

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:

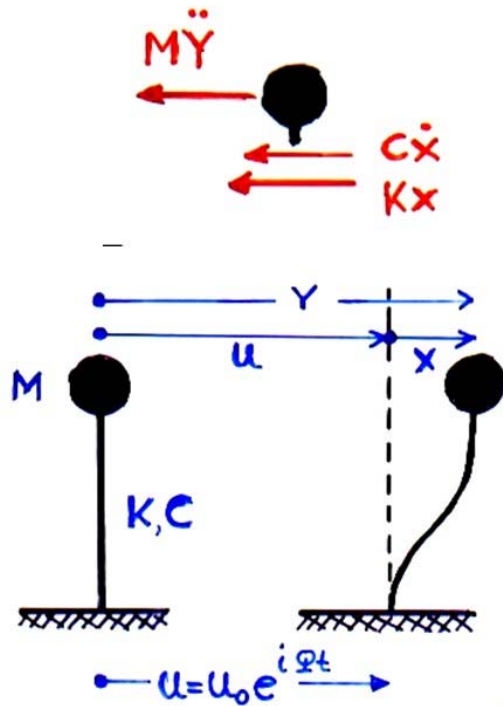
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ Μονοβάθμιου (1-DOF) Συστήματος: Διέγερση στην Βάση & Ελαστικά Φάσματα Απόκρισης

1. Εξίσωση δυναμικής ισορροπίας
2. Υπολογισμός σχετικής μετατόπισης
3. Υπολογισμός απόλυτης (ολικής) μετατόπισης
4. Ελαστικό Φάσμα Απόκρισης
 - + Αρμονική διέγερση
 - + Πραγματική σεισμική διέγερση
 - + Συνήθεις μορφές φασμάτων

Πρόσθετη βιβλιογραφία:

- Γ. ΓΚΑΖΕΤΑΣ → Σημειώσεις Εδαφοδυναμικής (Κεφάλαιο 2)
- Α. CHOPRA → Dynamics of Structures (Κεφάλαια 1, 2, 3A & 3B)
- Ι. ΚΑΤΣΙΚΑΔΕΛΗ → Σημειώσεις Στατικής IV (Κεφάλαια 1 & 2)
- Ι. ΨΥΧΑΡΗΣ → Σημειώσεις Αντισεισμικής Τεχνολογίας I (Κεφάλαιο 1)

2.1 Εξίσωση δυναμικής ισορροπίας



$$M\ddot{Y} + C\dot{X} + KX = 0 \quad \left| \begin{array}{l} Y = X + U \end{array} \right.$$

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -M\ddot{U}$$

για αρμονική διέγερση:

$$U = U_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow \ddot{U} = -\Omega^2 U_0 e^{i\Omega t}$$

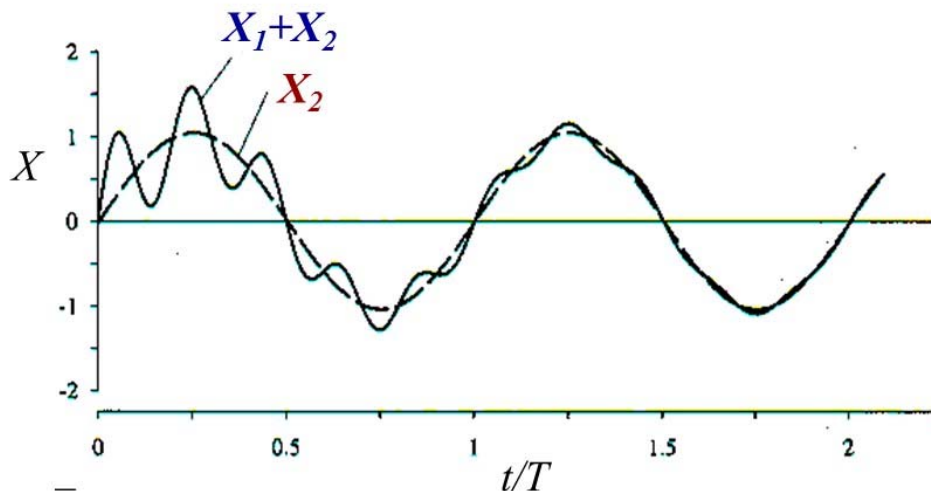
και τελικώς:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$\text{με } F_0 = \Omega^2 M U_0$$

$$\text{Υπενθύμιση: } [e^{i\Omega t} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t]$$

2.2 Υπολογισμός σχετικής μετατόπισης X



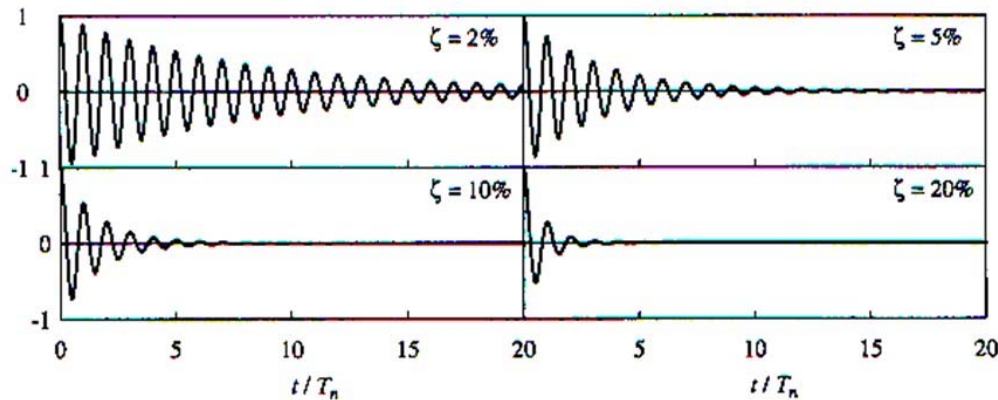
$$X = X_1 + X_2$$

όπου X_1 είναι η «**μεταβατική**» συνιστώσα και
 X_2 είναι η «**μόνιμη**» συνιστώσα της μετατόπισης που
 παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον (**γιατί:**)

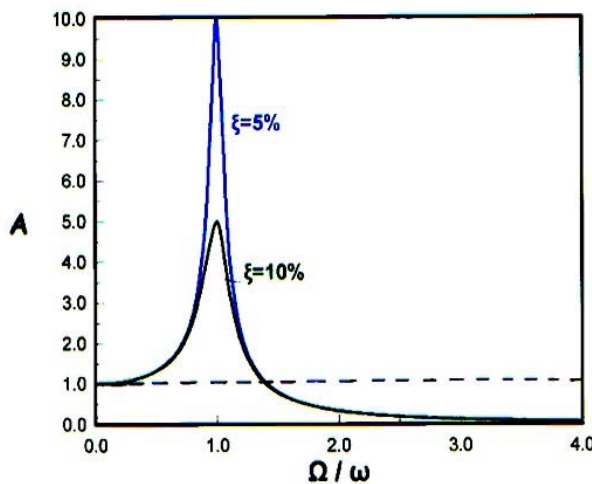
Η «**μεταβατική**» συνιστώσα της μετατόπισης (X_1) αποτελεί αποσβενυμένη ελεύθερη ταλάντωση με εξίσωση:

$$X_1 = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$$

Όπου: $\xi = C / 2\sqrt{KM}$, $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ και $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$



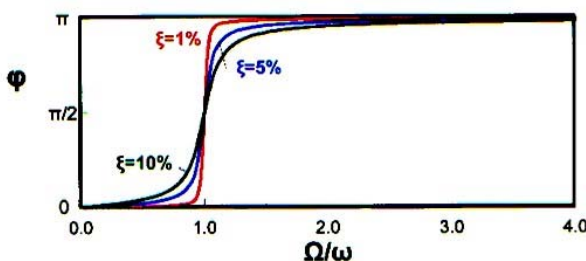
Προσέξτε ότι η συνιστώσα αυτή έχει συχνότητα ίση με την ιδιο-συχνότητα του ταλαντωτή (ΟΧΙ με την συχνότητα της διέγερσης)



Η «**μόνιμη**» συνιστώσα της μετατόπισης (X_2) είναι αρμονική, με συχνότητα ίση προς αυτή της διέγερσης (Ω) και διαφορά φάσης (φ) από την διέγερση:

$$X (= X_2) = (X_{ST} \cdot A) e^{i(\Omega t - \varphi)}$$

όπου $X_{ST} = \frac{F_O}{K} = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 U_o$



$$A = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + 4\xi^2(\Omega/\omega)^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi(\Omega/\omega)}{1 - (\Omega/\omega)^2}$$

Ερώτηση 2.1

Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς και τα σχήματα για τον *δυναμικό συντελεστή A* και την *διαφορά φάσης φ* , να διατυπώσετε τους βασικούς μηχανισμούς και το φυσικό νόημα της ΣΧΕΤΙΚΗΣ μετατόπισης του ταλαντωτή (X/U_0) στις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

I. Περιοχή $\Omega/\omega \ll 1.0$

II. Περιοχή $\Omega/\omega = 1.0$

III. Περιοχή $\Omega/\omega \gg 1.0$

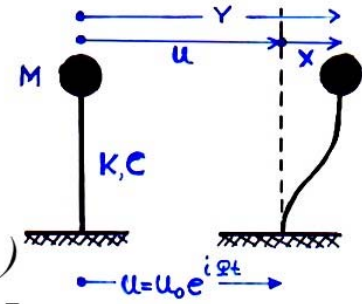
Παραδείγματα από την καθημερινή πράξη του μηχανικού (αλλά ακόμη και από την καθημερινή ζωή) θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση και είναι ευπρόσδεκτα.

2.3 Υπολογισμός απόλυτης (ολικής) μετατόπισης Y

$$Y = U + X = U_o e^{i\Omega t} + X_o e^{i(\Omega t - \phi)}$$

$$Y = (U_o + X_o e^{-i\phi}) e^{i\Omega t} = Y_o e^{i\Omega t}$$

$$Y_o = (U_o + X_o \cos \phi) - i(X_o \sin \phi)$$



Μετά από αδιαστατοποίηση ως προς την διέγερση της βάσης

$$\frac{Y}{U} = \frac{Y_o}{U_o} = 1 + \frac{X_o}{U_o} e^{-i\phi},$$

$$\frac{X_o}{U_o} = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 A$$

και τελικώς,

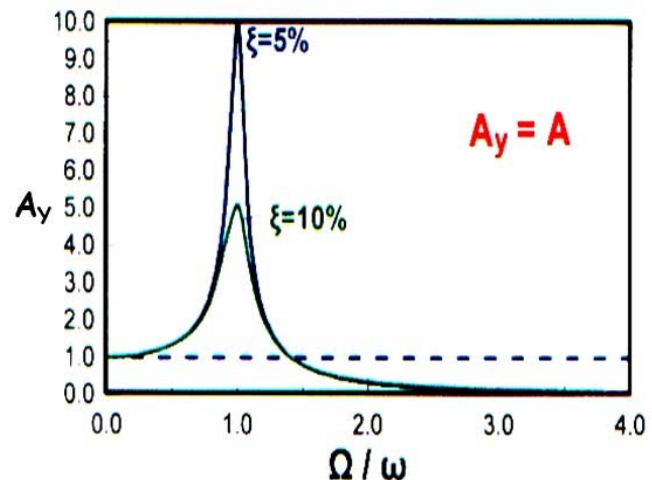
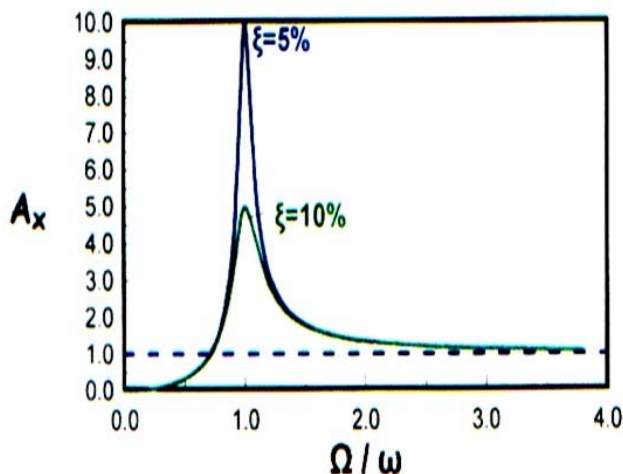
$$\frac{Y}{U} = \frac{Y_o}{U_o} = 1 + \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 A e^{-i\phi} \quad \text{ή} \quad \left[\text{από κάποια περιέργη} \right. \\ \left. \text{σύμπτωση που αξίζει} \right. \\ \left. \text{να αποδείξετε} \right] \dots\dots\dots$$

$$\left| \frac{Y}{U} \right| = \left| \frac{Y_o}{U_o} \right| \approx A$$

Για αρμονική διέγερση οι αδιαστατοποιημένες εκφράσεις της σχετικής και της ολικής μετατόπισης, που διατυπώθηκαν προηγουμένως, ισχύουν φυσικά και για τις αντίστοιχες ταχύτητες και επιταχύνσεις. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε τους εξής δύο «**δυναμικούς συντελεστές**»:

$$A_x = \frac{X}{U} = \frac{\dot{X}}{\dot{U}} = \frac{\ddot{X}}{\ddot{U}}$$

$$A_y = \frac{Y}{U} = \frac{\dot{Y}}{\dot{U}} = \frac{\ddot{Y}}{\ddot{U}}$$



Ερώτηση 2.2

Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς και τα σχήματα για τον *δυναμικό συντελεστή A* και την *διαφορά φάσης φ* , να διατυπώσετε τους βασικούς μηχανισμούς και το φυσικό νόημα της ΟΛΙΚΗΣ μετατόπισης του ταλαντωτή (Y_o/U_o) στις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

- I. Περιοχή $\Omega/\omega \ll 1.0$
- II. Περιοχή $\Omega/\omega = 1.0$
- III. Περιοχή $\Omega/\omega \gg 1.0$

Παραδείγματα από την καθημερινή πράξη του μηχανικού (αλλά ακόμη και από την καθημερινή ζωή) θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση και είναι ευπρόσδεκτα.

2.4 Ελαστικό φάσμα απόκρισης

Αρμονική διέγερση

Το διάγραμμα μεταβολής του δυναμικού συντελεστή $A_y - (\Omega/\omega)$ μπορεί να ερμηνευθεί κατά δύο βασικούς τρόπους:

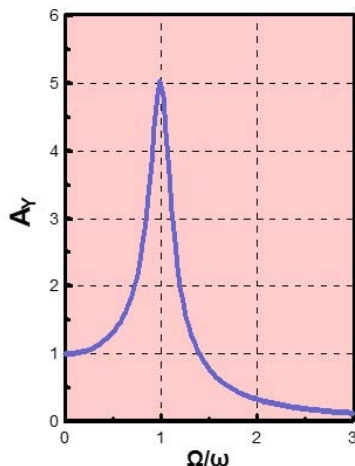
- A. Για δεδομένο ταλαντωτή, οπότε $\omega = 2\pi/T = \text{σταθερό}$, περιγράφει την δυναμική απόκριση για διεγέρσεις διαφορετικής συχνότητας $\Omega = 2\pi/T_{\text{διδγ}}$.
- B. Για δεδομένη διέγερση, οπότε $\Omega = \text{σταθερό}$, περιγράφει την απόκριση διάφορων μονοβάθμιων ταλαντωτών συνάρτησε της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης τους $\omega = 2\pi/T_a$, δίνει δηλαδή το **ΦΑΣΜΑ** (πιθανό εύρος) της ιξωδο-ελαστικής απόκρισης του ταλαντωτή.

Η δεύτερη αυτή θεώρηση έχει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον για τον αντισεισμικό σχεδιασμό των κατασκευών, μια και αποτελεί γραφική παράσταση των μέγιστων δράσεων (μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση) που επιβάλλονται στην μάζα μιας κατασκευής λόγω διέγερσης στην βάση της. Έτσι, επεκτάθηκε και σε μη αρμονικές-σεισμικές διεγέρσεις υπό την μορφή των γνωστών μας «**Φασμάτων Ελαστικής Απόκρισης**», αρχικά από τον Biot (1932) και ακολούθως από τον Housner (1941).

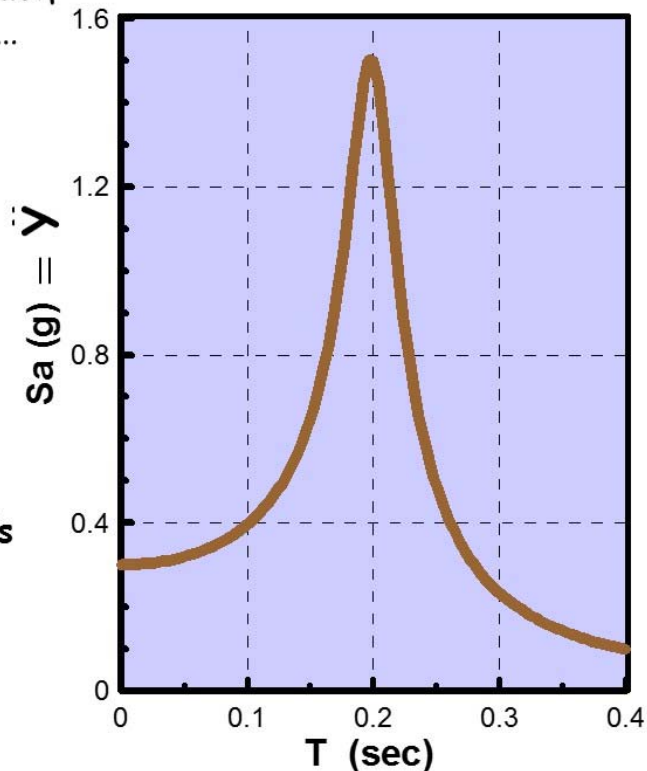
Συγκεκριμένα, για δεδομένη διέγερση

Το ελαστικό φάσμα απόκρισης μπορεί να υπολογισθεί απλά με βάση την αναλυτική σχέση για το A_y

$$A_y = \frac{y}{U} = \frac{\dot{y}}{\dot{U}} = \frac{\ddot{y}}{\ddot{U}}$$



Διέγερση με $(\ddot{U})_{\max} = 0.30g$ και $\Omega = 31.4 \text{ rad/s}$ ή $T = 0.20 \text{ sec}$



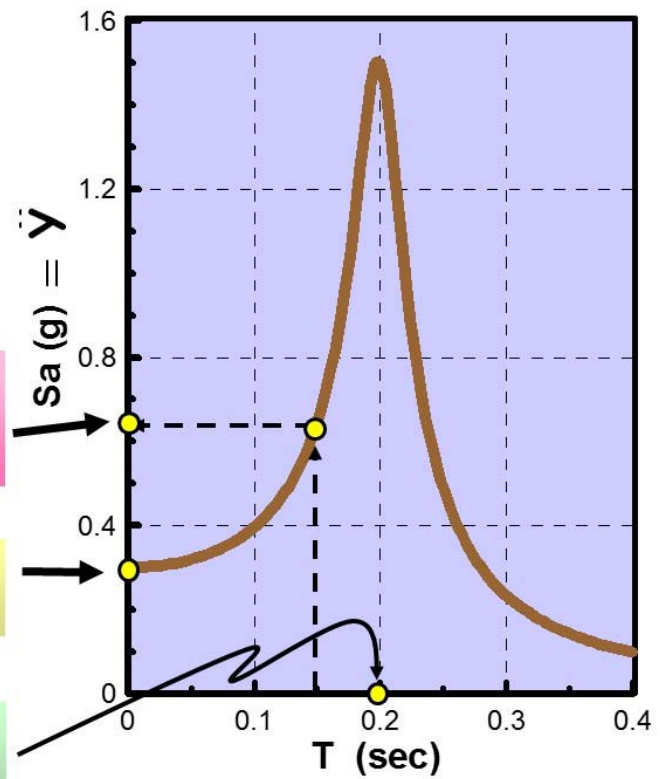
και αντίστροφα

όταν μας δοθεί το ελαστικό
φάσμα απόκρισης μιας
σεισμικής διέγερσης, τότε
μπορούμε να εξάγουμε άμεσα
τα εξής πρακτικά
συμπεράσματα

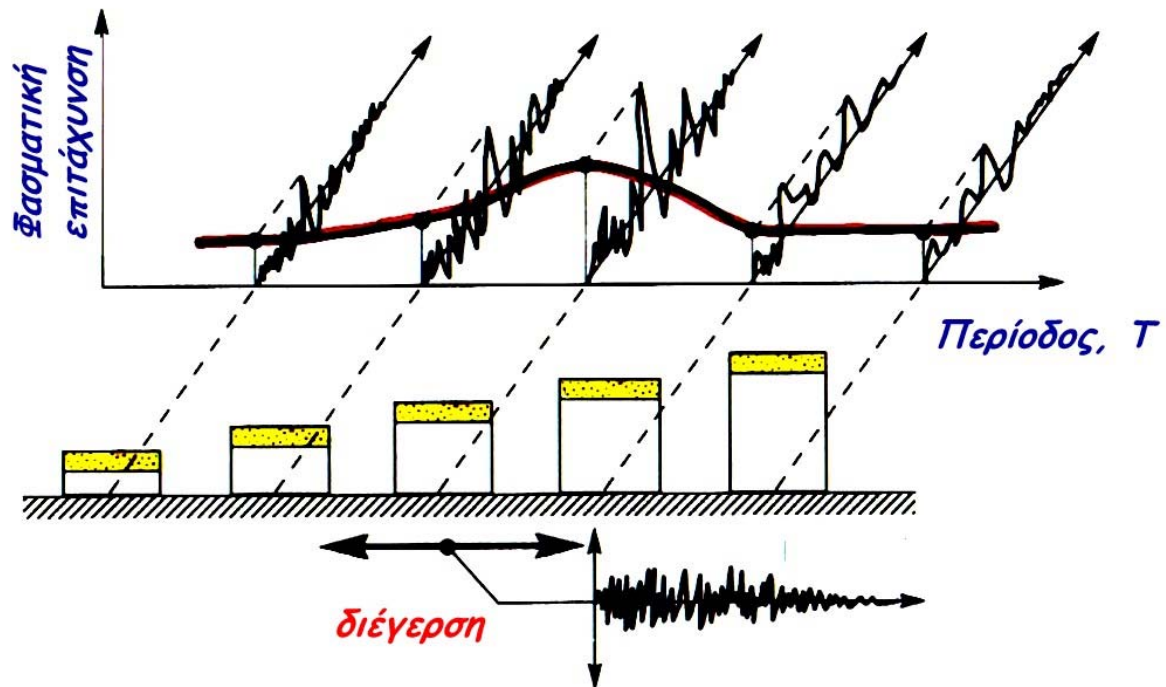
(αδρανειακή) επιτάχυνση που
επιβάλλεται στην μάζα
κατασκευής με ιδιοπερίοδο T

Μέγιστη σεισμική επιτάχυνση
 $PGA = (\ddot{U})_{\max} = 0.30g$

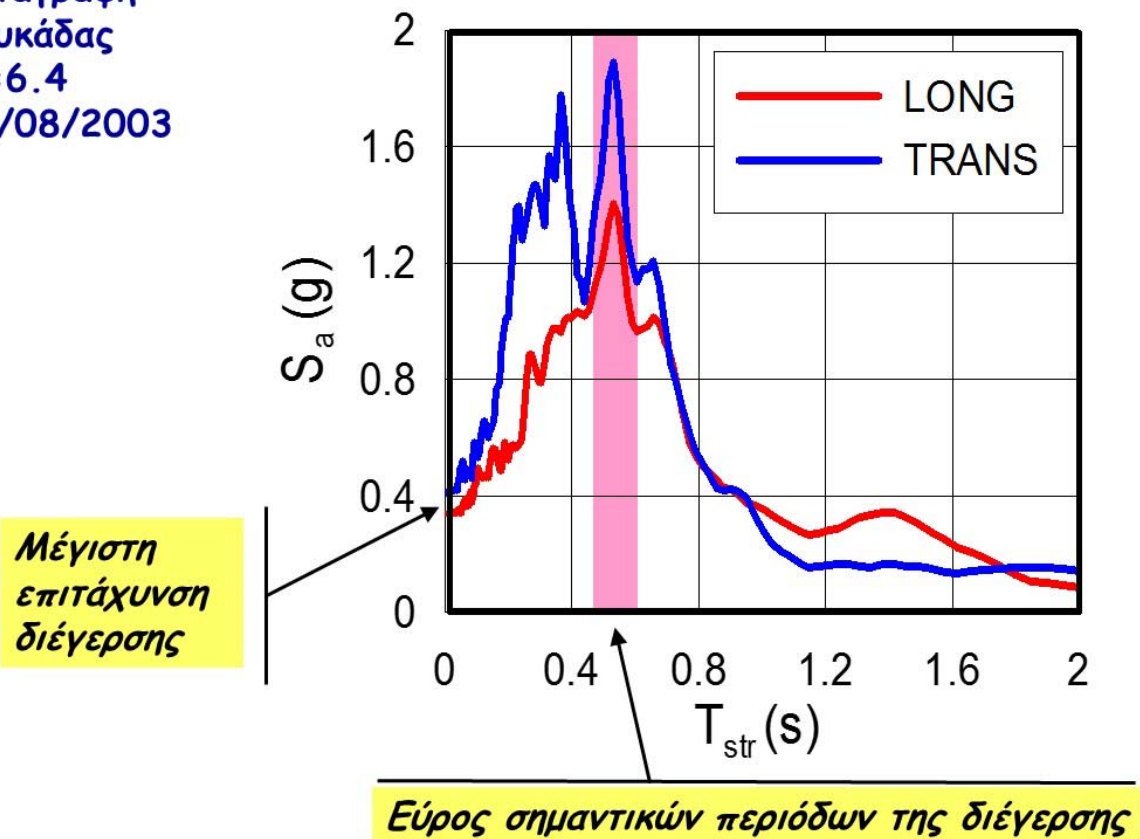
Δεσπόζουσα περίοδος της
διέγερσης $T_{exc} = 0.20sec$



ΣΕΙΣΜΙΚΗ διέγερση

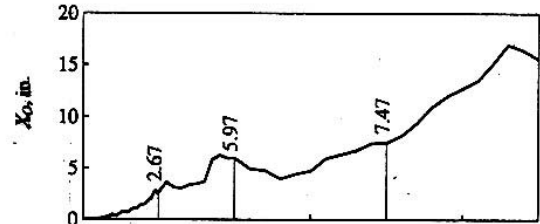


Καταγραφή
Λευκάδας
 $M=6.4$
14/08/2003



Σεισμός El Centro, $\xi=2\%$

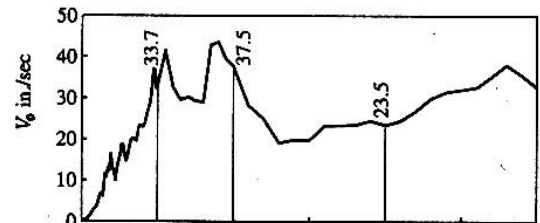
Μέγιστη σχετική μετατόπιση X_0 .
 [Μέγιστη τέμνουσα βάσης $F_0 = K X_0$]
Του πήγε ο αποσβεστήρας?



Μέγιστη ΨΕΥΔΟ-ταχύτητα $V_0 = \omega X_0 = (2\pi/T)X_0$

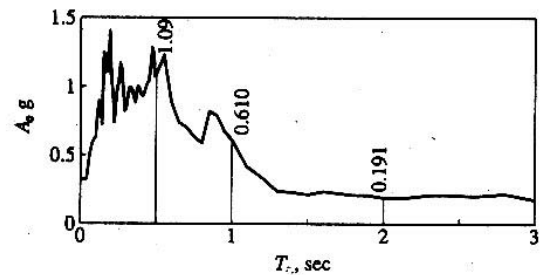
[Μέγιστη ελαστική ενέργεια
 $E_0 = \frac{1}{2} (K X_0^2) = \frac{1}{2} (M V_0^2)$]

Γιατί ΨΕΥΔΟ- και όχι ΣΧΕΤΙΚΗ ταχύτητα?



Μέγιστη ΨΕΥΔΟ-επιτάχυνση $A_0 = \omega^2 X_0 = (2\pi/T)^2 X_0$

[Μέγιστη τέμνουσα βάσης
 $F_0 = K X_0 = \dots = M A_0$]



Σύγκριση:

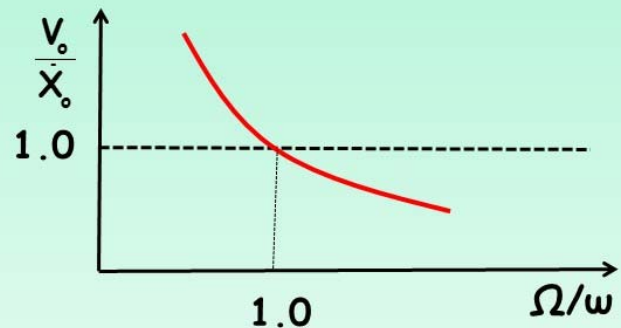
Ψεύδο-ταχύτητας

με...

max. Σχετική ταχύτητα

Αρμονική διέγερση βάσης

$$\left. \begin{aligned} V_o &= \omega \cdot X_o \\ \dot{X}_o &= \Omega \cdot X_o \end{aligned} \right\} \frac{V_o}{\dot{X}_o} = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{(\Omega / \omega)}$$



ταύτιση στον συντονισμό. . .

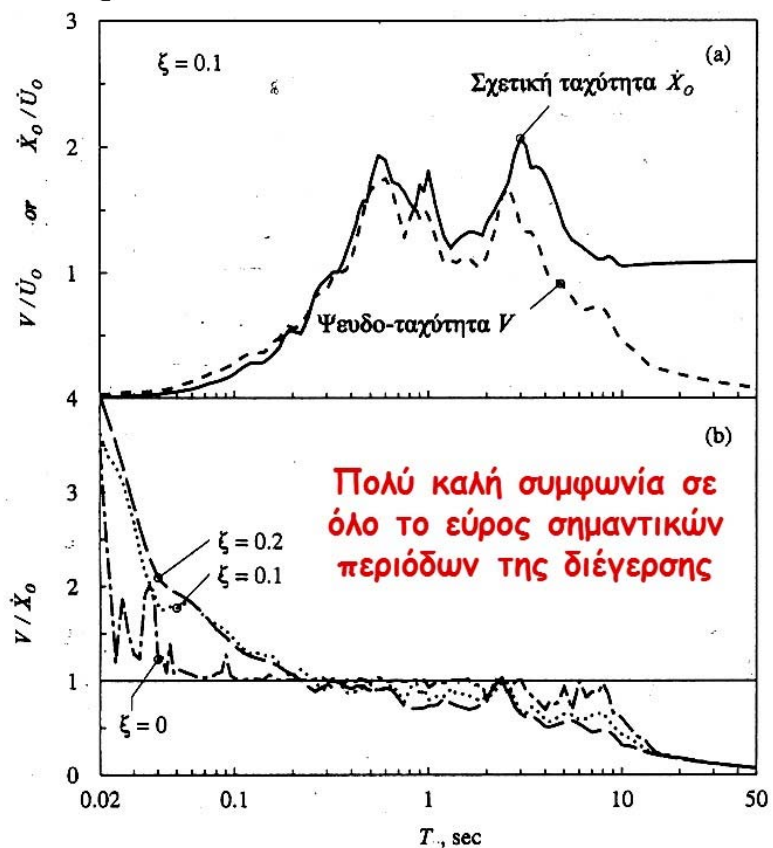
Πραγματική σεισμική διέγερση βάσης

Σύγκριση:

Ψεύδο-ταχύτητας

με...

max. Σχετική ταχύτητα



Σύγκριση:

Ψεύδο-
επιτάχυνσης

με...

max. Απόλυτη
(ολική) επιτάχυνση

Αρμονική διέγερση βάσης

$$\left. \begin{aligned} A_o &= \omega^2 \cdot X_o \\ \ddot{Y}_o &= \Omega^2 \cdot Y_o \approx \Omega^2 \cdot A \cdot U_o \end{aligned} \right\} \frac{A_o}{\ddot{Y}_o} = \frac{1}{(\Omega / \omega)^2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{X_o}{U_o}$$

αλλά $\frac{X_o}{U_o} = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \cdot A$

και άρα $\frac{A_o}{\ddot{Y}_o} \approx 1.0$!

πολύ καλή γενική συμφωνία....

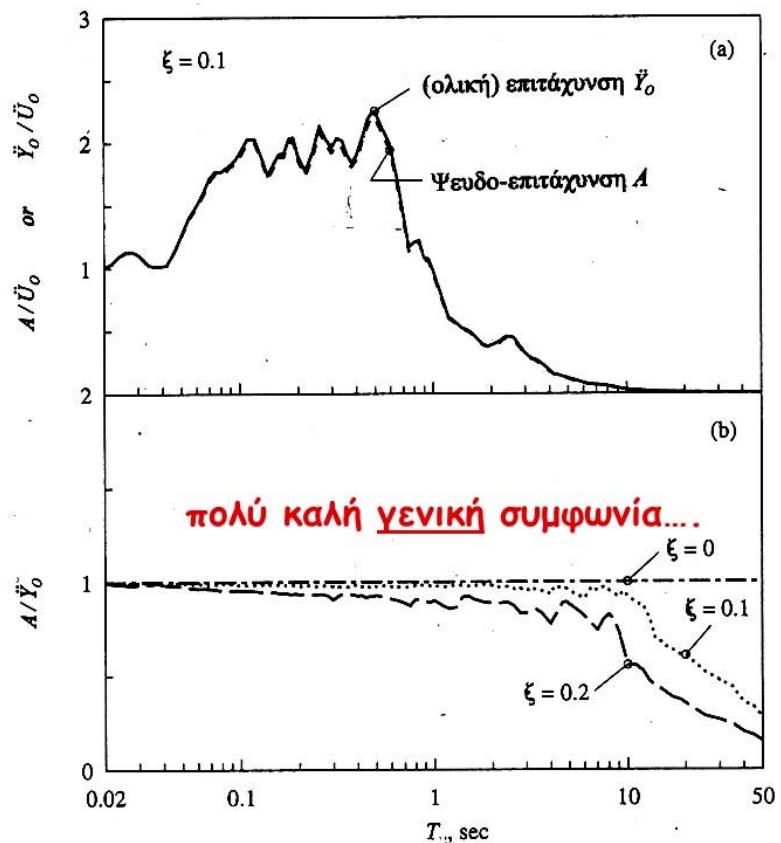
Σύγκριση:

Ψεύδο-
επιτάχυνσης

με...

max. Απόλυτη
(ολική) επιτάχυνση

Πραγματική σεισμική διέγερση βάσης

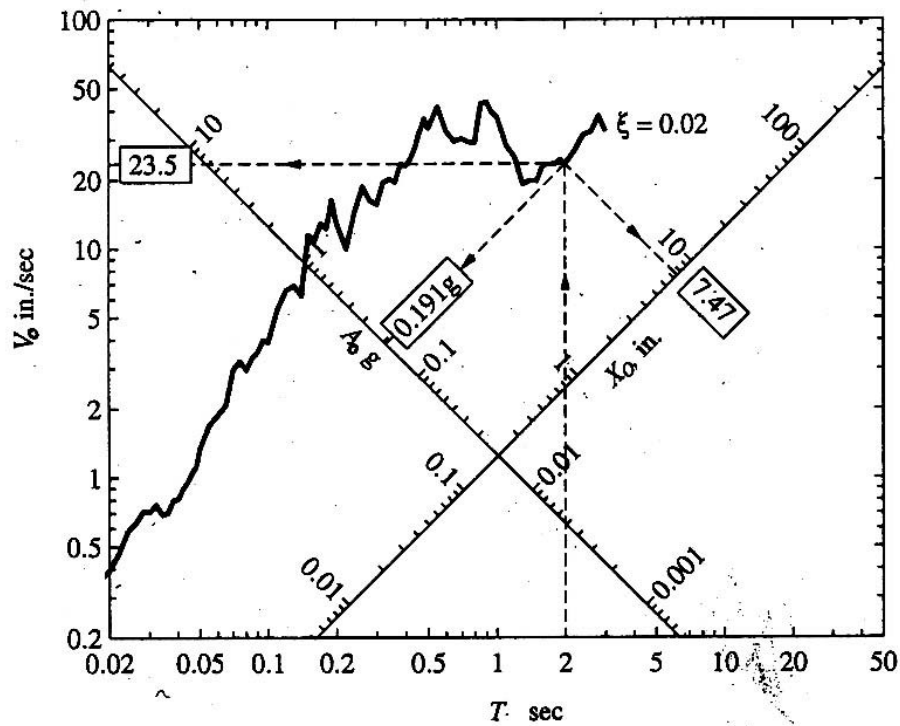


ΤΡΙ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ παρουσίαση φασμάτων

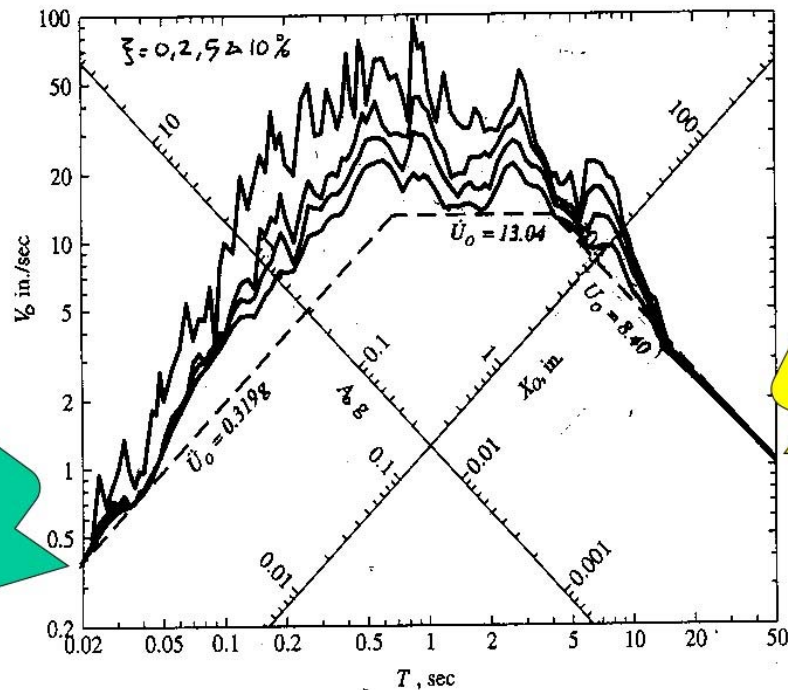
$$X_0$$

$$V_0 = \omega X_0$$

$$A_0 = \omega^2 X_0$$



Μέγιστες τιμές των σεισμικών παραμέτρων



Μέγιστη εδαφική επιτάχυνση

Μέγιστη εδαφική μετατόπιση

Σχόλια

Συνοπτικά, οι τρεις «δείκτες δυναμικής συμπεριφοράς» που απεικονίζονται στα συνήθη φάσματα και η σχέση τους με την πραγματική συμπεριφορά του ταλαντωτή είναι η ακόλουθη.....

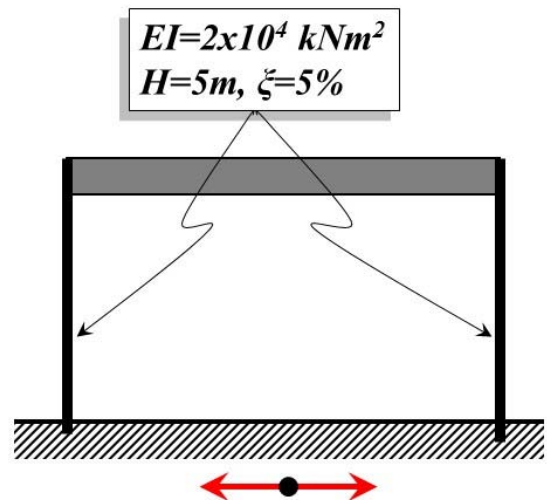
- ❖ **Η μέγιστη σχετική μετατόπιση X_0 .** Ο δείκτης αυτός είναι ο μόνος που ταυτίζεται με την αντίστοιχη παράμετρο της πραγματικής απόκρισης, μπορεί δε να χρησιμοποιηθεί άμεσα για τον υπολογισμό της μέγιστης τέμνουσας δύναμης στην βάση του ταλαντωτή, από την σχέση $F_0 = K X_0$.
- ❖ **Η μέγιστη ΨΕΥΔΟ-ταχύτητα $V_0 = \omega X_0 = (2\pi/T)X_0$.** Ο δείκτης αυτός έχει μονάδες ταχύτητας, αλλά δεν αντιστοιχεί στην μέγιστη σχετική ή απόλυτη ταχύτητα ταλάντωσης του συστήματος. Ποσοτικά ακριβής είναι η χρήση του στον υπολογισμό της μέγιστης ελαστικής ενέργειας (του ελατηρίου) που συσσωρεύεται στο σύστημα $E_0 = \frac{1}{2} (K X_0^2) = \frac{1}{2} (M V_0^2)$. Επιπλέον, είναι περίπου ίσος με την τιμή της **μέγιστης σχετικής ταχύτητας ταλάντωσης** για συστήματα με ιδοσυχνότητα παρεμφερή προς τις δεσπόζουσες συχνότητες της σεισμικής διέγερσης ($\Omega \approx \omega$)
- ❖ **Η μέγιστη ΨΕΥΔΟ-επιτάχυνση $A_0 = \omega^2 X_0 = (2\pi/T)^2 X_0$.** Ο δείκτης αυτός έχει μονάδες επιτάχυνσης, και αντιστοιχεί (με πολύ καλή προσέγγιση) στην **μέγιστη απόλυτη επιτάχυνση** ταλάντωσης του συστήματος. Ποσοτικά ακριβής είναι η χρήση του στον υπολογισμό της μέγιστης τέμνουσας δύναμης στην βάση του συστήματος, από την σχέση $F_0 = K X_0 = M A_0$ (**γιατί;**).

Άσκηση 2.1:

Για αρμονική διέγερση του εδάφους, με μέγιστη μετατόπιση $U_0=0.15\text{m}$ και περίοδο $T_{exc}=0.40\text{sec}$, να υπολογισθούν:

- 1) Η μέγιστη απόλυτη (ολική) επιτάχυνση, ταχύτητα και μετατόπιση στην οροφή του πλαισίου.
- 2) Η μέγιστη τέμνουσα S στην βάση και η μέγιστη ροπή M στην κορυφή των δύο υποστυλωμάτων.

Η οροφή του πλαισίου να θεωρηθεί άκαμπτη με συνολικό βάρος 500 kN , σε αντίθεση με τα υποστυλώματα τα οποία είναι εύκαμπτα με αμελητέα μάζα.



Άσκηση 2.2:

Για αρμονική σεισμική διέγερση, με εύρος ταλάντωσης $U_0=0.15\text{m}$ και περίοδο $T_{διδγ}=0.40\text{sec}$, να υπολογισθούν και να σχεδιασθούν τα ακόλουθα διαγράμματα:

- 1) Το ελαστικό φάσμα απόκρισης της **σχετικής** μετατόπισης για $\xi=2\%$.
- 2) Το ελαστικό φάσμα απόκρισης της **ψεύδο-ταχύτητας** και της **max. σχετικής** ταχύτητας για $\xi=2\%$ (στο ίδιο διάγραμμα)
- 3) Το ελαστικό φάσμα απόκρισης της **ψεύδο-επιτάχυνσης** και της **max. απόλυτης** επιτάχυνσης για $\xi=2\%$ (στο ίδιο διάγραμμα)
- 4) Ο λόγος των φασμάτων των ερωτήσεων 2 και 3 (στο ίδιο διάγραμμα)

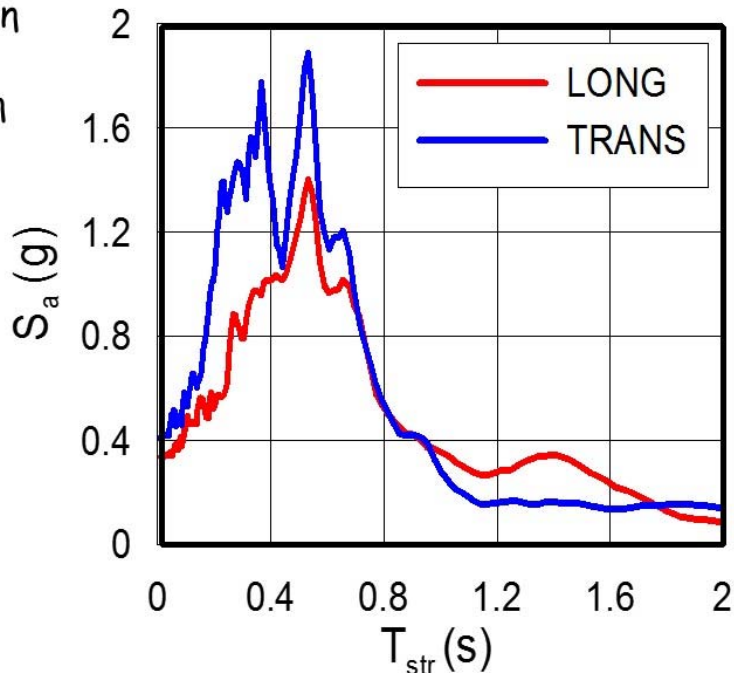
Να γίνει σύγκριση με τα αντίστοιχα διαγράμματα - φάσματα για τον σεισμό El Centro και να συζητηθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές.

Άσκηση 2.3:

Να υπολογισθούν οι μέγιστες τιμές των ακόλουθων παραμέτρων της σεισμικής κίνησης στην μάζα ενός μονο-βάθμιου (1DOF) ταλαντωτή με ιδιοπερίοδο ταλάντωσης $T=0.60s$:

- μαχ. απόλυτη επιτάχυνση
- μαχ. σχετική ταχύτητα
- μαχ. σχετική μετατόπιση

Σεισμός Λευκάδας
(14/08/2003)
 $M=6.4$



Άσκηση 2.4:

Να επαναλάβετε την Άσκηση 2.1 για τον σεισμό της Λευκάδας

(για μία από τις δύο συνιστώσες)

