}\int&\left[i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \frac{1}{4}\bar{\psi}\left\{\gamma^\mu,\omega_\mu\right\}\psi\right]\sqrt{-g}\,d^4x\\ &+ e\int(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{3}{4}\int S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\,d^4x\end{aligned}$$

Όπου $\omega_\mu = \omega_{\mu ab}\sigma^{ab}$. Πρέπει τώρα να πάρουμε τη μεταβολή ως προς τη μετρική. Η παρουσία σπινόρων αναπόφευκτα οδηγεί σε μια εξάρτηση από τη μετρική μέσω των vielbeins. Επομένως, για να μεταβάλουμε με τη μετρική είναι αναγκαίο να έχουμε γνώση της μεταβολής των vielbeins ως προς τη μετρική. Αυτή η εξάρτηση είναι αρκετά περίπλοκη και δίνεται ως σειρά σε δυνάμεις της μεταβολής της μετρικής. Σε πρώτη τάξη προσέγγισης, αυτή η εξάρτηση είναι [10]:

$$\boxed{\delta(\hat{e}^\mu{}_a) = \frac{1}{2}g_{\nu\rho}\hat{e}^\rho{}_a\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.2.16}$$

$$\boxed{\delta(\hat{e}_\mu{}^a) = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\hat{e}_\rho{}^a\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.2.17}$$

Κάποιος μπορεί να μπει στον πειρασμό να χρησιμοποιήσει τη μετρική για να ανεβάσει/κατεβάσει έναν δείκτη της μεταβληθείσας μετρικής. Ωστόσο, αυτό θα ήταν ένα σοβαρό λάθος, καθώς σε μια τέτοια διαδικασία αγνοείται η μεταβολή της μετρικής που χρησιμοποιείται για να ανεβάσει/κατεβάσει έναν δείκτη. Ως εκ τούτου, τονίζουμε ότι $g_{\nu\rho}\delta g^{\mu\nu} \neq \delta g^\mu{}_\rho$. Αυτό το γεγονός θα πρέπει να είναι προφανές αν επισημάνουμε ότι $g^\mu{}_\rho = \delta^\mu_\rho \Rightarrow \delta g^\mu{}_\rho = 0$.

Έτσι, αν η μετρική μπορούσε να ανεβάσει/κατεβάσει δείκτες στη μεταβολή της μετρικής, θα είχαμε $\delta(\hat{e}^\mu{}_a) = 0$, που φυσικά είναι ασυνεπές. Κατανοούμε, λοιπόν, ότι μόνο ποσότητες που έχουν μηδενική μεταβολή (όπως το δ του Kronocker και το σύμβολο Levi-Civita ϵ) μπορούν να δράσουν στη μεταβολή της μετρικής. Μια άλλη ποσότητα που εξαρτάται από τη μετρική είναι το στοιχείο όγκου $\sqrt{-g}$, το οποίο μετασχηματίζεται ως [2]:

$$\boxed{\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.2.18}$$

Τέλος, οι πίνακες γ με καμπυλωμένους δείκτες έχουν επίσης εξάρτηση από την μετρική:

$$\gamma^\mu = \hat{e}^\mu{}_a\gamma^a$$

Όπου γ^a είναι οι πίνακες γ του επίπεδου χωροχρόνου που είναι σταθεροί και άρα:

$$\delta\gamma^\mu = \gamma^a\delta\hat{e}^\mu{}_a = \gamma^a\left(\frac{1}{2}g_{\nu\rho}\hat{e}^\rho{}_a\delta g^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\gamma_\nu\delta g^{\mu\nu}$$

Επομένως, η μεταβολή των πινάκων γ σε καμπύλο χωροχρόνο είναι:

$$\boxed{\delta\gamma^\mu = \frac{1}{2}\gamma_\nu\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.2.19}$$

Έχοντας τα παραπάνω κατά νου μπορούμε να μεταβάλουμε την φερμιονική δράση ως προς την μετρική:

$$\begin{aligned}
\delta S_{Fermion} = &\frac{1}{2}\int\left[\left(i\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\psi\right)\sqrt{-g} + \left(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)(\delta\sqrt{-g})\right]d^4x\\
&+\frac{1}{2}\int\frac{1}{4}\left[\bar{\psi}\delta(\{\gamma^\mu,\omega_\mu\})\psi\sqrt{-g} + \bar{\psi}(\{\gamma^\mu,\omega_\mu\})\psi(\delta\sqrt{-g})\right]d^4x\\
&+e\int\left[\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\psi A_\mu\sqrt{-g} + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu(\delta\sqrt{-g})\right]d^4x\\
&-\frac{3}{4}\int\left[S_\mu\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\gamma^5\psi\sqrt{-g} + S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi(\delta\sqrt{-g})\right]d^4x
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας την ποσότητα $(\delta\sqrt{-g})$ παρατηρούμε ότι οι όροι που είναι ανάλογοι με τη μεταβολή του στοιχείου όγκου μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της Lagrangian των φερμιονίων $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int\mathcal{L}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = &\frac{1}{2}\int\left[\left(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)(\delta\sqrt{-g})\right]d^4x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{4}\left[\bar{\psi}(\{\gamma^\mu,\omega_\mu\})\psi(\delta\sqrt{-g})\right]d^4x\\
&+e\int\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu(\delta\sqrt{-g})\right]d^4x - \frac{3}{4}\int\left[S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi(\delta\sqrt{-g})\right]d^4x
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - iD_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g} + e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)\sqrt{-g} - \frac{3}{4}S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\\
&= \frac{1}{2}\left[i\bar{\psi}\gamma^\mu(D_\mu - ieA_\mu)\psi - i(D_\mu + ieA_\mu)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g} - \frac{3}{4}S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}\\
&= \frac{1}{2}\left[i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - i(\mathcal{D}_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right]\sqrt{-g} - \frac{3}{4}S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\sqrt{-g}
\end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι το $\mathcal{L}$ μηδενίζεται on-shell, δηλαδή όταν ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης (η τροποποιημένη εξίσωση Dirac), και συνεπώς αυτός ο όρος είναι μηδενικός για φερμιόνια on-shell, το οποία είναι ακριβώς αυτά που μας ενδιαφέρουν. Έτσι, η μεταβληθείσα δράση για on-shell φερμιόνια είναι:

$$\begin{aligned}
\delta S_{Fermion} = &\frac{1}{2}\int\left[i\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\partial_\mu\psi - i\partial_\mu\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\psi + \frac{1}{4}\bar{\psi}\delta(\{\gamma^\mu,\omega_\mu\})\psi\right]\sqrt{-g}\,d^4x\\
&+e\int(\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\psi A_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x - \frac{3}{4}\int S_\mu\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\gamma^5\psi\sqrt{-g}\,d^4x
\end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός του $\delta(\{\gamma^\mu, \omega_\mu\})$. Έχουμε ότι

$$\{\gamma^\mu, \omega_\mu\} = \gamma^\mu \omega_{\mu ab}\sigma^{ab} + \omega_{\mu ab}\sigma^{ab}\gamma^\mu$$

Έτσι, η μεταβολή του είναι:

$$\begin{aligned}\delta(\{\gamma^\mu, \omega_\mu\}) &= \Big[(\delta\gamma^\mu)\omega_{\mu ab}\sigma^{ab} + \gamma^\mu(\delta\omega_{\mu ab})\sigma^{ab} + (\delta\omega_{\mu ab})\sigma^{ab}\gamma^\mu + \omega_{\mu ab}\sigma^{ab}(\delta\gamma^\mu)\Big] \\ &= \{\gamma^\mu, \delta\omega_\mu\} + \{\delta\gamma^\mu, \omega_\mu\}\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την έκφραση στην μεταβληθείσα δράση παίρνουμε ότι:

$$\delta S_{Fermion} = \int \left[\frac{1}{2}\Big(i\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\mathcal{D}_\mu\psi - i(\mathcal{D}_\mu\bar{\psi})(\delta\gamma^\mu)\psi\Big) - \frac{3}{4}S_\mu\bar{\psi}(\delta\gamma^\mu)\gamma^5\psi\right]\sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{8}\int \bar{\psi}\,\{\gamma^\mu, \delta\omega_\mu\}\,\psi\sqrt{-g}\, d^4x$$

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε την μεταβολή της σύνδεσης σπιν, $\delta\omega_\mu = (\delta\omega_{\mu ab})\sigma^{ab}$. Από την Εξίσωση (1.1.20) γνωρίζουμε ότι:

$$\omega_{\mu ab} = \eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\, \hat{e}_\nu{}^c\, \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\, \partial_\mu \hat{e}_\lambda{}^c$$

Για να πάρουμε τη μεταβολή της σύνδεσης σπιν, πρέπει να γνωρίζουμε τη μεταβολή των συμβόλων Christoffel ως προς τη μετρική. Αυτό δίνεται ως [2]:

$$\boxed{\delta\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\Big[\nabla_\mu\delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\lambda\delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\lambda}\Big]} \tag{2.2.20}$$

Η σημαντική πληροφορία σχετικά με τη μεταβολή των συμβόλων Christoffel είναι ότι αποτελεί τανυστή συμμετρικό στους δύο κάτω δείκτες. Έχοντας αυτό κατά νου, μπορούμε να προχωρήσουμε και να μεταβάλουμε τη σύνδεση σπιν:

$$\delta\omega_{\mu ab} = \eta_{ac}(\delta\hat{e}^\lambda{}_b)\hat{e}_\nu{}^c\, \Gamma^\nu_{\mu\lambda} + \eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b(\delta\hat{e}_\nu{}^c)\Gamma^\nu_{\mu\lambda} + \eta_{ac}\,\hat{e}^\lambda{}_b\hat{e}_\nu{}^c\,(\delta\Gamma^\nu_{\mu\lambda}) - \eta_{ac}(\delta\hat{e}^\lambda{}_b)\,(\partial_\mu\hat{e}_\lambda{}^c) - \eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\,\partial_\mu(\delta\hat{e}_\lambda{}^c)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι οι μερικές παράγωγοι αντιμετατίθενται με τις συναρτησιακές παραγώγους. Ας επικεντρωθούμε στον τελευταίο όρο. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}-\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\,\partial_\mu(\delta\hat{e}_\lambda{}^c) &= -\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\,\partial_\mu(\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\hat{e}_\rho{}^c\delta g_{\lambda\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\Big[(\partial_\mu g^{\sigma\rho})\hat{e}_\rho{}^c(\delta g_{\lambda\sigma}) + g^{\sigma\rho}(\partial_\mu\hat{e}_\rho{}^c)(\delta g_{\lambda\sigma}) + g^{\sigma\rho}\hat{e}_\rho{}^c\partial_\mu(\delta g_{\lambda\sigma})\Big]\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας και τις μεταβολές των vielbein στους υπόλοιπους όρους, λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{\mu ab} = &\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\rho{}_b\,\hat{e}_\nu{}^c\,\Gamma^\nu_{\mu\lambda}(g_{\sigma\rho}\delta g^{\lambda\sigma}) + \frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\,\hat{e}_\rho{}^c\Gamma^\nu_{\mu\lambda}(g^{\sigma\rho}\delta g_{\nu\sigma}) + \eta_{ac}\,\hat{e}^\lambda{}_b\hat{e}_\nu{}^c\,(\delta\Gamma^\nu_{\mu\lambda}) \\ &-\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\rho{}_b(\partial_\mu\hat{e}_\lambda{}^c)(g_{\sigma\rho}\delta g^{\lambda\sigma}) - \frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\,\hat{e}_\rho{}^c(\partial_\mu g^{\sigma\rho})(\delta g_{\lambda\sigma})\underbrace{-\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b(\partial_\mu\hat{e}_\rho{}^c)(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma})} \\ &-\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b\,\hat{e}_\rho{}^c g^{\sigma\rho}\partial_\mu(\delta g_{\lambda\sigma})\end{aligned}$$

Τώρα, επικεντρωνόμαστε στον υπογραμμισμένο όρο. Θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω πολύ χρήσιμη ιδιότητα:

$$\boxed{\delta g_{\rho\sigma} = -g_{\sigma\mu}g_{\rho\nu}\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.2.21}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί και είναι επακόλουθο του γεγονότος ότι ισχύει η σχέση $\delta(g^{\mu\nu}g_{\nu\rho}) = \delta(\delta^\mu_\rho) = 0$. Επομένως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b(\partial_\mu\hat{e}_\rho{}^c)(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma}) &= +\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b(\partial_\mu\hat{e}_\rho{}^c)(g^{\sigma\rho}g_{\sigma\xi}g_{\lambda\kappa}\delta g^{\kappa\xi}) = \frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b(\partial_\mu\hat{e}_\rho{}^c)(\delta^\rho_\xi g_{\lambda\kappa}\delta g^{\kappa\xi}) \\ &= \frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\lambda{}_b(\partial_\mu\hat{e}_\rho{}^c)(g_{\lambda\kappa}\delta g^{\kappa\rho}) = \frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^\rho{}_b(\partial_\mu\hat{e}_\lambda{}^c)(g_{\kappa\rho}\delta g^{\kappa\lambda})\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα μετονομάσαμε τους δείκτες $\lambda \leftrightarrow \rho$. Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, μπορούμε να ξαναγράψουμε την μεταβολή της σύνδεσης σπιν,

$$\begin{aligned}\delta\omega_{\mu ab} = &\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^{\rho}{}_{b}\,\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g_{\sigma\rho}\delta g^{\lambda\sigma}) + \frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g^{\sigma\rho}\delta g_{\nu\sigma}) + \eta_{ac}\,\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})\\ &- \cancel{\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^{\rho}{}_{b}(\partial_\mu\hat{e}_{\lambda}{}^{c})(g_{\sigma\rho}\delta g^{\lambda\sigma})} - \frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}(\partial_\mu g^{\sigma\rho})(\delta g_{\lambda\sigma}) + \cancel{\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^{\rho}{}_{b}(\partial_\mu\hat{e}_{\lambda}{}^{c})(g_{\kappa\rho}\delta g^{\kappa\lambda})}\\ &- \frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}g^{\sigma\rho}\partial_\mu(\delta g_{\lambda\sigma})\end{aligned}$$

και να παρατηρήσουμε ότι οι δύο όροι που εμπεριέχουν την μερική παράγωγο του vielbein ακυρώνονται. Μπορούμε τότε να αναδιατάξουμε τους εναπομείναντες όρους ως:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{\mu ab} = &-\eta_{ac}\left[\frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\underbrace{\Big((\partial_\mu g^{\sigma\rho})(\delta g_{\lambda\sigma}) + g^{\sigma\rho}\partial_\mu(\delta g_{\lambda\sigma})\Big)}_{=\partial_\mu(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma})} - \frac{1}{2}\hat{e}^{\rho}{}_{b}\,\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g_{\sigma\rho}\delta g^{\lambda\sigma}) - \frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g^{\sigma\rho}\delta g_{\nu\sigma})\right]\\ &+ \eta_{ac}\,\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})\end{aligned}$$

Η αντίστροφη της Εξίσωσης (2.2.21) είναι:

$$\boxed{\delta g^{\kappa\lambda} = -g^{\sigma\kappa}g^{\rho\lambda}\delta g_{\rho\sigma}} \tag{2.2.22}$$

Χρησιμοποιούμε αυτήν την σχέση για να κατεβάσουμε τους δείκτες της μεταβολής της μετρικής στον δεύτερο όρο:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\hat{e}^{\rho}{}_{b}\,\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g_{\sigma\rho}\delta g^{\lambda\sigma}) &= \frac{1}{2}\hat{e}^{\rho}{}_{b}\,\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g_{\sigma\rho}g^{\lambda\kappa}g^{\sigma\xi}\delta g_{\kappa\xi}) = \frac{1}{2}\hat{e}^{\rho}{}_{b}\,\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(\delta^{\xi}_{\rho}g^{\lambda\kappa}\delta g_{\kappa\xi})\\ &= \frac{1}{2}\hat{e}^{\rho}{}_{b}\,\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g^{\lambda\kappa}\delta g_{\kappa\rho})\end{aligned}$$

Επομένως, η μεταβολή της σύνδεσης σπιν είναι:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{\mu ab} = &-\eta_{ac}\left[\frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\partial_\mu(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma}) + \underbrace{\frac{1}{2}\hat{e}^{\rho}{}_{b}\,\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g^{\lambda\kappa}\delta g_{\kappa\rho})}_{\nu\leftrightarrow\rho\,\&\,\lambda\leftrightarrow\kappa} - \underbrace{\frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}(g^{\sigma\rho}\delta g_{\nu\sigma})}_{\nu\leftrightarrow\kappa}\right]\\ &+ \eta_{ac}\,\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})\end{aligned}$$

Τώρα, κάνουμε την αλλαγή δεικτών που είναι υποσημειωμένη παραπάνω. Λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{\mu ab} = &-\eta_{ac}\left[\frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\partial_\mu(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma}) + \underbrace{\frac{1}{2}\hat{e}^{\nu}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\,\Gamma^{\rho}_{\mu\kappa}(g^{\lambda\kappa}\delta g_{\lambda\nu})}_{\lambda\leftrightarrow\sigma} - \underbrace{\frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}(g^{\sigma\rho}\delta g_{\kappa\sigma})}_{\nu\leftrightarrow\sigma}\right]\\ &+ \eta_{ac}\,\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})\end{aligned}$$

Άλλη μία αλλαγή δεικτών (υποσημειώνεται παραπάνω) έχει ως αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{\mu ab} = &-\eta_{ac}\left[\frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\partial_\mu(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma}) + \underbrace{\frac{1}{2}\hat{e}^{\nu}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\,\Gamma^{\rho}_{\mu\kappa}(g^{\sigma\kappa}\delta g_{\sigma\nu})}_{\nu\leftrightarrow\lambda} - \frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}(g^{\sigma\rho}\delta g_{\kappa\sigma})\right]\\ &+ \eta_{ac}\,\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})\end{aligned}$$

Μια τελευταία αλλαγή δεικτών μας οδηγεί στην σχέση:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{\mu ab} = &-\eta_{ac}\underbrace{\left[\frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\partial_\mu(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma}) + \frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\,\Gamma^{\rho}_{\mu\kappa}(g^{\sigma\kappa}\delta g_{\sigma\lambda}) - \frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}(g^{\sigma\rho}\delta g_{\kappa\sigma})\right]}_{=\frac{1}{2}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}\nabla_\mu(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma})}\\ &+ \eta_{ac}\,\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα στις αγκύλες είναι η συναλλοίωτη παράγωγος του $(g^{\sigma\rho}\delta g_{\lambda\sigma})$. Χρησιμοποιώντας την συνθήκη συμβατότητας της μετρικής, η μετρική αντιμετατίθεται με τον συναλλοίωτη παράγωγο και συνεπώς η τελική έκφραση για τη μεταβολή της σύνδεσης σπιν είναι:

$$\boxed{\delta\omega_{\mu ab} = -\frac{1}{2}\eta_{ac}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{c}g^{\sigma\rho}\nabla_{\mu}(\delta g_{\lambda\sigma}) + \eta_{ac}\,\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\hat{e}_{\nu}{}^{c}\,(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})} \tag{2.2.23}$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να υπολογίσουμε τον όρο $\bar{\psi}\,\{\gamma^{\mu},\delta\omega_{\mu}\}\,\psi\sqrt{-g}$. Έχουμε ότι:

$$\bar{\psi}\,\{\gamma^{\mu},\delta\omega_{\mu}\}\,\psi\sqrt{-g} = \bar{\psi}\,\left\{\gamma^{c},\sigma^{ab}\right\}\,\psi\hat{e}^{\mu}{}_{c}\delta\omega_{\mu ab}\sqrt{-g}$$

Αφού χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (2.1.9) παίρνουμε:

$$\bar{\psi}\,\{\gamma^{\mu},\delta\omega_{\mu}\}\,\psi\sqrt{-g} = 2\epsilon^{abc}{}_{d}\bar{\psi}\gamma^{d}\gamma^{5}\psi\hat{e}^{\mu}{}_{c}\delta\omega_{\mu ab}\sqrt{-g}$$

Αντικαθιστούμε την έκφραση για την μεταβολή της σύνδεσης σπιν και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\,\{\gamma^{\mu},\delta\omega_{\mu}\}\,\psi\sqrt{-g} = &-\epsilon^{abc}{}_{d}\bar{\psi}\gamma^{d}\gamma^{5}\psi\hat{e}^{\mu}{}_{c}\eta_{am}\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\,\hat{e}_{\rho}{}^{m}g^{\sigma\rho}\nabla_{\mu}(\delta g_{\lambda\sigma})\sqrt{-g}\\ &+2\epsilon^{abc}{}_{d}\bar{\psi}\gamma^{d}\gamma^{5}\psi\hat{e}^{\mu}{}_{c}\eta_{am}\,\hat{e}^{\lambda}{}_{b}\hat{e}_{\nu}{}^{m}\,(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})\sqrt{-g}\end{aligned}$$

Είναι αρκετά εύκολο να κάνουμε τις συστολές με τα vielbein και τις μετρικές και να πάρουμε ότι:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\,\{\gamma^{\mu},\delta\omega_{\mu}\}\,\psi\sqrt{-g} = &-\underbrace{\epsilon^{\sigma\lambda\mu}{}_{d}}\,\bar{\psi}\gamma^{d}\gamma^{5}\psi\nabla_{\mu}\underbrace{(\delta g_{\lambda\sigma})}\sqrt{-g}\\ &+2\,\underbrace{\epsilon_{\nu}{}^{\lambda\mu}{}_{d}}\,\bar{\psi}\gamma^{d}\gamma^{5}\psi\,\underbrace{(\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})}\sqrt{-g}\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι τόσο η μεταβολή της μετρικής όσο και η μεταβολή των συμβόλων Christoffel είναι συμμετρικές υπό ανταλλαγή των δεικτών τους. Επομένως, η συστολή με το σύμβολο Levi-Civita οδηγεί στον μηδενισμό *και των δύο* όρων,

$$\bar{\psi}\,\{\gamma^{\mu},\delta\omega_{\mu}\}\,\psi\sqrt{-g} = 0 \tag{2.2.24}$$

Συνεπώς, ο όρος που περιλαμβάνει τη μεταβολή της σύνδεσης σπιν δεν συνεισφέρει καθόλου. Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε και να ξαναγράψουμε τη μεταβληθείσα δράση:

$$\delta S_{Fermion} = \int\left[\frac{1}{2}\Big(i\bar{\psi}(\delta\gamma^{\mu})\mathcal{D}_{\mu}\psi - i(\mathcal{D}_{\mu}\bar{\psi})(\delta\gamma^{\mu})\psi\Big) - \frac{3}{4}S_{\mu}\bar{\psi}(\delta\gamma^{\mu})\gamma^{5}\psi\right]\sqrt{-g}\,d^{4}x$$

όπου τώρα αντικαθιστούμε τη μεταβολή των πινάκων γ και παίρνουμε:

$$\delta S_{Fermion} = \int\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\Big(i\bar{\psi}\gamma_{\nu}\mathcal{D}_{\mu}\psi - i(\mathcal{D}_{\mu}\bar{\psi})\gamma_{\nu}\psi\Big) - \frac{3}{4}S_{\mu}\bar{\psi}\gamma_{\nu}\gamma^{5}\psi\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\,d^{4}x$$

Είναι τώρα χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αν $A_{\mu\nu}$ είναι ένας αυθαίρετος τανυστής και $B^{\mu\nu}$ είναι ένας *συμμετρικός* τανυστής, τότε:

$$A_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + A_{\nu\mu}B^{\nu\mu}\right) = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}\right)B^{\mu\nu} = A_{(\mu\nu)}B^{\mu\nu}$$

Επομένως, αφού η μεταβολή $\delta g^{\mu\nu}$ είναι συμμετρική, έχουμε ότι η τελική μορφή της μεταβολής της φερμιονικής δράσης είναι:

$$\delta S_{Fermion} = \int\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\Big(i\bar{\psi}\gamma_{(\nu}\mathcal{D}_{\mu)}\psi - i(\mathcal{D}_{(\mu}\bar{\psi})\gamma_{\nu)}\psi\Big) - \frac{3}{4}S_{(\mu}\bar{\psi}\gamma_{\nu)}\gamma^{5}\psi\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\,d^{4}x \tag{2.2.25}$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του τανυστή ενέργειας-ορμής, ο οποίος δίνεται στην Εξίσωση (2.2.15), και να βρούμε ότι:

$$T^{\psi}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left[i\bar{\psi}\gamma_{(\mu}\mathcal{D}_{\nu)}\psi - i(\mathcal{D}_{(\mu}\bar{\psi})\gamma_{\nu)}\psi\right] + \frac{3}{4}S_{(\mu}\bar{\psi}\gamma_{\nu)}\gamma^{5}\psi$$

Αυτό είναι και το αποτέλεσμα που θέλαμε να αποδείξουμε.

Τέλος, η ποσότητα

$$\boxed{T^S_{\mu\nu} = -\frac{3}{16\pi G}(S_\mu S_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}S_\lambda S^\lambda)} \tag{2.2.26}$$

είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής που αποδίδεται στην στρέψη.

Απόδειξη

Αυτό το κομμάτι του τανυστή ενέργειας-ορμής προέρχεται από τα κομμάτια της δράσης που εμπεριέχουν την στρέψη, δηλαδή από:

$$S_T = \frac{3}{32\pi G}\int g^{\mu\nu}S_\mu S_\nu \sqrt{-g}\, d^4x$$

Εφόσον εξετάζουμε την ποσότητα S_μ να είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή, μόνο τα $g^{\mu\nu}$ και $\sqrt{-g}$ έχουν μη-μηδενική μεταβολή. Επομένως:

$$\delta S_T = \frac{3}{32\pi G}\int \Big[(\delta g^{\mu\nu})S_\mu S_\nu\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}S_\mu S_\nu(\delta\sqrt{-g})\Big]d^4x$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα:

$$\boxed{\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.2.27}$$

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει εύκολα από τις Εξισώσεις (2.2.18) & (2.2.21). Αυτό μας δίνει:

$$\begin{aligned}\delta S_T &= \frac{3}{32\pi G}\int \Big[S_\mu S_\nu\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}S_\lambda S_\sigma\sqrt{-g}g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})\Big]d^4x \\ &= \frac{3}{32\pi G}\int \Big[S_\mu S_\nu - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}S_\lambda S_\sigma g_{\mu\nu}\Big]\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})d^4x\end{aligned}$$

Άρα, η μεταβολή της δράσης της στρέψης είναι:

$$\delta S_T = \frac{3}{16\pi G}\int \frac{1}{2}\Big[S_\mu S_\nu - \frac{1}{2}S_\lambda S^\lambda g_{\mu\nu}\Big]\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})d^4x \tag{2.2.28}$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του τανυστή ενέργειας-ορμής (2.2.15) βρίσκουμε ότι:

$$T^S_{\mu\nu} = -\frac{3}{16\pi G}(S_\mu S_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}S_\lambda S^\lambda)$$

Αυτή είναι και η επιθυμητή σχέση.

2.3 Ανωμαλίες και Αξιόνια

Στην προηγούμενη ενότητα, αποδείξαμε στις κλασικές εξισώσεις κίνησης για το σύστημά μας. Από τις Εξισώσεις (2.2.8) και (2.2.10) προκύπτει ότι το χειραλικό ρεύμα $j^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi$ διατηρείται. Αυτό θα συνεπαγόταν ότι η στρέψη επίσης διατηρείται, δηλαδή:

$$\boxed{\boldsymbol{d} * \boldsymbol{S} = 0} \tag{2.3.1}$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα, καθώς έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{S} = S_\lambda dx^\lambda$$

και άρα, από τον ορισμό του δυαδικού Hodge, έχουμε ότι:

$$*\boldsymbol{S} = \frac{1}{(4-1)!}S^\lambda \eta_{\lambda\mu\nu\rho}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$$

Έπειτα, από τον ορισμό της εξωτερικής παραγώγου, προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{d} * \boldsymbol{S} = \frac{1}{3!}\partial_\sigma S^\lambda \eta_{\lambda\mu\nu\rho}dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$$

Από απευθείας αντικατάσταση της Εξίσωσης (2.2.7) παίρνουμε ότι

$$\boldsymbol{d} * \boldsymbol{S} = \frac{1}{3!} 4\pi G \partial_\sigma (j^5)^\lambda \eta_{\lambda\mu\nu\rho} dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho$$

που μηδενίζεται, λόγω της διατήρησης του χειραλικού ρεύματος. Επομένως, αποδεικνύεται ότι η στρέψη διατηρείται, όπως ισχυριστήκαμε. Ωστόσο, είναι γνωστό από την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική ότι το χειραλικό ρεύμα δεν διατηρείται όταν περνάμε σε μια κβαντική θεωρία, λόγω μιας ανωμαλίας που εμφανίζεται σε επίπεδο ενός βρόχου. Πιο συγκεκριμένα, το αξονικό ρεύμα έχει μια μη μηδενική απόκλιση που δίνεται από [4]:

$$\boxed{\boldsymbol{d} * \boldsymbol{j^5} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{F} - \frac{1}{96\pi^2} \mathrm{tr}(\overline{\boldsymbol{R}} \wedge \overline{\boldsymbol{R}})} \tag{2.3.2}$$

ή, σε μορφή δεικτών:

$$\boxed{\nabla j^5 = \frac{e^2}{8\pi^2} F^{\mu\nu} (*F_{\mu\nu}) - \frac{1}{192\pi^2} \overline{R}^{\rho\sigma\mu\nu} (*\overline{R}_{\rho\sigma\mu\nu})} \tag{2.3.3}$$

όπου

$$\boxed{*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa}} \tag{2.3.4}$$

και

$$\boxed{*\overline{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} \overline{R}_{\rho\sigma}{}^{\lambda\kappa}} \tag{2.3.5}$$

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονιστεί ότι ασχολούμαστε με μια ημι-κλασική προσέγγιση στην μελέτη της επίδρασης της στρέψης στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική. Αυτό σημαίνει ότι, σε απουσία μιας κβαντικής θεωρίας της βαρύτητας, χρησιμοποιούμε μια κλασική θεωρία της βαρύτητας (δηλαδή θεωρούμε ένα κλασικό γεωμετρικό υπόβαθρο) και εξετάζουμε τις επιδράσεις της στα πεδία της ύλης. Έτσι, ενώ η μη διατήρηση του χειραλικού ρεύματος υποδηλώνει ότι το πεδίο της στρέψης επίσης δεν διατηρείται, στην πραγματικότητα δεν γνωρίζουμε τη κβαντική συμπεριφορά του $\boldsymbol{S}$. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν περισσότερες συνεισφορές λόγω κβαντικών επιδράσεων που δεν γνωρίζουμε. Μια πιθανή κατεύθυνση είναι να υποθέσουμε ότι υπάρχουν επιπλέον όροι δράσης ώστε η στρέψη να διατηρείται (δηλαδή να ισχύει η Εξίσωση (2.3.1)) ακόμη και αν το χειραλικό ρεύμα δεν διατηρείται. Αυτή η υπόθεση μπορεί στη συνέχεια να αποδειχθεί [4] ότι οδηγεί στην αντικατάσταση της στρέψης από ένα ψευδοβαθμωτό πεδίο, δηλαδή από ένα αξιόνιο ϕ, με το οποίο συζεύγνυται το φερμιονικό πεδίο. Για να το δείξουμε αυτό, θα ακολουθήσουμε τον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής και θα εφαρμόσουμε την διατήρηση της στρέψης (Εξίσωση (2.3.1)) ως περιορισμό [4]. Το πλήρες ολοκλήρωμα διαδρομής για την κβαντοποίηση του συστήματος είναι:

$$Z = \int \mathcal{D}\boldsymbol{g}\, \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\overline{\psi}\, \mathcal{D}\boldsymbol{S}\, e^{iS[\boldsymbol{g},\psi,\overline{\psi},\boldsymbol{S}]} \tag{2.3.6}$$

όπου $S[\boldsymbol{g},\psi,\overline{\psi},\boldsymbol{S}]$ είναι το συναρτησιακό της δράσης που εξαρτάται από τη μετρική, τον σπινόρα και την στρέψη. Ενδιαφερόμαστε μόνο για το μέρος της στρέψης του ολοκληρώματος διαδρομής:

$$Z_S = \int \mathcal{D}\boldsymbol{S} \exp\left[i \int \left(\frac{3}{32\pi G} \int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{S} - \frac{3}{4} \int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{j^5}\right)\right] \tag{2.3.7}$$

Κάνοντας χρήση του περιορισμού (Εξίσωση (2.3.1)), η στρέψη αντικαθίσταται από ένα αξιόνιο και παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\boxed{Z_S^C = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i \int \left(-\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2f_\phi^2} j_\mu^5 (j^5)^\mu - \frac{1}{f_\phi} j_\mu^5 (\partial^\mu \phi)\right) \sqrt{-g}\, d^4x\right]} \tag{2.3.8}$$

Απόδειξη

Για να επιβληθεί η Εξίσωση (2.3.1) ως περιορισμός, εισάγουμε ένα δ συναρτησιακό στο ολοκλήρωμα διαδρομής:

$$Z_S^C = \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\, \delta(\boldsymbol{d} * \boldsymbol{S}) \exp\left[i \int \left(\frac{3}{32\pi G} \int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{S} - \frac{3}{4} \int \boldsymbol{S} \wedge *\boldsymbol{j^5}\right)\right] \tag{2.3.9}$$

Αυτό το δ συναρτησιακό μπορεί να γραφεί στην μορφή ενός ολοκληρώματος διαδρομής[14]

$$\delta(\boldsymbol{d} * \boldsymbol{S}) = \int \mathcal{D}\Phi e^{i \int \Phi \boldsymbol{d} * \boldsymbol{S}} \tag{2.3.10}$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα διαδρομής της στρέψης γίνεται:

$$Z_S^C = \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\,\mathcal{D}\Phi \exp\left[i\int\left(\frac{3}{32\pi G}\int \boldsymbol{S}\wedge *\boldsymbol{S} - \frac{3}{4}\int \boldsymbol{S}\wedge *\boldsymbol{j^5} + \Phi \boldsymbol{d} * \boldsymbol{S}\right)\right] \tag{2.3.11}$$

Μπορούμε να γράψουμε αυτό το ολοκλήρωμα διαδρομής σε μορφή δεικτών ως:

$$Z_S^C = \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\,\mathcal{D}\Phi \exp\left[i\int\left(\frac{3}{32\pi G}S_\mu S^\mu - \frac{3}{4}S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi + \Phi\partial_\mu S^\mu\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right] \tag{2.3.12}$$

Τώρα, κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στον τελευταίο όρο και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
Z_S^C &= \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\,\mathcal{D}\Phi \exp\left[i\int\left(\frac{3}{32\pi G}S_\mu S^\mu - \frac{3}{4}S_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi - (\partial_\mu\Phi)S^\mu\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right] \\
&= \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\,\mathcal{D}\Phi \exp\left[i\int\left(\frac{3}{32\pi G}S_\mu S^\mu - \left[\frac{3}{4}j^5_\mu + (\partial_\mu\Phi)\right]S^\mu\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right] \\
&= \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\,\mathcal{D}\Phi \exp\left[i\int \frac{3}{32\pi G}\left(S_\mu S^\mu - \frac{32\pi G}{3}\left[\frac{3}{4}j^5_\mu + (\partial_\mu\Phi)\right]S^\mu\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right] \\
&= \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\,\mathcal{D}\Phi \exp\left[i\int \frac{3}{32\pi G}\left(S_\mu S^\mu - \underbrace{\left[8\pi G j^5_\mu + \frac{32\pi G}{3}(\partial_\mu\Phi)\right]}_{=2b_\mu(x)}S^\mu\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right]
\end{aligned}$$

Έτσι, καθίσταται δυνατό να κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνων:

$$\begin{aligned}
Z_S^C &= \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\,\mathcal{D}\Phi \exp\left[i\int \frac{3}{32\pi G}\left(S_\mu S^\mu - 2b_\mu S^\mu + b_\mu b^\mu - b_\mu b^\mu\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right] \\
&= \int \mathcal{D}\boldsymbol{S}\,\mathcal{D}\Phi \exp\left[i\int \frac{3}{32\pi G}\left((S_\mu - b_\mu)^2 - b_\mu b^\mu\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right]
\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε ένα Gaussian ολοκλήρωμα διαδρομής ως προς το πεδίο της στρέψης, το οποίο ισούται με μια σταθερά που απορροφάται από το μέτρο $\mathcal{D}\Phi$. Επομένως, λαμβάνουμε ότι:

$$Z_S^C = \int \mathcal{D}\Phi \exp\left[-i\int \frac{3}{32\pi G}b_\mu b^\mu\sqrt{-g}\,d^4x\right]$$

Το μόνο που απομένει είναι να υπολογίσουμε την ποσότητα $b_\mu b^\mu$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
b_\mu b^\mu &= \frac{1}{4}\left[8\pi G j^5_\mu + \frac{32\pi G}{3}(\partial_\mu\Phi)\right]\left[8\pi G (j^5)^\mu + \frac{32\pi G}{3}(\partial^\mu\Phi)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(8\pi G)^2 j^5_\mu (j^5)^\mu + \left(\frac{32\pi G}{3}\right)^2(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) + j^5_\mu\frac{16\cdot 32\pi^2G^2}{3}(\partial^\mu\Phi)\right]
\end{aligned}$$

Επαναορίζουμε το πεδίο Φ θέτοντας $\Phi = \sqrt{\frac{3}{16\pi G}}\phi$ και παίρνουμε:

$$Z_S^C = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int -\left(\frac{3\pi G}{2}j^5_\mu (j^5)^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \sqrt{3\pi G}j^5_\mu(\partial^\mu\phi)\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right]$$

Τέλος, θέτουμε την σταθερά $f_\phi = \frac{1}{\sqrt{3\pi G}}$ και λαμβάνουμε ότι το ολοκλήρωμα διαδρομής για την στρέψη έχει λάβει την μορφή:

$$Z_S^C = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int\left(-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2f_\phi^2}j^5_\mu(j^5)^\mu - \frac{1}{f_\phi}j^5_\mu(\partial^\mu\phi)\right)\sqrt{-g}\,d^4x\right] \tag{2.3.13}$$

Αυτό είναι και το επιθυμητό αποτέλεσμα.

[14] Αυτό είναι σε πλήρη αναλογία με την πιο γνώριμη ποσότητα που πολλές φορές αποκαλούμε συνάρτηση δ:

$$\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi}e^{ikx}$$

Αναγνωρίζουμε την παρουσία ενός ψευδοβαθμωτού πεδίου ϕ με έναν κινητικό όρο και μια σύζευξη με τα φερμιόνια. Αυτά είναι τα ακριβή χαρακτηριστικά που ορίζουν ένα αξιονικό πεδίο. Στην πραγματικότητα, βλέπουμε ότι η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε συνεστραμμένο χωροχρόνο αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε ένα χωροχρόνο χωρίς στρέψη, συζευγμένη με ένα αξιόνιο.

2.4 Σύνοψη

Μέχρι αυτό το σημείο, έχουμε κατασκευάσει τον φορμαλισμό της θεωρίας Einstein-Cartan για καμπύλο χωροχρόνο με στρέψη και έχουμε εξετάσει ένα μοντέλο της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής σε ένα τέτοιο υπόβαθρο το οποίο υλοποιείται με τον απλούστερο τρόπο, δηλαδή χωρίς την σύζευξη του ίδιου του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με την στρέψη. Κλασικά, η στρέψη διατηρείται και δεν έχει δυναμικό χαρακτήρα. Ωστόσο, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι σε κβαντικό επίπεδο, η στρέψη μπορεί να αποκτήσει έναν δυναμικό χαρακτήρα μετασχηματιζόμενη σε αξιόνιο λόγω της ανωμαλίας στο χειραλικό ρεύμα της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής. Αυτό είναι ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα για ένα απλοϊκό μοντέλο. Ωστόσο, μπορούν να εξεταστούν μοντέλα πέρα από το απλοϊκό. Για παράδειγμα, μπορούμε να εξετάσουμε ένα μη απλοϊκό μοντέλο όπου η στρέψη συζεύγνυται κλασικά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αυτό θα απαιτούσε, με τη σειρά του, μια τροποποίηση στις ιδιότητες του μετασχηματισμού βαθμίδος του διανυσματικού δυναμικού, αλλά και μια μάζα να δοθεί στην στρέψη (βλ. [4] για περαιτέρω βιβλιογραφία).

Γενικά, η θεωρία Einstein-Cartan έχει πολλά περισσότερα σημεία ενδιαφέροντος πέρα από αυτά που συζητούνται σε αυτό το κείμενο. Για παράδειγμα, αξίζει να εξεταστεί ακριβώς πώς η σπιν επηρεάζει τις εξισώσεις Einstein. Όπως αποδεικνύεται, δεδομένου ότι η στρέψη δεν είναι κλασικά δυναμική, δεν διαδίδεται και οι εξισώσεις Einstein είναι οι ίδιες όπως στη Γενική Σχετικότητα σε κενό. Στην φερμιονική ύλη, ωστόσο, το σπιν παίζει ρόλο στην αλλαγή της γεωμετρίας του χωροχρόνου, αλλά οι συνεισφορές είναι σημαντικές μόνο όταν οι πυκνότητες σπιν είναι ακραίες, όπως για παράδειγμα σε αστέρες νετρονίων και, φυσικά, σε μαύρες τρύπες. Αυτό, με τη σειρά του, εγείρει μεγάλο ενδιαφέρον σε κοσμολογικά μοντέλα που υποθέτουν την ύπαρξη στρέψης και βασίζονται σε θεωρίες Einstein-Cartan (όπως συζητείται, για παράδειγμα, εδώ [11]). Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτών των μοντέλων είναι η αποφυγή των μοναδικοτήτων (singularities), τόσο στην Μεγάλη Έκρηξη όσο και σε μαύρες τρύπες. Πιο συγκεκριμένα, η Μεγάλη Έκρηξη (Big Bang) αντικαθίσταται από μια λεγόμενη Μεγάλη Αναπήδηση (Big Bounce) [12], η οποία συμβαίνει μετά από μια περίοδο συστολής του σύμπαντος. Ομοίως, οι μαύρες τρύπες δεν καταρρέουν σε μια μοναδικότητα, αλλά φτάνουν σε μια αναπήδηση και σχηματίζεται ένα νέο, αναπτυσσόμενο σύμπαν από την άλλη πλευρά του ορίζοντα γεγονότων. Έτσι, αποκαθίσταται σε κλασικό επίπεδο η φυσική στο κέντρο μιας μαύρης τρύπας, που στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας αποτελεί μια άγνωστη παράμετρο.

Κεφάλαιο 3

Πληθωρισμός Λόγω Στρέψης σε Μοντέλο Χορδών

Στα προηγούμενα κεφάλαια, αναπτύξαμε μια θεωρία για την κλασική βαρύτητα με στρέψη και εξετάσαμε πώς η συνεστραμμένη βαρύτητα δημιουργεί ένα δυναμικό αξιόνιο όταν εξετάζονται οι αλληλεπιδράσεις με την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED). Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εξετάσουμε ένα μοντέλο εμπνευσμένο από τη θεωρία χορδών και θα δείξουμε πώς η στρέψη που προκύπτει σε αυτό το μοντέλο επηρεάζει τον πληθωρισμό του σύμπαντος.

3.1 Η Ενεργός Δράση Χορδών

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε το εμπνευσμένο από την θεωρία χορδών μοντέλο μας, το οποίο βασίζεται σε μια ενεργό δράση χορδών σε τέσσερεις διαστάσεις χωροχρόνου. Το κύριο σημείο ενδιαφέροντός μας είναι το πεδίο Kalb-Ramond. Υποστηρίζουμε ότι αυτό το πεδίο παίζει τον ρόλο της στρέψης και δημιουργεί ένα αξιόνιο, το οποίο συνδέεται τόσο με τις βαρυτικές όσο και με τις ανωμαλίες Yang-Mills, σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση που εξετάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Αυτό, με τη σειρά του, οδηγεί σε μια τροποποίηση του ορισμού μας για τον τανυστή ενέργειας-ορμής.

3.1.1 Πεδίο Kalb-Ramond και Στρέψη

Για λόγους πληρότητας, δίνουμε μια μικρή σύνοψη της προέλευσης της στρέψης στην θεωρία χορδών και παρουσιάζουμε το μοντέλο με το οποίο θα εργαστούμε. Μια βαθύτερη ανάλυση της θεωρίας χορδών είναι εκτός του σκοπού αυτού του κειμένου και η εξαγωγή των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα μπορεί να βρεθεί σε βασικά βιβλία όπως [13] και [14]. Είναι γνωστό ότι οποιοδήποτε μοντέλο θεωρίας χορδών προβλέπει την ύπαρξη τριών πεδίων βαρύτητας χωρίς μάζα, τα οποία σχηματίζουν την λεγόμενη *πολλαπλέτα βαρύτητας* (gravitational multiplet) [4]: το σπιν-0 (βαθμωτό) Dilaton Φ, το σπιν-1 αντισυμμετρικό πεδίο Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ και το σπιν-2 συμμετρικό πεδίο του γκραβιτονίου (graviton) $g_{\mu\nu}$. Εστιάζουμε την προσοχή μας στο πεδίο Kalb-Ramond, το οποίο έχει μια συμμετρία βαθμίδας $U(1)$ [15]:

$$B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\theta_{\nu]} \tag{3.1.1}$$

Ως εκ τούτου, η δράση (τουλάχιστον στις χαμηλές ενέργειες) εξαρτάται από τη ένταση πεδίου του πεδίου Kalb-Ramond, και όχι από το ίδιο το πεδίο. Η ένταση πεδίου ορίζεται ως:

$$\boxed{H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu}B_{\nu\rho]}} \tag{3.1.2}$$

Αυτή η ποσότητα είναι εντελώς αντισυμμετρική και αποτελεί μια 3-μορφή, δηλαδή:

$$\boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{dB}} \tag{3.1.3}$$

Είναι, επομένως, μια άμεση απόρροια ότι ισχύει η ακόλουθει ιδιότητα Bianchi:

$$\boxed{\boldsymbol{dH} = 0} \tag{3.1.4}$$

ή, σε συμβολισμό με δείκτες:

$$\boxed{\partial_{[\mu}H_{\nu\rho\sigma]} = 0} \tag{3.1.5}$$

Η απαίτηση της ακύρωσης των ανωμαλιών επιβάλλει ότι η ένταση πεδίου του πεδίου Kalb-Ramond πρέπει να τροποποιηθεί με την προσθήκη των λεγόμενων 3-μορφών Lorentz και βαθμίδος Chern-Simons:

$$\boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{dB} + \frac{a'}{8\kappa}(\Omega_{3L} - \Omega_{3Y})} \tag{3.1.6}$$

όπου a είναι η *κλίση Regge*, $\kappa = \sqrt{8\pi G}$ και Ω_{3L}, Ω_{3Y} είναι οι όροι Lorentz και βαθμίδος Chern-Simons αντίστοιχα. Η ταυτότητα Bianchi συνεπώς τροποποιείται και γίνεται:

$$\boxed{\boldsymbol{dH} = \frac{a'}{8\kappa} Tr\left(\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{R} - \boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{F}\right)} \tag{3.1.7}$$

όπου $\boldsymbol{R}$ είναι η καμπυλότητα και $\boldsymbol{F}$ είναι η ένταση του πεδίου Yang-Mills. Η ενεργός δράση για τη μποζονική χορδή σε τέσσερεις διαστάσεις χωροχρόνου μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα σε δυνάμεις της κλίσης Regge a'. Στην μηδενική τάξη, και αφού θεωρήσουμε ότι το Dilaton είναι ασήμαντο, δηλαδή ότι $\Phi \approx 0$, προκύπτει ότι η σχετική δράση έχει τη μορφή [15][15]

$$\boxed{S_B = \int \left(\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{6}\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu}\mathcal{H}^{\lambda\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.8}$$

όπου $\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} = \kappa^{-1} H_{\lambda\mu\nu}$. Μια άμεση σύγκριση με τη δράση (1.5.15) υποδεικνύει ότι η δύναμη πεδίου Kalb-Ramond παίζει τον ρόλο της στρέψης σε αυτή την ενεργό θεωρία πεδίου. Μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε τη συνεστραμμένη σύνδεση ως:

$$\boxed{\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\mathcal{H}^{\lambda}{}_{\mu\nu}} \tag{3.1.9}$$

και συνεπώς ο ενεργός τανυστής στρέψης είναι ανάλογος της (τροποποιημένης) δύναμης πεδίου Kalb-Ramond. Η ταυτότητα Bianchi (3.1.7) που εξετάσαμε παραπάνω μπορεί να γραφτεί σε μορφή δεικτών ως [4]:

$$\boxed{\eta_{abc}{}^{\mu}\nabla_{\mu}\mathcal{H}^{abc} = \frac{a'}{16\kappa}\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} - F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) \equiv \sqrt{-g}\,\mathcal{G}(\omega, \boldsymbol{A})} \tag{3.1.10}$$

όπου η συναλλοίωτη παράγωγος λαμβάνεται με τις σύμβολα Christoffel χωρίς στρέψη (εξ ου και η απουσία μιας γραμμής από πάνω), $\mathcal{G}(\omega, \boldsymbol{A})$ είναι η ανωμαλία και οι ποσότητες με την πεσπιρώμενη (tilde) από πάνω τους είναι οι δυαδικές ποσότητες, οριζόμενες ως:

$$\boxed{\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\lambda\kappa}R^{\lambda\kappa}{}_{\rho\sigma}} \tag{3.1.11}$$

$$\boxed{\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}} \tag{3.1.12}$$

3.1.2 Αξιόνιο Επαγόμενο από Στρέψη

Στην προηγούμενη ενότητα, παρουσιάσαμε ένα μοντέλο εμπνευσμένο από χορδές που δημιουργεί συνεστραμμένη βαρύτητα σε τέσσερεις διαστάσεις χωροχρόνου. Αυτά τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι αυτή η θεωρία είναι πλήρως ανάλογη με αυτή που μελετήθηκε στα δύο πρώτα κεφάλαια. Εδώ, η ένταση του πεδίου Kalb-Ramond $\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu}$ παίζει τον ρόλο της στρέψης και η ταυτότητα Bianchi (3.1.10) αντικαθιστά την Εξίσωση (2.3.1) ως τον περιορισμό που χρησιμοποιούμε. Συνεπώς, με μια εντελώς ανάλογη διαδικασία, μπορούμε να επιβάλλουμε τον περιορισμό που δίνεται από την εξίσωση Bianchi στο ολοκλήρωμα διαδρομών. Έχουμε τη συνάρτηση επιμερισμού:

$$Z = \int \mathcal{D}\boldsymbol{g}\,\mathcal{D}\boldsymbol{\mathcal{H}}\, e^{iS[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\mathcal{H}}]} = \int \mathcal{D}g_{\mu\nu}\mathcal{D}\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} e^{i\int\left(\frac{1}{2\kappa^2}R - \frac{1}{6}\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu}\mathcal{H}^{\lambda\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x} \tag{3.1.13}$$

Εστιάζουμε την προσοχή μας στο τμήμα του ολοκληρώματος διαδρομών που περιέχει τη ένταση του πεδίου Kalb-Ramond και επιβάλλουμε τον περιορισμό ως ένα δ συναρτησιακό:

$$Z_H = \int \mathcal{D}\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu}\delta(\eta^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_{\mu}\mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} - \mathcal{G}(\omega, \boldsymbol{A}))e^{-i\int \frac{1}{6}\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu}\mathcal{H}^{\lambda\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x} \tag{3.1.14}$$

[15] Σε αυτό το άρθρο χρησιμοποιείται η αντίθετη σύμβαση για το πρόσημο της μετρικής. Σε αυτό το κείμενο, τα αποτελέσματα έχουν προσαρμοστεί στη δική μας σύμβαση, που είναι η $- + + +$.

Ο περιορισμός μπορεί να γραφεί ως:

$$\delta(\eta^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} - \sqrt{-g}\mathcal{G}(\omega, \boldsymbol{A})) = \int \mathcal{D}b e^{i\int b(x)[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} - \mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})]\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.15}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την ιδιότητα $\nabla_\mu \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,\mathcal{H}_{\nu\rho\sigma})$ και λαμβάνουμε ότι:

$$\int \mathcal{D}b e^{i\int \left[b(x)\sqrt{-g}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} - b(x)\sqrt{-g}\mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})\right] d^4x} = \int \mathcal{D}b e^{i\int \left[b(x)\cancel{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{1}{\cancel{\sqrt{-g}}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,\mathcal{H}_{\nu\rho\sigma}) - b(x)\sqrt{-g}\mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})\right] d^4x}$$

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες και παίρνουμε ότι:

$$\delta(\eta^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu \mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} - \sqrt{-g}\mathcal{G}(\omega, \boldsymbol{A})) = \int \mathcal{D}b e^{-i\int \left[\partial_\mu b(x)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} + b(x)\mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})\right]\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.16}$$

Έτσι, η συνάρτηση επιμερισμού γίνεται:

$$Z_H = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} e^{-i\int\left[\frac{1}{6}\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu}\mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} + \partial_\mu b(x)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} + b(x)\mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})\right]\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.17}$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνων:

$$Z_H = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu} e^{-i\int\left[\frac{1}{6}\left(\mathcal{H}_{\lambda\mu\nu}\mathcal{H}^{\lambda\mu\nu} + 6\partial_\mu b(x)\eta^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{H}_{\nu\rho\sigma} \pm 9\partial_\mu b\,\partial^\mu b\,\eta^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}\right) + b\,\mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})\right]\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.18}$$

Τέλος, κάνουμε την ολοκλήρωση ως προς $\mathcal{H}$, απορροφώντας την σταθερά που προκύπτει στο μέτρο $\mathcal{D}b$:

$$Z_H = \int \mathcal{D}b e^{-i\int \left[-\frac{3}{2}\partial_\mu b\,\partial^\mu b\,\eta^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\mu\nu\rho\sigma} + b\,\mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})\right]\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.19}$$

Έχουμε ότι $\eta_{\mu\nu\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu\kappa\lambda} = -24$ και άρα:

$$Z_H = \int \mathcal{D}b e^{-i\int \left[36\partial_\mu b\,\partial^\mu b + b\,\mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})\right]\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.20}$$

Προκειμένου να κανονικοποιήσουμε τον κινητικό όρο του πεδίου b, το επαναορίζουμε έτσι ώστε $b \to \frac{1}{6\sqrt{2}}b$ και άρα:

$$Z_H = \int \mathcal{D}b e^{-i\int \left[\frac{1}{2}\partial_\mu b\,\partial^\mu b + \frac{1}{6\sqrt{2}}b\,\mathcal{G}(\omega,\boldsymbol{A})\right]\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.21}$$

Τελικά, η πλήρης δράση γίνεται:

$$\boxed{S_B = \int \left(\frac{1}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\partial_\mu b\,\partial^\mu b - \frac{a'\sqrt{2}}{192\kappa}b\left(R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} - F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right)\right)\sqrt{-g}\, d^4x} \tag{3.1.22}$$

3.1.3 Η Τοπολογική Πυκνότητα Hirzebruch-Pontryagin

Είναι αρκετά προφανές ότι ο όρος ενδιαφέροντος στη προκύπτουσα δράση είναι αυτός που συζεύγνει το αξιόνιο με την βαρυτική ανωμαλία και την ανωμαλία βαθμίδας. Συνεπώς, εστιάζουμε την προσοχή μας στον όρο των ανωμαλιών, ο οποίος ονομάζεται *τοπολογική πυκνότητα Hirzebruch-Pontryagin* [15]:

$$\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} - F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\nabla_\mu \mathcal{K}^\mu_{mixed}(\omega, A) = \partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{K}^\mu_{mixed}(\omega, A)\right) \tag{3.1.23}$$

Όπως μπορούμε να δούμε, αυτός ο όρος είναι ολική παράγωγος. Ο όρος $\mathcal{K}^\mu_{mixed}(\omega, A)$ ονομάζεται μικτή (βαρυτική και βαθμίδος) πυκνότητα ρεύματος ανωμαλίας και μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της σύνδεσης σπιν ω και των πεδίων βαθμίδας A. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη της περιόδου πληθωρισμού του σύμπαντος και, επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα πεδία βαθμίδος είναι μηδενικά. Έτσι, απομένει μόνο η καθαρή βαρυτική ανωμαλία και η αντίστοιχη πυκνότητα ρεύματος $\mathcal{K}^\mu(\omega)$ την οποία μπορούμε να εκφράσουμε σε όρους της σύνδεσης σπιν:

$$\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\right) = \sqrt{-g}\nabla_\mu \mathcal{K}^\mu(\omega) = \partial_\mu\left(\sqrt{-g}\mathcal{K}^\mu(\omega)\right) = 2\partial_\mu\left[\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\omega_\nu{}^{ab}\left(\partial_\lambda\omega_{\rho ab} + \frac{2}{3}\omega_{\lambda a}{}^c\omega_{\rho cb}\right)\right] \tag{3.1.24}$$

Αυτός ο όρος ονομάζεται επίσης βαρυτικός όρος Chern-Simons. Η ενεργός δράση χορδών πριν και κατά τη διάρκεια της εποχής του πληθωρισμού μπορεί επομένως να γραφεί ως:

$$S_B = \int \left(\frac{1}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu b\, \partial^\mu b + \frac{a'\sqrt{2}}{192\kappa} (\partial_\mu b)\, \mathcal{K}^\mu \right) \sqrt{-g} d^4x \tag{3.1.25}$$

όπου κάναμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στον τελευταίο όρο. Συνεπώς, η δράση μπορεί να διαχωριστεί σε τρία μέρη:

$$S_B = S_{grav} + S_b + S_{b-grav} \tag{3.1.26}$$

όπου $S_{grav} = -\int \frac{1}{2\kappa^2} R\sqrt{-g}\, d^4x$ είναι η τυπική δράση Einstein-Hilbert, $S_b = -\int \frac{1}{2}\partial_\mu b\, \partial^\mu b\sqrt{-g}\, d^4x$ είναι η κινητική ενέργεια του αξιονίου και ο τελευταίος όρος, S_{b-grav}, είναι ο όρος του αξιονίου & της βαρυτικής ανωμαλίας ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$S_{b-grav} = \int \frac{a'\sqrt{2}}{192\kappa} (\partial_\mu b)\, \mathcal{K}^\mu \sqrt{-g}\, d^4x \tag{3.1.27}$$

3.1.4 Οι Τανυστές Cotton και Ενέργειας-Ορμής

Έχοντας αυτή τη δράση, μπορούμε να εξετάσουμε ποιος είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής. Για τα αξιόνια, ο τανυστής ενέργειας-ορμής της ύλης προκύπτει χρησιμοποιώντας τον τυπικό ορισμό:

$$\boxed{T^b_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_b}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu b \partial_\nu b - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\rho b \partial^\rho b} \tag{3.1.28}$$

Χωρίς τον βαρυτικό όρο Chern-Simons, θα προέκυπταν οι συνηθισμένες εξισώσεις Einstein. Ωστόσο, εδώ, μπορούμε να μεταβάλλουμε αυτόν τον όρο ως προς τη μετρική και να λάβουμε ένα μη τετριμμένο αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, η μεταβολή του όρου Chern-Simons μας δίνει τον *τανυστή Cotton*, ο οποίος ορίζεται ως:

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\sqrt{-g}} \frac{\delta S_C}{\delta g^{\mu\nu}}} \tag{3.1.29}$$

όπου

$$S_C = \int b R_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \sqrt{-g}\, d^4x \tag{3.1.30}$$

έτσι ώστε $S_{b-grav} = \frac{a'\sqrt{2}}{192\kappa} S_C$. Αφού υπολογίσουμε την μεταβολή, παίρνουμε ότι ο τανυστής Cotton δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left[\partial_\sigma b \left(\eta^{\sigma\mu\rho\lambda} \nabla_\rho R^\nu{}_\lambda + \eta^{\sigma\nu\rho\lambda} \nabla_\rho R^\mu{}_\lambda \right) + \partial_\sigma \partial_\tau b \left(\tilde{R}^{\tau\mu\sigma\nu} + \tilde{R}^{\tau\nu\sigma\mu} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\nabla_\lambda \left(\partial_\sigma b \tilde{R}^{\lambda\mu\sigma\mu} \right) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \end{aligned} \tag{3.1.31}$$

Μια σημαντική ιδιότητα του τανυστή Cotton είναι ότι είναι άιχνος:

$$g_{\mu\nu} \mathcal{C}^{\mu\nu} = 0 \tag{3.1.32}$$

Οι εξισώσεις Einstein παίρνουν, λοιπόν, την μορφή:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{a'\kappa\sqrt{2}}{24} \mathcal{C}^{\mu\nu} + \kappa^2 T^{\mu\nu}_b \tag{3.1.33}$$

Στις τυπικές θεωρίες βαρύτητας, ο τανυστής ενέργειας-ορμής της ύλης διατηρείται, δηλαδή $\nabla_\mu T^{\mu\nu}_b = 0$. Ωστόσο, είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι ο τανυστής Cotton δεν διατηρείται. Στην πραγματικότητα, προκύπτει ότι:

$$\nabla_\mu \mathcal{C}^{\mu\nu} = -\frac{1}{8} \partial^\nu b R^{\rho\lambda\sigma\kappa} \tilde{R}_{\rho\lambda\sigma\kappa} \tag{3.1.34}$$

Γίνεται προφανές, λοιπόν, ότι η διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής της ύλης καταρρέει σε αυτό το σενάριο. Αυτό, πράγματι, βγάζει νόημα, καθώς το πεδίο της ύλης (τα αξιόνια) τώρα ανταλλάσσει ενέργεια με το βαρυτικό πεδίο, κάτι που δεν εμφανίζεται στην Γενική Σχετικότητα. Αντίθετα, υπάρχει ένας τροποποιημένος, πιο γενικός τανυστής ενέργειας-ορμής που διατηρείται και ορίζεται ως:

$$\kappa^2 \tilde{T}^{\mu\nu}_{total} = \frac{a'\kappa\sqrt{2}}{24} \mathcal{C}^{\mu\nu} + \kappa^2 T^{\mu\nu}_b \tag{3.1.35}$$

Ο νόμος διατήρησης τότε εκφράζεται ως:

$$\nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu}_{total} = 0 \tag{3.1.36}$$

3.2 Πληθωρισμός από Συμπυκνώματα Βαρυτικών Κυμάτων

Σε αυτή την ενότητα, θα δούμε πώς τα βαρυτικά κύματα στο πρώιμο σύμπαν μπορούν να αποτελέσουν κατάλληλη εξήγηση για μια περίοδο πληθωρισμού του σύμπαντος. Για αυτό το σκοπό, θα χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο "Μοντέλο Τρεχούμενου Κενού" (Running Vacuum Model) ως το κοσμολογικό μας μοντέλο. Έπειτα, θα εξετάσουμε διαταραχές βαρυτικών κυμάτων και θα τις κβαντώσουμε σε ένα κλασικό υπόβαθρο, προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή κενού του βαρυτικού όρου Chern-Simons. Ο τελικός μας στόχος θα είναι ο υπολογισμός της ενεργειακής πυκνότητας του κενού αυτού του μοντέλου, που θα δείξουμε ότι, στο πλαίσιο του Μοντέλου Τρεχούμενου Κενού, μπορεί να εξηγήσει τον πληθωρισμό του σύμπαντός μας χωρίς την ανάγκη για επιπλέον πεδία που συνήθως λαμβάνονται υπόψη, όπως το πεδίο πληθωρισμού (inflaton field).

3.2.1 Μοντέλο Τρεχούμενου Κενού

Είναι ευρέως γνωστό ότι η ύλη αποτελεί μόλις το 5% της ενέργειας στο σύμπαν. Ένα άλλο 26% αποδίδεται σε αυτό που είναι γνωστό ως "σκοτεινή ύλη", δηλαδή μια μορφή ύλης που δεν φαίνεται να αλληλεπιδρά με την κανονική ύλη, αλλά έχει βαρυτική επίδραση. Αυτή η σκοτεινή ύλη θεωρείται ευρέως ως "ψυχρή", δηλαδή κινείται αργά σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός. Το υπόλοιπο 68% της ενέργειας του σύμπαντος είναι η λεγόμενη "σκοτεινή ενέργεια", η οποία θεωρείται υπεύθυνη για την παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος. Αυτή η σκοτεινή ενέργεια προκύπτει από την κοσμολογική σταθερά Λ στις εξισώσεις του Einstein. Το μαθηματικό μοντέλο που θεωρείται το "πρότυπο μοντέλο" της κοσμολογίας και χρησιμοποιείται σήμερα στα πειράματα, λαμβάνει υπόψη όλα τα παραπάνω και ονομάζεται το μοντέλο ΛCDM (Λ-Cold Dark Matter). Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια, το μοντέλο ΛCDM έχει αποδειχθεί ότι δεν είναι τέλειο. Η μεγαλύτερη απειλή για το ΛCDM είναι η διαφορά που παρατηρείται στις μετρήσεις της σταθεράς του Hubble, γνωστή ως "ένταση Hubble" (Hubble tension). Ενώ δεν έχει αποκλειστεί η πιθανότητα η ένταση Hubble να είναι στατιστικής φύσεως, είναι διδακτικό, αν όχι αναγκαίο, να εξεταστούν άλλα κοσμολογικά μοντέλα που μπορούν να εξηγήσουν τα τρέχοντα πειραματικά δεδομένα. Ένα από αυτά τα μοντέλα είναι το "Μοντέλο Τρέχοντος Κενού" (στο εξής ΜΤΚ). Στο μοντέλο ΛCDM, η πυκνότητα ενέργειας του κενού δίνεται ως:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{3.2.1}$$

και είναι σταθερή. Στο ΜΤΚ, γίνεται η υπόθεση ότι η πυκνότητα ενέργειας του κενού "τρέχει" ομαλά με τον κοσμικό χρόνο. Έτσι, έχουμε μια "τρεχούμενη" πυκνότητα ενέργειας κενού $\rho_{RVM}(t)$. Το ΜΤΚ προέρχεται από επιχειρήματα και υπολογισμούς στο πλαίσιο της Ομάδας Κανονικοποίησης στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε καμπυλωμένο χωροχρόνο. Ωστόσο, για τους σκοπούς μας αρκεί να το θεωρήσουμε ως ένα καθαρά φαινομενολογικό μοντέλο. Σε αυτό το μοντέλο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τρεχούμενη πυκνότητα ενέργειας κενού μπορεί να εκφραστεί ως ένα διαταρακτικό ανάπτυγμα άρτιων δυνάμεων της παραμέτρου Hubble [16]:

$$\boxed{\rho_{RVM}(H) = \frac{\Lambda(H^2)}{8\pi G} = \frac{3}{8\pi G}\left(c_0 + \nu H^2 + \beta\frac{H^4}{H_I^2} + \cdots\right)} \tag{3.2.2}$$

Όπου c_0, ν, β[16] είναι πραγματικές σταθερές και $H_I \sim 10^{-5} M_{Pl}$ είναι η κλίμακα πληθωρισμού, με την M_{Pl} να είναι η μάζα του Planck.

3.2.2 Συμπύκνωμα Βαρυτικών Κυμάτων

Ας θεωρήσουμε τανυστικές διαταραχές της μετρικής FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \tag{3.2.3}$$

Είναι ευρέως γνωστό ότι αυτές οι τανυστικές διαταραχές είναι βαρυτικά κύματα, τα οποία εμφανίζονται σε δύο διαφορετικές πολώσεις. Στη λεγόμενη βάση γραμμικής πόλωσης, η τανυστική διαταραχή μπορεί να εκφραστεί ως [17]:

$$h_{ij} = h_+ \epsilon_{ij}^{(+)} + h_\times \epsilon_{ij}^{(\times)} \tag{3.2.4}$$

Οι τανυστές πόλωσης ορίζονται ως:

$$\epsilon_{ij}^{(+)} = [e_1(\vec{k})]_i [e_1(\vec{k})]_j - [e_2(\vec{k})]_i [e_2(\vec{k})]_j \tag{3.2.5}$$

$$\epsilon_{ij}^{(\times)} = [e_1(\vec{k})]_i [e_2(\vec{k})]_j - [e_1(\vec{k})]_j [e_2(\vec{k})]_i \tag{3.2.6}$$

[16] Στην αρχική πηγή, χρησιμοποιείται το α αντί για το β για τον συντελεστή του όρου H^4. Η αλλαγή σε αυτό το κείμενο έγινε για να αποφευχθεί σύγχυση, καθώς αυτή η παράμετρος εμφανίζεται παράλληλα με τον παράγοντα κλίμακας a.

όπου

$$e_3(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \tag{3.2.7}$$

και τα τρία μοναδιαία διανύσματα e_1, e_2, e_3 είναι κάθετα μεταξύ τους. Έχουμε την ελευθερία να επιλέξουμε τον άξονα z ως την κατεύθυνση διάδοσης του βαρυτικού κύματος και συνεπώς τα μοναδιαία διανύσματα παίρνουν τις τιμές:

$$e_1 = (1,0,0) \tag{3.2.8}$$

$$e_2 = (0,1,0) \tag{3.2.9}$$

$$e_3 = (0,0,1) \tag{3.2.10}$$

Ως εκ τούτου, ο τανυστής διαταραχών μπορεί να γραφεί ως ένας άιχνος, συμμετρικός τανυστής:

$$h = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.11}$$

Υποθέτοντας μια δράση της μορφής:

$$S = \int \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}(\partial_\mu b)(\partial^\mu b) - AbR_{CS} \right) \sqrt{-g}\, d^4x \tag{3.2.12}$$

όπου $R_{CS} = R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma}$ είναι ο βαρυτικός όρος Chern-Simons, η γραμμικοποιημένες εξισώσεις Einstein παιρνουν την μορφή:

$$\Box h_+ = +\frac{4A\kappa^2}{a^2}\left(2\dot{a}\dot{b} + a\ddot{b}\right)\partial_t\partial_z h_\times + \frac{4A\kappa^2\dot{b}}{a}\partial_t^2\partial_z h_\times - \frac{4A\kappa^2\dot{b}}{a^3}\partial_z^3 h_\times \tag{3.2.13}$$

$$\Box h_\times = -\frac{4A\kappa^2}{a^2}\left(2\dot{a}\dot{b} + a\ddot{b}\right)\partial_t\partial_z h_+ - \frac{4A\kappa^2\dot{b}}{a}\partial_t^2\partial_z h_+ + \frac{4A\kappa^2\dot{b}}{a^3}\partial_z^3 h_+ \tag{3.2.14}$$

όπου ο τελεστής κουτί ορίζεται ως:

$$\Box = -\partial_t^2 - 3\frac{\dot{a}}{a}\partial_t + \frac{1}{a^2}\partial_z^2 \tag{3.2.15}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αυτές οι δύο πολώσεις συζεύγνυνται μεταξύ τους λόγω της παρουσίας του αξιονικού πεδίου Kalb-Ramond που συζεύγνυται με τον βαρυτικό όρο Chern-Simons. Μπορούμε να αποκτήσουμε ένα ζεύγος αποσυζευγμένων πολώσεων μεταβαίνοντας στη χειραλική βάση:

$$h_{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(h_+ \pm i h_\times\right) \tag{3.2.16}$$

Σε αυτήν την βάση, οι κυματικές εξισώσεις (3.2.13) & (3.2.14) γίνονται:

$$\Box h_L = -\frac{4iA\kappa^2}{a^2}\left(2\dot{a}\dot{b} + a\ddot{b}\right)\partial_t\partial_z h_L - \frac{4iA\kappa^2\dot{b}}{a}\partial_t^2\partial_z h_L + \frac{4iA\kappa^2\dot{b}}{a^3}\partial_z^3 h_L \tag{3.2.17}$$

$$\Box h_R = +\frac{4iA\kappa^2}{a^2}\left(2\dot{a}\dot{b} - a\ddot{b}\right)\partial_t\partial_z h_R + \frac{4iA\kappa^2\dot{b}}{a}\partial_t^2\partial_z h_R - \frac{4iA\kappa^2\dot{b}}{a^3}\partial_z^3 h_R \tag{3.2.18}$$

Επιπλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε τον βαρυτικό όρο Chern-Simons ως προς την διαταραχή h μέχρι και την δεύτερη τάξη [17]:

$$R_{CS} = \frac{4i}{a^3}\left[\left(\partial_z^2 h_L \partial_z\partial_t h_R + a^2\partial_t^2 h_L \partial_z\partial_t h_R + a\dot{a}\partial_t h_L \partial_z\partial_t h_R\right) - (L \leftrightarrow R)\right] + \mathcal{O}(h^4) \tag{3.2.19}$$

Όπως βλέπουμε, αυτός ο όρος θα μηδενιζόταν αν οι δύο πολώσεις ικανοποιούσαν την ίδια εξίσωση. Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει για αυτά τα βαρυτικά κύματα, καθώς οι κυματικές εξισώσεις των δύο πολώσεων διαφέρουν στο πρόσημο, όπως φαίνεται παραπάνω, λόγω των συνεισφορών του τανυστή Cotton. Επομένως, ο όρος Chern-Simons επιβιώνει. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται «κοσμολογική διπλοθλαστικότητα» (cosmological birefringence) [17]. Τώρα μπορούμε να θεωρήσουμε τις βαρυτικές διαταραχές ως κβαντικούς τελεστές, δηλαδή μπορούμε να προχωρήσουμε σε ένα σχήμα δεύτερης κβάντωσης για την τανυστική διαταραχή. Είδαμε ότι αυτή η διαταραχή μπορεί να αναλυθεί σε δύο βαθμωτά πεδία πόλωσης, και ως εκ τούτου χρειάζεται να κβαντώσουμε μόνο αυτά.

Αυτή η διαδικασία γίνεται λεπτομερώς στην πηγή [17][17]. Μετά την κβάντωση, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την μέση τιμή κενού του βαρυτικού όρου Chern-Simons κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Στην πληθωριστική εποχή, έχουμε ότι ο παράγοντας κλίμακας είναι κατά προσέγγιση

$$a(t) \sim exp(H_I t) \tag{3.2.20}$$

όπου H_I είναι η παράμετρος Hubble κατά την διάρκεια του πληθωρισμού, η οποία είναι προσεγγιστικά σταθερή. Κάνοντας τους υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι [17]:

$$\langle R_{CS} \rangle_I = -\mathcal{N}_I \frac{A\kappa^4\mu^4}{\pi^2} \dot{\bar{b}}_I H_I^3 \tag{3.2.21}$$

όπου $\mathcal{N}_I$ είναι η πυκνότητα των πηγών βαρυτικών κυμάτων κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού και το μ είναι το υπεριώδες ενεργειακό άνω όριο της ενεργού θεωρίας πεδίου πάνω στην οποία δουλεύουμε, ενώ το $\dot{b}_I$ συμβολίζει το πεδίο του αξιονίου κατά την πληθωριστική εποχή, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί κατά προσέγγιση να είναι [18]:

$$\dot{\bar{b}}_I \sim \sqrt{2\epsilon} M_{Pl} H_I \tag{3.2.22}$$

όπου ϵ είναι μια φαινομενολογική παράμετρος την οποία καθορίζουμε ως:

$$\epsilon \sim 10^{-2} \tag{3.2.23}$$

Αυτό σημαίνει ότι, συνολικά, το συμπύκνωμα $\langle R_{CS} \rangle_I$ είναι ανάλογο του H_I^4. Ολοκληρώνοντας αυτό, λαμβάνουμε μια έκφραση για το πεδίο του αξιονίου:

$$\bar{b}_I(t) = \bar{b}_I(0) + \sqrt{2\epsilon} H t M_{Pl} \tag{3.2.24}$$

Η αρχική συνθήκη $\bar{b}(0)$ δεν μπορεί να προβλεφθεί στο πλαίσιο της ενεργούς θεωρίας πεδίου μας, αλλά απαιτεί το πλήρες μοντέλο θεωρίας χορδών. Παρόλα αυτά, είναι δυνατόν [15] να βρεθεί ένα εύρος φαινομενολογικά αποδεκτών τιμών. Μια κατάλληλη επιλογή είναι [18]:

$$\bar{b}(0) \sim 10 M_{Pl} \tag{3.2.25}$$

3.2.3 Ενεργειακή Πυκνότητα Κενού

Θέλουμε, τώρα, να υπολογίσουμε τις διάφορες συνεισφορές στην πυκνότητα ενέργειας του κενού. Πρώτα απ' όλα, υπάρχουν δύο συνεισφορές που προέρχονται από το πεδίο αξιονίου και την βαρυτική ανωμαλία. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί από την Εξίσωση (3.1.33), όπου ο τροποποιημένος τανυστής ενέργειας-ορμής αποτελείται από δύο μέρη: ένα για την αξιονική ύλη και τον τανυστή Cotton για την βαρυτική ανωμαλία. Κάθε ένα από αυτά τα μέρη συνεισφέρει στην πυκνότητα ενέργειας του κενού. Στο σχήμα κβάντωσης των βαρυτικών κυμάτων μας, μια πρόχειρη προσέγγιση για τον υπολογισμό της πυκνότητας ενέργειας του κενού είναι να υπολογίσουμε τον τροποποιημένο τανυστή ενέργειας-ορμής πάνω στις κβαντισμένες διαταραχές των βαρυτικών κυμάτων. Αυτό μπορεί να γίνει για τον τανυστή Cotton, ο οποίος δίνεται συναρτήσει του τανυστή Riemann και των παραγώγων του. Αυτό γίνεται στην πηγή [18] και η προκύπτουσα πυκνότητα ενέργειας του κενού που σχετίζεται με τον τανυστή Cotton είναι:

$$\rho_{gCS} = -1.484\epsilon M_{Pl}^2 H_I^2 \tag{3.2.26}$$

Στη συνέχεια, ο νόμος διατήρησης (3.1.36) συνδέει τον τανυστή Cotton με τον τανυστή ενέργειας-ορμής του αξιονίου, οδηγώντας μας στη σχέση:

$$\rho_b \simeq -\frac{2}{3}\rho_{gCS} \tag{3.2.27}$$

όπου ρ_b είναι η πυκνότητα ενέργειας του κενού που σχετίζεται με την αξιόνια ύλη. Έτσι, βρίσκουμε ότι [18]:

$$\rho_b \simeq \epsilon M_{Pl}^2 H_I^2 \tag{3.2.28}$$

και, συνολικά:

$$\rho_b + \rho_{gCS} = \frac{1}{3}\rho_{gCS} \simeq -0.496\epsilon M_{Pl}^2 H_I^2 \tag{3.2.29}$$

Δηλαδή, βρίσκουμε μια αρνητική ποσότητα. Ωστόσο, αυτή δεν είναι η πλήρης εικόνα, καθώς δεν είχαμε προχωρήσει στη διαδικασία κβάντωσης μας όταν εξαγάγαμε την Εξίσωση (3.1.33). Η σωστή προσέγγιση είναι να

[17] Οι συγγραφείς εδώ βρίσκουν έναν παράγοντα δύο διαφορά στο αποτέλεσμά τους σε σχέση με προηγούμενες προσπάθειες, καθώς συμπεριλαμβάνουν περισσότερους όρους. Αυτή η διόρθωση θα εφαρμοστεί σε αυτό το κείμενο όταν γίνεται αναφορά στην τιμή του $\langle R_{CS} \rangle_I$ από παλαιότερες πηγές.

αναπτύξουμε τον βαρυτικό όρο Chern-Simons γύρω από την μέση τιμή κενού του και να γράψουμε την δράση ως [15]:

$$S = \int \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}(\partial_\mu b)(\partial^\mu b) - \frac{a'\sqrt{2}}{192\kappa}\bar{b}(x)\langle R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\rangle_I - \frac{a'\sqrt{2}}{192\kappa} : b(x) R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma} : \right) \sqrt{-g}\, d^4x \tag{3.2.30}$$

Μπορούμε να δούμε ότι αυτό προσθέτει έναν επιπλέον όρο στη δράση, έναν γραμμικό όρο δυναμικού για το αξιόνιο που περιέχει το συμπύκνωμα των βαρυτικών κυμάτων $\langle R_{CS}\rangle_I$ [19]:

$$S_\Lambda = -\int \left(\frac{a'\sqrt{2}}{192\kappa}\bar{b}(x)\langle R_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\rangle_I \right)\sqrt{-g}\, d^4x = -\int \left(8.6\times 10^10\sqrt{\epsilon}\frac{|\bar{b}(0)|}{M_{Pl}}H_I^4 \right)\sqrt{-g}\, d^4x \tag{3.2.31}$$

Επομένως, παράγεται ένας ακόμη όρος πυκνότητα ενέργειας του κενού που είχε αρχικά παραληφθεί:

$$\rho_\Lambda = 8.6\times 10^{10}\sqrt{\epsilon}\frac{|\bar{b}(0)|}{M_{Pl}}H^4 \tag{3.2.32}$$

Η πλήρης έκφραση της πυκνότητας ενέργειας του κενού είναι το άθροισμα όλων των παραπάνω:

$$\boxed{\rho_{vac}(H) = \rho_b + \rho_{gCS} + \rho_\Lambda = -\frac{1}{2}\epsilon M_{Pl}^2 H^2 + 8.6\times 10^{10}\sqrt{\epsilon}\frac{|\bar{b}(0)|}{M_{Pl}}H^4} \tag{3.2.33}$$

3.2.4 Πληθωρισμός

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η τελική έκφραση της πυκνότητας ενέργειας του κενού είναι συμβατή με το Μοντέλο Τρεχούμενου Κενού με σταθερές $c_0 = 0$, $v < 0$ και $\beta > 0$. Σε αυτή την υποενότητα, θα δείξουμε πώς μια τέτοια έκφραση για την πυκνότητα ενέργειας του κενού οδηγεί σε πληθωρισμό. Ας υποθέσουμε μια πυκνότητα ενέργειας του κενού της μορφής (3.2.2) με $c_0 = 0$, $v < 0$ και $\beta > 0$. Η διατήρηση του συνολικού τανυστή ενέργειας-ορμής της ύλης στο κενό και της ακτινοβολίας [19] οδηγεί στη διαφορική εξίσωση:

$$\dot{H} + \frac{3}{2}(1+\omega_m)H^2\left(1 - v - \beta\frac{H^2}{H_I^2}\right) = 0 \tag{3.2.34}$$

όπου $\omega_m = \frac{p_m}{\rho_m}$ και η υποσημείωση "m" αναφέρεται τόσο στην ύλη όσο και στην ακτινοβολία. Λύνοντας αυτή την εξίσωση, αποκτούμε μια λύση για την παράμετρο Hubble ως συνάρτηση του παράγοντα κλίμακας FLRW $a(t)$:

$$H(a) = \left(\frac{1-v}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{H_I}{\sqrt{Da^{3(1-v)(1+\omega_m)} + 1}} \tag{3.2.35}$$

όπου $D > 0$ είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε αυτήν την τελευταία σχέση λύνοντας την διαφορική εξίσωση (3.2.34). Έχουμε ότι:

$$\dot{H} + \frac{3}{2}(1+\omega_m)H^2\left(1 - v - \beta\frac{H^2}{H_I^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} + \frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)H^2\left(1 - \frac{\beta}{1-v}\frac{H^2}{H_I^2}\right) = 0$$

Μπορούμε στην συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt}\frac{d}{da} = \dot{a}\frac{d}{da}$ και να πάρουμε ότι:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)H^2\left(1 - \frac{\beta}{1-v}\frac{H^2}{H_I^2}\right) = 0 \Rightarrow \dot{a}\frac{dH}{da} + \frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)H^2\left(1 - \frac{\beta}{1-v}\frac{H^2}{H_I^2}\right) = 0$$

Γνωρίζουμε ότι η παράμετρος Hubble H ορίζεται ως $H = \frac{\dot{a}}{a}$, και άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ποσότητα $\dot{a}$ στην παραπάνω εξίσωση, αλλά και να διαιρέσουμε με H^2:

$$\dot{a}\frac{dH}{da} + \frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)H^2\left(1 - \frac{\beta}{1-v}\frac{H^2}{H_I^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a}{H}\frac{dH}{da} + \frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)\left(1 - \frac{\beta}{1-v}\frac{H^2}{H_I^2}\right) = 0$$

Προχωρώντας, μπορούμε να ορίσουμε μια κανονικοποιημένη σταθερά Hubble, $\tilde{H} = \frac{H}{H_I}$, παίρνοντας την εξίσωση:

$$\frac{a}{\tilde{H}}\frac{d\tilde{H}}{da} + \frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)\left(1 - \frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2\right) = 0$$

Αυτή είναι η εξίσωση που πρέπει να λύσουμε. Ως μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, αρκεί να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές:

$$\frac{d\tilde{H}}{\tilde{H}\left(1-\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2\right)} = -\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)\frac{da}{a}$$

Μπορούμε τότε να γράψουμε το αριστερό μέλος ως:

$$\frac{1}{\tilde{H}\left(1-\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2\right)} = \frac{1-\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2+\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2}{\tilde{H}\left(1-\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2\right)} = \frac{1}{\tilde{H}} + \frac{\beta}{1-v}\frac{\tilde{H}}{\left(1-\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2\right)}$$

Άρα, η διαφορική εξίσωση λαμβάνει την μορφή:

$$\frac{d\tilde{H}}{\tilde{H}} + \frac{\beta}{1-v}\frac{\tilde{H}}{\left(1-\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2\right)}d\tilde{H} = -\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)\frac{da}{a}$$

Σε αυτήν την μορφή, μπορούμε πολύ εύκολα να ολοκληρώσουμε και τις δύο πλευρές:

$$\int\frac{d\tilde{H}}{\tilde{H}} + \frac{\beta}{1-v}\int\frac{\tilde{H}}{\left(1-\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2\right)}d\tilde{H} = -\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)\int\frac{da}{a}$$

Για να λύσουμε αυτό το ολοκλήρωμα, είναι βολικό να κάνουμε την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής:

$$\frac{\beta}{1-v}\tilde{H}^2 = \hat{H}^2 \Rightarrow \tilde{H} = \sqrt{\frac{1-v}{\beta}}\hat{H} \Rightarrow d\tilde{H} = \sqrt{\frac{1-v}{\beta}}d\hat{H}$$

Τότε, η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\int\frac{d\hat{H}}{\hat{H}} + \int\frac{\hat{H}}{\left(1-\hat{H}^2\right)}d\hat{H} = -\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)\int\frac{da}{a}$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε $\hat{H}d\hat{H} = \frac{1}{2}d\hat{H}^2$ και άρα να πάρουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\int\frac{d\hat{H}}{\hat{H}} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(1-\hat{H}^2\right)}d\hat{H}^2 = -\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)\int\frac{da}{a}$$

Σε αυτήν την μορφή, η ολοκλήρωση μπορεί να πραγματοποιηθεί άμεσα, δίνοντάς μας την λύση:

$$\ln\hat{H} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-\hat{H}^2}}\right) = -\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)\ln a + C$$

όπου C είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Μπορούμε να θέσουμε $C = \ln D$ και άρα η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\ln\left(\frac{\hat{H}}{\sqrt{1-\hat{H}^2}}\right) = \ln\left(Da^{-\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)}\right)$$

Επομένως, λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{\hat{H}}{\sqrt{1-\hat{H}^2}} = Da^{-\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\hat{H}^2}-1}} = Da^{-\frac{3}{2}(1+\omega_m)(1-v)} \Rightarrow \frac{1}{\hat{H}^2} - 1 = Da^{3(1+\omega_m)(1-v)}$$

Στην συνέχεια, επιστρέφουμε στην αρχική παράμετρο Hubble, η οποία δίνεται ως $\hat{H}^2 = \frac{\beta}{1-v}\left(\frac{H}{H_I}\right)^2$ και παίρνουμε ότι:

$$\frac{1-v}{\beta}\frac{1}{\left(\frac{H}{H_I}\right)^2} = Da^{3(1+\omega_m)(1-v)} + 1 \Rightarrow \left(\frac{H}{H_I}\right)^2 = \frac{1-v}{\beta}\frac{1}{Da^{3(1+\omega_m)(1-v)} + 1}$$

Τελικά, παίρνοντας απλά την τετραγωνική ρίζα και στις δύο πλευρές της εξίσωσης λαμβάνουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$H = \sqrt{\frac{1-v}{\beta}}\frac{H_I}{\sqrt{Da^{3(1+\omega_m)(1-v)} + 1}}$$

Έχουμε, επομένως, αποδείξει την επιθυμητή εξίσωση.

Δεδομένου ότι ο συντελεστής v είναι αρνητικός και $\omega_m = 0$ στο κενό, η δύναμη του a στον εκθέτη είναι θετική. Εάν θεωρήσουμε ότι $a \ll 1$, όπως συμβαίνει στο πρώιμο σύμπαν, προκύπτει ότι $Da^{3(1-v)(1+\omega_m)} \ll 1$ επίσης, δηλαδή η ποσότητα αυτή είναι αμελητέα, με αποτέλεσμα μια σχεδόν σταθερή παράμετρος Hubble $H \simeq H_I$.

3.3 Σύνοψη και Προοπτικές

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάσαμε ένα μοντέλο που εμπνέεται από τη θεωρία των χορδών, στο οποίο η ένταση του πεδίου Kalb-Ramond παίζει το ρόλο της στρέψης. Δείξαμε ότι, με απολύτως ανάλογο τρόπο με τη θεωρία Einstein-Cartan, αυτό το πεδίο στρέψης προκαλεί την εμφάνιση ενός αξιονικού πεδίου. Η σημαντική διαφορά, ωστόσο, είναι η παρουσία μιας βαρυτικής ανωμαλίας (με προέλευση τη θεωρία χορδών), η οποία συζεύγνυται με αυτό το νέο αξιονικό πεδίο, παρέχοντας μας έναν νέο όρο. Αυτός ο όρος οδηγεί στον τανυστή Cotton και στην τροποποίηση των εξισώσεων Einstein. Ο τανυστής Cotton δεν διατηρείται, καθώς εκφράζει την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των αξιονίων και του ίδιου του βαρυτικού πεδίου. Έτσι, είναι απαραίτητο να ορίσουμε ένα νέο, γενικευμένο τανυστή ενέργειας-ορμής που να περιλαμβάνει τον τανυστή Cotton.

Έχοντας όλα τα παραπάνω κατά νου, εξερευνήσαμε πώς μια τέτοια θεωρία εμπνευσμένη από την θεωρία χορδών μπορεί να οδηγήσει σε ένα κοσμολογικό μοντέλο που εξηγεί την πληθωριστική εποχή χωρίς την ανάγκη εισαγωγής ενός ειδικού πεδίου, όπως το πεδίο πληθωρισμού (inflaton field). Για το σκοπό αυτό, εργαστήκαμε στο λεγόμενο Μοντέλο Τρεχούμενης Κενού (MTK) της κοσμολογίας, το οποίο υποθέτει ότι η πυκνότητα ενέργειας του κενού είναι συνάρτηση των άρτιων δυνάμεων της παραμέτρου Hubble. Στη συνέχεια, εξετάσαμε την παρουσία βαρυτικών κυμάτων στο πρώιμο σύμπαν σε αυτό το μοντέλο. Ο λόγος για αυτή τη συγκεκριμένη επιλογή είναι η διαφορά στη συμπεριφορά που εμφανίζουν οι δύο διαφορετικοί πολώσεις των βαρυτικών κυμάτων. Αυτή η ασυμμετρία μεταξύ αριστερόστροφων και δεξιόστροφων βαρυτικών κυμάτων οδηγεί σε μια μη μηδενικό όρο της ανωμαλίας (όρος Chern-Simons), και έτσι, σε ένα σχήμα δεύτερης κβάντωσης, αυτά τα βαρυτικά κύματα σχηματίζουν μια συμπύκνωση, η οποία συμβάλλει σε έναν υψηλότερης τάξης όρο (H^4) στην πυκνότητα ενέργειας του κενού, πέραν από έναν άλλο της μορφής H^2. Αυτή η πυκνότητα ενέργειας τύπου MTK αποδείξαμε στην συνέχεια ότι οδηγεί σε πληθωρισμό με φυσικό τρόπο.

Φυσικά, αυτή η θεωρία εμπνευσμένη από την θεωρία χορδών και το προκύπτον κοσμολογικό μοντέλο μπορούν να επεκταθούν πέρα από την πληθωριστική εποχή του σύμπαντος, μέχρι τη σύγχρονη εποχή. Στην πηγή [15], οι μεταγενέστερες εποχές του σύμπαντος εξερευνώνται σε αυτό το είδος θεωρίας εμπνευσμένης από χορδές και κοσμολογίας MTK. Στο τέλος της πληθωριστικής εποχής, παράγεται φερμιονική ύλη. Η παρουσία του πεδίου αξιονίου Kalb-Ramond (το οποίο προκαλείται λόγω της ύπαρξης στρέψης) μπορεί να εξηγήσει την ασυμμετρία ύλης/αντιύλης που παρατηρείται στο σύμπαν, καθώς και να σπάσει τόσο τις συμμετρίες Lorentz όσο και CPT. Επιπλέον, είναι επίσης δυνατή η απόκτηση μάζας από το αξιόνιο σε μεταγενέστερα στάδια του σύμπαντος, καθιστώντας το υποψήφιο για την Σκοτεινή Ύλη. Επομένως, σε αυτό το μοντέλο του σύμπαντος, η στρέψη παίζει κεντρικό ρόλο στην εξέλιξή του. Αυτό είναι σε πλήρη αντίθεση με τις συμβατικές θεωρίες, οι οποίες βασίζονται στη Γενική Σχετικότητα και υποθέτουν μια μηδενική στρέψη. Δυστυχώς, η παρουσία της στρέψης δεν έχει ανιχνευθεί πειραματικά μέχρι στιγμής. Ωστόσο, αν έρθει η μέρα αυτή, οι επιπτώσεις της παρουσίας της έχουν ήδη αποδειχθεί ότι είναι εξαιρετικά σημαντικές για το σύμπαν όπως το γνωρίζουμε σήμερα και για την ίδια μας την ύπαρξη.

Βιβλιογραφία

[1] J. Schwichtenberg, *Physics from symmetry* (Springer International Publishing, 2018).

[2] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity* (Cambridge University Press, 2019).

[3] J. Yepez, "Einstein's vierbein field theory of curved space", arXiv: General Relativity and Quantum Cosmology (2011).

[4] M. Duncan, N. Kaloper, and K. Olive, "Axion hair and dynamical torsion from anomalies", Nuclear Physics B **387**, 215–235 (1992).

[5] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics, second edition* (Taylor & Francis Incorporated, 2003).

[6] M. Gasperini, *Theory of gravitational interactions* (Springer International Publishing, 2017).

[7] P. Cvitanović, *Group theory: birdtracks, lie's, and exceptional groups* (Princeton University Press, 2008).

[8] D. R. Brill and J. M. Cohen, "Cartan frames and the general relativistic dirac equation", Journal of Mathematical Physics **7**, 238–243 (1966).

[9] V. Ferrari, L. Gualtieri, and P. Pani, *General relativity and its applications: black holes, compact stars and gravitational waves* (CRC Press, Dec. 2020).

[10] G. de Berredo-Peixoto, L. Freidel, I. Shapiro, and C. de Souza, "Dirac fields, torsion and barbero-immirzi parameter in cosmology", Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2012**, 017 (2012).

[11] N. E. Mavromatos, P. Pais, and A. Iorio, "Torsion at different scales: from materials to the universe", Universe **9**, 516 (2023).

[12] N. Popławski, "Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling", Physical Review D **85**, 10.1103/physrevd.85.107502 (2012).

[13] J. Polchinski, *String theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1998).

[14] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring theory: 25th anniversary edition*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2012).

[15] S. Basilakos, N. E. Mavromatos, and J. Solà Peracaula, "Gravitational and chiral anomalies in the running vacuum universe and matter-antimatter asymmetry", Phys. Rev. D **101**, 045001 (2020).

[16] N. E. Mavromatos, J. S. Peracaula, and A. Gómez-Valent, "String-inspired running-vacuum cosmology, quantum corrections and the current cosmological tensions", arXiv: General Relativity and Quantum Cosmology (2023).

[17] P. Dorlis, N. E. Mavromatos, and S.-N. Vlachos, "Condensate-induced inflation from primordial gravitational waves in string-inspired chern-simons gravity", arXiv: General Relativity and Quantum Cosmology (2024).

[18] S. Basilakos, N. E. Mavromatos, and J. Solà Peracaula, "Quantum anomalies in string-inspired running vacuum universe: inflation and axion dark matter", Physics Letters B **803**, 135342 (2020).

[19] N. E. Mavromatos, *Lorentz symmetry violation in string-inspired effective modified gravity theories*, 2022.