

2. Αρμονική Διέγερση στην Βάση Μονοβάθμιου Ταλαντωτή (1-DOF) & Ελαστικά Φάσματα Απόκρισης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

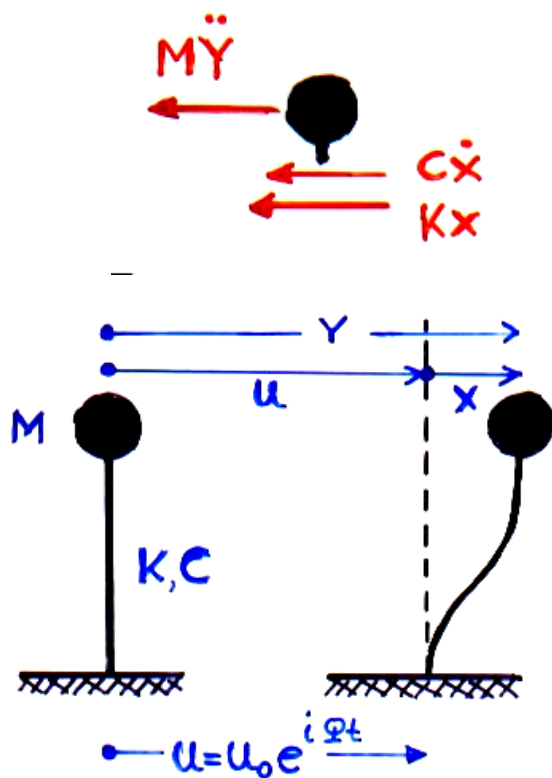
- 2.1 Υπολογισμός σχετικής μετατόπισης X
- 2.2 Υπολογισμός ολικής μετατόπισης Y
- 2.3. Ελαστικό φάσμα απόκρισης
- 2.4 Κάτι ακόμα για τα ελαστικά φάσματα απόκρισης

Πρόσθετο Διάβασμα

- Δυναμική απλών συστημάτων από άλλα ελληνικά ή ξένα βασικά βιβλία δυναμικής των κατασκευών (π.χ Chopra 1.1-1.7, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 6)...
- Κεφάλαιο 2 από «ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΕΔΑΦΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ» του καθ. Γ. Γκαζέτα

2.1 Υπολογισμός σχετικής μετατόπισης X

Εξίσωση δυναμικής ισορροπίας



$$M\ddot{Y} + C\dot{X} + KX = 0 \quad \left| \begin{array}{l} Y = X + U \end{array} \right.$$

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -M\ddot{U}$$

για αρμονική διέγερση:

$$U = U_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow \ddot{U} = -\Omega^2 U_0 e^{i\Omega t}$$

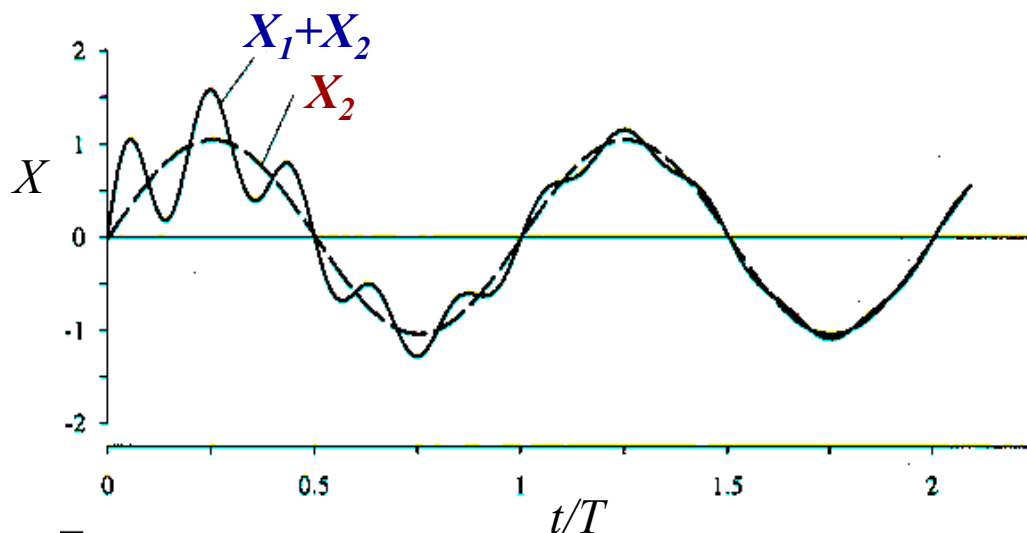
και τελικώς:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$\text{με } F_0 = \Omega^2 M U_0$$

$$\text{Υπενθύμιση: } [e^{i\Omega t} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t]$$

Επίλυση



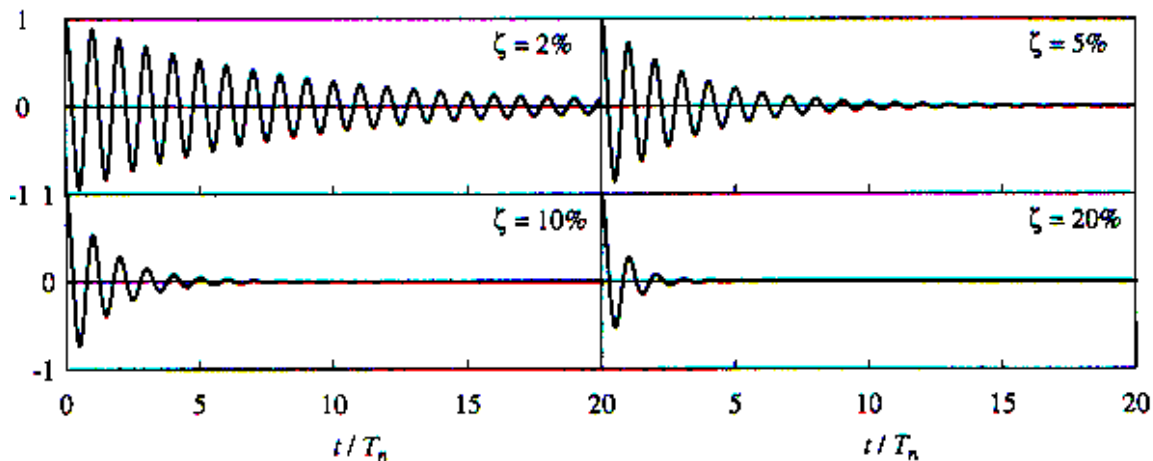
$$X = X_1 + X_2$$

όπου X_1 είναι η «**μεταβατική**» συνιστώσα και
 X_2 είναι η «**μόνιμη**» συνιστώσα της μετατόπισης που
παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον (γιατί;)

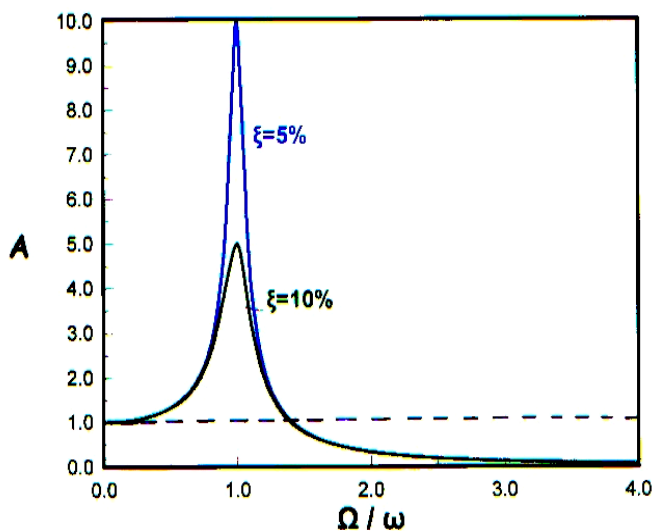
Η «**μεταβατική**» συνιστώσα της μετατόπισης (X_1) αποτελεί αποσβενυμένη ελεύθερη ταλάντωση με εξίσωση:

$$X_1 = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$$

Όπου: $\xi = C / 2\sqrt{KM}$, $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ και $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$



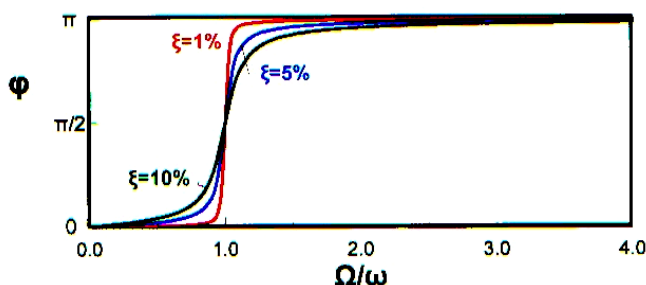
Προέξτε ότι η συνιστώσα αυτή έχει συχνότητα ίση με την ιδιο-συχνότητα του ταλαντωτή (ΟΧΙ με την συχνότητα της διέγερσης)



Η «**μόνιμη**» συνιστώσα της μετατόπισης (X_2) είναι αρμονική, με συχνότητα ίση προς αυτή της διέγερσης (Ω) και διαφορά φάσης (ϕ) από την διέγερση:

$$X_2 = (X_{ST} \cdot A) e^{i(\Omega t - \phi)}$$

όπου $X_{ST} = \frac{F_O}{K} = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 U_o$



$$A = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\Omega / \omega)^2]^2 + 4\xi^2 (\Omega / \omega)^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi (\Omega / \omega)}{1 - (\Omega / \omega)^2}$$

Άσκηση για την τάξη:

Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς και τα σχήματα για τον *δυναμικό συντελεστή A* και την *διαφορά φάσης φ* , να διατυπώσετε τους βασικούς μηχανισμούς και το φυσικό νόημα της απόκρισης $(X_2/U_0)_{\max}$ στις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

I. Περιοχή $\Omega/\omega \lll 1.0$

II. Περιοχή $\Omega/\omega = 1.0$

III. Περιοχή $\Omega/\omega \ggg 1.0$

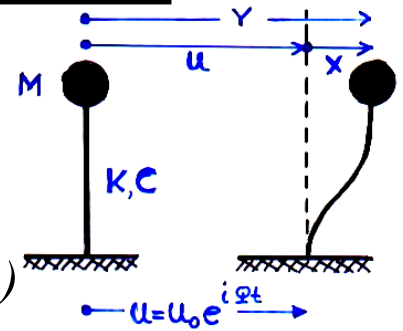
Παραδείγματα από την καθημερινή πράξη του μηχανικού (αλλά ακόμη και από την καθημερινή ζωή) θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση και είναι ευπρόσδεκτα.

2.2 Υπολογισμός ολικής μετατόπισης Y , (ταχύτητας και επιτάχυνσης)

$$Y = U + X = U_o e^{i\Omega t} + X_o e^{i(\Omega t - \phi)}$$

$$Y = (U_o + X_o e^{-i\phi}) e^{i\Omega t} = Y_o e^{i\Omega t}$$

$$Y_o = (U_o + X_o \cos \phi) - i(X_o \sin \phi)$$



Μετά από αδιαστατοποίηση ως προς την διέγερση της βάσης

$$\frac{Y}{U} = \frac{Y_o}{U_o} = 1 + \frac{X_o}{U_o} e^{-i\phi},$$

$$\frac{X_o}{U_o} = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 A$$

και τελικώς,

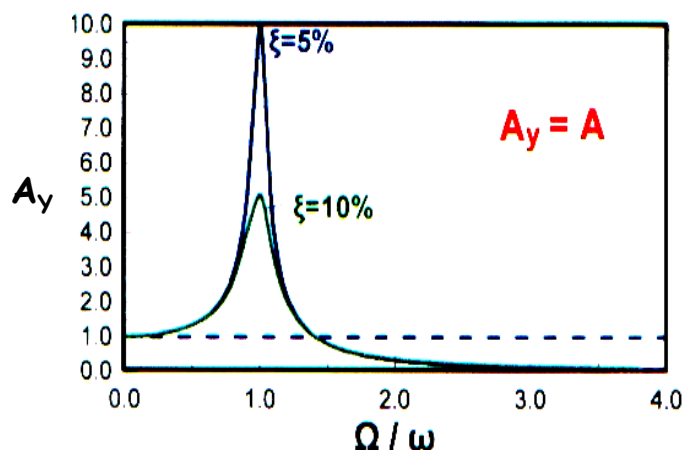
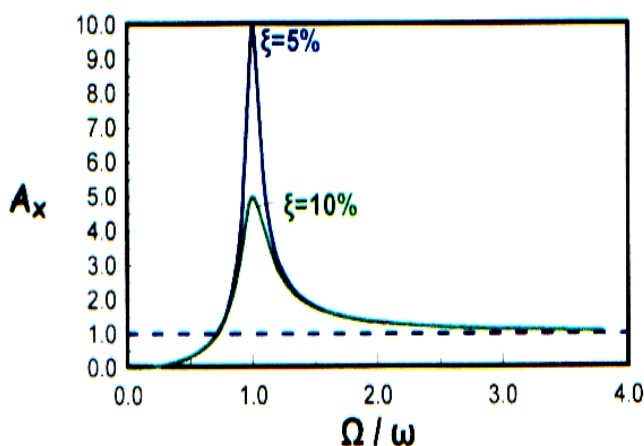
$$\frac{Y}{U} = \frac{Y_o}{U_o} = 1 + \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 A e^{-i\phi} \quad \text{ή (από κάποια περίεργη σύμπτωση που αξίζει να αποδείξετε)}$$

$$\left| \frac{Y}{U} \right| = \left| \frac{Y_o}{U_o} \right| \approx A$$

Για αρμονική διέγερση οι αδιαστατοποιημένες εκφράσεις της σχετικής και της ολικής μετατόπισης, που διατυπώθηκαν προηγουμένως, ισχύουν φυσικά και για τις αντίστοιχες ταχύτητες και επιταχύνσεις. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε τους εξής δύο «**δυναμικούς συντελεστές**»:

$$A_x = \frac{X}{U} = \frac{\dot{X}}{\dot{U}} = \frac{\ddot{X}}{\ddot{U}}$$

$$A_y = \frac{Y}{U} = \frac{\dot{Y}}{\dot{U}} = \frac{\ddot{Y}}{\ddot{U}}$$



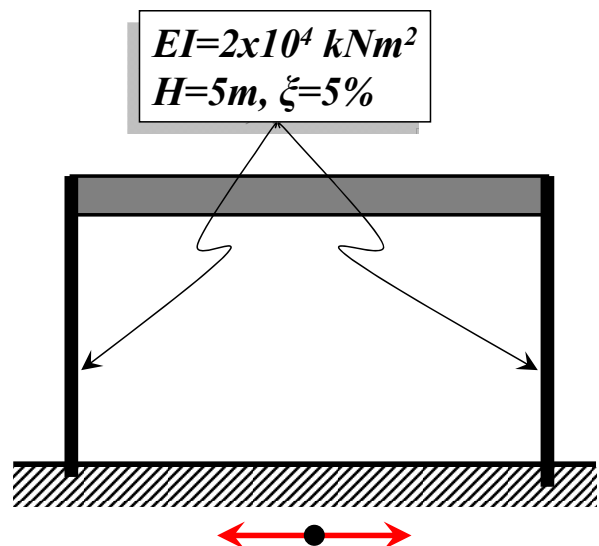
Και σε αυτή την περίπτωση αξίζει να ελέγξετε το φυσικό νόημα των ανωτέρω διαγραμμάτων για τις χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπου $\Omega/\omega \ll 1.0$, $\Omega/\omega = 1$ και $\Omega/\omega \gg 1$.

1^η Άσκηση για το σπίτι:

Για αρμονική σεισμική διέγερση του εδάφους, με εύρος μετατόπισης $U_0=0.15\text{m}$ και περίοδο $T_{\text{διδγ.}}=0.40\text{sec}$, να υπολογισθούν:

- 1) Η μέγιστη επιτάχυνση, ταχύτητα και μετατόπιση στην κορυφή του πλαισίου του σχήματος.
- 2) Η μέγιστη τέμνουσα δύναμη T και ροπή M οι οποίες ασκούνται στην κορυφή των δύο υποστυλωμάτων.

Να γίνει η παραδοχή ότι η δοκός του πλαισίου είναι απολύτως άκαμπτη και φέρει συνολικό βάρος (ίδιο και πρόσθετο) 500 kN . Αντίθετα, τα υποστυλώματα είναι εύκαμπτα και έχουν μηδενική μάζα.



2.3 Ελαστικό φάσμα απόκρισης

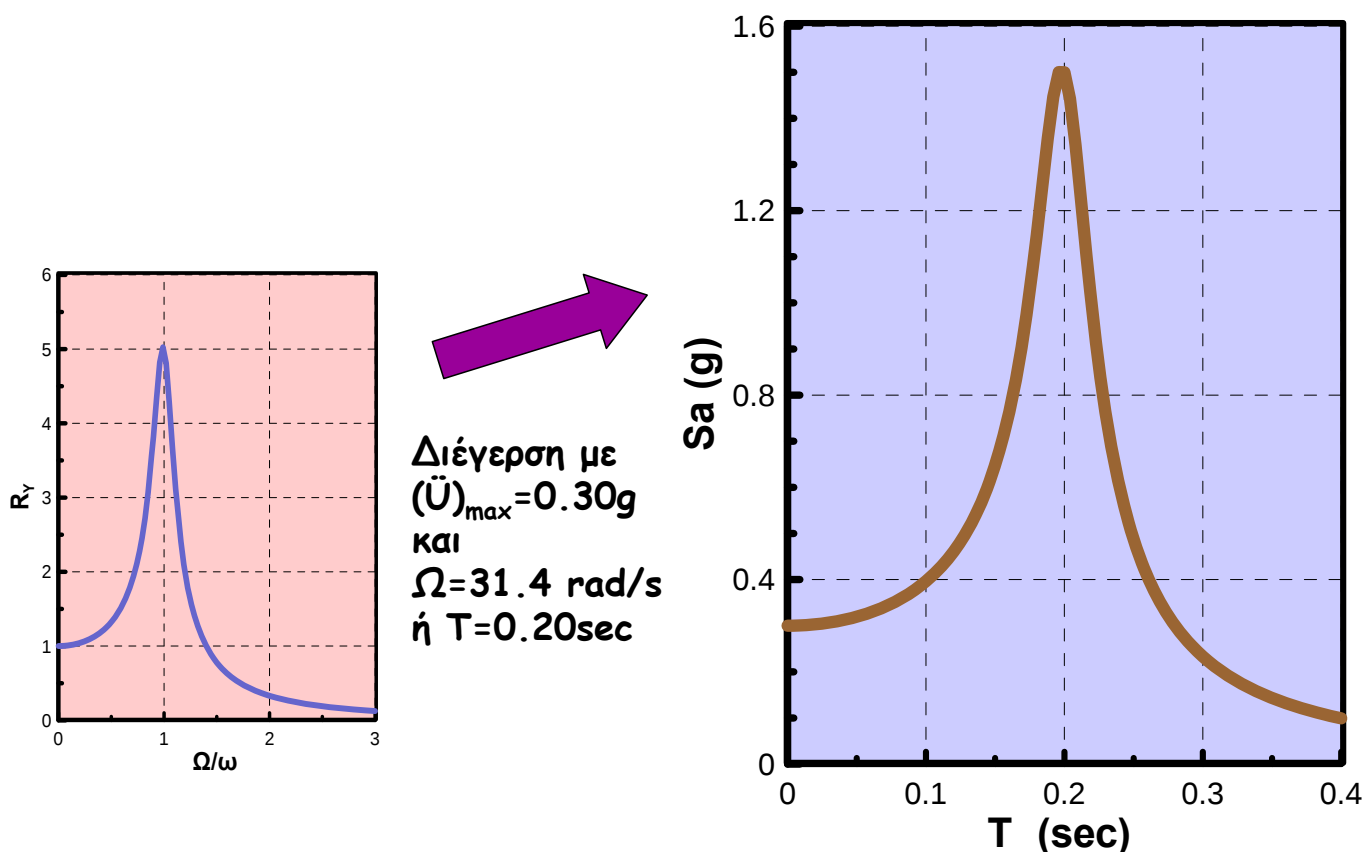
Αρμονική διέγερση

Το διάγραμμα μεταβολής του δυναμικού συντελεστή $R_Y - (\Omega/\omega)$ μπορεί να ερμηνευθεί κατά δύο βασικούς τρόπους:

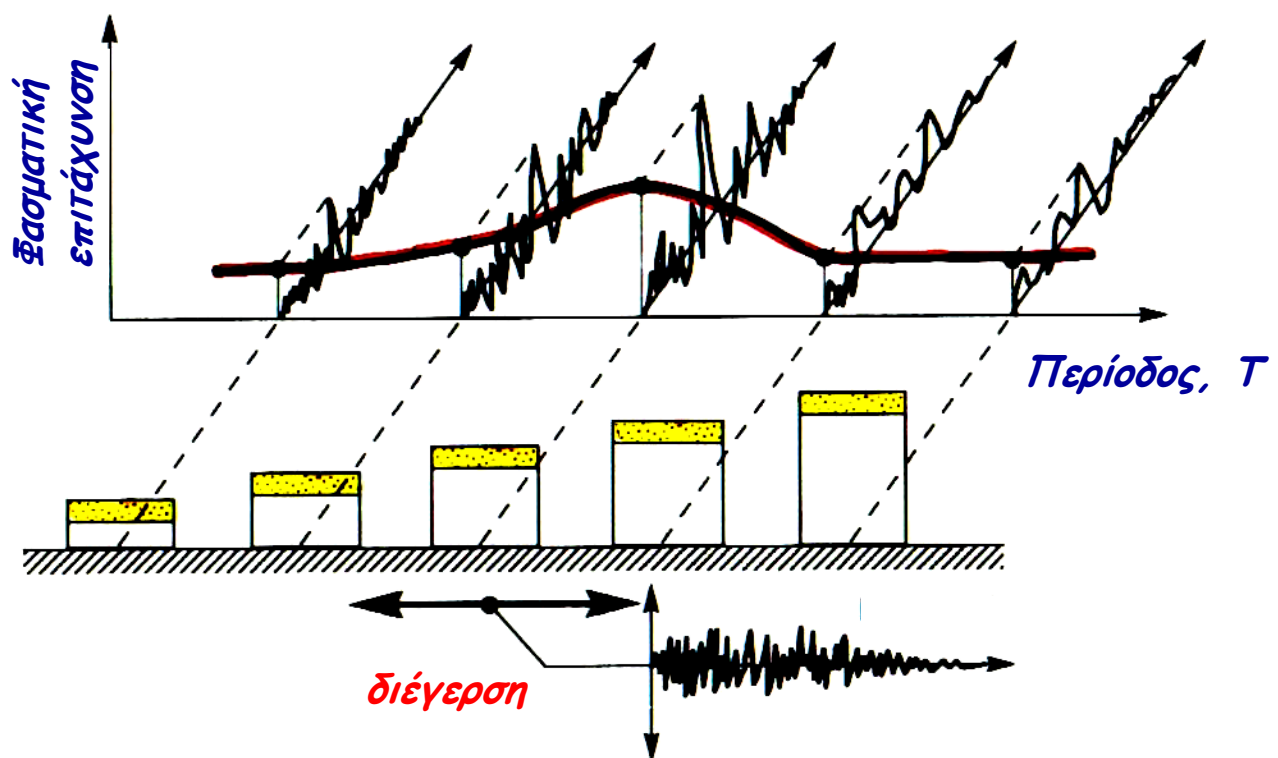
- A. Για δεδομένο ταλαντωτή, οπότε $\omega=2\pi/T=\text{σταθερό}$, περιγράφει την δυναμική απόκριση για διεγέρσεις διαφορετικής συχνότητας $\Omega=2\pi/T_{\text{διεγ.}}$.
- B. Για δεδομένη διέγερση, οπότε $\Omega=\text{σταθερό}$, περιγράφει την απόκριση διάφορων μονοβάθμιων ταλαντωτών συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης τους $\omega=2\pi/T_\omega$, δίνει δηλαδή το **ΦΑΣΜΑ** (πιθανό εύρος) της ιξωδο-ελαστικής απόκρισης του ταλαντωτή.

Η δεύτερη αυτή θεώρηση έχει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον για τον αντισεισμικό σχεδιασμό των κατασκευών μια και αποτελεί γραφική παράσταση των μέγιστων δράσεων (μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση) που επιβάλλονται στην μάζα μιας κατασκευής λόγω διέγερσης στην βάση της. Έτσι, επεκτάθηκε και σε μη αρμονικές-σεισμικές διεγέρσεις υπό την μορφή των γνωστών μας «**Φασμάτων Ελαστικής Απόκρισης**», αρχικά από τον Biot (1932) και ακολούθως από τον Housner.

Ελαστικό «ΦΑΣΜΑ» απόκρισης για αρμονική διέγερση

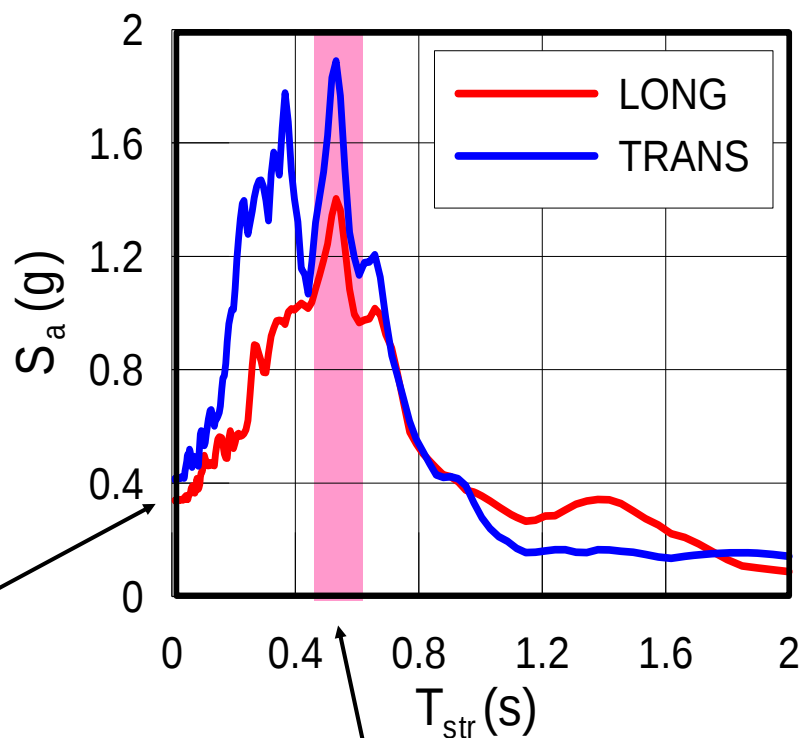


Ελαστικό «ΦΑΣΜΑ» επιτάχυνσης για ΣΕΙΣΜΙΚΗ διέγερση



ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ελαστικού φάσματος επιταχύνσεων

Καταγραφή
Λευκάδας
 $M=6.4$
14/08/2003



Μέγιστη
επιτάχυνση
διέγερσης

Εύρος σημαντικών περιόδων της διέγερσης

2.4 Κάτι ακόμη για τα Ελαστικά Φάσματα Απόκρισης

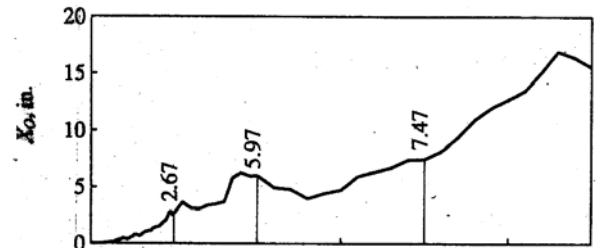
Οι τρεις «δείκτες δυναμικής συμπεριφοράς» που απεικονίζονται στα συνήθη φάσματα είναι οι εξής:

- **Η μέγιστη σχετική μετατόπιση X_0 .** Ο δείκτης αυτός είναι ο μόνος που ταυτίζεται με την αντίστοιχη παράμετρο της πραγματικής απόκρισης, μπορεί δε να χρησιμοποιηθεί άμεσα για τον υπολογισμό της μέγιστης τέμνουσας δύναμης στην βάση του ταλαντωτή, από την σχέση $F_0 = K X_0$.
- **Η μέγιστη ΨΕΥΔΟ-ταχύτητα $V_0 = \omega X_0 = (2\pi/T)X_0$.** Ο δείκτης αυτός έχει μονάδες ταχύτητας, αλλά δεν αντιστοιχεί στην μέγιστη σχετική ή απόλυτη ταχύτητα ταλάντωσης του συστήματος. Ποσοτικά ακριβής είναι η χρήση του στον υπολογισμό της μέγιστης ελαστικής ενέργειας (του ελατηρίου) που συσσωρεύεται στο σύστημα $E_0 = \frac{1}{2} (K X_0^2) = \frac{1}{2} (M V_0^2)$ (**γιατί;**). Επιπλέον, είναι περίπου ίσος προς την τιμή της **μέγιστης σχετικής ταχύτητας ταλάντωσης** για συστήματα με ιδοσυχνότητα παρεμφερή προς τις δεσπόζουσες συχνότητες της σεισμικής διέγερσης
- **Η μέγιστη ΨΕΥΔΟ-επιτάχυνση $A_0 = \omega^2 X_0 = (2\pi/T)^2 X_0$.** Ο δείκτης αυτός έχει μονάδες επιτάχυνσης, και αντιστοιχεί (με πολύ καλή προσέγγιση) στην **μέγιστη απόλυτη επιτάχυνση** ταλάντωσης του συστήματος. Ποσοτικά ακριβής είναι η χρήση του στον υπολογισμό της μέγιστης τέμνουσας δύναμης στην βάση του συστήματος, από την σχέση $F_0 = K X_0 = M A_0$ (**γιατί;**).

Συνήθη Ελαστικά Φάσματα Απόκρισης

Σεισμός El Centro, $\xi=2\%$

Μέγιστη σχετική μετατόπιση X_0 .



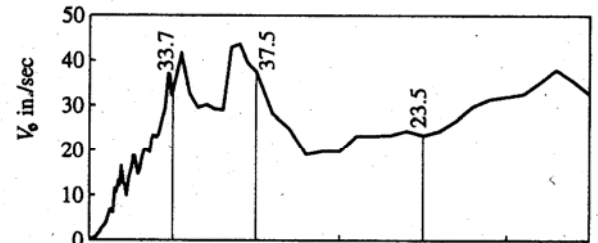
Μέγιστη ΨΕΥΔΟ-ταχύτητα

$$V_0 = \omega X_0 = (2\pi/T) X_0$$

[Μέγιστη ελαστική ενέργεια

$$E_0 = \frac{1}{2} (K X_0^2) = \frac{1}{2} (M V_0^2)]$$

→



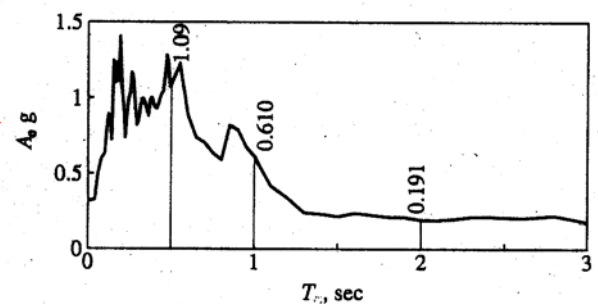
Μέγιστη ΨΕΥΔΟ-επιτάχυνση

$$A_0 = \omega^2 X_0 = (2\pi/T)^2 X_0$$

[Μέγιστη τέμνουσα βάσης

$$F_0 = K X_0 = M A_0]$$

→

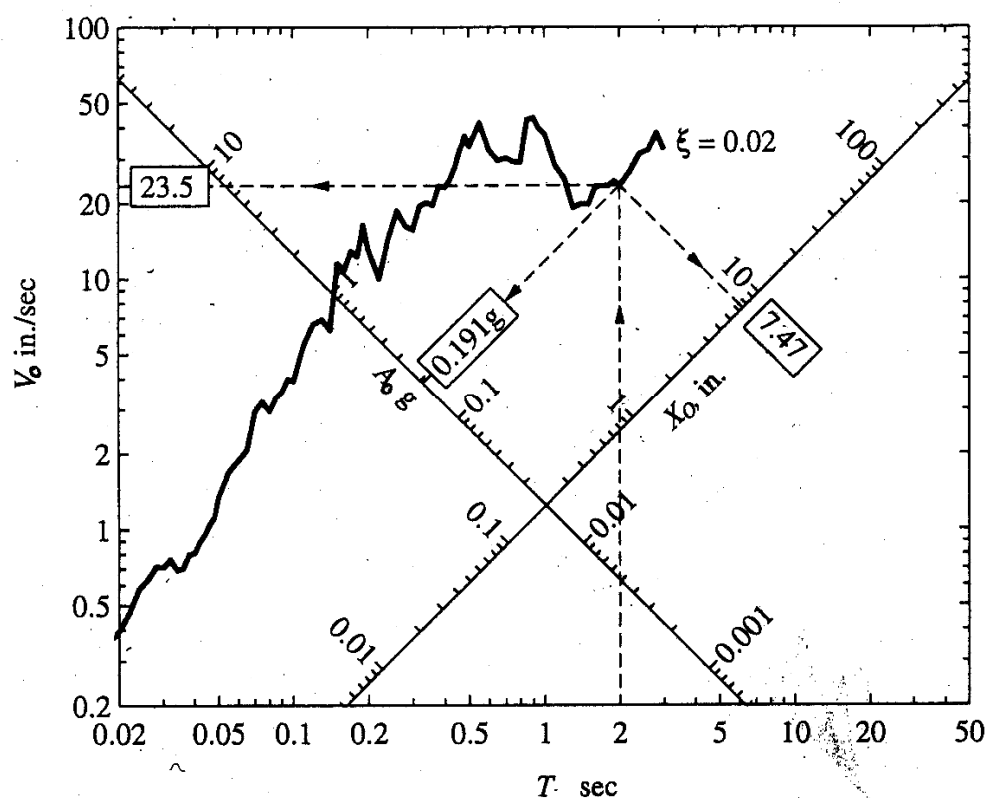


ΤΡΙ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ παρουσίαση φασμάτων

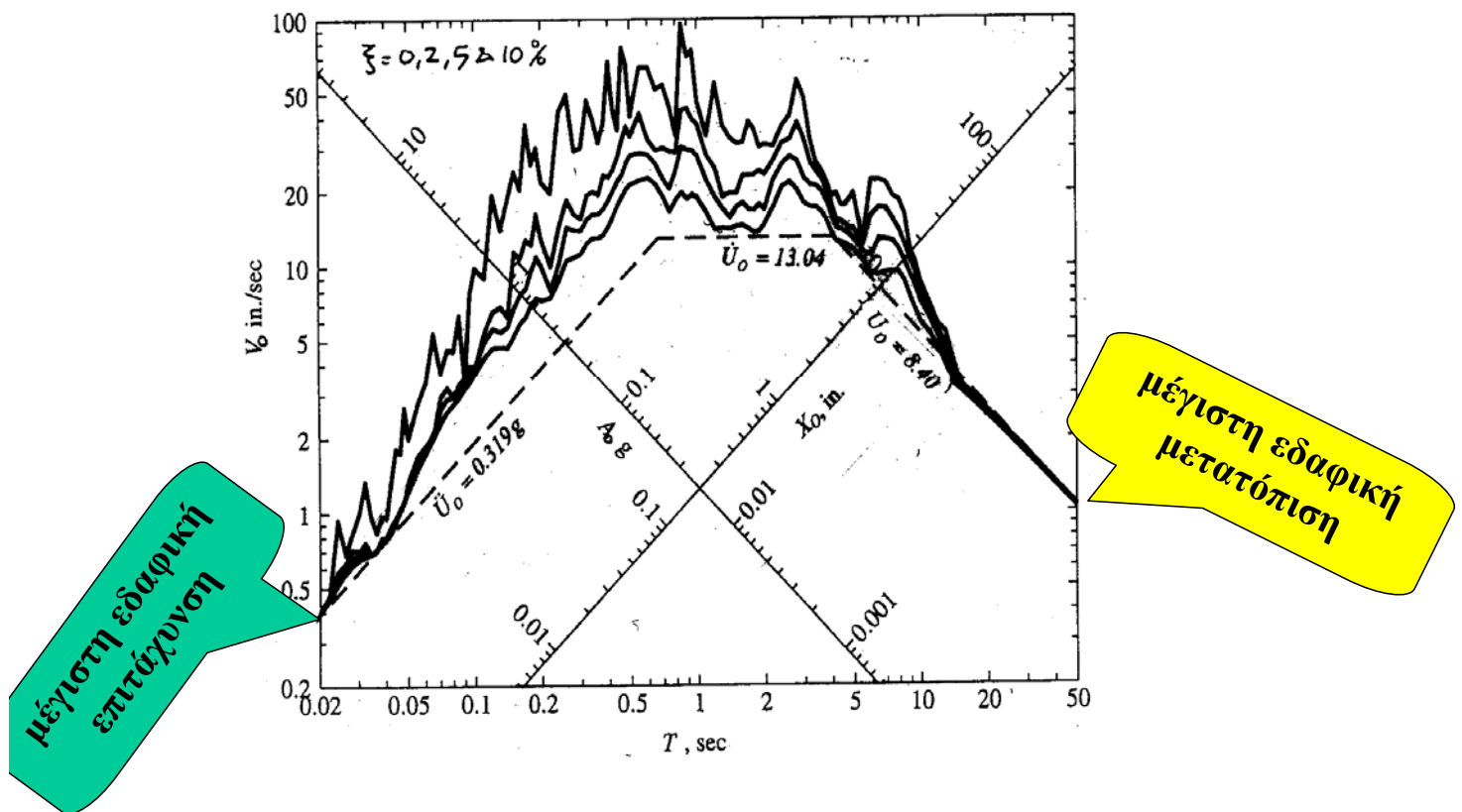
X_0

$V_0 = \omega X_0$

$A_0 = \omega^2 X_0$

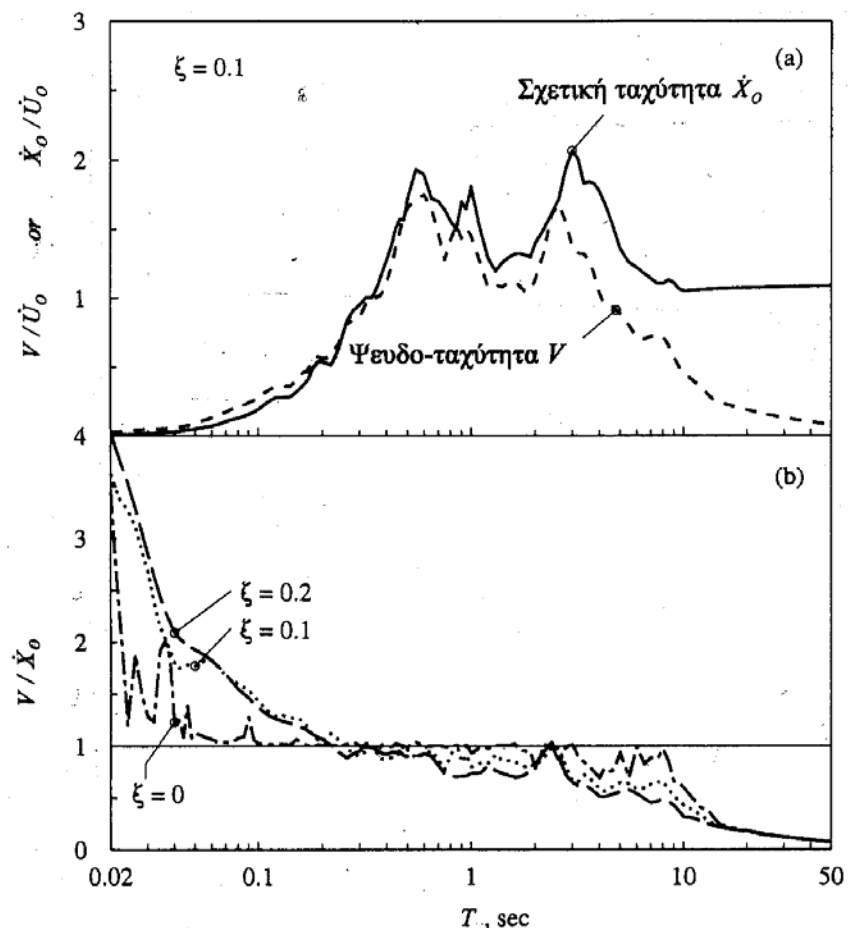


ΤΡΙ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ παρουσίαση φασμάτων



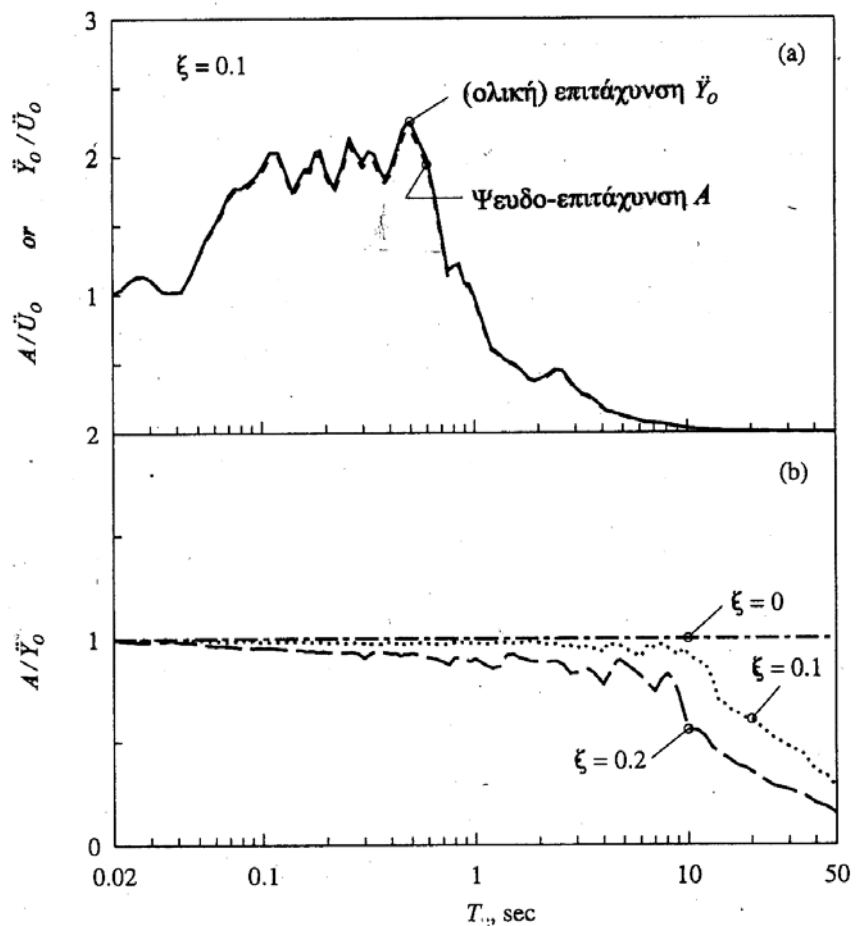
Σύγκριση:

Ψευδο-ταχύτητας
με
μέγιστη σχετική
ταχύτητα



Σύγκριση:

Ψευδο-επιτάχυνσης με μέγιστη επιτάχυνση

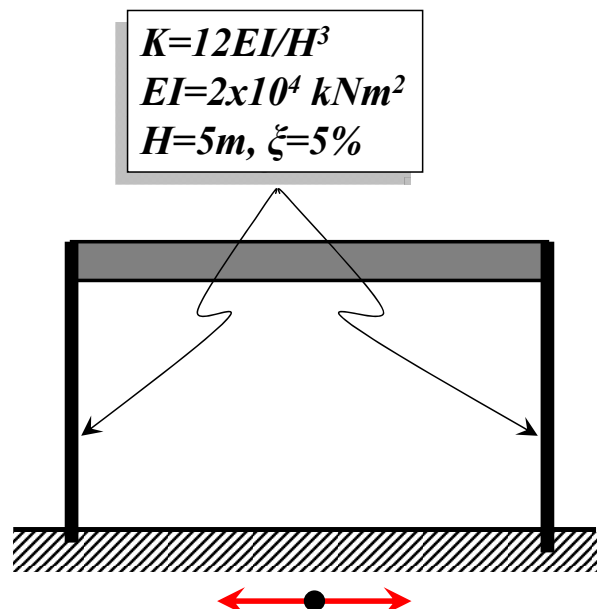


2^η Άσκηση για το σπίτι:

Για την σεισμική διέγερση El Centro, να υπολογισθούν:

- 1) Η μέγιστη επιτάχυνση, ψευδο-ταχύτητα και ψευδο-μετατόπιση στην κορυφή του πλαισίου του σχήματος.
- 2) Η μέγιστη τέμνουσα δύναμη T και ροπή M οι οποίες ασκούνται στην βάση των δύο υποστηλωμάτων.

Να γίνει η παραδοχή ότι η δοκός του πλαισίου είναι απολύτως άκαμπτη και φέρει συνολικό βάρος (ίδιο και πρόσθετο) 500 kN. Αντίθετα, τα υποστηλώματα είναι εύκαμπτα και έχουν μηδενική μάζα.



3^η Άσκηση για το σπίτι:

Για αρμονική σεισμική διέγερση, με εύρος μετατόπισης $U_0=0.15\text{m}$ και περίοδο $T_{\text{διδγ.}}=0.40\text{sec}$, να υπολογισθούν και να σχεδιασθούν:

- 1) Το ελαστικό φάσμα της σχετικής μετατόπισης για $\xi=2\%$.
- 2) Το ελαστικό φάσμα της Ψευδο-ταχύτητας και το ελαστικό φάσμα της μέγιστης σχετικής ταχύτητας για $\xi=2\%$ (ένα διάγραμμα)
- 3) Το ελαστικό φάσμα της Ψευδο-επιτάχυνσης και το ελαστικό φάσμα της μέγιστης επιτάχυνσης για $\xi=2\%$ (σε ένα σχήμα)
- 4) Ο λόγος των φασμάτων του ερωτήματος 2 και ο λόγος των φασμάτων του ερωτήματος 3 (σε ένα σχήμα)

Να γίνει σύγκριση με τα αντίστοιχα διαγράμματα-φάσματα από τον σεισμό του El Centro και να εντοπισθούν οι βασικές ομοιότητες και οι διαφορές.

