

3. Αρμονικά Κύματα Χώρου και Επιφανείας

P, S, Rayleigh και Love

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 3.1 Κύματα (P & S) σε ομοιογενή χώρο
- 3.2 Κύματα σε ανομοιογενή μέσα με δι-επιφάνεια
- 3.3. Επιφανειακά κύματα

Πρόσθετο Διάβασμα

✚ Steven Kramer:

Chapter 2 (για γενικότερη ενημέρωση επί σεισμικών κυμάτων, ρηγμάτων και άλλων βασικών εννοιών Τεχνικής Σεισμολογίας)

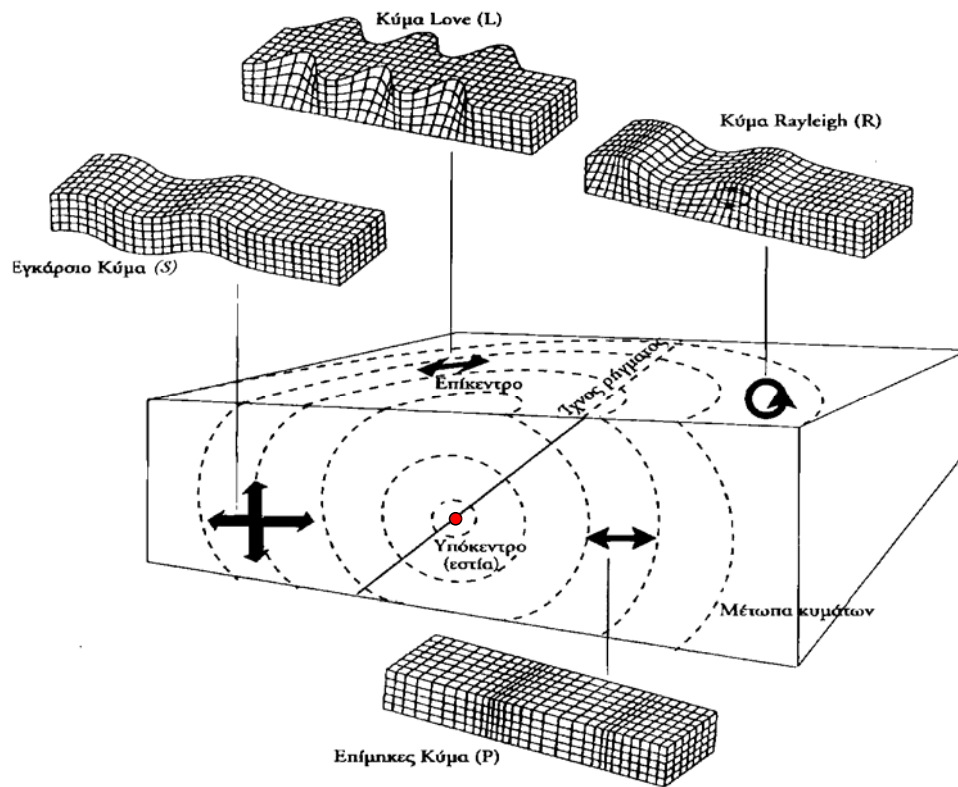
&

Chapter 5 (εκτός ίσως από την παράγραφο 5.5)

✚ Γιώργος Γκαζέτας: Κεφάλαια 4 (4.1) & 5

✚ Άλλα βιβλία κυματικής και τεχνικής σεισμολογίας

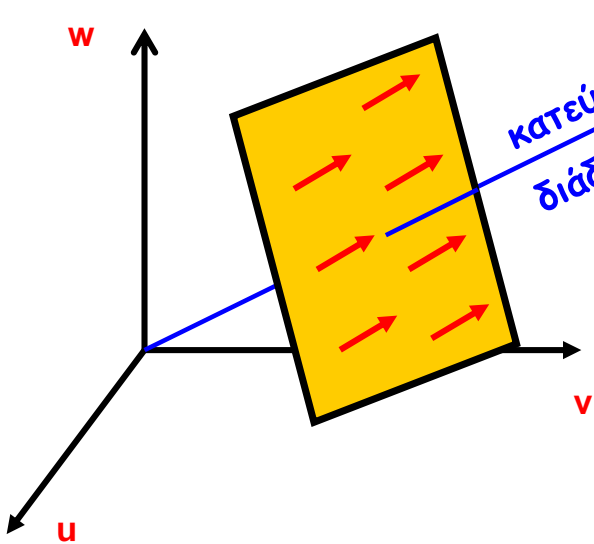
Ο Σεισμός είναι.....



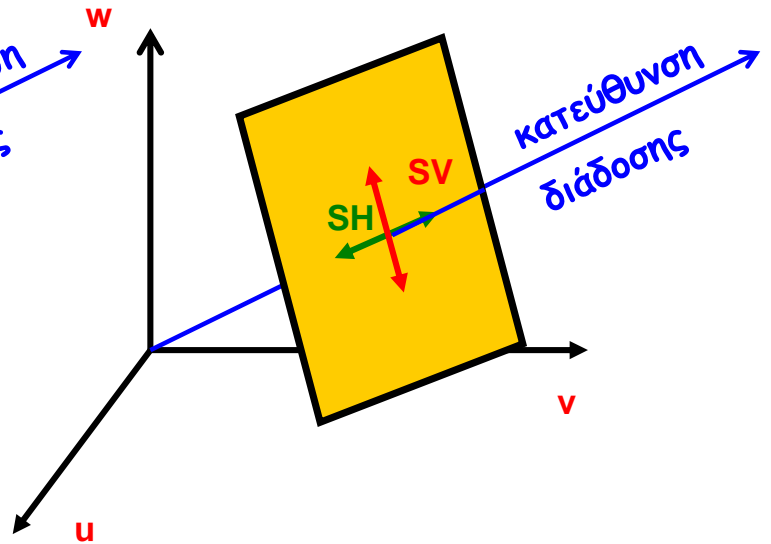
Διαμήκη (P), Εγκάρσια (S), Rayleigh (R) και λοιπά κύματα που διαδίδονται μέσω των εδαφικών στρώσεων...

3.1 ΚΥΜΑΤΑ (P & S) ΣΕ ΟΜΟΙΟΓΕΝΗ ΧΩΡΟ

Κύμα P
με επίπεδο μέτωπο



Κύμα S (S_H , S_V)
με επίπεδο μέτωπο



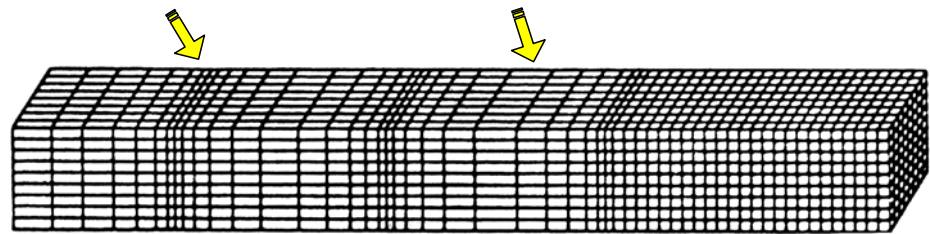
Κύματα P

Θλίψη



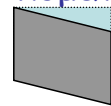
-

εφελκυσμός

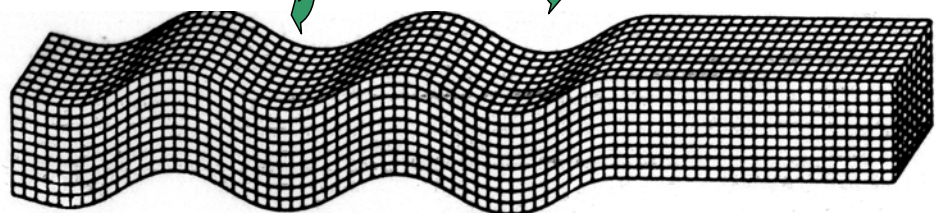
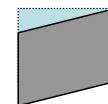


Μήκος κύματος

Κύματα S

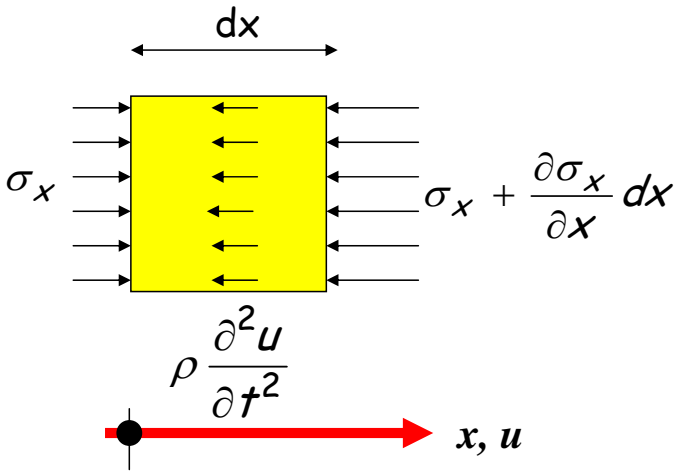


διάτμηση



Μήκος κύματος

Η κυματική εξίσωση...



$$\sigma_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Όμως $\sigma_x = D \varepsilon_x = -D \frac{\partial u_x}{\partial x}$

και $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

οπου $C = \sqrt{D/\rho}$

γενική λύση...

$$u_x = f(x \pm Ct)$$

γιατί:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (C)^2 \frac{\partial^2 f(x \pm Ct)}{\partial x^2} = (C)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

ενώ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

άρα πράγματι

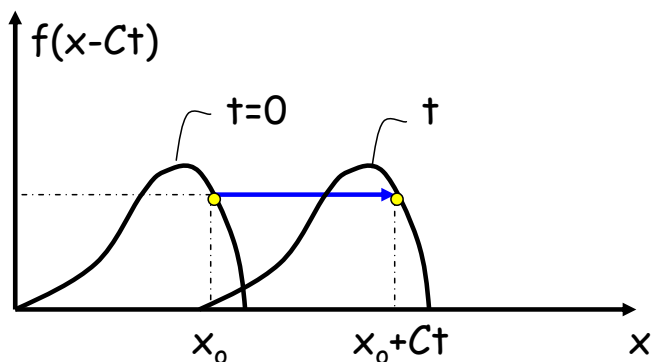
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

φυσικό νόημα...

Οι μεταβλητές δεν είναι δύο ανεξάρτητες (η 'x' και η 't') αλλά μία σύνθετη, η $X^* = x \pm Ct$

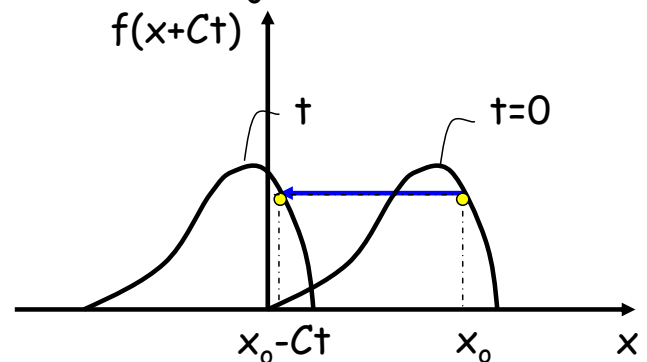
έστω $X^* = x - Ct$

τότε για $X^* = x - Ct = x_0$
 $\Rightarrow x = x_0 + Ct$



έστω $X^* = x + Ct$

τότε για $X^* = x + Ct = x_0$
 $\Rightarrow x = x_0 - Ct$



1^η Άσκηση για το Σπίτι

Το άκρο μιας απειρομήκουσ ράβδου μετατοπίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω νόμο:

$U=0$	για	$t \leq 0$
$U=t$ (cm)	για	$0 \leq t \leq 0.1s$
$U=0.2-t$	για	$0.1s \leq t \leq 0.2s$
$U=0$	για	$0.2s \leq t$

Να ευρεθεί η κατανομή των μετακινήσεων κατά μήκος της ράβδου για $t=0.3s$, εάν η αντίστοιχη ταχύτητα μετάδοσης κυμάτων είναι $300m/s$.

(Από «Σημειώσεις Εδαφοδυναμικής» Γ. Γκαζέτα)

Ταχύτητες διάδοσης κυμάτων P & S σε εδάφη και βράχους

κύματα S: $V_s = \sqrt{G/\rho}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

κύματα P: $V_p = \sqrt{D/\rho}$, $D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$

	V_s (m/s)	V_p (m/s)	
		ξηρά	κορεσμένα
χαλαρές-πρόσφατες αποθέσεις	< 400	< 1000	≈ 1500
μαλακοί βράχοι-σκληρά εδάφη	400-800	800-1600	1500-2000
βράχοι	800<	1600<	2000<

Ταχύτητα ταλάντωσης εδαφικού σημείου V

$$V = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial t} = (-\varepsilon_x)(\pm C)$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad V = \mp \frac{\sigma_x}{D} C \neq C$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: η ταχύτητα ταλάντωσης εδαφικού σημείου είναι διαφορετική (2 και 3 τάξεις μεγέθους μικρότερη!) από την ταχύτητα μετάδοσης του κύματος

Ειδική περίπτωση: αρμονικά κύματα

$$f_a(x + Ct) = Ae^{i\frac{\omega}{C}(x+Ct)} = Ae^{i(\omega t + kx)}$$

$$f_b(x - Ct) = Ae^{i\frac{\omega}{C}(x-Ct)} = Ae^{-i(\omega t - kx)}$$

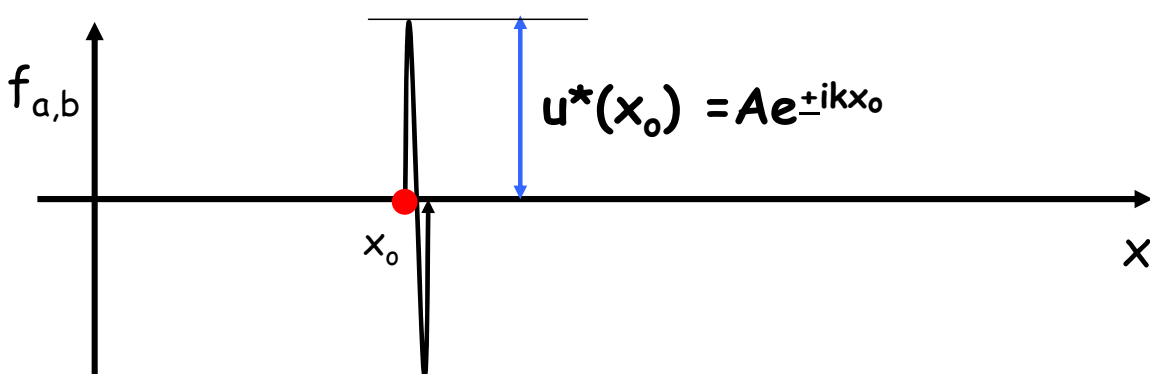
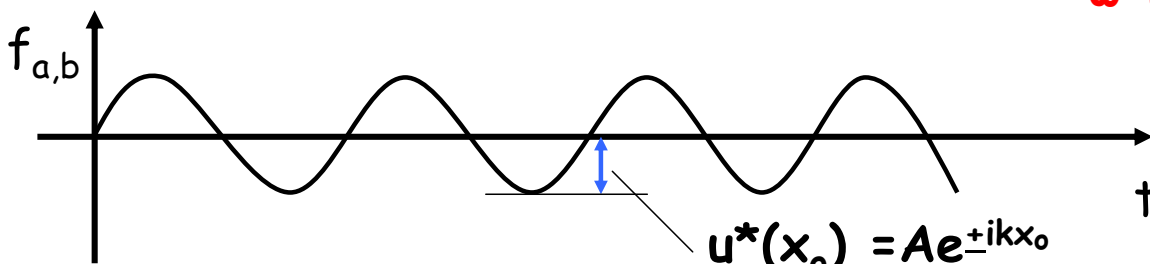
όπου $k = \omega/C =$ κυματικός αριθμός

εναλλακτικά: $f_{a,b} = Ae^{i(\omega t \pm kx)}$

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΕΔΑΦΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ σε δεδομένη θέση $x=x_0$...

$$f_{a,b} = Ae^{\pm ikx_0} e^{i\omega t} = u^*(x_0) e^{i\omega t} \Rightarrow$$

Αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = 2\pi/T$



ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ ΚΥΜΑΤΟΣ

σε δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_0 \dots$

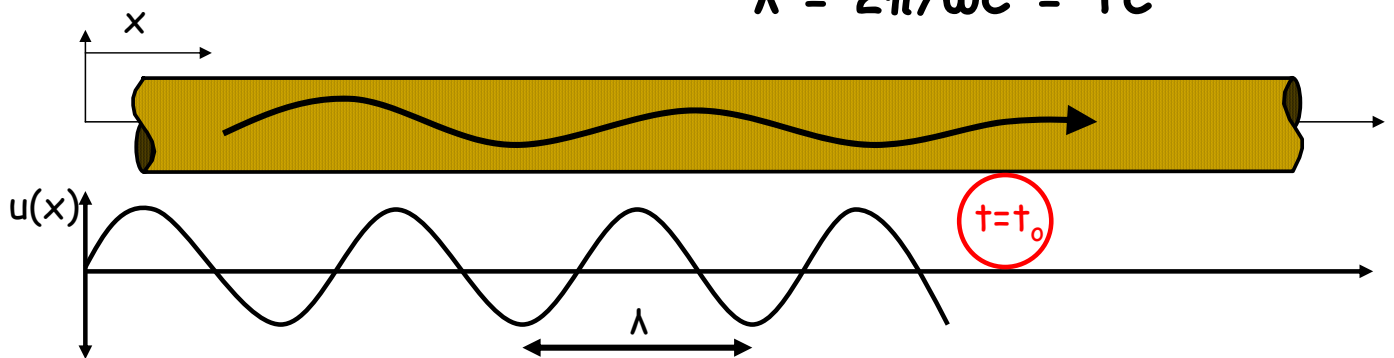
$$f_{a,b} = Ae^{i\omega t_0} e^{\pm ikx} = u^*(t_0) e^{\pm ikx}$$

Όπως προηγουμένως αλλά τώρα τον ρόλο της συχνότητας τον παίζει ο κυματικός αριθμός k

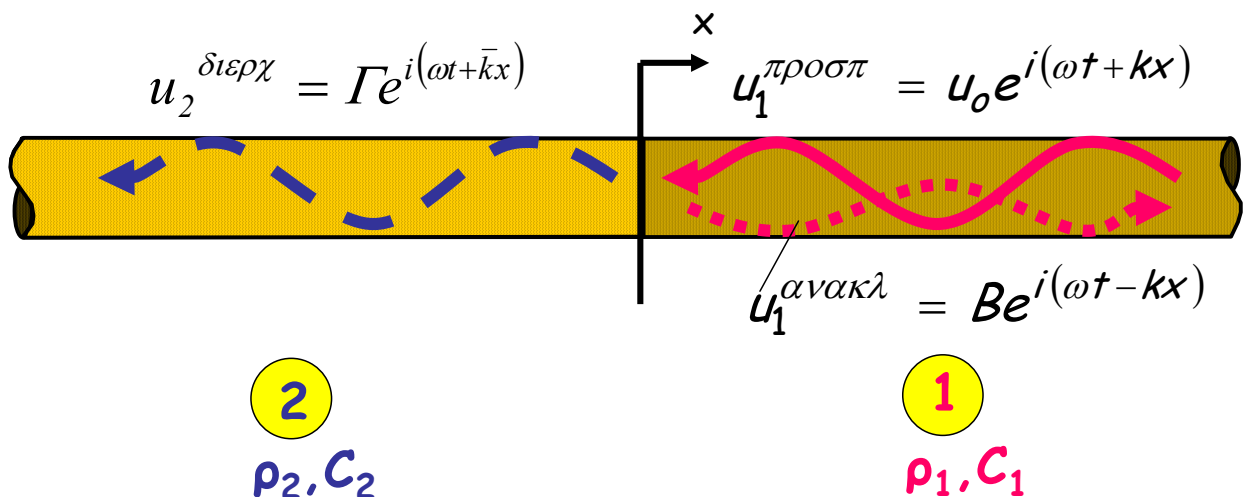
$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = 2\pi/\lambda$$

$$\omega/C = 2\pi/\lambda \Rightarrow$$

$$\lambda = 2\pi/\omega C = TC$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δύο ράβδοι σε επαφή



$$u_2 = \Gamma e^{i(\omega t + \bar{k}x)}$$

$$\sigma_2 = M\varepsilon_x = -M \frac{\partial u_2}{\partial x} =$$

$$= -M\Gamma \bar{k} e^{i(\omega t + \bar{k}x)}$$

$$u_1 = u_0 e^{i(\omega t + kx)} + B e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\sigma_1 = M\varepsilon_x = -M \frac{\partial u_1}{\partial x} =$$

$$= -Mu_0 k e^{i(\omega t + kx)} + MBk e^{i(\omega t - kx)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δύο ράβδοι σε επαφή

Συνοριακές συνθήκες:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \quad u_1=u_2 \\ \quad \quad \sigma_1=\sigma_2 \end{array} \right\} \text{ πλήρης συμβατότητα}$$

$$\sigma_1^{(o)} = \sigma_2^{(o)} \Rightarrow \bar{M}\bar{\Gamma}\bar{k}e^{i\omega t} = Mu_oke^{i\omega t} + MBke^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_o - B = \frac{\bar{k}}{k} \frac{\bar{M}}{M} \Gamma = \frac{C_2\rho_2}{C_1\rho_1} \Gamma$$

$$\text{όπου } k=\omega/C, \quad M=C^2\rho \text{ και} \\ kM=\omega C\rho$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δύο ράβδοι σε επαφή

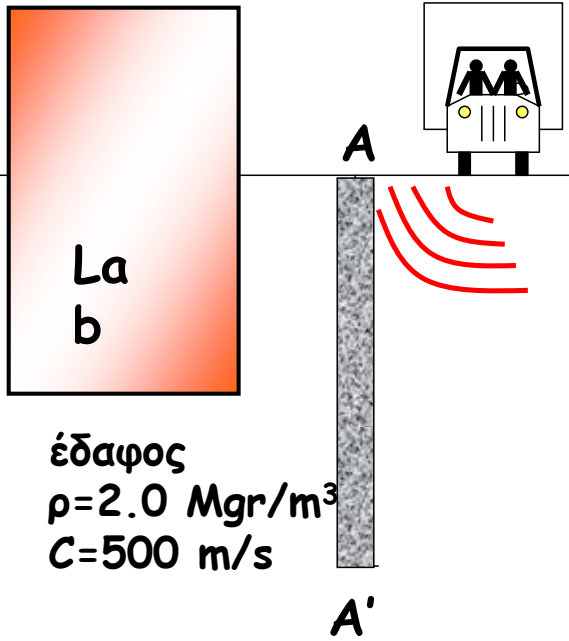
$$\left. \begin{array}{l} u_1(o) = u_2(o) \Rightarrow u_o + B = \Gamma \\ u_o - B = \frac{\rho_2 C_2}{\rho_1 C_1} \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = \frac{1 - \frac{\rho_2 C_2}{\rho_1 C_1}}{1 + \frac{\rho_2 C_2}{\rho_1 C_1}} u_o \\ \Gamma = \frac{2}{1 + \frac{\rho_2 C_2}{\rho_1 C_1}} u_o \end{array}$$

Οριακές περιπτώσεις:

$$\text{ελεύθερο άκρο:} \quad \rho_2 C_2 = 0 \quad B = u_o \quad \& \quad \Gamma = 2u_o$$

$$\text{ακίνητο άκρο:} \quad \rho_2 C_2 = \infty \quad B = -u_o \quad \& \quad \Gamma = 0$$

2η Άσκηση για το σπíti...



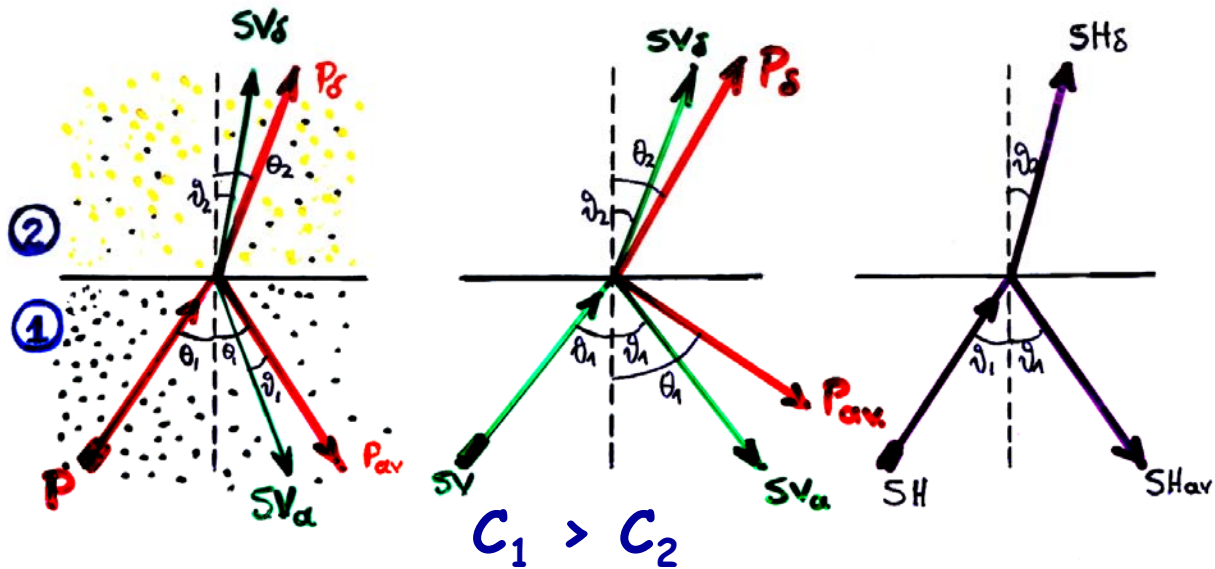
Για την μόνωση εργαστηρίου μετρήσεων ακριβείας, από κυκλοφοριακές δονήσεις, κατασκευάζεται τάφρος AA'. Ποιο από τα παρακάτω υλικά πλήρωσης της τάφρου είναι κατά την γνώμη σας το πιο αποτελεσματικό και γιατί:

- (α) σκυρόδεμα $\rho=2,5 \text{ Mgr/m}^3$
 $C=2000 \text{ m/s}$
- (β) ελαφρόπετρα $\rho=0,8 \text{ Mgr/m}^3$
 $C=100 \text{ m/s}$

3.2 ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΗ ΜΕΣΑ ΜΕ ΔΙ-ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

ΝΟΜΟΣ SNELL:

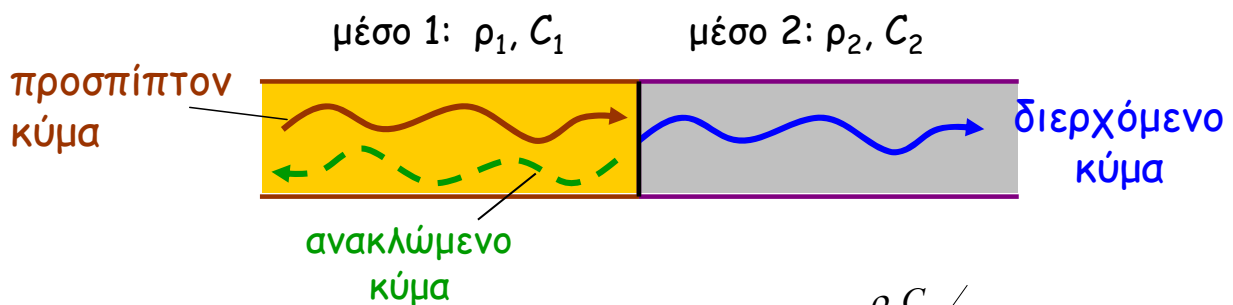
$$\frac{\sin \theta_1}{C_{p1}} = \frac{\sin \theta_2}{C_{p2}} = \frac{\sin \vartheta_1}{C_{s1}} = \frac{\sin \vartheta_2}{C_{s2}}$$



ΕΥΡΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

των ανακλώμενων & διαθλώμενων κυμάτων

Στην γνωστή μας ήδη, απλή περίπτωση 1-Δ διάδοσης:

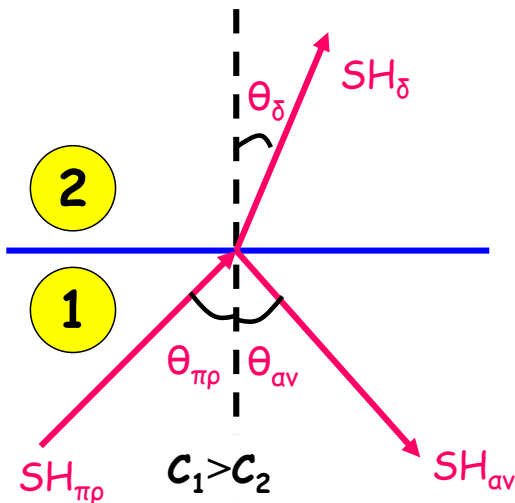


εύρος ταλάντωσης
u:

$$\left\{ \begin{aligned} u_{\text{ανακλ}} &= \frac{1 - \rho_2 C_2 / \rho_1 C_1}{1 + \rho_2 C_2 / \rho_1 C_1} u_{\text{πρ}} \\ u_{\text{διερχ}} &= \left(1 + \frac{u_{\text{ανακλ}}}{u_{\text{πρ}}} \right) u_{\text{πρ}} = \\ &= \frac{2}{1 + \rho_2 C_2 / \rho_1 C_1} u_{\text{πρ}} \end{aligned} \right.$$

το **ΕΥΡΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ** των ανακλώμενων & διαθλώμενων κυμάτων στις 2- Δ προκύπτει από τις εξισώσεις: ισορροπίας των τάσεων και συμβιβαστού (συνέχειας) των παραμορφώσεων στην δι-επιφάνεια, εξαρτάται δε από τους ίδιους παράγοντες όπως και στα κύματα 1- Δ + την γωνία πρόσπτωσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Κύματα SH (Richter 1958)



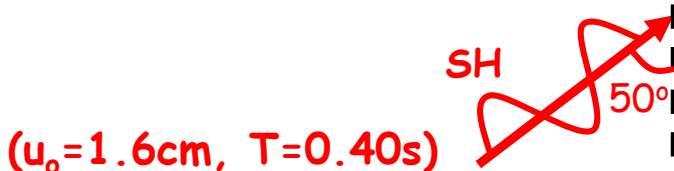
$$\frac{u_{\text{ανακλ}}}{u_{\pi\rho}} = \frac{1 - \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_\delta}{\rho_1 c_1 \cos \theta_\pi}}{1 + \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_\delta}{\rho_1 c_1 \cos \theta_\pi}}$$

$$\frac{u_{\text{διερχ}}}{u_{\pi\rho}} = 1 + \frac{u_{\text{ανακλ}}}{u_{\pi\rho}} = \frac{2}{1 + \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_\delta}{\rho_1 c_1 \cos \theta_\pi}}$$

3η Άσκηση για το Σπίτι: Να σχεδιασθεί η «ακτίνα» διάδοσης του κύματος SH καθ' ύψος της εικονιζόμενης εδαφικής τομής και να υπολογισθεί η επιβαλλόμενη οριζόντια επιτάχυνση σε κάθε εδαφική στρώση.

(αγνοείστε πιθανά φαινόμενα «εδαφικής ενίσχυσης»)

		± 0m
$C_s=300\text{m/s}$	$\rho=1.6\text{Mgr/m}^3$	
		- 20m
$C_s=600\text{m/s}$	$\rho=1.8\text{Mgr/m}^3$	
		- 40m
$C_s=1200\text{m/s}$	$\rho=2.2\text{Mgr/m}^3$	
		- 60m
$C_s=2400\text{m/s}$	$\rho=2.4\text{Mgr/m}^3$	



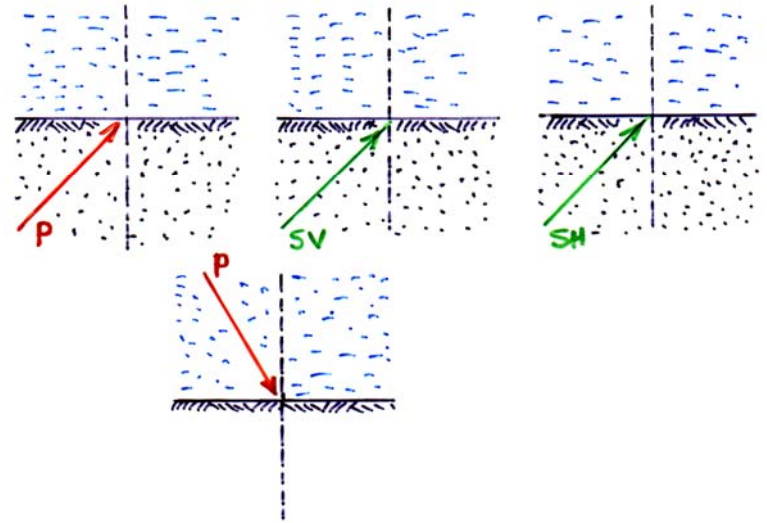
4η Άσκηση για το σπίτι:

Συμπληρώστε τον τύπο και την ακτίνα διάδοσης των ανακλώμενων και των διερχόμενων κυμάτων στις «ειδικές περιπτώσεις» του σχήματος

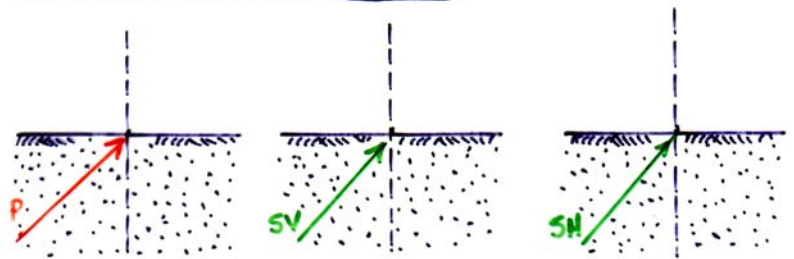


Ειδικές Περιπτώσεις

α. Διεπιφάνεια υγρού-στερεού



β. ελεύθερη επιφάνεια

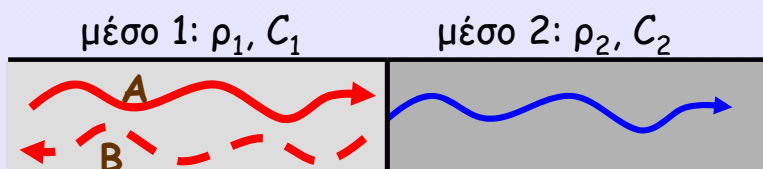


Στις προηγούμενες ειδικές περιπτώσεις «δεν έχουμε»:

- SV ή SH κύματα διερχόμενα στο νερό
- P, SV & SH κύματα διερχόμενα μέσω της ελεύθερης επιφάνειας

Τι σημαίνει το «δεν έχουμε»; Μήπως ότι το εύρος ταλάντωσης είναι μηδενικό ή κάτι άλλο;

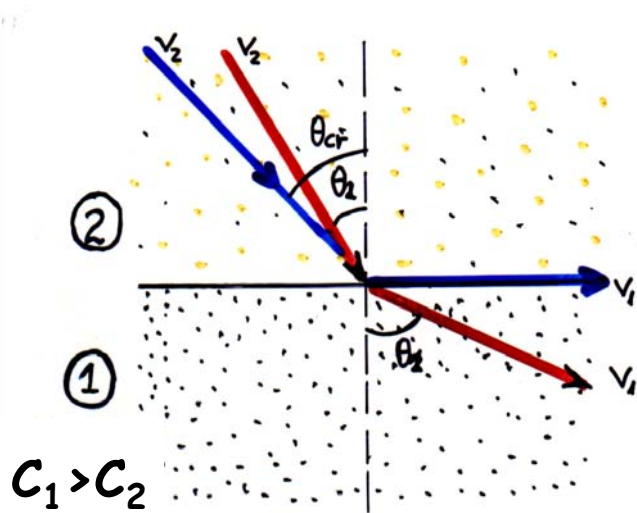
Υπενθύμιση



$$u_{OB} = \frac{1 - \rho_2 C_2 / \rho_1 C_1}{1 + \rho_2 C_2 / \rho_1 C_1} u_{OA}$$

$$u_{OT} = \frac{2}{1 + \rho_2 C_2 / \rho_1 C_1} u_{OA}$$

Οριακή διάθλαση:



$$\frac{\sin \theta_1}{C_1} = \frac{\sin \theta_2}{C_2} \Rightarrow \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \frac{C_1}{C_2}$$

$$\sin \theta_1 \leq 1 \Rightarrow \sin \theta_2 \frac{C_1}{C_2} \leq 1$$

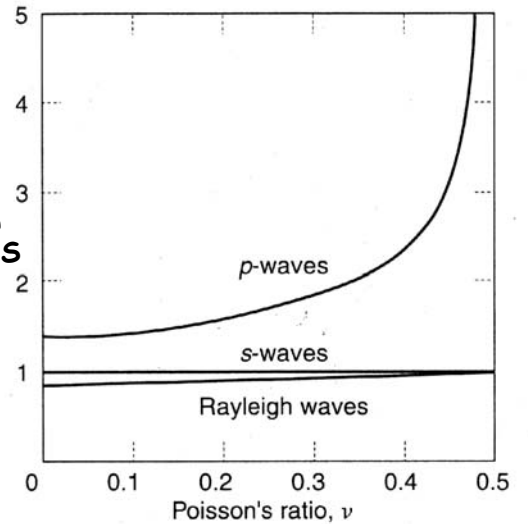
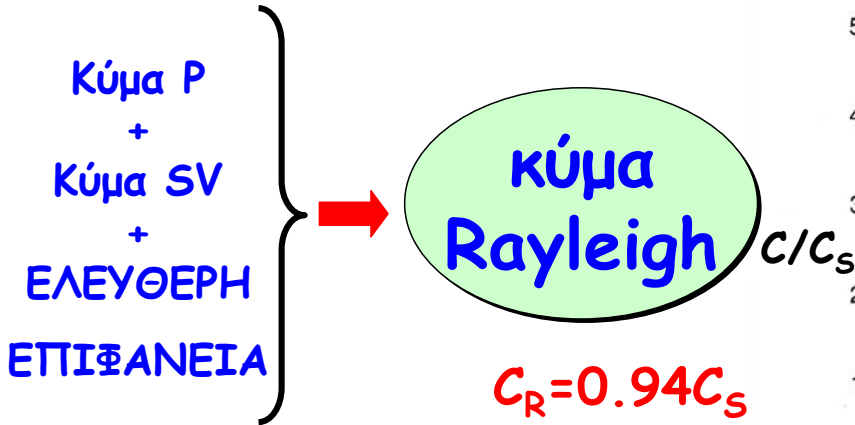
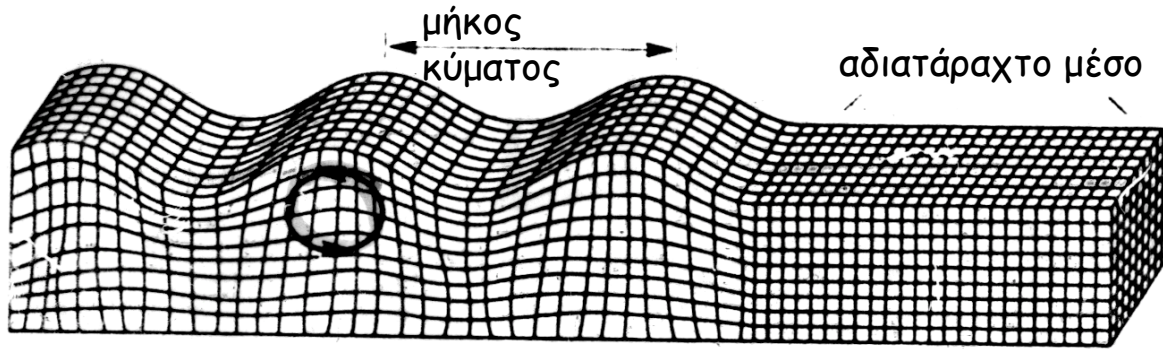
$$\Rightarrow \sin \theta_2 \leq \sin \theta_{cr} = \frac{C_2}{C_1}$$

$$\eta \theta_2 \leq \theta_{cr} = \sin^{-1} \frac{C_2}{C_1}$$

Τι συμβαίνει για $\theta_2 > \theta_{cr}$;

Εφαρμογή: Μέθοδος επιφανειακής διάθλασης για την γεωφυσική διασκόπηση του εδάφους

3.3 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΚΥΜΑΤΑ



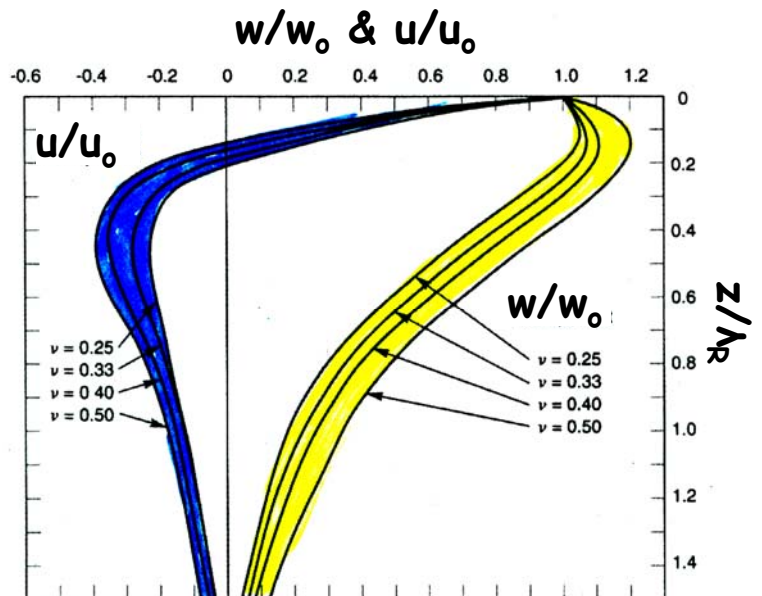
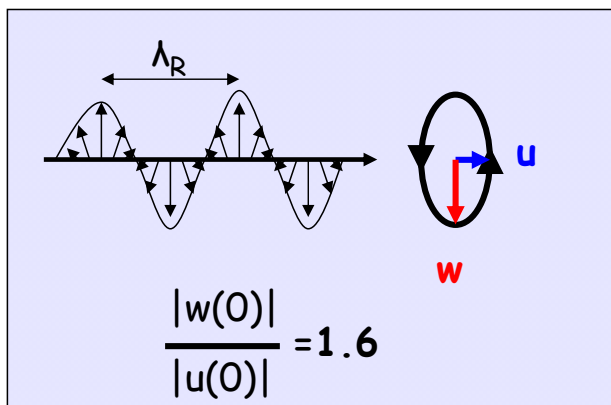
Μετακινήσεις επιβαλλόμενες από κύματα R

$$u = u(z, x, t) = iB \left\{ 0.55e^{-2z/\lambda_R} - e^{-5.8z/\lambda_R} \right\} e^{i(\omega t - 2\pi x/\lambda_R)}$$

$$w = w(z, x, t) = B \left\{ 1.66e^{-2z/\lambda_R} - 0.92e^{-5.8z/\lambda_R} \right\} e^{i(\omega t - 2\pi x/\lambda_R)}$$

$\lambda_R = C_R/f$ μήκος κύματος

B σταθερά πλάτους



5η Άσκηση για το σπίτι:

Για να αποκτήσετε μία αίσθηση του βάθους από την ελεύθερη επιφάνεια του εδάφους το οποίο επηρεάζεται από τα κύματα Rayleigh,

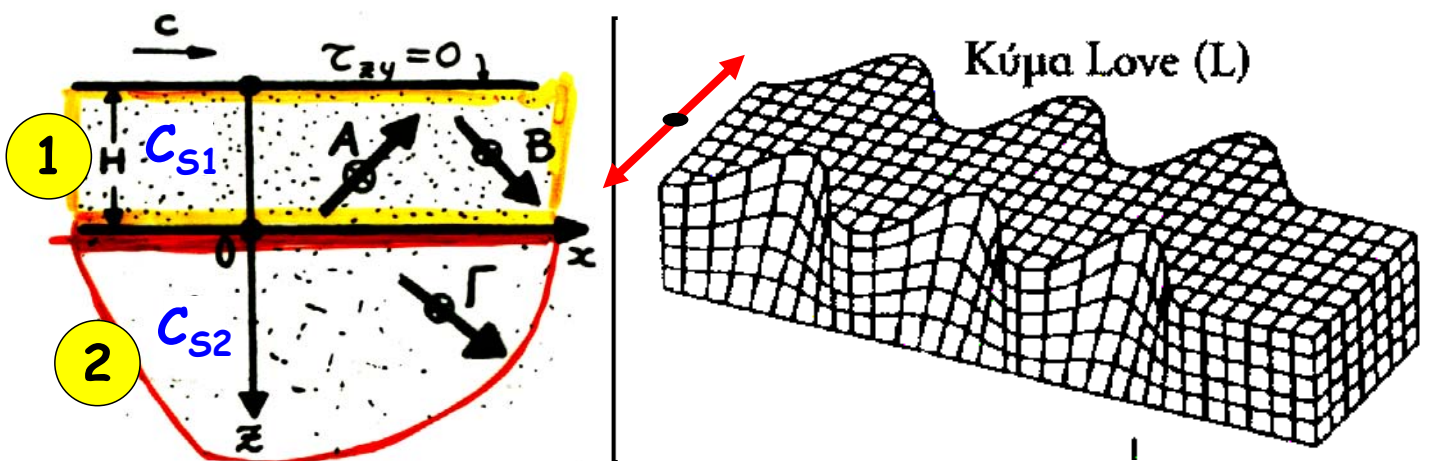
- Υπολογίστε το αδιάστατο βάθος z/λ_R κάτω από το οποίο οι μετατοπίσεις που επιβάλλονται από το κύμα Rayleigh είναι μικρότερες από το 10% των μετατοπίσεων στην επιφάνεια του εδάφους.
- Πόσο είναι το βάθος αυτό (αναμενόμενο εύρος διακύμανσης) στην περίπτωση χαλαρών αποθέσεων, μαλακού βράχου-σκληρού εδάφους και βράχου;

(Από «Σημειώσεις Εδαφοδυναμικής» Γ. Γκαζέτα)

ΚΥΜΑΤΑ LOVE (σε στρωματογενή ημίχωρο)

Είναι κύματα SH «παγιδευμένα» στο άνω στρώμα (ή στα άνω στρώματα) ενός στρωματογενούς ημιχώρου.

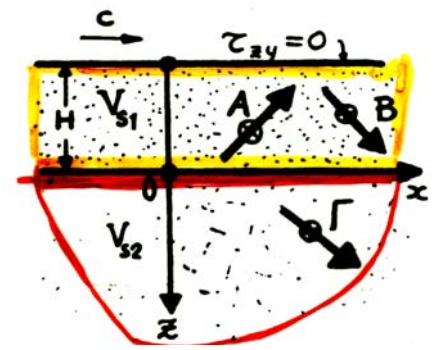
Η διατμητική δυσκαμψία των επιφανειακών στρωμάτων θα πρέπει να είναι μικρότερη από την δυσκαμψία του υποκείμενου ημιχώρου



$$u_1 = (Ae^{ir_1 kz} + Be^{-ir_1 kz})e^{i\omega(t-x/C)}$$

$$u_2 = \Gamma e^{-ir_2 kz} e^{i\omega(t-x/C)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = -H \quad (\text{ελεύθερη επιφάνεια}) : \tau_1 = 0 \\ z = 0 \quad (\text{διεπιφάνεια}) : \tau_1 = \tau_2, u_1 = u_2 \end{array} \right\} \rightarrow$$



$$\left\{ \begin{array}{l} Ae^{-ir_1 kH} - Be^{ir_1 kH} = 0 \\ A + B - \Gamma = 0 \\ A(G_1 r_1) + B(G_1 r_1) - \Gamma(G_2 r_2) = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Απαλοϊφοντας} \\ A, B, \Gamma \\ \text{παίρνουμε :} \end{array}$$

$$\tan \left[\frac{\omega H}{C} \sqrt{\frac{C^2}{C_{S1}^2} - 1} \right] = - \frac{G_2}{G_1} \frac{\sqrt{1 - \frac{C^2}{C_{S2}^2}}}{\sqrt{\frac{C^2}{C_{S1}^2} - 1}}$$

**ΕΞΙΣΩΣΗ
«ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ»**

Παρατηρείστε ότι επειδή $\tan(*) = \text{πραγματικός}$, θα πρέπει:

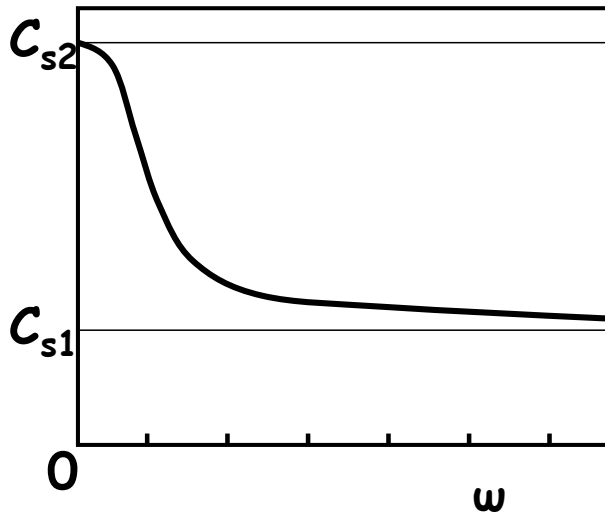
$$C_{S1} < C_{\text{LOVE}} < C_{S2}$$

Δηλαδή κύματα LOVE είναι δυνατά μόνον εάν το επιφανειακό στρώμα είναι μαλακότερο του ημιχώρου ($C_{S1} < C_{S2}$).

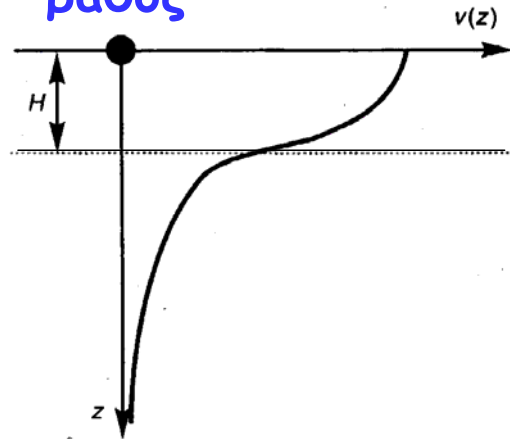
$$\tan \left[\frac{\omega H}{C} \sqrt{\frac{C^2}{C_{S1}^2} - 1} \right] = - \frac{G_2}{G_1} \frac{\sqrt{1 - \frac{C^2}{C_{S2}^2}}}{\sqrt{\frac{C^2}{C_{S1}^2} - 1}}$$

**ΕΞΙΣΩΣΗ
«ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ»**

Γραφική παράσταση της σχέσης ($C_{LOVE} - \omega$)



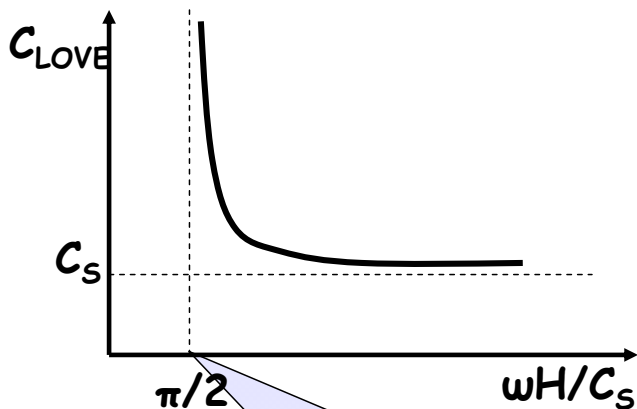
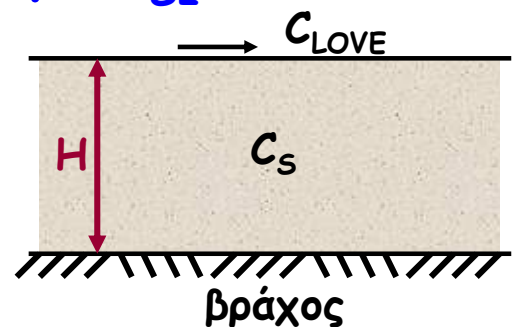
Μεταβολή της μετατόπισης με το βάθος



Ειδική Περίπτωση:

Μαλακή στρώση επί ΒΡΑΧΟΥ με $C_{S2} = \infty$

$$C_{LOVE} = \frac{\omega H}{\left\{ \left(\frac{\omega H}{C_s} \right)^2 - \left[\frac{\pi}{2} \right]^2 \right\}^{1/2}}$$



συχνότητα αποκοπής $\omega_c = (\pi/2) C_s/H$

Κύματα LOVE
 Δεν μπορούν να υπάρξουν για συχνότητες χαμηλότερες απ'την θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα του στρώματος, δηλ. όταν $\omega < \omega_c = (\pi/2) C_s/H$

Διασπορά: Η ιδιότητα κάποιων κυμάτων να έχουν διαφορετική ταχύτητα μετάδοσης, ακόμη και σε ομοιόμορφο μέσον, ανάλογα με την συχνότητα της ταλάντωσης.

Επιπτώσεις: όσο αυξάνεται η συχνότητα ω (μικραίνει η περίοδος T) τόσο μικραίνει η ταχύτητα μετάδοσης c_{LOVE} .

Αυτό σημαίνει ότι οι χαμηλόσυχνες συνιστώσες μίας σεισμικής διέγερσης διαχωρίζονται από τις υψηλόσυχνες μια και μεταδίδονται ταχύτερα.

Έτσι:

- διάρκεια καταγραφής $>$ διάρκεια διέγερσης (πηγής)
- φασματικό περιεχόμενο \neq φασματικό περιεχόμενο καταγραφής \neq φασματικό περιεχόμενο διέγερσης (πηγής)

