

ΤΕΜΦΕ 5° Εξάμηνο
Αριθμητική Ανάλυση II και Εργαστήριο
1° Εργαστήριο και Πρακτική Εξάσκηση

Το πρόβλημα

Η μέθοδος **Euler**

Η μέθοδος **Improved Euler**

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$f: R \times R^n \rightarrow R^n$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n))]$$

Οι αντίστοιχες συναρτήσεις σε MATLAB

```
function [tout, yout] = euler(FunFcn,t0,tfinal,step,y0)
% Euler.m Costant Stepsize Euler Method
% Initialization
t = t0; y = y0(:); tout = t; yout = y.';
% The main loop
while abs(t- tfinal)> 1e-6
    if t + step >= tfinal, step = tfinal - t; end
    % Compute the slopes
    s1 = feval(FunFcn, t, y); s1 = s1(:);
    t = t + step;
    y = y + step*s1;
    tout = [tout; t];
    yout = [yout; y.'];
end;
```

```
function [tout, yout] = impeuler(FunFcn,t0,tfinal,step,y0)
% impeuler.m Costant Stepsize Improved Euler Method
% Initialization
t = t0; y = y0(:); tout = t; yout = y.';
% The main loop
while abs(t- tfinal)> 1e-6
    if t + step >= tfinal, step = tfinal - t; end
    % Compute the slopes
    s1 = feval(FunFcn, t, y); s1 = s1(:);
    s2 = feval(FunFcn,t+step, y+step*s1); s2 = s2(:);
    t = t + step;
    y = y + step*(s1 + s2)/2;
    tout = [tout; t];
    yout = [yout; y.'];
end;
```

Τα προβλήματα:

Πρόβλημα 0: $y'(t) + y + 5e^{-t} \sin(5t) = 0$ με λύση $y(t) = \cos(5t) e^{-t}$
 $y(0) = 1$

Πρόβλημα 1: $y'(t) = \begin{cases} y(t)(-2t + \frac{1}{t}) & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ με λύση $y(t) = t e^{-t^2}$
 $y(0) = 0$

Πρόβλημα 2: $y''(t) + y(t) = 0$ με λύση $y(t) = \cos(t)$ ισοδύναμα $\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$
 $y(0) = 1$

Τα ερωτήματα:

1. Να γραφεί οδηγό πρόγραμμα (script) με όνομα run01.m το οποίο να λύνει το πρόβλημα 0 με τη μέθοδο Euler στο διάστημα $[0, 3]$ με βήμα $h=0.2$ και να εμφανίζει τη γραφική παράσταση της ακριβούς και της αριθμητικής λύσης στα σημεία της διαμέρισης σε ένα γράφημα.
2. Να γραφεί οδηγό πρόγραμμα (script) με όνομα run11.m το οποίο να λύνει το πρόβλημα 1 με τη μέθοδο Euler στο διάστημα $[0, 2]$ με βήμα $h=0.1$ και να εμφανίζει τη γραφική παράσταση της ακριβούς και της αριθμητικής λύσης στα σημεία της διαμέρισης σε ένα γράφημα.
3. Να γραφεί οδηγό πρόγραμμα (script) με όνομα run21.m το οποίο να λύνει το πρόβλημα 2 με τη μέθοδο Euler στο διάστημα $[0, 2\pi]$ με βήμα $h=0.1$ και να εμφανίζει τη γραφική παράσταση της ακριβούς και της αριθμητικής λύσης στα σημεία της διαμέρισης σε ένα γράφημα.
4. Να γραφεί οδηγό πρόγραμμα (script) με όνομα run02.m το οποίο να λύνει το πρόβλημα 0 με τη μέθοδο Euler στο διάστημα $[0, 3]$ με βήμα $h=0.2$ και με βήμα $h=0.1$ και να εμφανίζει τη γραφική παράσταση της ακριβούς και των δύο αριθμητικών λύσεων στα σημεία της διαμέρισης σε ένα γράφημα. Από το γράφημα γίνεται φανερό ότι το βήμα της μεθόδου επηρεάζει το σφάλμα της προσέγγισης.

5. Να γραφεί οδηγό πρόγραμμα (script) με όνομα run03.m το οποίο να λύνει το πρόβλημα 0 με τη μέθοδο Euler και με τη μέθοδο Improved Euler στο διάστημα $[0,3]$ με βήμα $h=0.1$ και να εμφανίζει τη γραφική παράσταση της ακριβούς και των δύο αριθμητικών λύσεων στα σημεία της διαμέρισης σε ένα γράφημα. Από το γράφημα γίνεται φανερό ποια μέθοδος είναι καλύτερη όσο αφορά το σφάλμα.
6. Να γραφεί οδηγό πρόγραμμα (script) με όνομα run04.m το οποίο να λύνει το πρόβλημα 0 με τη μέθοδο Euler και με τη μέθοδο Improved Euler στο διάστημα $[0,3]$ με βήμα $h=0.2$ και να υπολογίζει για καθεμία από τις δύο προσεγγιστικές μεθόδους το απόλυτο σφάλμα στα σημεία της διαμέρισης. Στη συνέχεια να παρουσιάζει γραφικά τα πόσα δεκαδικά ψηφία ακρίβεια επιτυγχάνει η κάθε μέθοδος σε κάθε σημείο της διαμέρισης. (Αυτό το πετυχαίνουμε παίρνοντας τους μείον δεκαδικούς λογάριθμους του σφάλματος.)

Τα αντίστοιχα αρχεία:

<pre>function yprime = f0(t,y); %f0.m yprime=-y-5*exp(-t)*sin(5*t);</pre>	<pre>% Driver program run01.m clf hold off clear all % initialise problem t0 = 0; tfinal = 3; y0 = 1; h=0.2; % Solve [tout, yout] = euler('f0', t0, tfinal,h,y0); plot(tout,yout,'*',tout,f0true(tout),'-')</pre>
<pre>function ytrue = f0true(t); %f0true.m ytrue =cos(5*t).*exp(-t);</pre>	
<pre>function yprime = f1(t,y); %f1.m if t==0, yprime=1; else yprime=y*(-2*t+1/t); end</pre>	<pre>% Driver program run11.m % initialise problem t0 = 0; tfinal = 2; y0 = 0; h=0.1; % Solve [tout, yout] = euler('f1', t0, tfinal,h,y0); plot(tout,yout,'*',tout,f1true(tout),'-')</pre>
<pre>function ytrue = f1true(t); %f1true.m ytrue =t.*exp(-t.^2);</pre>	
<pre>function yprime = f2(t,y); %f2.m yprime=[0,1;-1,0]*y;</pre>	<pre>% Driver program run21.m % initialise problem t0 = 0; tfinal = 2*pi; y0 = [1;0]; h=0.1; % Solve [tout, yout] = euler('f2', t0, tfinal,h,y0); plot(tout,yout(:,1),'*',tout,yout(:,2),'-')</pre>
<pre>function ytrue = f2true(t); %f2true.m ytrue =[cos(t);-sin(t)];</pre>	
<pre>% Driver program run02.m clf % initialise problem % Solve h=0.2; [tout, yout] = euler('f0', t0, tfinal,h,y0); h=0.1; [tout1, yout1] = euler('f0', t0, tfinal,h,y0); plot(tout,yout,'*',tout1,yout1,'+',tout,f0true(tout),'-')</pre>	
<pre>% Driver program run03.m clf % initialise problem % Solve h=0.1; [tout, yout] = euler('f0', t0, tfinal,h,y0); [tout1, yout1] = impeuler('f0', t0, tfinal,h,y0); plot(tout,yout,'*',tout1,yout1,'+',tout,f0true(tout),'-')</pre>	<pre>% Driver program run04.m clf % initialise problem % Solve h=0.2; [tout, yout] = euler('f0', t0, tfinal,h,y0); [tout1, yout1] = impeuler('f0', t0, tfinal,h,y0); err=abs(yout-f0true(tout)); err1=abs(yout1-f0true(tout1)); plot(tout,-log10(err),'--',tout1,-log10(err1),'-')</pre>