



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Τομέας Γεωτεχνικής

*Σημειώσεις
για το κατ'επιλογήν μάθημα του 9ου εξαμήνου*

Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Γεωτεχνική

Γεώργιος Δ. Μπουκοβάλας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Νοέμβριος 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. **Εισαγωγή**
2. **Συνήθεις Υπολογιστικές Μέθοδοι**
3. **Απλές Υπολογιστικές Μέθοδοι**
(Ανάλυση ευστάθειας πρανών με την μέθοδο των λωρίδων)
4. **Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών**
5. **Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων**
6. **Τεχνικές Ανάλυσης Μη-Γραμμικών Προβλημάτων**

1. Εισαγωγή

Το 1977, δύο από τους πρωτεργάτες της Υπολογιστικής Γεωτεχνικής έγραψαν:

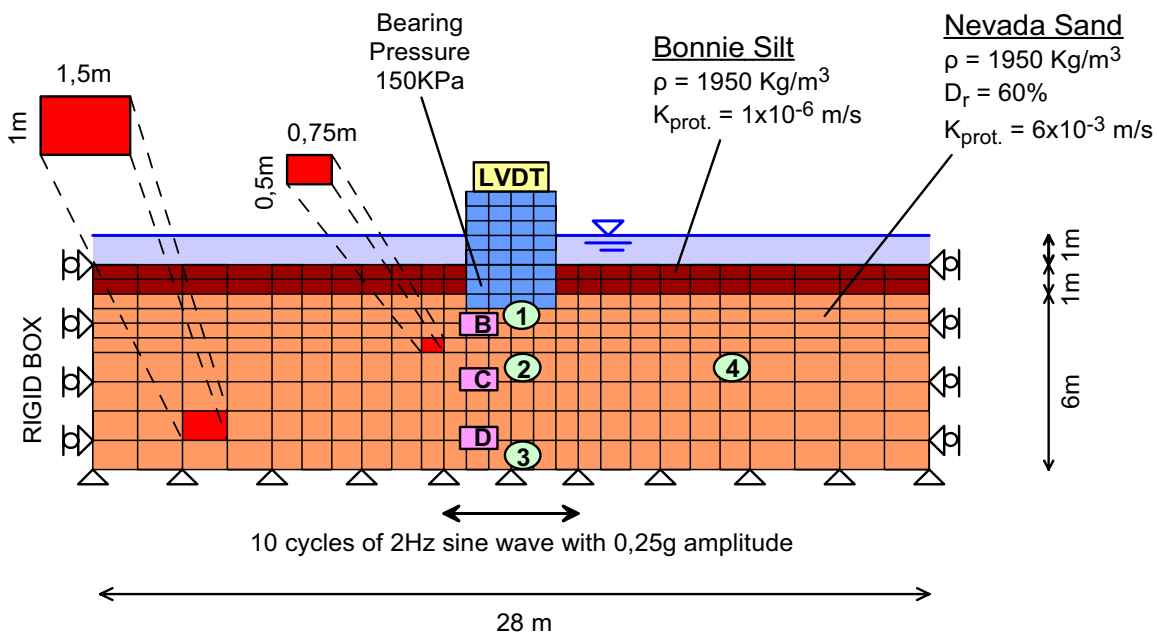
«Κατά την τελευταία 10-ετία γίναμε μάρτυρες μιας τρομερής ανάπτυξης των αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων στην επιστήμη του μηχανικού. Η δημοτικότητα και το μεγάλο εύρος εφαρμογής αυτών των τεχνικών οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη μεγάλων και ταχύτατων ηλεκτρονικών υπολογιστών»

(Desai & Christian in "Numerical Methods in Geotechnical Engineering")

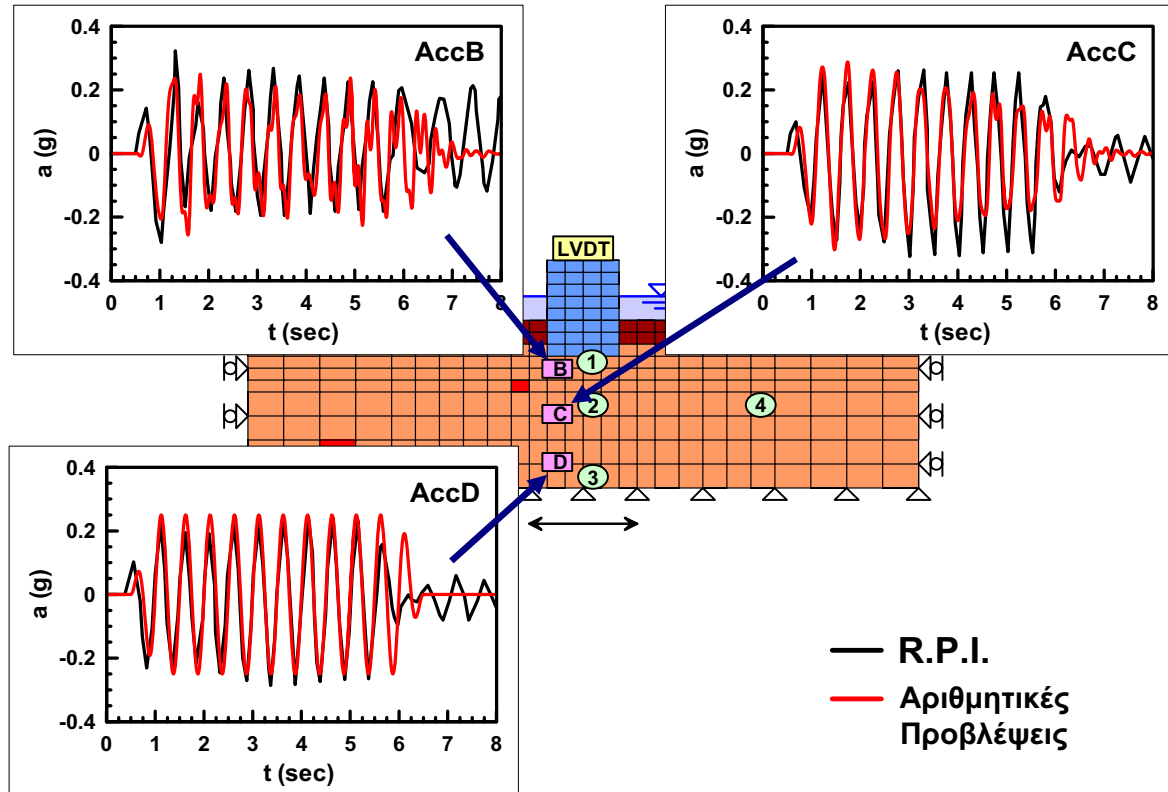
Η διαπίστωση αυτή είναι πολύ πιο επίκαιρη σήμερα, περίπου 30 χρόνια μετά, όταν η υπολογιστική ισχύς ενός συνηθισμένου «προσωπικού» (desktop) υπολογιστή είναι πολύ μεγαλύτερη από την ισχύ των υπολογιστών στους οποίους αναφέρονται οι ανωτέρω επιστήμονες. Στην πραγματικότητα, μόνον τα πολύ απλά προβλήματα της γεωτεχνικής (π.χ. φέρουσα ικανότητα και καθίζηση συνηθισμένων κτιρίων) επιλύονται με την βοήθεια αναλυτικών ή εμπειρικών μεθόδων. Τα γεωτεχνικά προβλήματα που αφορούν μεγάλα κτίρια ή έργα υποδομής (θεμελιώσεις γεφυρών, υπόγεια έργα, ευστάθεια πρανών, σεισμική απόκριση θεμελιώσεων και γεωτεχνικών κατασκευών, κλπ.) επιλύονται συνήθως με την βοήθεια υπολογιστικών μεθόδων που παρέχουν την δυνατότητα συστηματικής αντιμετώπισης της εδαφικής ανομοιομορφίας, της ανελαστικής συμπεριφοράς των εδαφικών (και μη) υλικών, καθώς και της πολύπλοκης γεωμετρίας των έργων.

Για παράδειγμα, το 2005.....

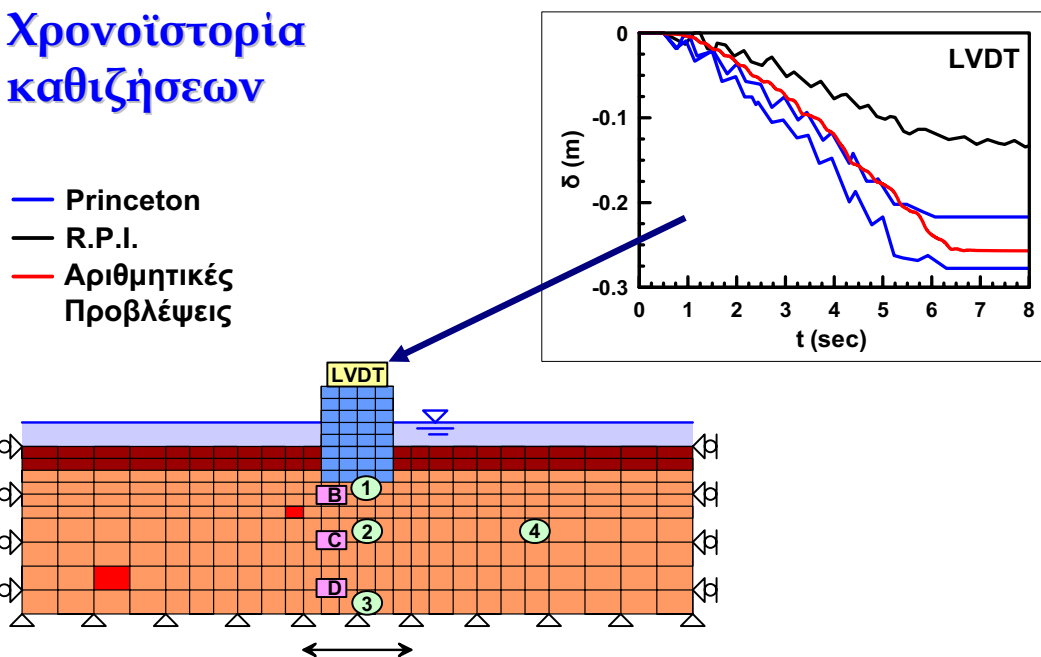
**συζευγμένη δυναμική ανάλυση ενεργών τάσεων και πιέσεων
πύργων θεμελίωσης επί ρευστοποιήσιμου εδάφους**



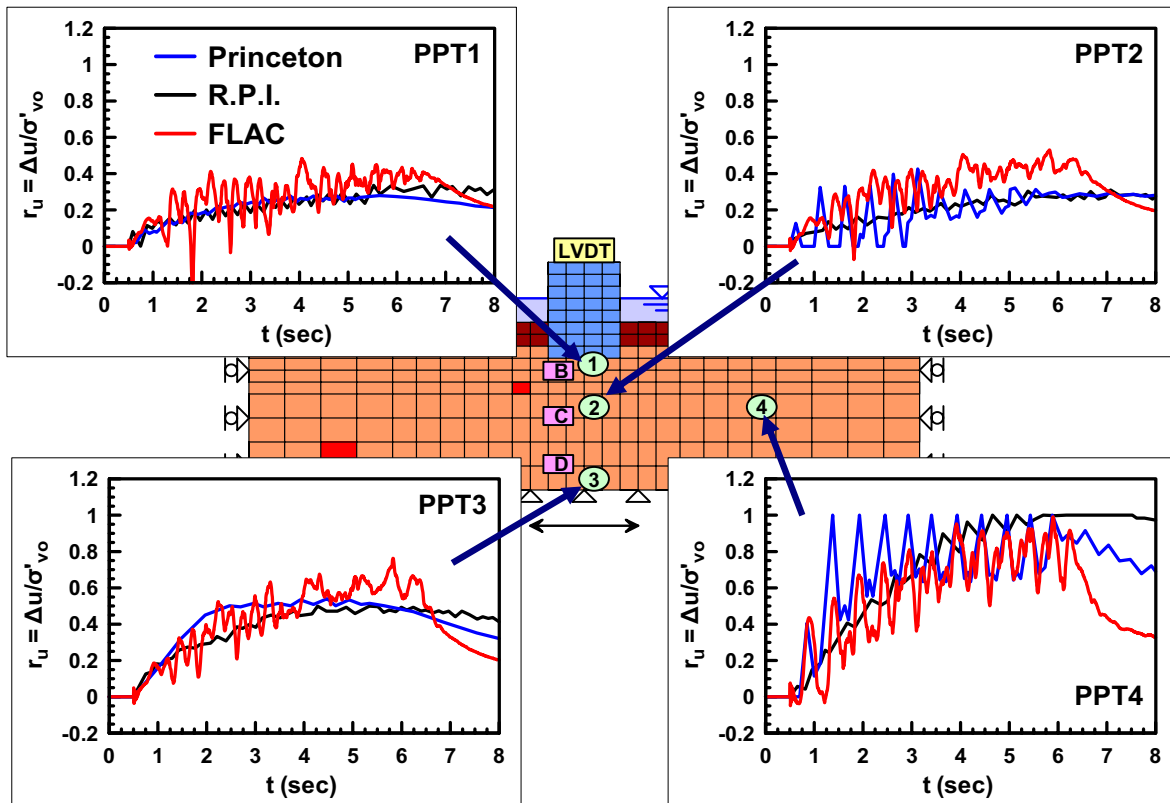
Χρονοϊστορίες επιταχύνσεων....



Χρονοϊστορία καθιζήσεων



Λόγος υδατικών υπερ-πιέσεων $r_u = \Delta u / \sigma'_{vo} \dots$

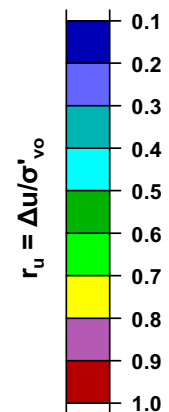


ας δούμε και ένα VIDEO

για την ανάπτυξη και εκτόνωση των **υδατικών υπερπιέσεων**

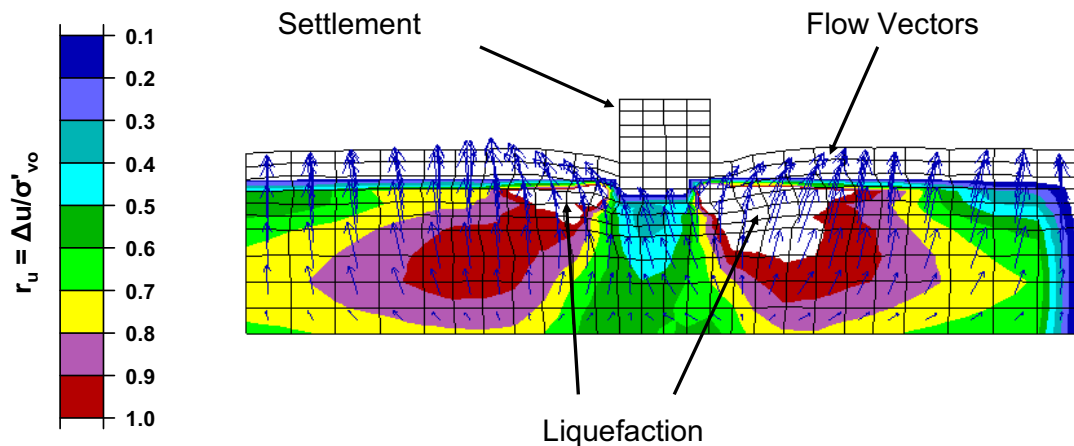
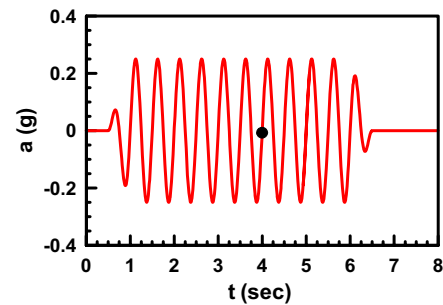
παρατηρείστε:

- ✚ την έντονη διακύμανση των διανυσμάτων ροής
(*συνεχίζει να ισχύει ο νόμος Darcy ?*)
- ✚ την ρευστοποίηση στο ελεύθερο πεδίο
- ✚ τις μικρότερες σχετικά υδατικές υπερπιέσεις κάτω από το θεμέλιο (*τότε γιατί έχουμε τόσο μεγάλες καθιζήσεις ?*)



[PLAY VIDEO](#)

μηχανισμός ανάπτυξης και εκτόνωσης Υδατικών υπερ-πιέσεων



Σκοπός και περιεχόμενα της παρούσας ενότητας

Σε αυτή την ενότητα του μαθήματος θα παρουσιασθούν συνοπτικά οι συνηθέστερες υπολογιστικές μέθοδοι – τεχνικές που χρησιμοποιούνται σήμερα για την επίλυση γεωτεχνικών προβλημάτων, καθώς και βασικές έννοιες και όροι που αναπόφευκτα θα συναντήσει ο χρήστης των ανωτέρω μεθόδων κατά την εφαρμογή τους στην πράξη.

Τα στοιχεία αυτά, σε συνδυασμό με την παρουσίαση των καταστατικών σχέσεων που διέπουν την μηχανική συμπεριφορά των διάφορων γεω-υλικών, πιστεύουμε ότι θα από-κωδικοποιήσουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις οδηγίες χρήσης (user's manual) των αντίστοιχων λογισμικών. Επιπλέον, και ίσως πιο σημαντικό, θα βοηθήσουν στην συνειδητή αξιολόγηση από τον χρήστη των διαφόρων εναλλακτικών επιλογών που προσφέρονται από το λογισμικό, προκειμένου να επιτευχθεί μία όσο το δυνατόν ακριβέστερη προσομοίωση και επίλυση του τεχνικού προβλήματος που μας απασχολεί.

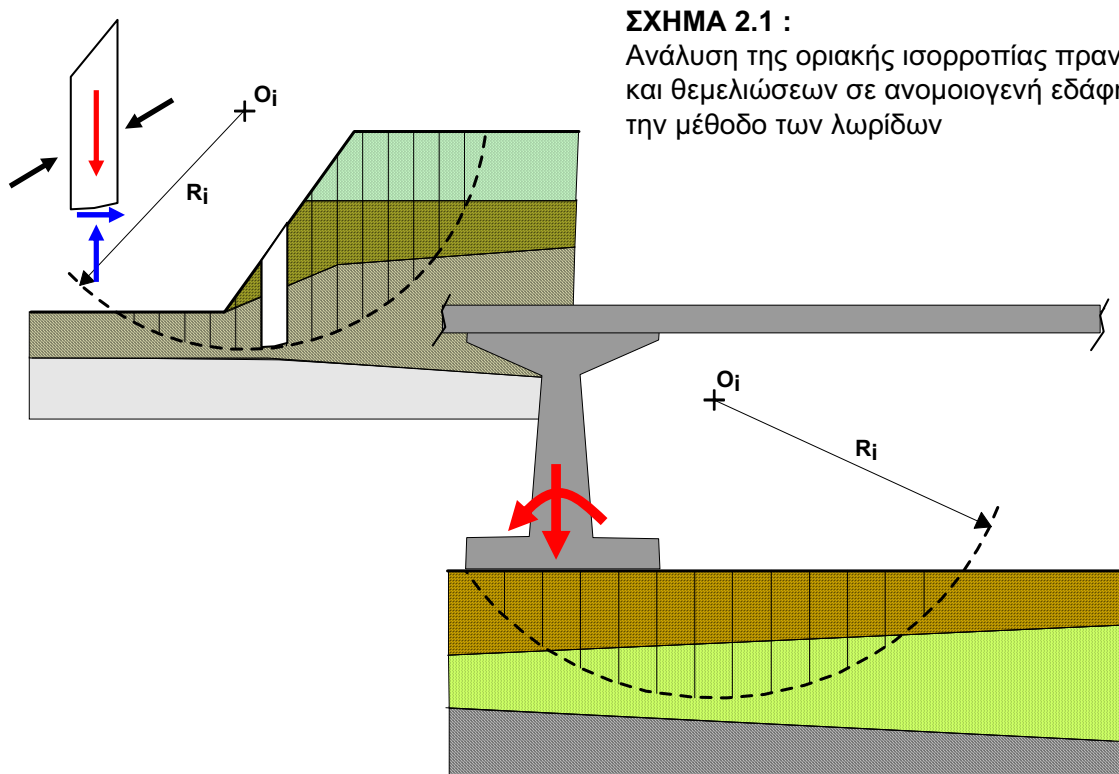
Επισημαίνεται, ότι το θεωρητικό υπόβαθρο για τις περισσότερες από τις υπολογιστικές μεθόδους που θα εξετάσουμε είναι εκτεταμένο και φυσικά δεν μπορεί να καλυφθεί στα πλαίσια ενός μαθήματος. Ευτυχώς όμως, τόσο στην Σχολή μας όσο και σε άλλες Σχολές του Ε.Μ.Π. παρέχονται προπτυχιακά και μεταπτυχιακά μαθήματα που αποσκοπούν στην λεπτομερή περιγραφή διαφόρων υπολογιστικών μεθόδων και μπορούν να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις όσων επιθυμούν να προχωρήσουν πέρα από το επίπεδο του «εκπαιδευμένου χρήστη».

2. Συνήθειες Υπολογιστικές Μέθοδοι

Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες σήμερα υπολογιστικές μέθοδοι είναι δυνατόν να διαχωρισθούν σε δύο αδρές κατηγορίες:

(α) Απλές Υπολογιστικές Μέθοδοι, οι οποίες προέκυψαν από κωδικοποίηση σε μορφή λογισμικού χρονοβόρων κατά κανόνα αναλυτικών, εμπειρικών ή και προσεγγιστικών λύσεων οι οποίες αναπτύχθηκαν αρχικά για εφαρμογή χωρίς κατ' ανάγκην χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Το πλέον αντιπροσωπευτικό παράδειγμα των μεθόδων αυτών είναι η ανάλυση της οριακής ισορροπίας πρηνών και θεμελιώσεων σε ανομοιογενή εδάφη με την μέθοδο των λωρίδων (Σχήμα 2.1). Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής αποσκοπεί στον εντοπισμό της δυσμενέστερης επιφάνειας αστοχίας εντός του εδάφους, και επομένως προϋποθέτει επαναληπτική επίλυση με την διαδικασία «δοκιμής – λάθους» (trial-and-error) που την κάνει αρκετά χρονοβόρα. Το θεωρητικό υπόβαθρο όμως της μεθόδου είναι σχετικά απλό, η δε κωδικοποίηση της σε μορφή λογισμικού δεν απαιτεί ιδιαίτερες τεχνικές και γνώσεις (πέραν από τη χρήση κάποιας γλώσσας προγραμματισμού), εκτός και εάν υπάρχουν απαιτήσεις για γραφική περιγραφή του προβλήματος και παρουσίαση των αποτελεσμάτων.



ΣΧΗΜΑ 2.1 :

Ανάλυση της οριακής ισορροπίας πρηνών και θεμελιώσεων σε ανομοιογενή εδάφη με την μέθοδο των λωρίδων

(β) Αριθμητικές Μέθοδοι, οι οποίες αποτελούν ουσιαστικά προσεγγιστικούς αλγορίθμους επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων (ισορροπίας, ροής, κίνησης) που διέπουν τα διάφορα προβλήματα της γεωτεχνικής μηχανικής (βλέπε Πίνακα 2.1).

Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες σήμερα αριθμητικές μέθοδοι είναι των *Πεπερασμένων Διαφορών (Π.Δ.)* και των *Πεπερασμένων Στοιχείων (Π.Σ.)*, οι οποίες θα παρουσιασθούν συνοπτικά στα πλαίσια του μαθήματος. Υπάρχουν βέβαια και αρκετές άλλες μέθοδοι αυτής της κατηγορίας (π.χ. οι μέθοδοι των *Χαρακτηριστικών* και των *Συνοριακών Στοιχείων*) οι οποίες όμως είναι λιγότερο δημοφιλείς στον χώρο της Γεωτεχνικής.

Η βασική αρχή των περισσότερων από αυτές της μεθόδους είναι η *διακριτοποίηση*, ή πιο απλά η υπο-διαίρεση ενός εκτενούς προβλήματος σε πολύ μικρότερες ισοδύναμες μονάδες εντός των οποίων η γενική λύση μπορεί να πάρει προσεγγιστικά μία αρκετά απλή μορφή με μικρή επίπτωση στην ακρίβεια των υπολογισμών.

Για παράδειγμα, ως θεωρήσουμε τον πάσσαλο του Σχήματος 2.2 ο οποίος υπόκειται σε ροπή κεφαλής και στηρίζεται πλευρικά από «ελατηριωτό έδαφος» (Winkler). Η ακριβής επίλυση του προβλήματος αυτού μας δίνει το βέλος κάμψης το οποίο αντιστοιχεί στην ομαλή ελαστική γραμμή του σχήματος. Σε πρώτη προσέγγιση, με τη μέθοδο Π.Σ., ο πάσσαλος θα διακριτοποιηθεί κατά μήκος σε μικρότερα τμήματα και η οριζόντια μετατόπιση θα θεωρηθεί ότι μεταβάλλεται γραμμικά εντός του κάθε τμήματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1:

Τυπικά προβλήματα της Γεωτεχνικής Μηχανικής και οι βασικές διαφορικές εξισώσεις που τα περιγράφουν.

Πρόβλημα	Διαφορική Εξίσωση	Άγνωστη Μεταβλητή
Στατικής Ισορροπίας [π.χ. κατανομή τάσεων στο έδαφος, υπολογισμός καθιζήσεων και φέρουσας ικανότητας θεμελίων (επίπεδη ένταση ή παραμόρφωση)]	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$	Μετατόπιση
Μόνιμης Ροής [π.χ. ροή υπόγειου νερού μέσω φράγματος ή στην περιοχή βαθιών εκσκαφών με άντληση (επίπεδη ένταση ή παραμόρφωση)]		Υδραυλικό ύψος
Μεταβλητής Ροής [π.χ. 1-Δ Στερεοποίηση]	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.2)$	Υδραυλικό ύψος
Μετάδοσης Κυμάτων [π.χ. 1-Δ μετάδοση σεισμικών κυμάτων - σεισμική απόκριση επίπεδων εδαφών]	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3)$	Μετατόπιση
Δυναμικής Ισορροπίας [π.χ. κατακόρυφη ταλάντωση θεμελίου]	$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = 0 \quad (2.4)$	Μετατόπιση

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1 (Συνέχεια)**Υπενθύμιση!**

Στην βιβλιογραφία των Μαθηματικών,

οι διαφορικές εξισώσεις (2.1), (2.2) και (2.3) του προηγούμενου Πίνακα αναφέρονται ως «ελλειπτικές», «παραβολικές» και «υπερβολικές» αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της γενικής διαφορικής εξίσωσης:

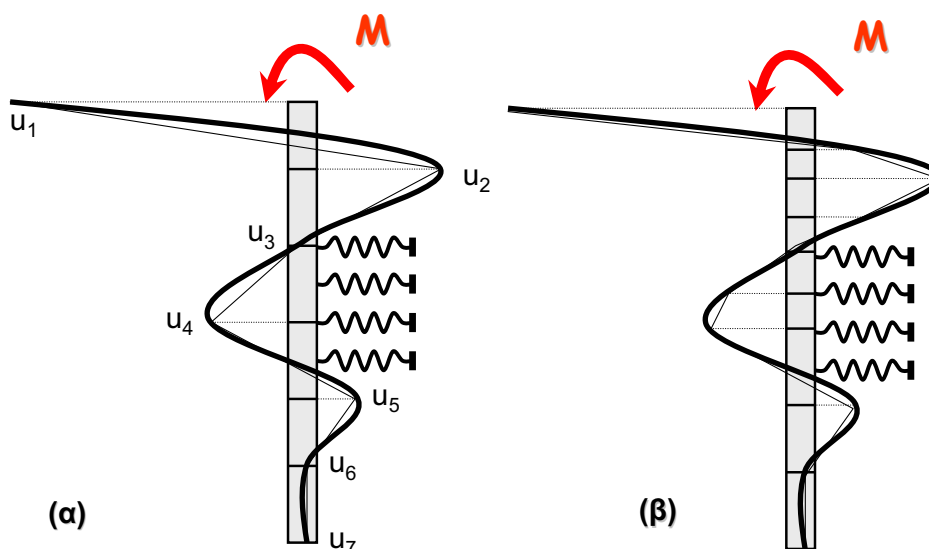
$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (2.4)$$

στην οποία οι συντελεστές A έως F αποτελούν σταθερές συναρτήσεις της θέσης αναφοράς (με συντεταγμένες x και y) ενώ ο συντελεστής G εξαρτάται επιπλέον από τις αντίστοιχες πρώτες παραγώγους της εκάστοτε άγνωστης μεταβλητής ($\partial u / \partial x$ και $\partial u / \partial y$). Οι προηγούμενες ειδικές περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων, προκύπτουν από την ανωτέρω γενική εξίσωση όταν:

$$B^2 - 4AC \begin{cases} < 0 & \text{ελλειπτική Δ.Ε.} \\ = 0 & \text{παραβολική Δ.Ε.} \\ > 0 & \text{υπερβολική Δ.Ε.} \end{cases}$$

ΣΧΗΜΑ 2.2:

Παράδειγμα διακριτοποίησης με την αριθμητική μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (Π.Σ.).



Η θεώρηση αυτή θα μας οδηγήσει στην πολυγωνική ελαστική γραμμή η οποία δεν απέχει σημαντικά από την ακριβή λύση, ιδιαίτερα όταν η *διακριτοποίηση* γίνει πιο πυκνή στην περιοχή έντονης καμπυλότητας του πασσάλου (Σχήμα 2.2β).

Από το παράδειγμα αυτό προκύπτει επίσης ότι, με τις συνήθεις τουλάχιστον αριθμητικές μεθόδους, επιδιώκεται ο υπολογισμός των τιμών της άγνωστης μεταβλητής (μετατοπίσεις u_1, u_2, \dots, u_4 στο Σχήμα 2.2α) σε συγκεκριμένα, *πεπερασμένα* στον αριθμό, σημεία του μέσου. Με άλλα λόγια, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα μεταπίπτει στην πολύ απλούστερη επίλυση ενός συστήματος $N \times N$ αλγεβρικών (γραμμικών ή μη γραμμικών) εξισώσεων, όπου N είναι ο αριθμός των άγνωστων τιμών της μεταβλητής.

Σε αντίθεση λοιπόν με τις *Απλές Υπολογιστικές Μεθόδους*, όπου το θεωρητικό υπόβαθρο περιορίζεται ουσιαστικά στην γενική διατύπωση της λύσης, στις *Αριθμητικές Μεθόδους* δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη ειδικών υπολογιστικών τεχνικών για την οργάνωση - διαχείριση και επεξεργασία των δεδομένων, έτσι ώστε να μειωθεί σε λογικά όρια ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος και να βελτιωθεί η ακρίβεια και η σταθερότητα των αναλύσεων. Για τον λόγο αυτό κάθε μία από τις εν λόγω μεθόδους αποτελεί ουσιαστικά και ένα αυτόνομο γνωστικό κλάδο με εκτενέστατο θεωρητικό υπόβαθρο.

3. Απλές Αριθμητικές Μέθοδοι: Ανάλυση ευστάθειας πρανών με την μέθοδο των λωρίδων

3.1 Μορφές και μέθοδοι ανάλυσης της αστοχίας εδαφικών πρανών

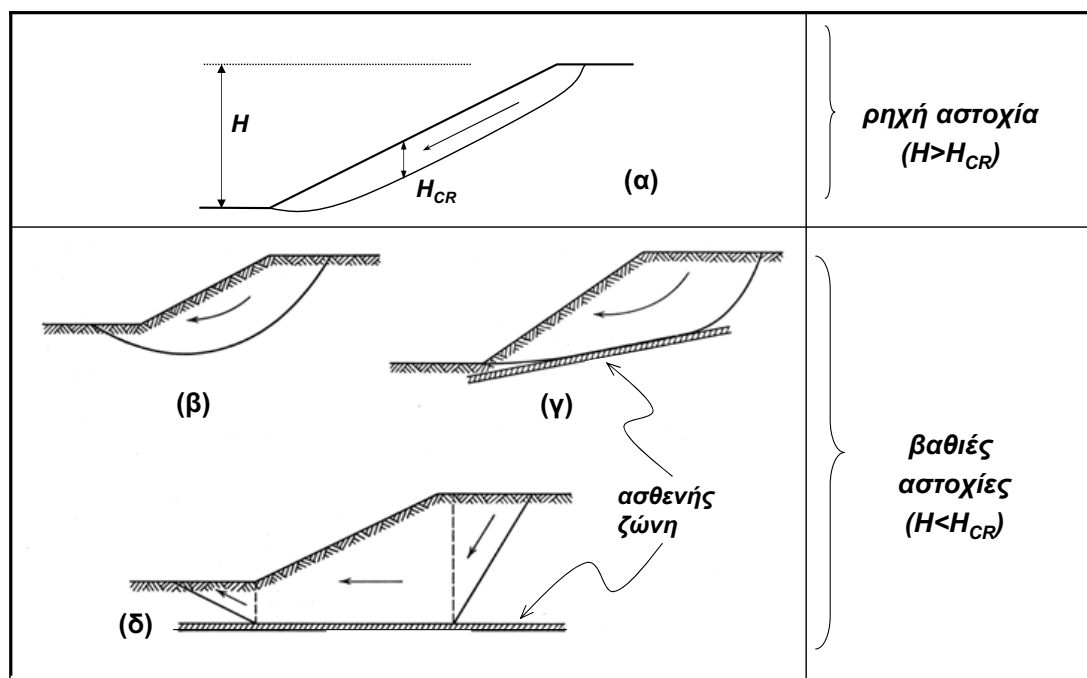
Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει τις συνήθεις μορφές αστοχίας εδαφικών πρανών. Από πρακτικής σκοπιάς, μπορούμε να τις χωρίσουμε σε δύο αδρές κατηγορίες:

✚ Τις **ρηχές**, στις οποίες η επιφάνεια αστοχίας είναι επίπεδη και παράλληλη στο μεγαλύτερο μέρος της προς την επιφάνεια του πρανού, το δε βάθος της αστοχίας είναι μικρό σε σχέση με το μήκος της (Σχήμα 3.1α). Για συνήθη πρανή (π.χ. επιχώματα οδοποιίας, χωμάτινα φράγματα), η μορφή αυτή αστοχίας δεν είναι ιδιαίτερα καταστροφική μια και σπάνια επηρεάζει την λειτουργικότητα του έργου. Εξαιρέση αποτελούν τα μεγάλα φυσικά πρανή όπου ακόμη και μία ρηχή αστοχία ενεργοποιεί εκατομμύρια κυβικά εδάφους και καταστρέφει όλα τα έργα υποδομής που έχουν κατασκευασθεί στην περιοχή της αστοχίας.

✚ Τις **βαθιές**, στις οποίες το μέγιστο βάθος αστοχίας είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μήκος. Σε ομοιογενή, ή περίπου ομοιογενή εδάφη, χωρίς έντονες αντιθέσεις μεταξύ των παραμέτρων αντοχής των διάφορων στρώσεων, μπορεί να υποθεθεί ότι η μορφή της επιφάνειας αστοχίας είναι **κυκλική** και η αστοχία είναι περιστροφική (Σχήμα 3.1β). Όταν στις εδαφικές στρώσεις παρεμβάλλεται μία στρώση σημαντικά μειωμένης αντοχής, ή όταν συναντάται μία στρώση μεγάλου βάθους και αντοχής, τότε η γεωμετρία της επιφάνειας αστοχίας απέχει πολύ από το κυκλικό τόξο, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.1γ και 3.1δ.

ΣΧΗΜΑ 3.1:

Πιθανές μορφές αστοχίας εδαφικών (όχι βραχωδών) πρανών (α) Πρανές «απείρου» μήκους και ύψους, (β) Πρανές «περιορισμένου» μήκους και ύψους, σε ομοιόμορφο σχετικά έδαφος, (γ) & (δ) Πρανή «περιορισμένου» μήκους και ύψους, παρουσία μίας ασθενούς ζώνης εδάφους.



Υπολογισμός του βάθους «ρηχής» αστοχίας H_{CR} :

$$H_c = \frac{c}{\gamma_{\Xi} \cos^2 i (\tan i - \tan \phi)} \quad \text{ΞΗΡΟ ΕΔΑΦΟΣ (c, \phi)}$$

$$H_c = \frac{c}{\gamma_b \cos^2 i (\tan i - \tan \phi)} \quad \text{ΚΟΡΕΣΜΕΝΟ ΕΔΑΦΟΣ (c, \phi) \\ \text{βυθισμένο πρανές (χωρίς ροή) ,} \\ \text{μακροχρόνια αστοχία}$$

$$H_c = \frac{C_U}{\gamma_{ΚΟΡ.} \cos i \cdot \sin i} \quad \text{ΚΟΡΕΣΜΕΝΟ ΕΔΑΦΟΣ (C_U, \phi=0) \\ \text{βυθισμένο πρανές (χωρίς ροή) ,} \\ \text{βραχυχρόνια αστοχία}$$

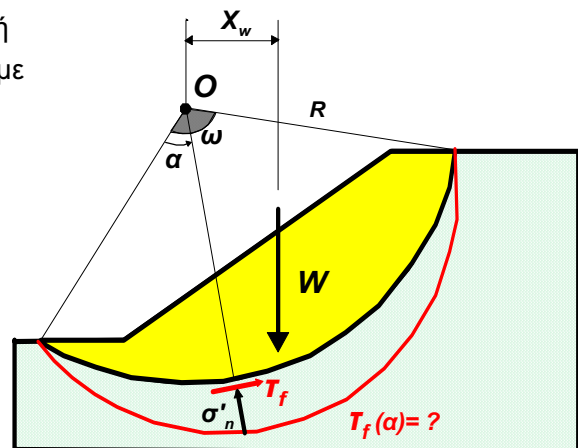
$$H_c = \frac{c}{\gamma \cos^2 i \left(\tan i - \frac{\gamma_b}{\gamma} \tan \phi \right)} \quad \text{ΚΟΡΕΣΜΕΝΟ ΕΔΑΦΟΣ (c, \phi) \\ \text{με ροή παράλληλη προς την} \\ \text{ελεύθερη επιφάνεια, μακροχρόνια} \\ \text{αστοχία}$$

Στο μάθημα της Εδαφομηχανικής II, έχετε ήδη διδαχθεί μία γενική μέθοδο ανάλυσης της ευστάθειας πρηνών, την **μέθοδο οριακής ισορροπίας**:

- ✚ πρώτα-πρώτα ορίζουμε μία πιθανή επιφάνεια αστοχίας του εδάφους,
- ✚ ακολούθως θεωρούμε την οριακή ισορροπία του εδαφικού πρίσματος, στην περίπτωση αστοχίας,
- ✚ τέλος, ορίζουμε τον υφιστάμενο συντελεστή ασφαλείας (FS) ως τον λόγο μεταξύ των δράσεων (δυνάμεων ή ροπών) που απαιτούνται να προκαλέσουν αστοχία προς τις υφιστάμενες δράσεις.

Για **παράδειγμα**, για την εικονιζόμενη κυκλική επιφάνεια αστοχίας, μπορούμε να θεωρήσουμε την οριακή ισορροπία ροπών περί το κέντρο περιστροφής O , και να γράψουμε:

$$FS = \frac{R \int_0^{\omega} \tau_f(\alpha) d\alpha}{W \Delta X_w} \quad (3.1)$$



Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται όταν η κατανομή της οριακής διατμητικής τάσης αστοχίας $\tau_f(\alpha)$ επάνω στην επιφάνεια αστοχίας είναι γνωστή, όπως στην περίπτωση **βραχυχρόνιας αστοχίας** όπου η ανάλυση γίνεται με βάση την (εκ των προτέρων γνωστή) αστράγγιστη διατμητική αντοχή των εδαφικών στρώσεων.

Στην περίπτωση **μακροχρόνιας αστοχίας** όμως, η $\tau_f(\alpha)$ είναι συνάρτηση των ορθών ενεργών τάσεων που ασκούνται στην επιφάνεια αστοχίας, που δεν είναι άμεσα γνωστές. Έτσι, οι υπολογισμοί γίνονται προσεγγιστικά με την **μέθοδο των λωρίδων** η οποία προτάθηκε αρχικά από τον Σουηδό W. Fellenius το 1927, σε μία προσπάθεια υπολογισμού των ορθών και διατμητικών τάσεων που ασκούνται στην επιφάνεια αστοχίας συναρτήσει του βάρους των γαιών πάνω από το κάθε σημείο αναφοράς.

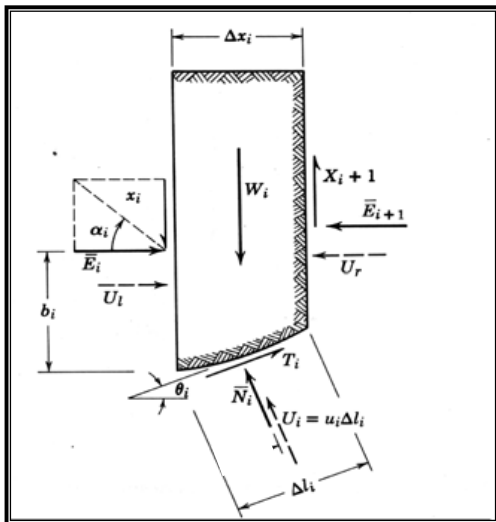
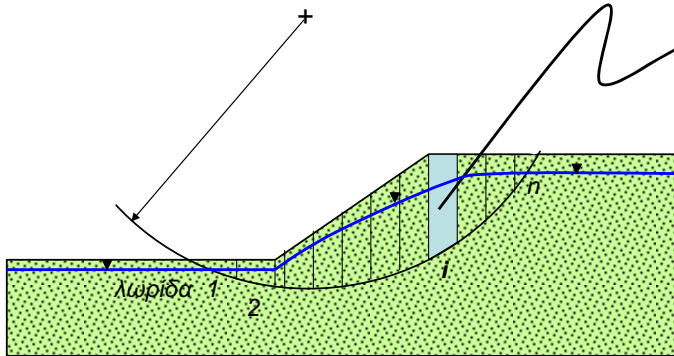
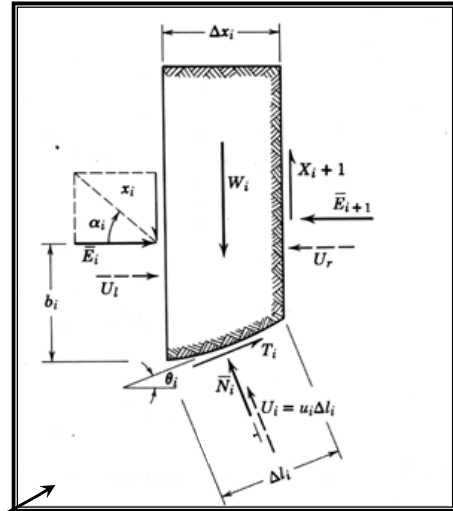
Οι βασικές αρχές της μεθόδου των λωρίδων παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.2. Συγκεκριμένα, για μια δεδομένη επιφάνεια αστοχίας, το ολισθαίνον πρίσμα υποδιαιρείται σε λεπτές κατακόρυφες λωρίδες και οι τάσεις που ασκούνται στην βάση της κάθε λωρίδας υπολογίζονται από τις εξισώσεις ισορροπίας (δυνάμεων και ροπών) της κάθε λωρίδας ξεχωριστά.

Εκ προοιμίου επισημαίνεται ότι, ακόμη και με την μέθοδο των λωρίδων η επίλυση είναι προσεγγιστική μια και στους αγνώστους μας προστίθενται τώρα οι τάσεις που ασκούνται στην κατακόρυφη παρειά των λωρίδων καθώς και τα σημεία εφαρμογής της συνισταμένης τους. Όπως αναλύεται στο **Σχήμα 3.3**, ακόμη και εάν οι λωρίδες γίνουν πολύ λεπτές έτσι ώστε να θεωρείται ότι οι αντιδράσεις του εδάφους ασκούνται στο μέσον της βάσης κάθε λωρίδας, οι άγνωστοι του προβλήματος υπερβαίνουν συνολικά τις εξισώσεις ισορροπίας κατά $n-2$ (n =αριθμός λωρίδων). Έτσι, είναι αναγκαία η υιοθέτηση κάποιων (λογικών) παραδοχών προκειμένου να αρθεί η υπερστατικότητα του προβλήματος.

ΣΧΗΜΑ 3.2:

(α) Διαχωρισμός του ολισθαίνοντος πρίσματος σε λωρίδες και (β) πλήρες σύστημα δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε λωρίδα.

- W_i = συνολικό βάρος λωρίδας
- U = δυνάμεις λόγω πίεσης πόρων
- N_i = ενεργός ορθή δύναμη στην βάση της λωρίδας
- T_i = αντίσταση τριβής στην βάση της λωρίδας
- E_i, E_{i+1} = ορθές, ενεργές δυνάμεις στο αριστερό και στο δεξί όριο της λωρίδας
- X_i, X_{i+1} = αντίσταση τριβής στο αριστερό και στο δεξί όριο της λωρίδας



<i>Άγνωστοι που υπεισέρχονται στην ισορροπία δυνάμεων</i>	
Ορθές δυνάμεις \bar{E}_i στη βάση κάθε λωρίδας	<i>n</i>
Συντελεστής ασφάλειας ο οποίος επιτρέπει στις διατμητικές δυνάμεις να εκφραστούν συναρτήσει της N_i (και των c, ϕ)	<i>1</i>
Ορθές δυνάμεις \bar{E}_i επί της κατακόρυφης παρειάς των λωρίδων	<i>n-1</i>
Γωνίες κλίσης α_i που επιτρέπουν την συσχέτιση των διατμητικών δυνάμεων X_i με τις ορθές E_i	<i>n-1</i>
Σύνολο	<i>3n-1</i>
<i>(έναντι 2n εξισώσεων ισορροπίας)</i>	

<i>Πρόσθετοι άγνωστοι που υπεισέρχονται στην ισορροπία ροπών</i>	
Συντεταγμένες b_i εφαρμογής των ορθών δυνάμεων E_i επί της κατακόρυφης παρειάς των λωρίδων	<i>n-1</i>
Συνολικός αριθμός αγνώστων	<i>4n-2</i>
<i>(έναντι 3n εξισώσεων ισορροπίας)</i>	

ΣΧΗΜΑ 3.3:
Απολογισμός αγνώστων στις εξισώσεις ισορροπίας για *n* λωρίδες

Σημείωση: Όταν το πάχος των λωρίδων είναι πολύ μικρό, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι N_i και U_i ασκούνται στο μέσον της βάσης κάθε λωρίδας

Μεθοδολογικά, οι διάφορες διατυπώσεις της μεθόδου των λωρίδων που είναι σήμερα διαθέσιμες μπορούν να διακριθούν σε αυτές που αφορούν κυκλική και μη-κυκλική επιφάνεια αστοχίας. Ακολούθως, θα παρουσιασθούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια δύο τυπικές μέθοδοι από την πρώτη κατηγορία (Fellenius, 1927 και απλοποιημένη Bishop, 1955) και μία από την δεύτερη κατηγορία (Janbu, 1973).

Επισημαίνεται ότι, σε όλες τις διαφορετικές εκδοχές της μεθόδου των λωρίδων, η ισορροπία του πρανούς εξετάζεται κατά την κατάσταση λειτουργίας και όχι κατά την οριακή κατάσταση αστοχίας. Για τον λόγο αυτό η «αντίσταση τριβής» T_i που ασκείται στην βάση της κάθε λωρίδας i (Σχήμα 3.2) δεν είναι η «οριακή αντίσταση τριβής» $T_{i,ULT}$ αλλά μικρότερη, ισχύει δε:

$$T_i = \frac{T_{i,ULT}}{FS} \quad (3.2)$$

όπου FS είναι ο υφιστάμενος (ή ο επιθυμητός) συντελεστής ασφαλείας έναντι αστοχίας του πρανούς.

Για **αστράγγιστες συνθήκες** φόρτισης, οι οποίες θα πρέπει να θεωρούνται κατά την ανάλυση της βραχυχρόνιας ευστάθειας πρανών σε κορεσμένα συνεκτικά εδάφη (αργίλους, πλαστικές ιλύες, κλπ.), η διατμητική αντοχή του εδάφους εκφράζεται από την αστράγγιστη διατμητική αντοχή Su , ενώ παράλληλα θεωρείται ότι η γωνία τριβής είναι μηδενική ($\phi=0$) και οι υπολογισμοί βασίζονται στις ολικές ορθές τάσεις. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν:

$$T_{i,ULT} = Su_i \Delta l_i \quad (3.3)$$

όπου Δl_i είναι το μήκος της βάσης της κάθε λωρίδας (Σχήμα 3.2).

Αντίστοιχα, για **στραγγιζόμενες συνθήκες** φόρτισης, η διατμητική αντοχή του εδάφους εκφράζεται από την συνοχή c και την γωνία τριβής ϕ του εδάφους, ενώ οι υπολογισμοί βασίζονται στις ενεργές ορθές τάσεις. Στη περίπτωση αυτή λοιπόν:

$$T_{i,ULT} = c_i \Delta l_i + \bar{N}_i \tan \phi_i = c_i \Delta l_i + (N_i - U_i) \tan \phi_i \quad (3.4)$$

όπου N_i και U_i είναι οι συνισταμένες των ολικών ορθών τάσεων και των υδροστατικών πιέσεων που ασκούνται στην βάση της κάθε λωρίδας i (Σχήμα 3.2).

Υπενθυμίζεται ότι στραγγιζόμενες συνθήκες φόρτισης θα πρέπει να θεωρούνται κατά την ανάλυση:

- ✚ της ευστάθειας (βραχυχρόνιας και μακροχρόνιας) πρανών σε μη συνεκτικά εδάφη (άμμους, χάλικες, μη πλαστικές ιλύες, κλπ.)
- ✚ της μακροχρόνιας ευστάθειας πρανών σε κορεσμένα συνεκτικά εδάφη (αργίλους, πλαστικές ιλύες, κλπ.)

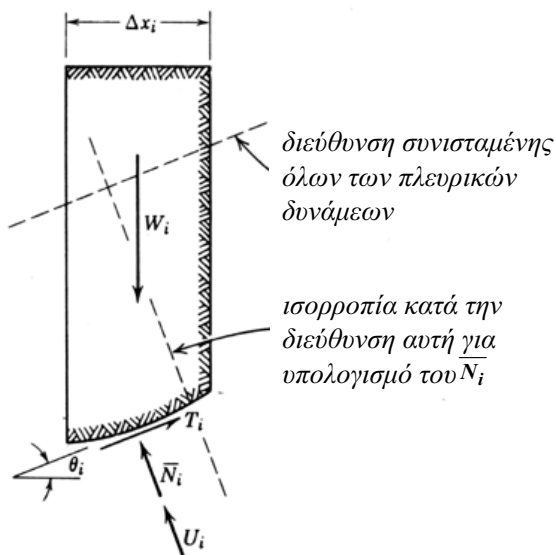
3.2 Συνήθης Μέθοδος των Λωρίδων

[γνωστή και ως “*Swedish method of slices*” ή “*μέθοδος Fellenius*”]

Η βασική παραδοχή αυτής της μεθόδου είναι ότι η συνισταμένη των πλευρικών δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε λωρίδα έχει διεύθυνση παράλληλη προς την (οιωνεί ευθύγραμμη) βάση της λωρίδας (Σχήμα 3.4).

Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται εύκολα η ορθή δύναμη στην βάση της λωρίδας N_i , από ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται κάθετα προς την βάση της λωρίδας, και ακολούθως η διαμητική δύναμη T_i , από τις σχέσεις (3.2) έως (3.4). Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής ασφαλείας FS υπολογίζεται τελικά από ισορροπία ροπών του ολισθαίνοντος πρίσματος, λαμβανομένου ως ενιαίου στερεού. Για κυκλική επιφάνεια ολίσθησης, οι υπολογισμοί απλοποιούνται εάν η ισορροπία των ροπών ληφθεί ως προς το κέντρο περιστροφής.

Επί της ουσίας, η παραδοχή που γίνεται σχετικά με τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των λωρίδων εισάγει $n-1$ ακόμη εξισώσεις και έτσι ο συνολικός αριθμός εξισώσεων γίνεται $[3n + (n-1) = 4n-1]$, έναντι $4n-2$ αγνώστων. Έχουμε δηλαδή μία εξίσωση παραπάνω από όσες χρειαζόμαστε για μία και μοναδική στατικά ορισμένη λύση, και επομένως η επίλυση δεν μπορεί να είναι παρά προσεγγιστική.



Πρόσθετες Εξισώσεις	Πλήθος
$\alpha_i = \alpha_{i-1} = \theta_i$	n

Εξισώσεις ισορροπίας	$3n$
Πρόσθετες εξισώσεις	n
Σύνολο εξισώσεων	$4n$

$4n - (4n-2) = 2$ εξίσωση επιπλέον από τους αγνώστους

ΣΧΗΜΑ 3.4:

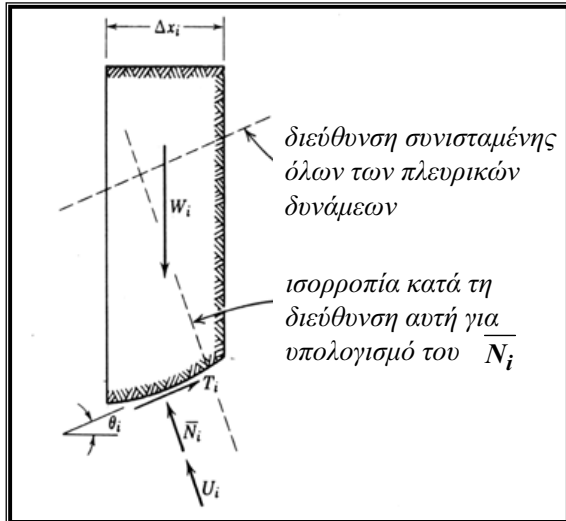
Παραδοχές υπολογισμού των δυνάμεων στην *συνήθη μέθοδο των λωρίδων*.

Πιο συγκεκριμένα, για μία τυχούσα λωρίδα i , η ισορροπία δυνάμεων ως προς την κάθετη προς τη βάση διεύθυνση δίνει τελικώς:

$$\bar{N}_i = W_i \cos \theta_i - U_i \quad (3.5)$$

και επομένως, σύμφωνα με τις Σχέσεις (3.2) και (3.4), η αντίστοιχη διατμητική δύναμη γίνεται:

$$T_i = \frac{T_{i,ULT}}{FS} = \frac{c_i \Delta l_i + \bar{N}_i \tan \phi_i}{FS}$$



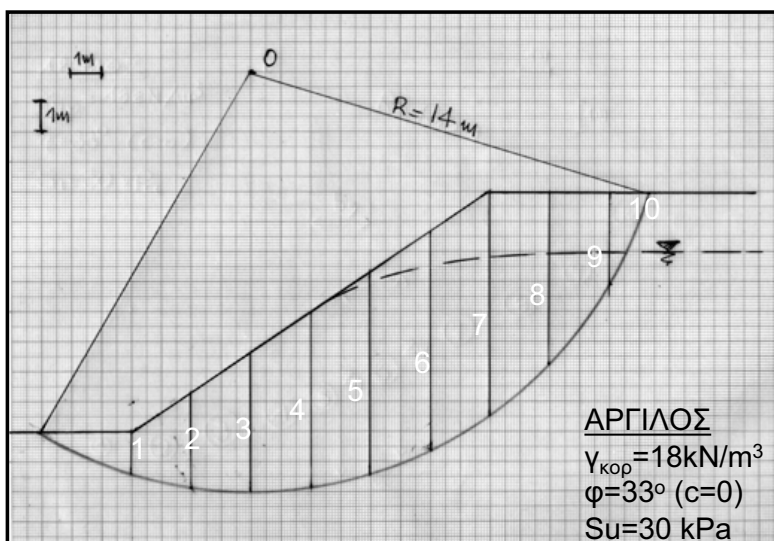
Έτσι, η εξίσωση (3.1) για τον συντελεστή ασφαλείας παίρνει τώρα την μορφή:

$$FS = \frac{\sum_1^n R/T_{i,ULT}}{\sum_1^n W_i \Delta x_{w,i}}$$

ή, τελικώς:

$$FS = \frac{\sum_1^n [c_i \Delta l_i + \tan \phi_i (W_i \cos \theta_i - u_i \Delta l_i)]}{\sum_1^n W_i \Delta \sin \theta_i}$$

Επισημαίνεται ότι η μέθοδος αυτή είναι η πρώτη του είδους που εμφανίσθηκε στην βιβλιογραφία και έγινε δημοφιλής λόγω κυρίως της απλότητας της. Από σύγκριση όμως με πιο «ακριβείς» μεθόδους ανάλυσης προκύπτει ότι είναι ιδιαίτερα συντηρητική, και μπορεί να υπό-εκτιμήσει τον συντελεστή ασφαλείας από 10 έως 60%.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί ο συντελεστής ασφαλείας του εικονιζόμενου πρανού και της συγκεκριμένης επιφάνειας αστοχίας έναντι:

- (α) βραχυχρόνιας
- (β) μακροχρόνιας

αστοχίας, με χρήση της μεθόδου Fellenius.

Υπόδειξη: Οι πιέσεις πόρων να ληφθούν απλοποιητικά ως υδροστατικές

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\phi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	Δl_i (m)	u_i (kPa)	Αριθμητής (kN m)/m	Παρανομ. (kN m)/m
1				-25.0				
2				-14.0				
3				-4.0				
4				4.0				
5				14.0				
6				19.0				
7				30.0				
8				41.0				
9				53.0				
10				66.5				
FS = Αριθμ./Παρον.=								

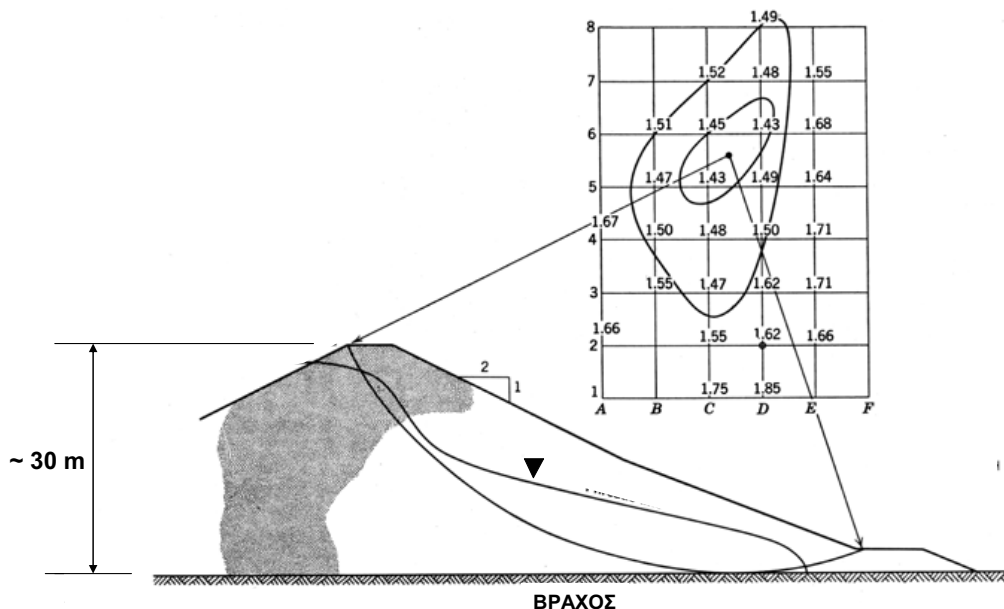
**Πίνακας Υπολογισμών
για βραχυχρόνια
αστοχία**

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\phi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	Δl_i (m)	u_i (kPa)	Αριθμητής (kN m)/m	Παρανομ. (kN m)/m
1				-25.0				
2				-14.0				
3				-4.0				
4				4.0				
5				14.0				
6				19.0				
7				30.0				
8				41.0				
9				53.0				
10				66.5				
FS = Αριθμ./Παρον.=								

**Πίνακας Υπολογισμών
για μακροχρόνια
αστοχία**

Στο παράδειγμα που λύσατε προηγουμένως, οι υπολογισμοί αφορούν μία μόνον κυκλική επιφάνεια, δηλαδή ένα κέντρο και μία ακτίνα. Σε μία πραγματική εφαρμογή όμως εξετάζονται πολλά κέντρα (π.χ. σε διάταξη τετραγωνικού καννάβου) και πολλές ακτίνες για κάθε κέντρο, έτσι ώστε να μπορέσουμε να εντοπίσουμε τον κύκλο με τον ελάχιστο συντελεστή ασφαλείας (π.χ. Σχήμα 3.5).

Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι, παρά το γεγονός ότι οι επιμέρους υπολογισμοί είναι απλοί και δεν απαιτούν ιδιαίτερο υπολογιστικό υπόβαθρο, ο όγκος τους όμως είναι τόσο μεγάλος που απαιτεί τη χρήση Η/Υ.



ΣΧΗΜΑ 3.5:

Ενδεικτικά αποτελέσματα από την ανάλυση ευστάθειας πρανών φράγματος με $\phi=39^\circ$ ($c=0$), $\gamma_{\text{ε}}=20 \text{ kN/m}^3$ (πάνω από τον φρεάτιο ορίζοντα) και $\gamma_{\text{ΚΟΡ}}=21.6 \text{ kN/m}^3$ (κάτω από τον φρεάτιο ορίζοντα).

3.3 Απλοποιημένη Μέθοδος Bishop

Η βασική παραδοχή αυτής της μεθόδου είναι ότι η συνισταμένη των πλευρικών δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε λωρίδα έχει οριζόντια διεύθυνση (Σχήμα 3.5). Στην περίπτωση αυτή η ορθή δύναμη στην βάση της λωρίδας N_i , υπολογίζεται από ισορροπία των κατακόρυφων δυνάμεων που ασκούνται στην λωρίδα, και ακολούθως η διατμητική δύναμη T_i υπολογίζεται από τις σχέσεις (3.3)-(3.4). Τέλος, ο συντελεστής ασφαλείας FS υπολογίζεται από ισορροπία ροπών του ολισθαίνοντος πρίσματος, λαμβανομένου ως ενιαίου στερεού.

Η μέθοδος Bishop παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με την μέθοδο Fellenius που εξετάστηκε προηγουμένως, αλλά παρουσιάζει και δύο ουσιαστικές διαφορές:

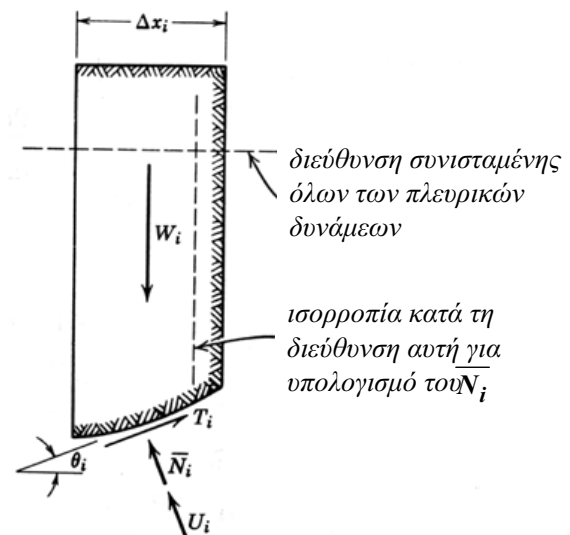
(α) Και σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο εξισώσεις περισσότερες από τους αγνώστους (βλ. Σχήμα 3.6). Η παραδοχή όμως που γίνεται για τις πλευρικές δυνάμεις φαίνεται ότι είναι πλησιέστερα στην πραγματικότητα, μια και οδηγεί σε λύσεις που ικανοποιούν κάποιες θεμελιώδεις γεωτεχνικές συνθήκες (π.χ. ότι η γωνία κλίσης της συνισταμένης πλευρικής δύναμης δεν ξεπερνά την γωνία τριβής και ότι η απόσταση εφαρμογής της από την βάση κυμαίνεται μεταξύ $1/2$ και $1/3$ του ύψους).

(β) Όπως θα δούμε παρακάτω, η εξίσωση που δίνει τον συντελεστή ασφαλείας είναι μη-γραμμική, μια και ο συντελεστής ασφαλείας εμφανίζεται και στα δύο μέλη. Έτσι, η επίλυση γίνεται επαναληπτικά και απαιτεί μεγαλύτερο χρόνο (αν και 2-3 επαναλήψεις είναι συνήθως αρκετές για να πετύχουμε την σύγκλιση).

Πρόσθετες Εξισώσεις	Πλήθος
$\alpha_i=0$	n

Εξισώσεις ισορροπίας	$3n$
Πρόσθετες εξισώσεις	n
Σύνολο εξισώσεων	$4n$

$4n - (4n-2) = 2$ εξισώσεις επιπλέον από τους αγνώστους



ΣΧΗΜΑ 3.6:

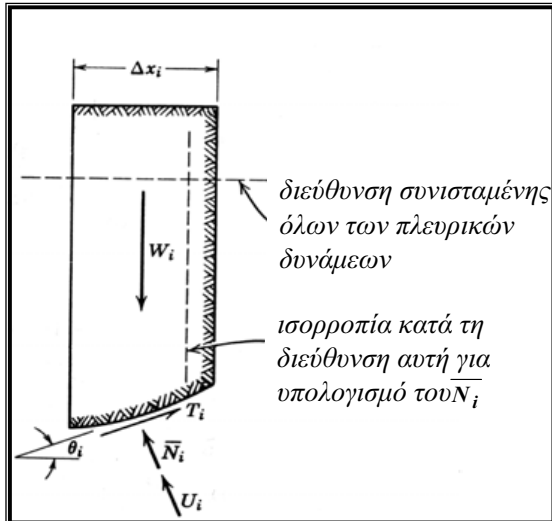
Παραδοχές υπολογισμού των δυνάμεων στην απλοποιημένη μέθοδο Bishop.

Ο αλγόριθμος επίλυσης με την απλοποιημένη μέθοδο Bishop διαμορφώνεται ως ακολούθως. Για μία τυχούσα λωρίδα i , η ισορροπία δυνάμεων ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση δίνει:

$$\bar{N}_i = \frac{W_i}{\cos \theta_i} - U_i - \frac{T_{i,ULT}}{FS} \tan \theta_i$$

και επομένως, σύμφωνα με τις Σχέσεις (3.2) και (3.4), η αντίστοιχη διατμητική δύναμη γίνεται:

$$T_i = \frac{T_{i,ULT}}{FS} = \frac{c_i \cdot \Delta l_i + \bar{N}_i \tan \phi_i}{FS}$$



Έτσι, η Εξίσωση (3.1) για τον συντελεστή ασφαλείας παίρνει την μορφή:

$$FS = \frac{\sum_1^n R \cdot T_{i,ULT}}{\sum_1^n W_i \cdot X_{w,i}}$$

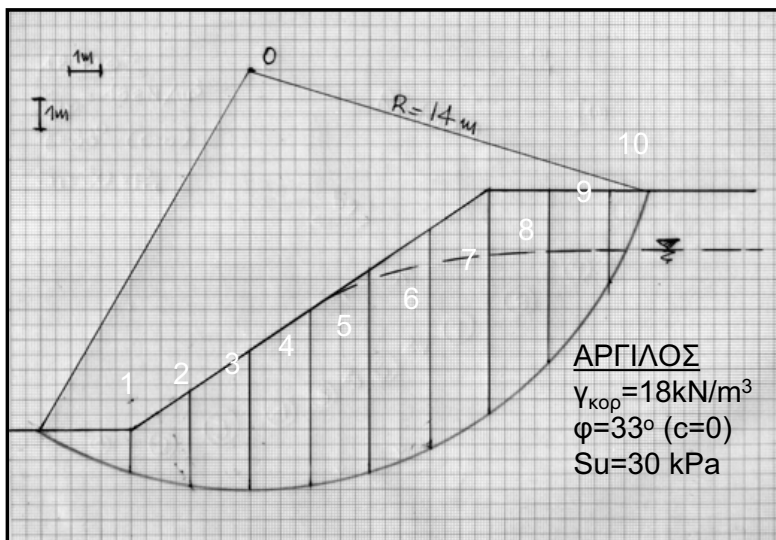
από όπου τελικώς προκύπτει:

$$FS = \frac{\sum_1^n [c_i \Delta x_i + \tan \phi_i (W_i - u_i \Delta x_i)] / m_i(\theta_i, FS)}{\sum_1^n W_i \cdot \sin \theta_i}$$

όπου:

$$m_i(\theta_i, FS) = \cos \theta_i \left(1 + \frac{\tan \theta_i \cdot \tan \phi_i}{FS} \right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



Να υπολογισθεί ο συντελεστής ασφαλείας του εικονιζόμενου πρανού και της συγκεκριμένης επιφάνειας αστοχίας έναντι :

- (α) βραχυχρόνιας
- (β) μακροχρόνιας

αστοχίας, με χρήση της τροποποιημένης μεθόδου Bishop.

Υπόδειξη: Οι πιέσεις πόρων να ληφθούν απλοποιητικά ως υδροστατικές. Επιπλέον, οι αρχικές τιμές του FS να ληφθούν από τις αναλύσεις με την μέθοδο Fellenius

Πίνακας Υπολογισμών για βραχυχρόνια αστοχία

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\phi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	Δx_i (m)	u_i (kPa)	Παρανομ. (kN m)/m	FS ₀ =		FS ₁ =	
								m_i	Αριθμητής (kN m)/m	m_i	Αριθμητής (kN m)/m
1				-25.0							
2				-14.0							
3				-4.0							
4				4.0							
5				14.0							
6				19.0							
7				30.0							
8				41.0							
9				53.0							
10				66.5							
FS₁ = Αριθμ./Παρον.=											
FS₂ = Αριθμ./Παρον.=											

Πίνακας Υπολογισμών για μακροχρόνια αστοχία

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\phi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	Δx_i (m)	u_i (kPa)	Παρανομ. (kN m)/m	FS ₀ =		FS ₁ =	
								m_i	Αριθμητής (kN m)/m	m_i	Αριθμητής (kN m)/m
1				-25.0							
2				-14.0							
3				-4.0							
4				4.0							
5				14.0							
6				19.0							
7				30.0							
8				41.0							
9				53.0							
10				66.5							
FS₁ = Αριθμ./Παρον.=											
FS₂ = Αριθμ./Παρον.=											

3.4 Μέθοδος Janbu

Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε πολύ αργότερα από τις δύο προηγούμενες, το 1973 περίπου, μετά από την διαπίστωση του καθηγητή N. Janbu (καθηγητή στο πανεπιστήμιο του Trondheim στην Νορβηγία) ότι οι μέθοδοι για κυκλικές επιφάνειες αστοχίας δεν επαρκούν για την περίπτωση κατολισθήσεων με μεγάλο σχετικά μήκος, όπως αυτές των Σχημάτων 3.1(γ) και (δ).

Οι πρώτες δύο βασικές παραδοχές που υιοθετούνται με στη μέθοδο αυτή είναι ότι:

(A) Οι πλευρικές οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε λωρίδα είναι ίσες (Σχήμα 3.7)

(B) Κατά την υφιστάμενη κατάσταση (λειτουργίας) του πρανούς ικανοποιείται η ισορροπία των οριζόντιων δυνάμεων που ασκούνται στο εξεταζόμενο πρίσμα αστοχίας.

Έτσι, ο αλγόριθμος υπολογισμού του συντελεστή ασφαλείας διαμορφώνεται ως ακολούθως.

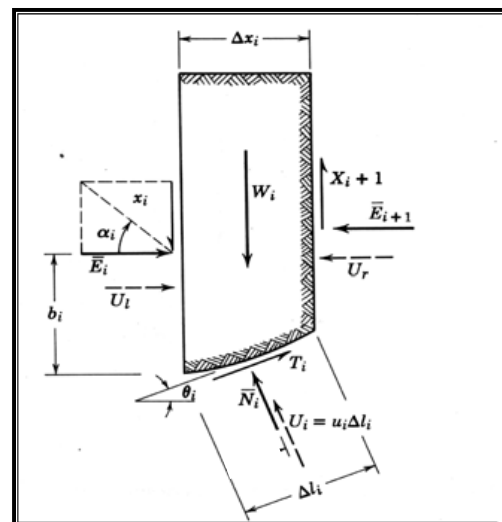
✚ Ισορροπία των οριζοντίων δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε λωρίδα:

$$T_i \cos \theta_i = (\bar{N}_i + U_i) \sin \theta_i \quad \text{ή} \quad (\bar{N}_i + U_i) = \frac{T_i}{\tan \theta_i} \quad (3.6)$$

Πρόσθετες Εξισώσεις	Πλήθος
$E_i = E_{i+1}$	n

Εξισώσεις ισορροπίας	3n
Πρόσθετες εξισώσεις	n
Σύνολο εξισώσεων	4n

$$4n - (4n-2) = 2 \quad \text{εξίσωση επιπλέον από τους αγνώστους}$$



ΣΧΗΜΑ 3.7:
Παραδοχές υπολογισμού των δυνάμεων στην μέθοδο Janbu.

✚ Ισορροπία λωρίδας στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$W_i + (X_i - X_{i+1}) = T_i \sin \theta_i + (\bar{N}_i + U_i) \cos \theta_i$$

ή, σε συνδυασμό με την ανωτέρω σχέση (3.6),

$$W_i + (X_i - X_{i+1}) = \frac{T_i}{\sin \theta_i}$$

✚ Συνολική ισορροπία δυνάμεων στην οριζόντια διεύθυνση:

$$\sum_1^n T_i \cos \theta_i = \sum_1^n (\bar{N}_i + U_i) \sin \theta_i$$

και, δεδομένου ότι $T_i = \frac{T_{i,ULT}}{FS}$ προκύπτει τελικώς

$$FS = \frac{\sum_1^n T_{i,ULT} \cos \theta_i}{\sum_1^n [W_i + (X_i - X_{i+1})] \sin \theta_i \cos \theta_i}$$

Αντικαθιστώντας στην ανωτέρω σχέση για τον FS την τιμή του $T_{i,ULT}$ από την σχέση (3.4) και την τιμή του \bar{N}_i από την σχέση (3.5), παίρουμε:

$$FS = \frac{\sum_1^n c_i \Delta x_i + \sum_1^n [W_i + (X_i - X_{i+1})] \cos \theta_i \tan \phi_i - \sum_1^n u_i \Delta x_i \tan \phi_i}{\sum_1^n [W_i + (X_i - X_{i+1})] \sin \theta_i \cos \theta_i}$$

Εδώ μπαίνει και η τρίτη (και τελευταία) παραδοχή της μεθόδου Janbu, σύμφωνα με την οποία:

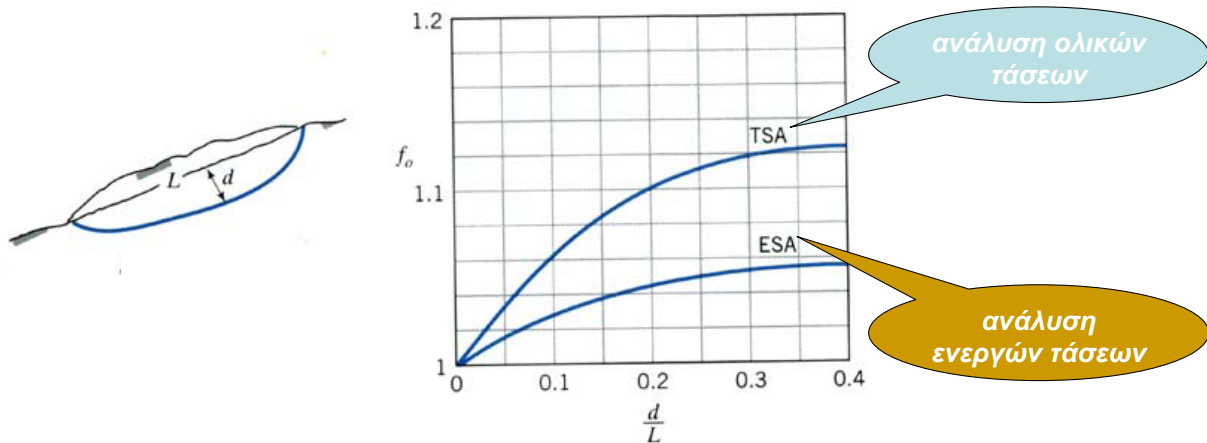
(Γ) Ο άγνωστος όρος $(X_i - X_{i+1})$ απαλείφεται από την ανωτέρω σχέση και αντικαθίσταται από έναν διορθωτικό συντελεστή f_o ,

ήτοι:

$$FS = f_o \frac{\sum_1^n c_i \Delta x_i + \sum_1^n W_i \cos \theta_i \tan \phi_i - \sum_1^n u_i \Delta x_i \tan \phi_i}{\sum_1^n W_i \sin \theta_i \cos \theta_i}$$

Ο διορθωτικός συντελεστής f_o υπολογίζεται από το Σχήμα 3.8 συναρτήσει της γεωμετρίας της επιφάνειας αστοχίας και ανάλογα προς την μεθοδολογία ανάλυσης (ολικών ή ενεργών τάσεων).

Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.



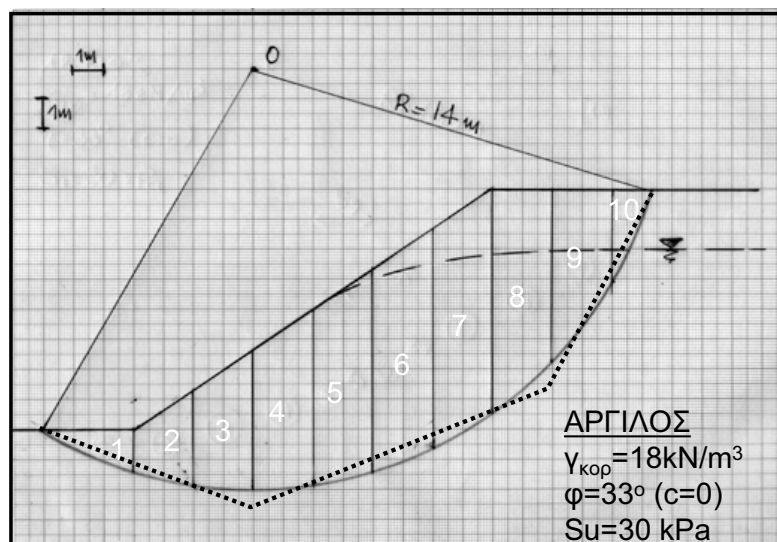
ΣΧΗΜΑ 3.8:

Διορθωτικός συντελεστής για τον υπολογισμό του Συντελεστή Ασφαλείας με την μέθοδο Janbu.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί ο συντελεστής ασφαλείας του εικονιζόμενου πρσανούς και της τεθλασμένης επιφάνειας αστοχίας (με διακεκομμένη γραμμή) έναντι (α) βραχυχρόνιας και (β) μακροχρόνιας αστοχίας, με χρήση της μεθόδου Janbu.

Υποδείξεις: Οι πιέσεις πόρων να ληφθούν απλοποιητικά ως υδροστατικές. Η τεθλασμένη επιφάνεια αστοχίας προσεγγίζει αρκετά ικανοποιητικά την κυκλική και επομένως οι αντίστοιχοι συντελεστές αστοχίας δεν θα πρέπει να διαφέρουν πολύ.



Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\phi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	u_i (kPa)	Αριθμητής (kN m)/m	Παρανομ. (kN m)/m	f_o
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
$FS = f_o(\text{Αριθμ./Παρον.}) =$								

**Πίνακας Υπολογισμών
για βραχυχρόνια
αστοχία**

ΛΩΡΙΔΑ	c_i (kPa)	$\tan\phi_i$	W_i (kN/m)	θ_i (deg)	u_i (kPa)	Αριθμητής (kN m)/m	Παρανομ. (kN m)/m	f_o
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
$FS = f_o(\text{Αριθμ./Παρον.}) =$								

**Πίνακας Υπολογισμών
για μακροχρόνια
αστοχία**

3.5 Τελικές Παρατηρήσεις

✚ Εκτός από τις τρεις μεθόδους που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, υπάρχουν αρκετές άλλες τις οποίες θα βρείτε πιθανόν στο menu του λογισμικού που θα χρησιμοποιήσετε σε πραγματικές εφαρμογές. Στοιχεία για τις μεθόδους αυτές (παραδοχές, πεδίο εφαρμογής, κλπ.) δίνονται συνοπτικά στο Πίνακα 3.1. Επιπλέον, σύγκριση τεσσάρων από αυτές παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.9.

✚ Για περισσότερες ακόμη πληροφορίες θα πρέπει να αναφερθείτε στην Βιβλιογραφία του Πίνακα 3.2.

✚ Το λογισμικό που θα χρησιμοποιήσετε για πρακτικές εφαρμογές παρέχει τη δυνατότητα για ανάλυση αρκετά πιο πολύπλοκων συνθηκών, όπως για παράδειγμα πρηνή:

- με εφελκυστική ρωγμή στη στέψη,
- ενισχυμένα με οριζόντιες στρώσεις γεω-υφασμάτων,
- υπό σεισμική δράση,
- κλπ.

Λεπτομέρειες για την προσομοίωση αυτών των συνθηκών παρέχονται συνήθως μαζί με τις οδηγίες χρήσης των (εμπορικών) λογισμικών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1:

Συνοπτική παρουσίαση των συνθηθέτερα χρησιμοποιούμενων μεθόδων ανάλυσης της ευστάθειας πρηνών με τη μέθοδο των λωρίδων

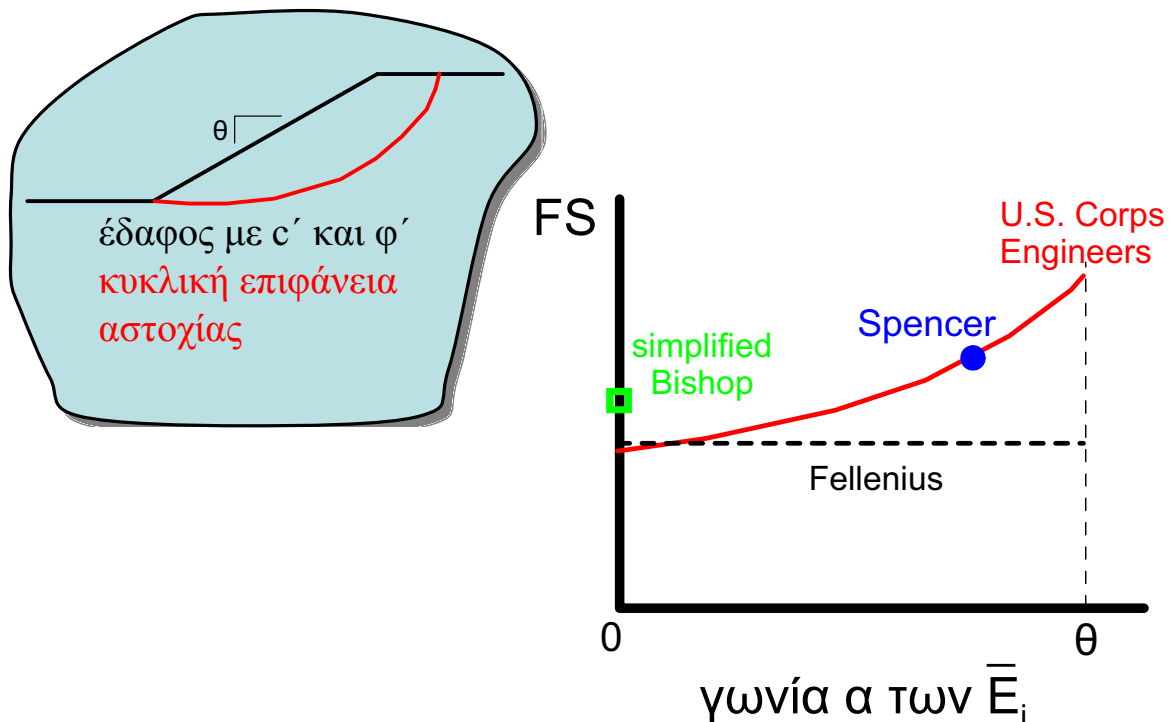
Method	Assumption	Failure surface	Equilibrium equation satisfied	Solution by
Swedish method (Fellenius, 1927)	Resultant of interslice force is zero; $J_s = 0$	Circular	Moment	Calculator
Bishop's simplified method (Bishop, 1955)	E_j and E_{j+1} are collinear $X_j - X_{j+1} = 0$, $J_s = 0$	Circular	Moment	Calculator
Bishop's method (Bishop, 1955)	E_j and E_{j+1} are collinear; $J_s = 0$	Circular	Moment	Calculator/ computer
Morgenstern and Price (1965)	Relationship between E and X of the form $X = \lambda f(x)E$, $f(x)$ is a function ≈ 1 , λ is a scale factor, $J_s = 0$	Any shape	All	Computer
Spencer (1967)	Interslice forces are parallel; $J_s = 0$	Any shape	All	Computer
Bell's method (Bell, 1968)	Assumed normal stress distribution along failure surface; $J_s = 0$	Any shape	All	Computer
Janbu (1973)	$X_j - X_{j+1}$ replaced by a correction factor, f_o ; $J_s = 0$	Noncircular	Horizontal forces	Calculator
Sarma (1976)*	Assumed distribution of vertical interslice forces; $J_s = 0$	Any shape	All	Computer

$J_s =$ seepage force due to flow through the slope

Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.

ΣΧΗΜΑ 3.9:

Σύγκριση τεσσάρων τυπικών μεθόδων ανάλυσης της ευστάθειας πρηνών με την μέθοδο των λωρίδων.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2:**

Βιβλιογραφία σχετικά με την μέθοδο των λωρίδων για την ανάλυση της ευστάθειας πρηνών

1. Budhu, M. (2000). "Soil Mechanics and Foundations", John Wiley and Sons.
2. Das, M.B. (1999). "Principles of Foundation Engineering", PWS Publishing.
3. Lambe, T.W. and Whitman, R.V. (1969). "Soil Mechanics", John Wiley and Sons.
4. Fellenius, W. (1927). "Erdstatische Berechnungen", W. Ernst und Sohn, Berlin.
5. Bishop, A.W. (1955). "The Use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes", Geotechnique, 5(1), pp. 7-17.
6. Janbu, N. (ed.) (1973). "Slope Stability Computations", Embankment Dam Engineering, Casagrande Memorial Volume, Wiley, New York, pp. 47-86.
7. Morgenstern, N.R. and Price, V.E. (1965). "The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces", Geotechnique, 15(1), pp. 79-83.
8. Spencer, E. (1967). "A Method of Analysis of Embankments Assuming Parallel Interslices Technique", Geotechnique, 17(1), pp. 11-26.
9. Bell, J.M. (1968). "Dimensionless Parameters for Homogeneous Earth Slopes", J. Soil Mech. Found. Eng. Div. ASCE, 95(SM6), pp.1253-1270.
10. Sarma, S.K. (1976). "Stability Analysis of Embankments and Slopes", J. Geotech. Eng. Div. ASCE, 108(GT6), pp. 835-850.

✚ Ειδικά για την **σεισμική φόρτιση** θα πρέπει να γνωρίζετε ότι η αντιμετώπιση είναι ψευδο-στατική (γιατί όχι ψευδο-δυναμική;). Πιο συγκεκριμένα, στην επιτάχυνση της βαρύτητας g επαλληλίζεται μία οριζόντια (προς τα κατάντη του πρσανούς) και μία κατακόρυφη (προς τα επάνω ή προς τα κάτω) επιτάχυνση λόγω σεισμού, οι οποίες προδιαγράφονται στον αντισεισμικό κανονισμό (π.χ. ΕΑΚ 2000 ή EC-8). Η σύνθετη αυτή (στατική και σεισμική) φόρτιση μετατρέπεται ακολούθως σε μία ισοδύναμη στατική φόρτιση όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας g έχει κατά τι μεταβληθεί ως προς το μέγεθος, σε:

$$g^* = g \cdot \sqrt{\left(1 \pm \frac{a_V}{g}\right)^2 + \left(\frac{a_H}{g}\right)^2}$$

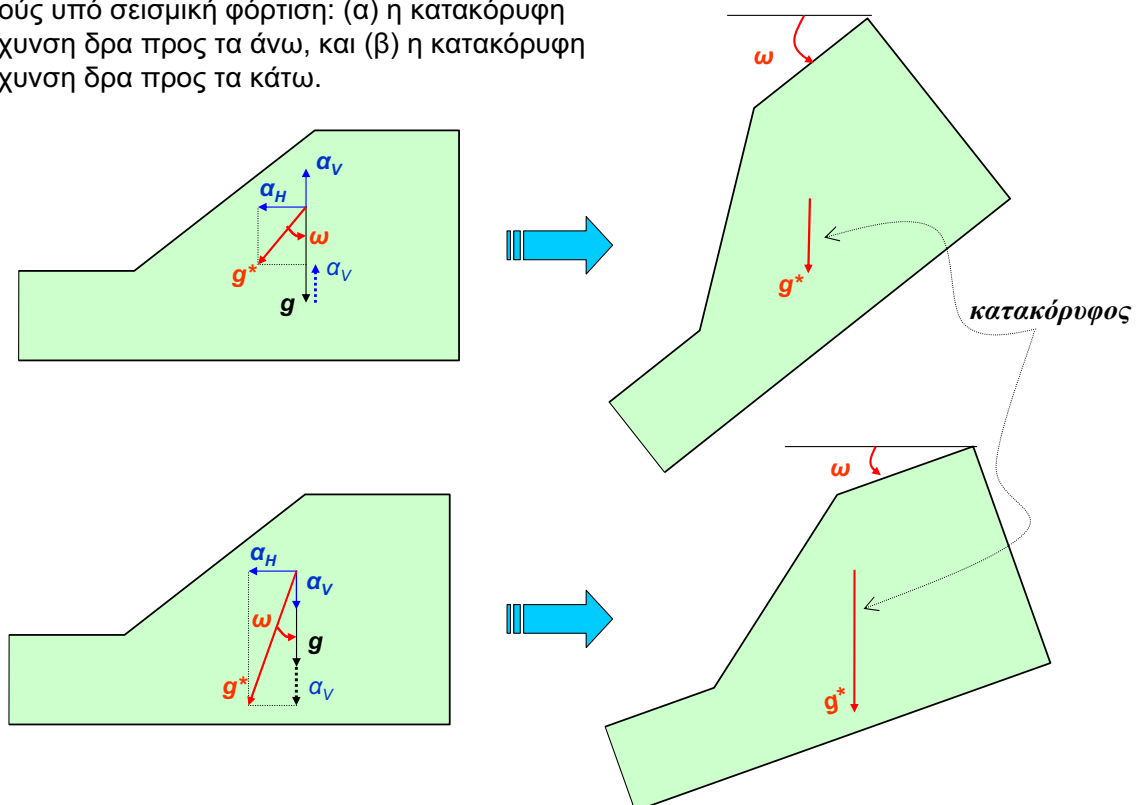
και έχει στραφεί, μαζί βέβαια με την γεωμετρία του πρσανούς και την ελεύθερη επιφάνεια του υδροφόρου ορίζοντα, κατά γωνία:

$$\omega = \tan^{-1} \left[\frac{a_H}{g \pm a_V} \right]$$

Περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στο Σχήμα 3.10 (και ακόμη περισσότερες στο μεταπτυχιακό μάθημα «Γεωτεχνική Σεισμική Μηχανική» του εαρινού εξαμήνου...).

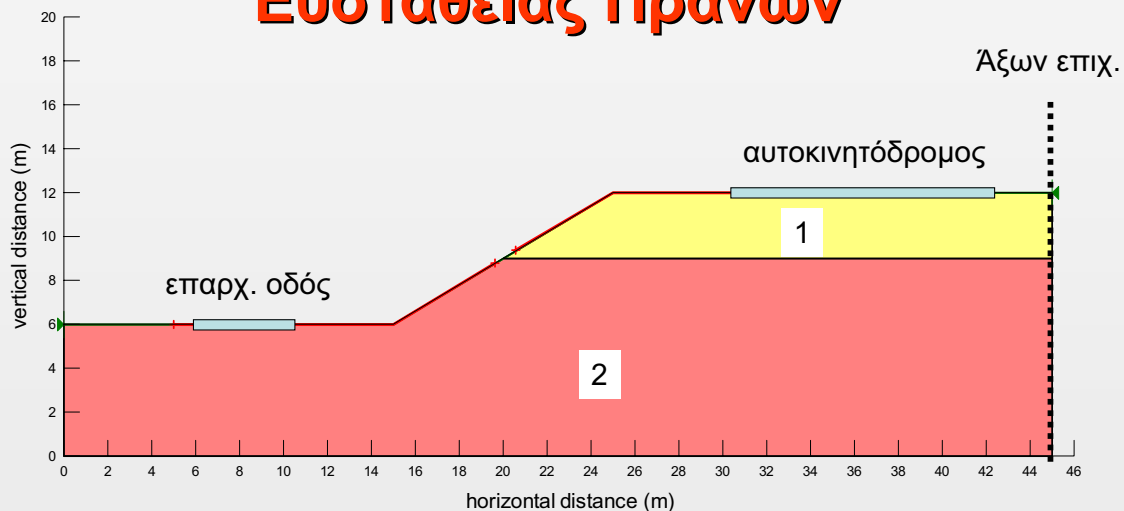
ΣΧΗΜΑ 3.10:

Απλοποιημένη ψευδο-στατική ανάλυση ευστάθειας πρσανούς υπό σεισμική φόρτιση: (α) η κατακόρυφη επιτάχυνση δρα προς τα άνω, και (β) η κατακόρυφη επιτάχυνση δρα προς τα κάτω.



Υπολογιστική Άσκηση

Ευστάθειας Πρανών



Κατά την κατασκευή αυτοκινητοδρόμου στο επίπεδο 12.0m δημιουργείται πρανές ύψους $H=6\text{m}$ και κλίσης 31° . Το πρανές αποτελείται από δύο εδαφικές στρώσεις:

1. Πυκνή άμμος – χάλικες με $\gamma=18\text{kN/m}^3$, $c=0$, $\phi=40^\circ$
2. Άργιλος με $\gamma=20\text{kN/m}^3$, $c=15\text{kPa}$, $\phi=25^\circ$, $S_u=30\text{kPa}$

Κρίσιμη αστοχία για το πρανές είναι αυτή που επηρεάζει τον αυτοκινητόδρομο προς τα ανάντη και την επαρχιακή οδό προς τα κατόντη

Ερώτημα 1

Θεωρώντας τη Σ.Υ.Ο. στη στάθμη $\pm 0.0\text{m}$, να εκτιμηθεί ο ελάχιστος Συντελεστής Ασφαλείας FS του πρανούς έναντι ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ με τρεις από τις παρακάτω μεθόδους:

- α) FELLENIUS (Ordinary Method of Slices)
- β) SIMPLIFIED BISHOP
- γ) JANBU
- δ) SPENCER
- ε) MORGENSTERN-PRICE (για σταθερή διεύθυνση ενδο-λωριδιακών δυνάμεων),
- στ) MORGENSTERN-PRICE (για διεύθυνση ενδο-λωριδιακών δυνάμεων που αυξο-μειώνεται επί τη βάση συνάρτησης μισού ημιτόνου)

ΚΑΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ Η ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Σημείωση: Οι αναλύσεις μπορούν να γίνουν με το λογισμικό SLOPE/W (Student Edition) που διατίθεται δωρεάν στην ηλεκτρονική διεύθυνση, ως μέρος του GEO-Studio 2004 (Student Edition):

<http://www.geo-slope.com/products/student.aspx>

Ερώτημα 2

Να εκτιμηθεί ο Συντελεστής Ασφαλείας FS του πρανούς έναντι ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ, με τις ίδιες μεθόδους, θεωρώντας ότι η ΣΥΟ δίνεται από τα παρακάτω υψόμετρα:

- 6.0m (για $x \leq 15\text{m}$),
- 9.0m ($x = 20\text{m}$),
- 10.5m (για $x = 25\text{m}$),
- 12.0m (για $x \geq 35\text{m}$)

Οι υπολογισμοί να γίνουν α) για την περίπτωση βραχυχρόνιας, και β) για την περίπτωση μακροχρόνιας αστοχίας.

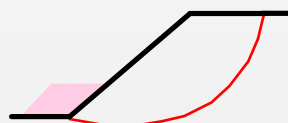
Ερώτημα 3

Για τη δυσμενέστερη περίπτωση των ερωτημάτων 1 και 2, να προταθούν ΜΕΤΡΑ σταθεροποίησης του πρανούς, έτσι ώστε ο Συντελεστής Ασφαλείας έναντι ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΑΣΤΟΧΙΑΣ να γίνει μεγαλύτερος από **1.5**.

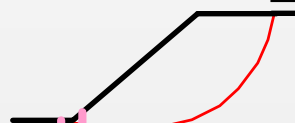
Σημείωση: Διαλέξτε τουλάχιστον 2 από τις συνήθεις μεθόδους σταθεροποίησης πρανών της επόμενης σελίδας.

Μέθοδοι Σταθεροποίησης Πρανών

1. ΑΥΞΗΣΗ Αντίστασης



επίχωμα ποδός



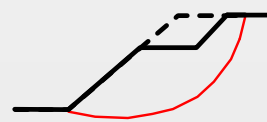
πάσσαλοι -
διάφραγμα



τοίχος

$$FS = \frac{\text{Αντίσταση}}{\text{Αίτιο Ολίσθ.}}$$

2. ΜΕΙΩΣΗ Αιτίου Ολίσθησης



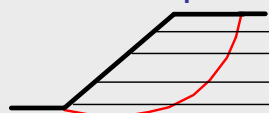
αλλαγή κλίσης



Μείωση ΣΥΟ

- φρέατα
- στοές αποστράγγισης

3. “βελτίωση” ή “αντικατάσταση” εδάφους



οπλισμένη γη

Ερώτημα 4

Στην εκπαιδευτική έκδοση του λογισμικού που θα χρησιμοποιήσετε δεν δίνεται η δυνατότητα απ'ευθείας επιβολής της σεισμικής φόρτισης. Θα μπορούσατε με κάποιο τρόπο να παρακάμψετε αυτή την αδυναμία και να επαναλάβετε το 1ο ερώτημα για

οριζόντια σεισμική επιτάχυνση:

$$\alpha_H = 0.20g \quad (\text{προς τα «έξω»})$$

και κατακόρυφη:

$$\alpha_V = \pm 0.10g$$

4. Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών

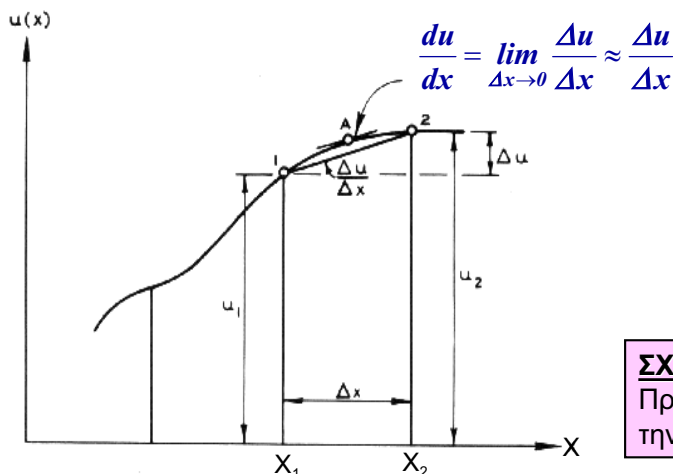
4.1 Βασικές Αρχές

Πριν από την εμφάνιση και την ευρύτατη διάδοση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (Π.Σ.), την οποία θα κουβεντιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, η **Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών** (Π.Δ.) ήταν πρακτικά η μόνη αριθμητική μέθοδος που εφαρμοζόταν για την επίλυση γεωτεχνικών προβλημάτων. Σήμερα, αν και η μέθοδος των Π.Σ. συνεχίζει να έχει το προβάδισμα, το ενδιαφέρον για την μέθοδο των Π.Δ. έχει αναζωπυρωθεί μια και αποδείχθηκε ότι παρουσιάζει ουσιαστικά πλεονεκτήματα για την προσομοίωση συγκεκριμένης ομάδας προβλημάτων, όπου η μεταβλητή του χρόνου αποτελεί βασικό παράγοντα της επίλυσης (π.χ. ροή και στερεοποίηση ή διάδοση σεισμικών κυμάτων).

Σύμφωνα με την συγκεκριμένη μέθοδο, η διακριτοποίηση έγκειται στην αντικατάσταση των παραγώγων στην διαφορική εξίσωση που διέπει ένα φυσικό πρόβλημα (π.χ. Πίνακας 2.1) με τον μέσο ρυθμό μεταβολής της άγνωστης συνάρτησης σε ένα μικρό αλλά πεπερασμένου μεγέθους βήμα των μεταβλητών.

Για παράδειγμα, η 1^η παράγωγος της συνάρτησης $u(x)$ σε ένα σημείο A εκφράζεται ως (Σχήμα 4.1):

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \quad (4.1)$$



ΣΧΗΜΑ 4.1

Προσέγγιση της 1^{ης} παραγώγου με την μέθοδο Π.Δ.

Η αντικατάσταση αυτή έχει ως αποτέλεσμα μία **Διαφορική Εξίσωση** να μετατρέπεται σε μία **Εξίσωση (Πεπερασμένων) Διαφορών**, ή μία εξίσωση που περιλαμβάνει τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης σε δύο συγκεκριμένα σημεία, με συντεταγμένες X_1 και X_2 εν προκειμένω. Εφαρμόζοντας την ανωτέρω αντικατάσταση για πολλά διαδοχικά σημεία A , έχω καταφέρει έτσι να μετατρέψω την διαφορική μου εξίσωση σε ένα απλό σύστημα (γραμμικών ή μη γραμμικών) εξισώσεων με αγνώστους τα $u_i = u(X_i)$ η επίλυση του οποίου επιτυγχάνεται με μία από τις γνωστές αριθμητικές μεθόδους (π.χ. μέθοδος απαλοιφής Gauss).

Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.

4.2 Προσεγγιστικός Υπολογισμός Παραγώγων

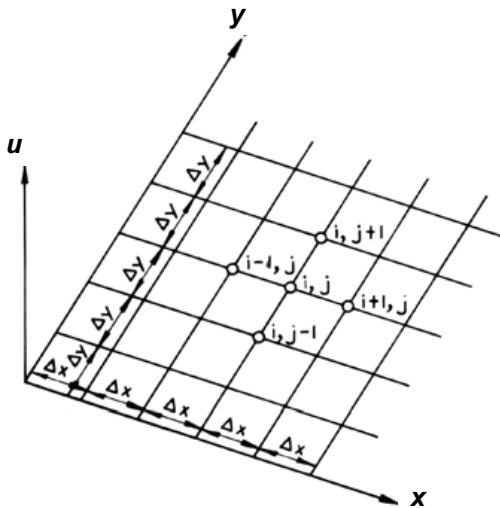
Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 2.1, οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τα γεωτεχνικά προβλήματα περιλαμβάνουν κατά κανόνα 1^{ες}, 2^{ες}, 3^{ες} και 4^{ες} παραγώγους. Έτσι, στις παραγράφους που ακολουθούν, παρατίθενται τυπικές σχέσεις από την θεωρία Π.Δ. για τις τέσσερις αυτές παραγώγους.

Εκ των προτέρων, επισημαίνεται ότι έχουν διατυπωθεί και εφαρμόζονται στην πράξη αρκετές διαφορετικές μεθοδολογίες προσεγγιστικού υπολογισμού των παραγώγων (π.χ. σειρές Taylor ή πολυωνυμική παρεμβολή). Από αυτές, θα ασχοληθούμε ενδεικτικά με την χρήση των αναπτυγμάτων σε σειρά Taylor.

Πρώτη Παράγωγος.- Με αναφορά στο Σχήμα 4.2, και μάλιστα στην κατά X τομή, οι τιμές της άγνωστης συνάρτησης *u* στα σημεία (*i-1, j*) και (*i+1, j*) προσεγγίζονται από τα παρακάτω αναπτύγματα σειρών Taylor:

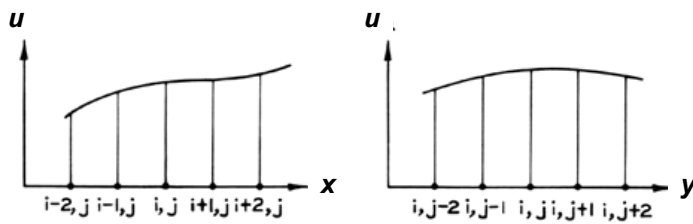
$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (4.2\alpha)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (4.2\beta)$$



ΣΧΗΜΑ 4.2
Απλή διακριτοποίηση συνεχούς μέσου σε 1- και 2- διαστάσεις για εφαρμογή της μεθόδου Π.Δ..

(α) Απλό δίκτυο Πεπερασμένων Διαφορών



(β) Τομή του δικτύου κατά την x και y διεύθυνση

Με ανακατάταξη των όρων και απλές πράξεις (πρόσθεση και αφαίρεση) μεταξύ των Εξισώσεων (4.2α) και (4.2β) μπορούμε να πάρουμε τελικώς τις παρακάτω εκφράσεις για την πρώτη παράγωγο της u κατά x :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.3\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.3\beta)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (4.3\gamma)$$

Οι οποίες είναι αντίστοιχα γνωστές ως *forward*-, *backward* και *central-difference* προσεγγιστικές μέθοδοι παραγωγίσισης.

Οι όροι $O(\Delta x^n)$ στις ανωτέρω εκφράσεις αντιπροσωπεύουν το *λάθος διακριτοποίησης* που προκύπτει λόγω παράλειψης των όρων τάξης $n+1$ και άνω (ως προς Δx) από τα αναπτύγματα των σειρών Taylor. Το *λάθος διακριτοποίησης* είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το Δx^n , και επομένως μικραίνει όσο πιο μικρό είναι το διάστημα Δx (πιο λεπτομερής διακριτοποίηση).

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποια είναι η αναλυτική έκφραση του λάθους διακριτοποίησης στις εξισώσεις 4.3 (α), (β) και (γ);

Ανώτερης Τάξης Παράγωγοι.- Μετά από πρόσθεση των Εξισώσεων (4.2α) και (4.2β) παίρνουμε επιπλέον την έκφραση για την δεύτερη παράγωγο της u κατά x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (4.4)$$

Με παρόμοιο τρόπο (*πως δηλαδή;*) μπορούμε να πάρουμε τις προσεγγιστικές εκφράσεις για την τρίτη και την τέταρτη παράγωγο της u κατά x :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{-u_{i-2,j} + 2u_{i-1,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2(\Delta x)^3} + O[(\Delta x)^2] \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{(\Delta x)^4} + O[(\Delta x)^2] \quad (4.6)$$

Παρατηρείστε ότι όσο μεγαλύτερης τάξης γίνεται η παράγωγος τόσο περισσότερα γειτονικά σημεία απαιτούνται για τον ορισμό τους με την μέθοδο των Π.Δ.
Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.

4.3 Παράδειγμα Εφαρμογής

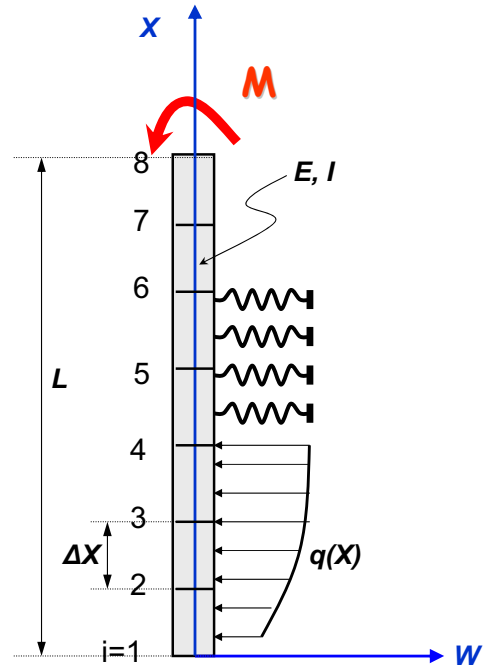
Την σύντομη αυτή παρουσίαση της μεθόδου Π.Δ. θα κλείσουμε με μία πρακτική εφαρμογή: Τον υπολογισμό των οριζόντιων μετατοπίσεων πασσάλου λόγω επιβολής καμπτικής ροπής στην κεφαλή (Σχήμα 4.3).

Απλοποιητικά θα θεωρηθεί ότι ο πάσσαλος έχει σταθερή διατομή και ότι το έδαφος είναι ομοιόμορφο. Η αντίδραση $q(x)$ που ασκείται στον πάσσαλο από το έδαφος είναι ανάλογη προς την μετατόπιση του πασσάλου και επομένως μπορεί να εκφραστεί ως:

$$q(x) = -k W(x) \quad (4.7)$$

όπου $W(x)$ είναι η οριζόντια μετατόπιση του πασσάλου. Τα μεγέθη που υπεισέρχονται στη εξίσωση 4.7 έχουν τις ακόλουθες μονάδες (στο διεθνές σύστημα SI):

$$\begin{aligned} W(x) &\rightarrow m \\ q(x) &\rightarrow kN / m \\ k &\rightarrow kN / m^2 \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 4.3

Αριθμητική ανάλυση της καμπτικής παραμόρφωσης πασσάλου με την μέθοδο Π.Δ.

Διαφορική Εξίσωση. - Ως γνωστό (γιατί;) η διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα είναι:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = q(x) \quad (4.8)$$

ή, σε συνδυασμό με την Εξ. 4.7,

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{k}{EI} W(x) = 0 \quad (4.9)$$

όπου EI = η καμπτική δυσκαμψία του πασσάλου
 W = το βέλος κάμψης (οριζόντια μετατόπιση)
 $q(x)$ = η αντίδραση του εδάφους

Επισημαίνεται ότι η ίδια ουσιαστικά εξίσωση διέπει τόσο την οριζόντια φόρτιση στην κεφαλή του πασσάλου, όσο και το πρόβλημα της (πεδιλο-) δοκού επί ελαστικού εδάφους.

Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε για την προσεγγιστική έκφραση των παραγώγων με την μέθοδο Π.Δ. (Εξ. 4.3 έως 4.6), η διαφορική εξίσωση 4.9 για τον κόμβο i του πασσάλου γράφεται :

$$\frac{W_{i-2} - 4W_{i-1} + 6W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2}}{(\Delta x)^4} + \frac{k}{EI} W_i = 0$$

ή, τελικώς

$$W_{i-2} - 4W_{i-1} + \left(6 + \frac{k\Delta x^4}{EI}\right)W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2} = 0 \quad (4.10i)$$

Συνοριακές Συνθήκες.- Η Εξ. 4.10i εφαρμόζεται για τους οκτώ (8) κόμβους στους οποίους αποφασίσαμε να διακριτοποιήσουμε τον πάσσαλο (Σχήμα 4.3), ήτοι για $i=1$ έως 8 . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ένα σύστημα οκτώ εξισώσεων με δώδεκα αγνώστους, τις δώδεκα μετατοπίσεις W_{-1} έως W_{10} .

Από αυτές μόνον οι οκτώ (W_1 έως W_8) έχουν φυσικό νόημα, ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις (W_{-1} , W_0 και W_9 , W_{10}) χρειάζονται μόνον για τον ορισμό της τετάρτης παραγώγου στη βάση ($i=1$) και στην κορυφή του πασσάλου ($i=8$). Όπως και να έχει το πράγμα όμως, χρειαζόμαστε ακόμη τέσσερις εξισώσεις γιατί αλλιώς το σύστημα μας είναι αόριστο, ικανοποιείται δηλαδή όχι από μία αλλά από πολλές ομάδες μετατοπίσεων. Οι πρόσθετες αυτές εξισώσεις προέρχονται από τις **συνοριακές συνθήκες** του προβλήματος, και συγκεκριμένα από το γεγονός ότι:

(α) η αιχμή του πασσάλου είναι ελεύθερη από εξωτερικές δυνάμεις (ροπές και τέμνουσες εν προκειμένω) οπότε:

$$M(x=0) = 0 \quad \text{ή} \quad \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right)_{x=0} = 0 \quad (4.11a)$$

και

$$Q(x=0) = 0 \quad \text{ή} \quad \left(EI \frac{d^3 W}{dx^3} \right)_{x=0} = 0 \quad (4.12a)$$

(β) στην κορυφή του πασσάλου επιβάλλεται γνωστή ροπή M_0 και μηδενική τέμνουσα, ήτοι:

$$M(x=L) = M_0 \quad \text{ή} \quad \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right)_{x=L} = -M_0 \quad (4.13a)$$

και

$$Q(x=L) = 0 \quad \text{ή} \quad \left(EI \frac{d^3 W}{dx^3} \right)_{x=L} = 0 \quad (4.14a)$$

Υπό μορφή Πεπερασμένων Διαφορών, οι εξισώσεις 4.11α έως 4.13α γράφονται ως ακολούθως:

$$W_0 - 2W_1 + W_2 = 0 \quad (4.11\beta)$$

$$-W_{-1} + 2W_0 - 2W_2 + W_3 = 0 \quad (4.12\beta)$$

$$W_7 - 2W_8 + W_9 = -\frac{M_0 \Delta x^2}{EI} \quad (4.13\beta)$$

$$-W_6 + 2W_7 - 2W_9 + W_{10} = 0 \quad (4.14\beta)$$

Έτσι, το σύστημα των εξισώσεων που θα πρέπει τελικά να επιλυθεί αποτελείται από τις εξισώσεις 4.10i ($i=1$ έως 8) και 4.11β έως 4.13β. Με την βοήθεια μητρώων, το σύστημα αυτό των εξισώσεων γράφεται ως ακολούθως:

Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.

Έτσι, το σύστημα των εξισώσεων που θα πρέπει τελικά να επιλυθεί αποτελείται από τις εξισώσεις 4.10i (i=1 έως 8) και 4.11β έως 4.13β. Με την βοήθεια μητρώων, το σύστημα αυτό των εξισώσεων γράφεται ως ακολούθως:

$$\underline{K} \underline{W} = \underline{F}$$

όπου:

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 + \frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & -\frac{M_o \Delta x^2}{EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{k\Delta x^4}{EI} & -\frac{EI}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{k\Delta x^4}{EI} & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{W} = \{W_{-1} \quad W_0 \quad W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad W_4 \quad W_5 \quad W_6 \quad W_7 \quad W_8 \quad W_9 \quad W_{10}\}^T$$

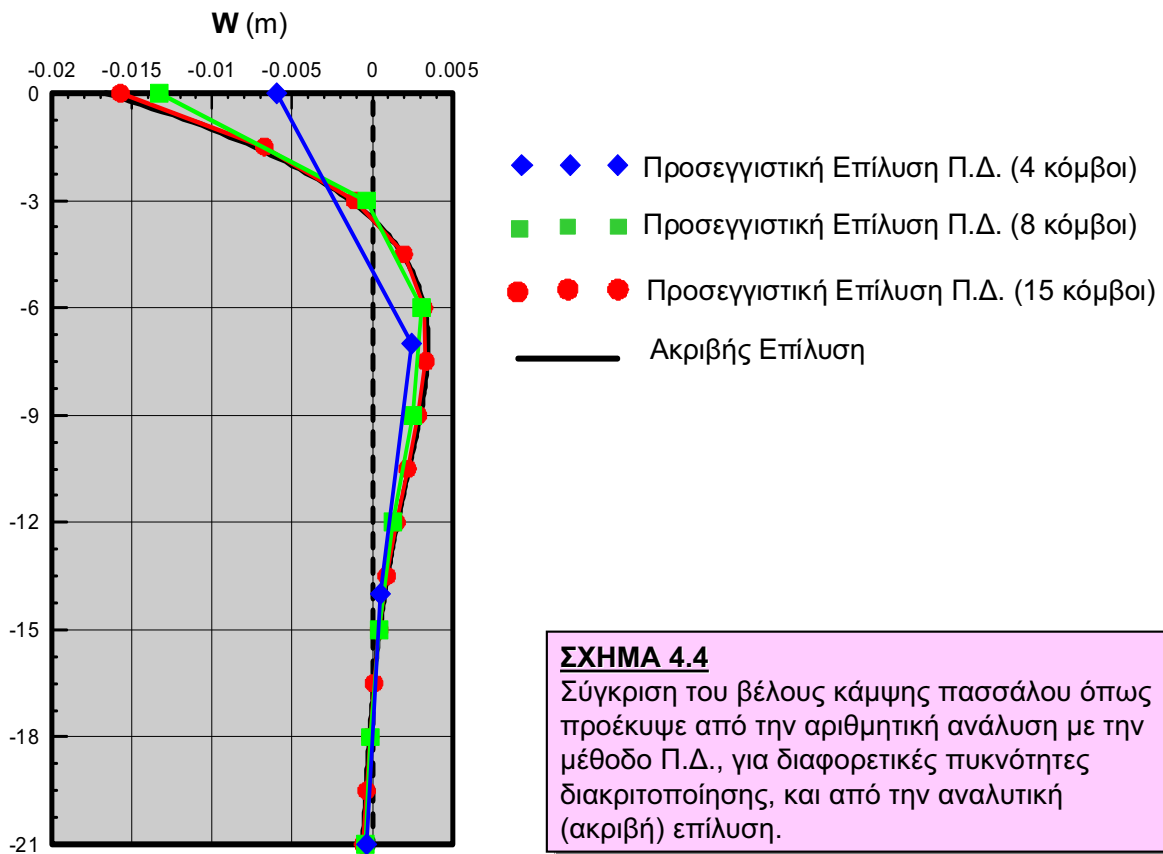
$$\underline{F} = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{M_o \Delta x^2}{EI} \quad 0 \right\}^T$$

Στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα επίλυσης του παραπάνω συστήματος εξισώσεων για ένα πάσσαλο από οπλισμένο σκυρόδεμα με μήκος $L=21m$, διάμετρο $D=0.80m$, έδαφος με $k=6 \text{ MN/m/m}$ και ροπή $M_o=1 \text{ MN m}$. Παράλληλα, παρουσιάζονται αποτελέσματα επίλυσης για 4 και 15 κόμβους διακριτοποίησης καθώς και η «ακριβής» λύση η οποία (για την συγκεκριμένη απλή περίπτωση) ελήφθη από αναλυτική επίλυση.

Τα συμπεράσματα δικά σας....

Άλλα παρόμοια προβλήματα με τα οποία μπορείτε να εξασκηθείτε είναι:

- πάσσαλος με οριζόντια δύναμη και ελεύθερη στροφή στην κεφαλή,
- πάσσαλος με οριζόντια δύναμη και πάκτωση στην κεφαλή,
- πεδילוδοκός με συγκεντρωμένα κατακόρυφα φορτία λόγω της ανωδομής,
- κλπ..



5. Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

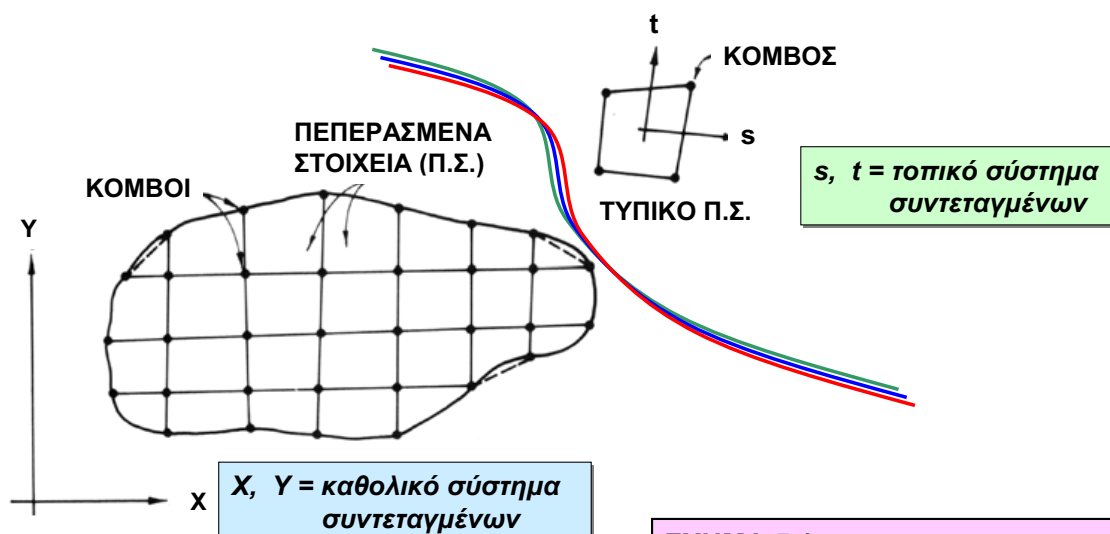
Σε αντίθεση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών, η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων βασίζεται σε ένα μαθηματικό υπόβαθρο το οποίο δεν ήταν απόλυτα ώριμο κατά την εμφάνιση της μεθόδου, αλλά αναπτύχθηκε παράλληλα με την μέθοδο αυτή καθ' εαυτή. Θα μπορούσαμε μάλιστα να πούμε, ότι ακόμη και σήμερα αυτή η παράλληλη εξέλιξη συνεχίζεται με αμείωτη ένταση και ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα περιοριστούμε βέβαια στα βασικά στοιχεία της μεθόδου τα οποία έχουν γίνει ευρέως αποδεκτά και αποτελούν κοινό τόπο για όλα τα εμπορικά τουλάχιστον λογισμικά εφαρμογής της. Για καθαρά εκπαιδευτικούς σκοπούς, η παρουσίαση της μεθόδου θα γίνει βήμα-βήμα, με την σειρά περίπτωση που ακολουθείται κατά την αριθμητική επίλυση των πραγματικών εφαρμογών:

- ✚ **ΒΗΜΑ 1:** Διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου σε Πεπερασμένα Στοιχεία
- ✚ **ΒΗΜΑ 2:** Επιλογή Συναρτήσεων Παρεμβολής
- ✚ **ΒΗΜΑ 3:** Κατάστρωση εξισώσεων σε επίπεδο (Πεπερασμένου) Στοιχείου
- ✚ **ΒΗΜΑ 4:** Κατάστρωση εξισώσεων σε καθολικό (global) επίπεδο.
- ✚ **ΒΗΜΑ 5:** Επίλυση - Υπολογισμός κύριων (βασικών) και δευτερογενών (παραγώγων) αποτελεσμάτων

ΒΗΜΑ 1: Διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου σε Πεπερασμένα Στοιχεία

Το πρώτο βήμα στην εφαρμογή της μεθόδου Π.Σ. είναι η διαίρεση του συνεχούς μέσου το οποίο μας ενδιαφέρει σε ένα ισοδύναμο σύστημα ισοδύναμων στοιχείων από το ίδιο συνεχές μέσον, τα *Πεπερασμένα Στοιχεία* (π.χ. Σχήμα 5.1), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σε συγκεκριμένα μόνον σημεία, τους *Κόμβους*.



ΣΧΗΜΑ 5.1

Διακριτοποίηση συνεχούς μέσου σε Πεπερασμένα Στοιχεία (Π.Σ.)

Όπως θα δούμε παρακάτω, η άγνωστη συνάρτηση την οποία επιζητούμε (π.χ. οι οριζόντιες μετατοπίσεις του πασσάλου στο προηγούμενο παράδειγμα) ορίζεται ανεξάρτητα μέσα σε κάθε Π. Σ., συναρτήσει των τιμών που παίρνει σε κάθε κόμβο. Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι, και σε αυτή την περίπτωση, η εξεύρεση μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση του προβλήματος ανάγεται στην εξεύρεση των πεπερασμένων σε πλήθος και συγκεκριμένων τιμών που παίρνει η συνάρτηση αυτή στους κόμβους των Π.Σ.. Η επίλυση δηλαδή της διαφορικής εξίσωσης ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων πλήθους ίσου προς αυτό των άγνωστων κομβικών τιμών.

Οι τιμές της συνάρτησης στους κόμβους (π.χ. μετατοπίσεις σε προβλήματα ισορροπίας ή υδραυλικό ύψος σε προβλήματα ροής) αποτελούν τις *κύριες αγνώστους*, ενώ άλλα μεγέθη που υπολογίζονται με βάση αυτές (π.χ. τάσεις και παραμορφώσεις σε προβλήματα ισορροπίας ή παροχές σε προβλήματα ροής) αποτελούν τις *δευτερεύουσες αγνώστους*.

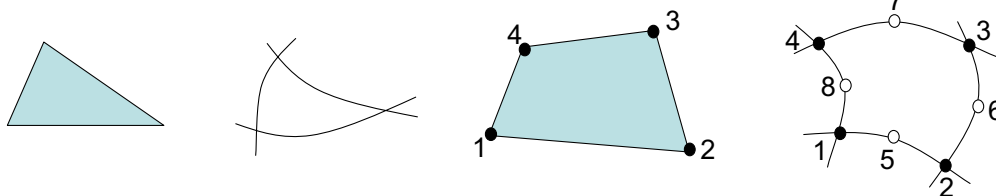
Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου Π.Σ. είναι ότι το κάθε στοιχείο αναλύεται πρώτα ξεχωριστά, στο *τοπικό σύστημα συντεταγμένων* (t-s στο Σχήμα 5.1), και ακολούθως σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα, στο *καθολικό σύστημα* συντεταγμένων (x-y στο Σχήμα 5.1). Η συνθήκη η οποία επιτρέπει την μετάβαση από το τοπικό στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων είναι ότι οι τιμές των κύριων αγνώστων σε ένα τυχαίο κόμβο (i στο Σχήμα 5.1) που προκύπτουν από την τοπική ανάλυση όλων των στοιχείων που συντρέχουν σε αυτόν (I, J, K και L στο Σχήμα 5.1) θα πρέπει να είναι ίσες.

Η γεωμετρία των Π.Σ. είναι φυσικά ανάλογη προς την γεωμετρία του συνεχούς μέσου που θα αναλυθεί:

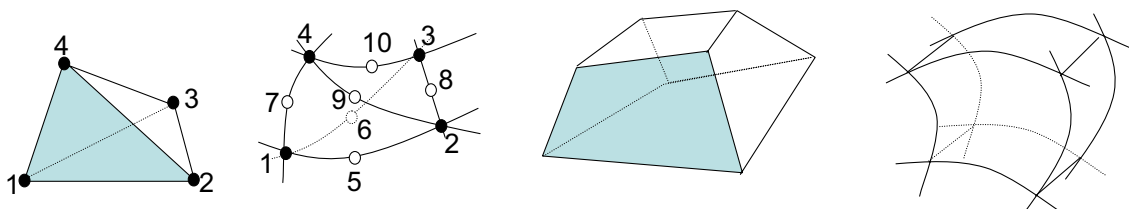
1-Δ γεωμετρία (π.χ. ο πάσσαλος σε «ελατηριωτό» έδαφος που είδαμε πριν):



2-Δ γεωμετρία (π.χ. ροή μέσω της εγκάρσιας τομής φράγματος):

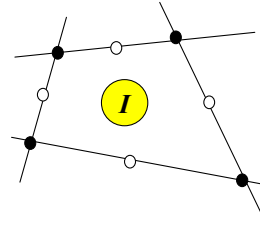
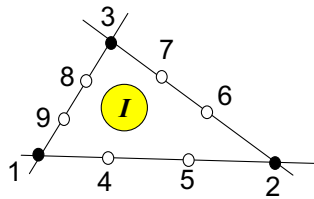


3-Δ γεωμετρία (π.χ. πάσσαλος σε συνεχές έδαφος υπό οριζόντια φόρτιση)

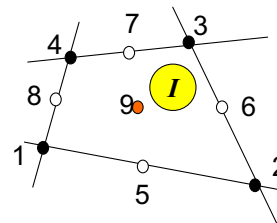
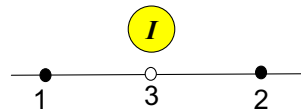


Εάν δεν συντρέχει ιδιαίτερος λόγος, η διακριτοποίηση γίνεται με Π.Σ. συνηθισμένου - κανονικού σχήματος (ευθύγραμμα τμήματα, τρίγωνα, ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, κλπ.). Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε πρακτικά σχήμα, ακόμη και με καμπύλες πλευρές, χάριν της τεχνικής των «*ισοπαραμετρικών*» Π.Σ. που είναι σήμερα διαθέσιμη σε όλα τα εμπορικά πακέτα λογισμικών Π.Σ..

Ο αριθμός των κόμβων που θα δεχθούμε σε ένα Π.Σ. δεν είναι συγκεκριμένος, μια και οι κόμβοι δεν τοποθετούνται μόνον στις κορυφές (ή τις άκρες) ενός Π.Σ., αλλά και επί των πλευρών του:



ή ακόμη και στο εσωτερικό του:

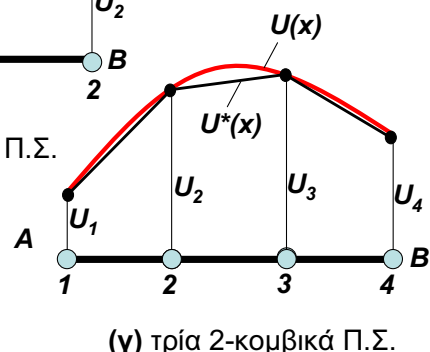
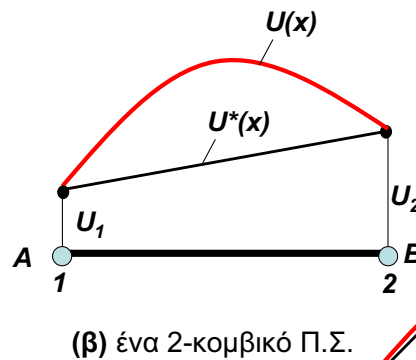
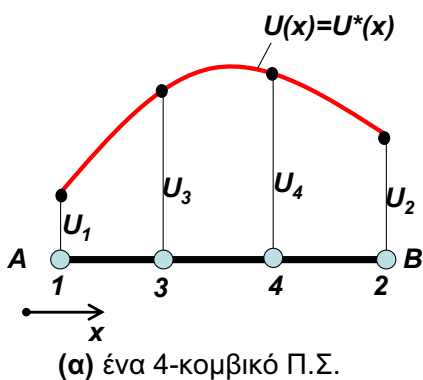


Η αύξηση του αριθμού των κόμβων σε ένα Π.Σ. οδηγεί συνήθως σε ακριβέστερες λύσεις, και μειώνει το συνολικό πλήθος των απαιτούμενων Π.Σ..

Για να καταλάβουμε το γιατί, ας θεωρήσουμε το Π.Σ. AB ενός πασσάλου που υπόκειται σε αξονική φόρτιση, καθώς και μία «άγνωστη» συνάρτηση αξονικών μετατοπίσεων 3-ου βαθμού:

$$U = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

όπου x είναι ο διαμήκης άξονας του Π.Σ..



ΣΧΗΜΑ 5.2

Ακρίβεια επίλυσης ανάλογα με τον αριθμό των Π.Σ. και των κόμβων ανά Π.Σ.

Για τον ακριβή υπολογισμό της U χρειαζόμαστε τέσσερις κόμβους ($i=1,2,3, 4$), δύο στις άκρες του στοιχείου και δύο στο εσωτερικό του, έτσι ώστε οι τιμές των σταθερών (α, β, γ και δ) της άγνωστης συνάρτησης να μπορούν να υπολογισθούν βάσει των τιμών της U στους κόμβους αυτούς (U_1, U_2, U_3 και U_4).

Εάν αντί για τέσσερις κόμβους χρησιμοποιήσουμε μόνον δύο ($i=1$ & 2 στις άκρες του Π.Σ.), τότε η επίλυση θα μας δώσει αναγκαστικά μία γραμμική συνάρτηση:

$$U^* = \alpha^* + \beta^*x$$

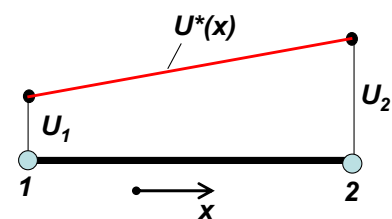
η οποία θα συμφωνεί με την πραγματική μόνον στα άκρα A και B.

Για να προσεγγίσουμε την ακρίβεια ενός 4-κομβικού Π.Σ., θα μπορούσαμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερο αριθμό (τριών ή περισσότερων) 2-κομβικών στοιχείων, γεγονός το οποίο όμως αυξάνει τελικώς τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο.

ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Συναρτήσεων Παρεμβολής

Στο βήμα αυτό επιλέγουμε εκ των προτέρων την γενική μορφή της λύσης (π.χ. μετατόπισης ή υδραυλικού ύψους) εντός κάθε Π.Σ. και παράλληλα, για τους λόγους που εξηγήσαμε λίγο πριν, τον αριθμό των κόμβων με τους οποίους θα ενώσουμε κάθε Π.Σ. με τα διπλανά του.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν την πιο απλή μορφή Π.Σ., το ευθύγραμμο με δύο κόμβους (έναν σε κάθε άκρη του) και ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο. Στο στοιχείο αυτό, μπορούμε να υποθέσουμε γραμμική μεταβολή της άγνωστης ποσότητας



$$U^*(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = \begin{Bmatrix} 1 & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

για και έχουμε μόνον δύο μετατοπίσεις, την U_1 και την U_2 για να ορίσουμε τους συντελεστές α_1 και α_2 .

Εάν εφαρμόσουμε λοιπόν την Εξ. 5.1 στους κόμβους 1 και 2, παίρνουμε:

$$U_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1$$

$$U_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2$$

ή, υπό μορφή μητρώων:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Επίλυση της εξ. 5.2 ως προς α_1 και α_2 δίνει:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

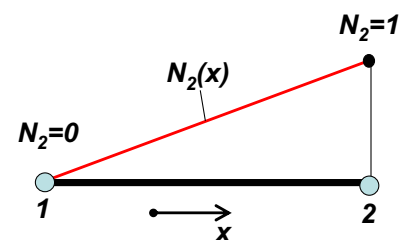
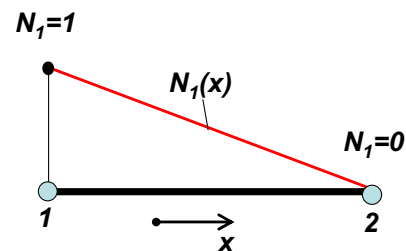
Συνδυασμός των εξ. 5.1 και 5.3 δίνει τελικώς:

$$U^*(x) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} \begin{Bmatrix} 1 & x \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

ή

$$U^*(x) = \underbrace{\begin{Bmatrix} x_2 - x \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix}}_{N_1} \underbrace{\begin{Bmatrix} x - x_1 \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix}}_{N_2} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Οι λόγοι N_1 και N_2 καλούνται **Συναρτήσεις Σχήματος** (*shape functions*) και βοηθούν ιδιαίτερως στην περαιτέρω διατύπωση των εξισώσεων. Για την απλή περίπτωση Π.Σ. που θεωρήσαμε, οι N_1 και N_2 είναι γραμμικές συναρτήσεις που μεταβάλλονται μεταξύ 0 και 1:



ΑΣΚΗΣΗ για το σπίτι:

(α) Μπορείτε να ορίσετε τις *Συναρτήσεις Σχήματος* για ένα ευθύγραμμο Π.Σ. με τρεις κόμβους (δύο στα άκρα και έναν στην μέση), και ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία;

(β) Είναι αλήθεια ότι η χρήση των *Συναρτήσεων Σχήματος* βοηθά στην ολοκλήρωση και στην παραγωγή της άγνωστης συνάρτησης $U(x)$; Γιατί;

ΣΧΗΜΑ 5.3

Συναρτήσεις Σχήματος για ευθύγραμμο Π.Σ. με δύο κόμβους και ένα βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο.

Στην *γενική περίπτωση* η άγνωστη συνάρτηση $U(x)$ αναλύεται σε συνιστώσες, αποτελεί δηλαδή διανυσματικό μέγεθος, και επομένως η Εξ. 5.4 γράφεται:

$$\{U\} = [N] \{q\} \quad (5.5)$$

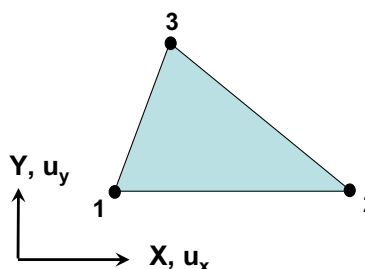
Οι διαστάσεις (σειρές x στήλες) των μητρώων στην ανωτέρω εξίσωση είναι:

$U \longrightarrow$ [αριθμός αγνώστων ανά κόμβο] x [1]

$N \longrightarrow$ [αρ. αγνώστων ανά κόμβο] x [(αρ. αγνώστων ανά κόμβο) x (αρ. κόμβων)]

$q \longrightarrow$ [(αρ. αγνώστων ανά κόμβο) x (αρ. κόμβων)] x [1]

Για *παράδειγμα*, σε ένα πρόβλημα επίπεδης έντασης (π.χ. καθίζηση πεδילוδοκού) και για 3-κομβικά Π.Σ., η Εξ. 5.5 γράφεται αναλυτικά :



$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{2x} & 0 & N_{3x} & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & N_{2y} & 0 & N_{3y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Τι είναι τα *Ισο-παραμετρικά Πεπερασμένα Στοιχεία*;

Είναι Π.Σ. στα οποία η γεωμετρία του στοιχείου εκφράζεται με την βοήθεια των ίδιων *Συναρτήσεων Σχήματος* που χρησιμοποιούνται για τον (κατ' εκτίμηση) ορισμό της άγνωστης συνάρτησης $U(x)$. Έτσι, στην περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος, οι συντεταγμένες x και y κάθε σημείου του 3-γωνικού και 3-κομβικού Π.Σ. γράφονται:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{2x} & 0 & N_{3x} & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & N_{2y} & 0 & N_{3y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ξεφύγουμε από τα απλά σχήματα των Π.Σ. (τρίγωνα, κύβους, κλπ.) και να υιοθετήσουμε Π.Σ. με καμπύλες πλευρές και κυρτές έδρες για καλύτερη προσομοίωση της γεωμετρίας του προβλήματος (π.χ. 3-Δ προσομοίωση σήραγγας). Τότε όμως δεν αρκούν πλέον οι κόμβοι στις κορυφές αλλά απαιτούνται και ενδιάμεσοι κόμβοι στις πλευρές και τις έδρες του Π.Σ..

ΒΗΜΑ 3: Κατάστρωση εξισώσεων σε επίπεδο (Πεπερασμένου) Στοιχείου

Η μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων στο επίπεδο του κάθε Π.Σ. είναι ίσως το πιο βασικό βήμα της επίλυσης με την μέθοδο των Π.Σ.. Οι μέθοδοι που είναι διαθέσιμες για τον σκοπό αυτό είναι αρκετές, αυτές όμως που έχουν επικρατήσει σήμερα ανήκουν σε δύο βασικές ομάδες: η μία βασίζεται στην *θεωρία των μεταβολών* (theory of variations) και η άλλη στην θεωρία των *σταθμικών (ή σταθμισμένων) υπολοίπων* (theory of weighted residuals).

Ανεξαρτήτως μεθόδου διατύπωσης των εξισώσεων που διέπουν την συμπεριφορά ενός Π.Σ. m , καταλήγουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων με n αγνώστους, όπου $n=(αρ. κόμβων του Π.Σ.) \times (αρ. αγνώστων ανά κόμβο)$:

$$[K]_m \{q\}_m = \{F\}_m$$

Στην ανωτέρω σχέση,

- ▶ $[K]_m$ είναι το μητρώο που περιλαμβάνει πληροφορίες για τις γεωμετρικές και τις μηχανικές ιδιότητες του Π.Σ. (μητρώο ακαμψίας σε προβλήματα φορτίου-μετατόπισης ή μητρώο διαπερατότητας σε προβλήματα ροής),
- ▶ $\{q\}_m$ είναι το διάνυσμα των τιμών της άγνωστης συνάρτησης (μετατοπίσεις σε προβλήματα φορτίου-μετατόπισης ή διάνυσμα υδραυλικού ύψους σε προβλήματα ροής) και
- ▶ $\{F\}_m$ είναι το διάνυσμα «φόρτισης» των κόμβων (δυνάμεις σε προβλήματα φορτίου-μετατόπισης ή διάνυσμα παροχών σε προβλήματα ροής)

► $[F]_m$ είναι το διάνυσμα «φόρτισης» των κόμβων (δυνάμεις σε προβλήματα φορτίου-μετατόπισης ή διάνυσμα παροχών σε προβλήματα ροής)

Μέθοδος Σταθμισμένων Υπολοίπων Galerkin.- Η λεπτομερής παρουσίαση των διάφορων μεθόδων διατύπωσης των εξισώσεων σε επίπεδο Π.Σ. εκφεύγει κατά πολύ των σκοπών της παρουσίασης. Συνοπτικά μόνον θα παρουσιασθεί η Galerkin η οποία είναι από τις δημοφιλέστερες και ευρύτερα χρησιμοποιούμενες σήμερα.

Ας πάρουμε πάλι τον γνωστό μας οριζόντια φορτιζόμενο πάσσαλο σε ελατηριωτό έδαφος, του Σχήματος 4.3. Η ακριβής λύση για τις οριζόντιες μετατοπίσεις του πασσάλου U ικανοποιεί προφανώς την διαφορική εξίσωση του προβλήματος:

$$\frac{d^4 U}{dx^4} + \frac{k}{EI} U = 0$$

Η οποιαδήποτε προσεγγιστική λύση U^* όμως δεν την ικανοποιεί, αλλά αφήνει ένα υπόλοιπο R , ισχύει δηλαδή:

$$\frac{d^4 U^*}{dx^4} + \frac{k}{EI} U^* = R \quad (5.8)$$

Η φιλοσοφία των διαφόρων μεθόδων *Σταθμισμένων Υπολοίπων* είναι να βρεθεί η προσεγγιστική εκείνη λύση η οποία ελαχιστοποιεί το υπόλοιπο R σε κάθε σημείο του Π.Σ.. Σύμφωνα με την μέθοδο Galerkin, η συνθήκη αυτή εξασφαλίζεται όταν ισχύει:

$$\int_D R \cdot N_j \cdot dD = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, r \quad (5.9)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, το πεδίο D αντιστοιχεί στον χώρο που καταλαμβάνει το Π.Σ., N_j είναι οι γνωστές μας πλέον Συναρτήσεις Σχήματος και r είναι ο συνολικός αριθμός των «βαθμών ελευθερίας» του Π.Σ. [$r = (\text{αριθμ. κόμβων}) \times (\text{αριθμ. βαθμών ελευθ. ανά κόμβο})$].

Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιήσουμε 2-κομβικά στοιχεία πασσάλου, με δύο βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (μία οριζόντια μετατόπιση και μία στροφή) θα είναι $r=2 \times 2=4$.

Αντικαθιστώντας την εξ. 5.8 στις εξ. 5.9, προκύπτει ότι για κάθε Π.Σ. του πασσάλου ισχύει:

$$\int_D \left[\frac{d^4 U^*}{dx^4} + \frac{k}{EI} U^* \right] \cdot N_j \cdot dD = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, r \quad (5.10)$$

Λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι $U^* = \sum_{j=1}^r N_j q_j$ η εξ. 5.10 για ένα Π.Σ. m του πασσάλου γράφεται τελικώς :

$$\sum_{i=1}^r \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^4 N_i}{dx^4} + \frac{k}{EI} N_i \right] \cdot N_j \cdot dx \right\} q_i = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, r \quad (5.11)$$

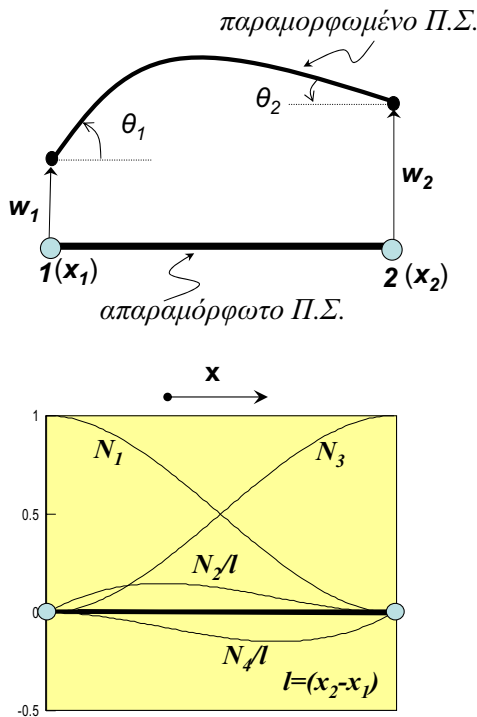
ή, υπό μορφή μητρώου:

$$\begin{bmatrix} k_{1,1}^m & k_{1,2}^m & k_{1,3}^m & k_{1,4}^m \\ k_{2,1}^m & k_{2,2}^m & k_{2,3}^m & k_{2,4}^m \\ k_{3,1}^m & k_{3,2}^m & k_{3,3}^m & k_{3,4}^m \\ k_{4,1}^m & k_{4,2}^m & k_{4,3}^m & k_{4,4}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^m \\ F_2^m \\ F_3^m \\ F_4^m \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

όπου:
$$k_{j,i} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^4 N_i}{dx^4} + \frac{k}{EI} N_i \right] \cdot N_j \cdot dx \quad (5.12)$$

και (βλ. Σχήμα 5.4):

- | | |
|--------------------------------------|---|
| $q_1 = w_1$ μετατόπιση στον κόμβο 1 | $F_1 = P_1$ εξωτερική (οριζόντια) δύναμη στον κόμβο 1 |
| $q_2 = \theta_1$ στροφή στον κόμβο 1 | $F_2 = M_1$ εξωτερική ροπή στον κόμβο 1 |
| $q_3 = w_2$ μετατόπιση στον κόμβο 2 | $F_3 = P_2$ εξωτερική (οριζόντια) δύναμη στον κόμβο 2 |
| $q_4 = \theta_2$ στροφή στον κόμβο 2 | $F_4 = M_2$ εξωτερική (οριζόντια) δύναμη στον κόμβο 2 |



$$U^* = \sum_{j=1}^4 q_j N_j$$

$$N_1(x) = 1 - 3 \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^3$$

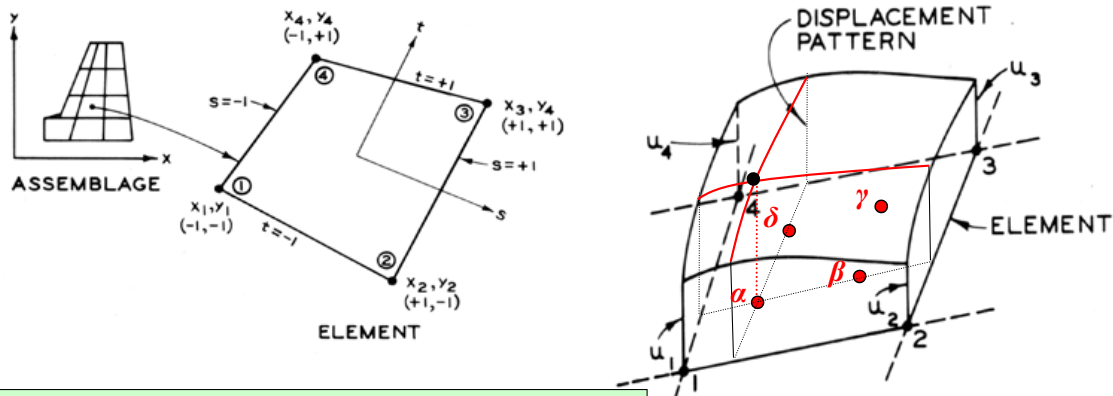
$$N_2(x) = (x-x_1) \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} - 1 \right)^2$$

$$N_3(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^2 \left[3 - 2 \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \right]$$

$$N_4(x) = \frac{(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)} \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} - 1 \right)$$

ΣΧΗΜΑ 5.4
 Βαθμοί ελευθερίας και Συναρτήσεις Σχήματος για Π.Σ. οριζόντια φορτιζόμενου πασσάλου σε ελατηριωτό έδαφος

Η ολοκλήρωση στην εξ. 5.12 γίνεται βέβαια αριθμητικά, με αναφορά στις τιμές που παίρνει η αντίστοιχη συνάρτηση σε συγκεκριμένα σημεία εντός του Π.Σ. ($x_1 < x < x_2$), τα επωνομαζόμενα **σημεία ολοκλήρωσης** (integration points):



π.χ.

$$\iint_{A_{1234}} U(x, y) dx dy = \sum U_k A_k, \quad k = \alpha, \beta, \gamma, \delta$$

ή

$$\iint_{A_{1234}} U(x, y) dx dy = U_\alpha A_\alpha + U_\beta A_\beta + U_\gamma A_\gamma + U_\delta A_\delta$$

όπου $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$ και A_δ είναι τα εμβαδά του Π.Σ. που επηρεάζει το κάθε ένα από τα σημεία ολοκλήρωσης ($A_\alpha + A_\beta + A_\gamma + A_\delta = A_{1234}$).

ΣΧΗΜΑ 5.5
 Βασικά στοιχεία σχετικά με την αριθμητική ολοκλήρωση επί ενός Π.Σ..

ΒΗΜΑ 4: Κατάστρωση εξισώσεων σε καθολικό (global) επίπεδο.

Η κατάστρωση του συστήματος των εξισώσεων σε καθολικό επίπεδο

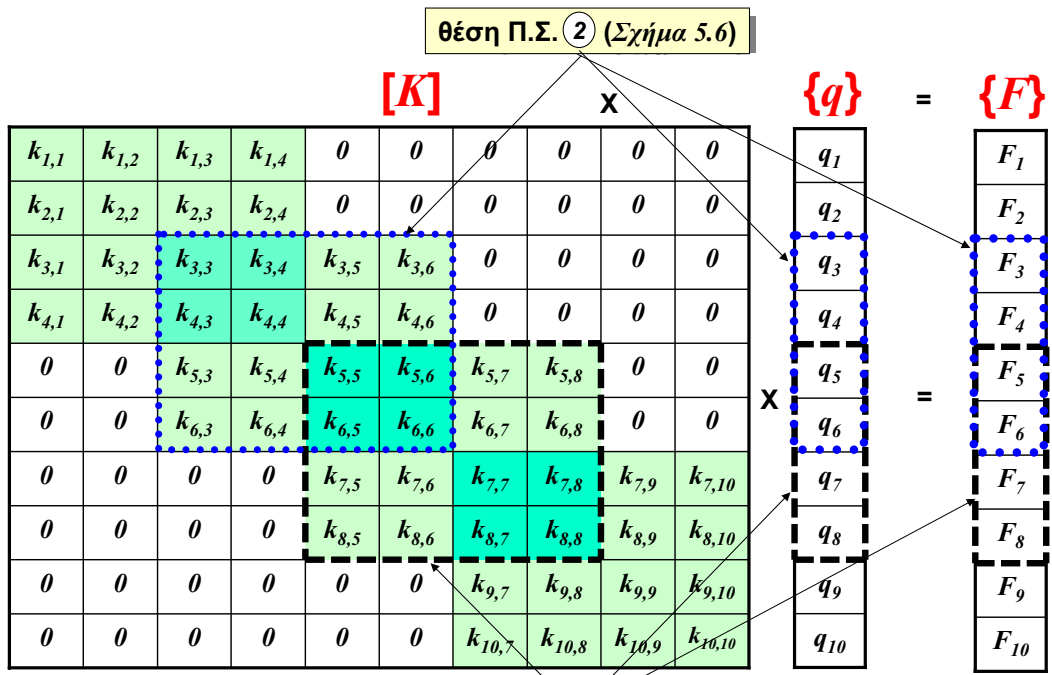
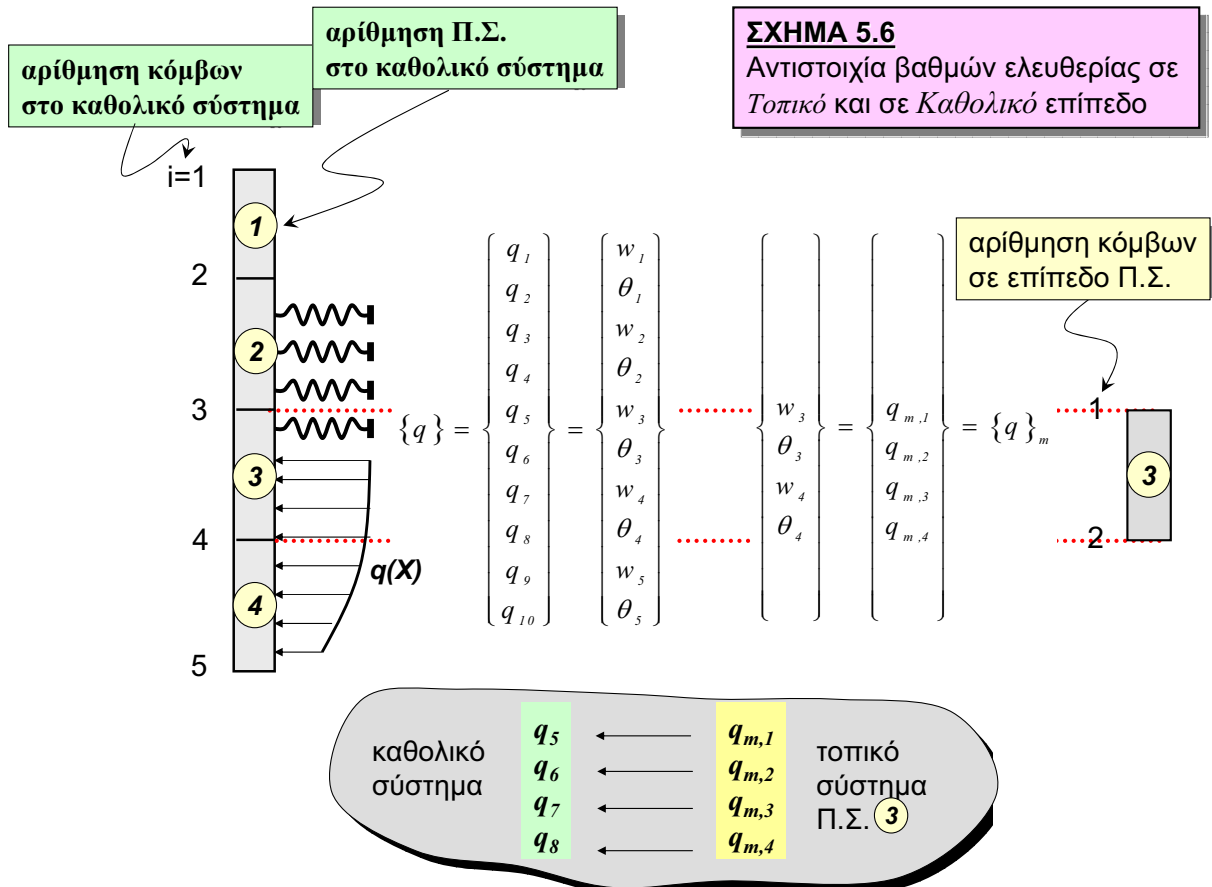
$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (5.13)$$

αποτελεί μία .. μηχανική διαδικασία η οποία περιγράφεται εποπτικά στα Σχήματα 5.6 και 5.7, για την περίπτωση ενός οριζόντια φορτιζόμενου πασσάλου σε ελατηριωτό έδαφος. Κατ' ουσίαν, τα συστήματα εξισώσεων σε επίπεδο Π.Σ.:

$$[K]_m \{q\}_m = \{F\}_m$$

επαλληλίζονται με οδηγό την αντιστοιχία μεταξύ τοπικών (σε επίπεδο Π.Σ.) και καθολικών (για ολόκληρο το δίκτυο Π.Σ.) βαθμών ελευθερίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.6. Σαν αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας :

- A. Τα στοιχεία των μητρώων $[K]_m$ και $\{F\}_m$ τα οποία αντιστοιχούν σε ένα κόμβο που είναι κοινός σε δύο ή περισσότερα Π.Σ. προστίθενται (Σχήμα 5.7).
- B. Το μητρώο $[K]$ είναι συνήθως συμμετρικό ως προς την διαγώνιο του, πάνω και κάτω από την οποία συγκεντρώνονται τα μη μηδενικά στοιχεία υπό μορφή διαγώνιας ζώνης. Όσο μικρότερο είναι το εύρος αυτής της ζώνης τόσο μικρότερος είναι ο χρόνος αντιστροφής του εν λόγω μητρώου και, κατ' επέκταση ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος (Σχήμα 5.7).



$k_{5,5} = (k_{5,5})^{②} + (k_{5,5})^{③}$

$F_5 = (F_5)^{②} + (F_5)^{③}$

θέση Π.Σ. ③ (Σχήμα 5.6)

ΣΧΗΜΑ 5.7
Σύνθεση συστήματος εξισώσεων Π.Σ. σε καθολικό επίπεδο

ΒΗΜΑ 5: Επίλυση - Υπολογισμός κύριων (βασικών) και δευτερογενών (παραγώγων) αποτελεσμάτων

Η επίλυση της Εξ. 5.13 προϋποθέτει αντιστροφή του μητρώου $[K]$ και αποτελεί την πιο χρονοβόρα διαδικασία κατά την εφαρμογή της μεθόδου των Π.Σ..

Για να καταλάβετε γιατί, θεωρήστε ένα πραγματικό πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης (π.χ. υπολογισμού των καθιζήσεων πεδילוδοκού) όπου η διακριτοποίηση οδηγεί σε 1000 κόμβους. Τότε οι βαθμοί ελευθερίας (δύο μετατοπίσεις και μία πίεση πόρων ανά κόμβο) είναι $3 \times 1000 = 3000$ και το μητρώο $[K]$ έχει διάσταση 3000×3000 , ήτοι περιλαμβάνει 9,000,0000 στοιχεία.

Η επίλυση τέτοιων γιγαντιαίων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων απαιτεί ειδικές υπολογιστικές τεχνικές, όπως είναι για παράδειγμα η μέθοδος απαλοιφής Gauss, η οποία είναι ιδιαίτερα δημοφιλής στην πράξη δεδομένου ότι απαιτεί μικρό σχετικά υπολογιστικό χρόνο και αντίστοιχα μικρό χώρο μνήμης.

6. Επίλυση μη-γραμμικών προβλημάτων (Π.Σ. ή Π.Δ.)

Ο χρόνος επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων αυξάνει ακόμη περισσότερο όταν είναι μη γραμμικές, π.χ. όταν το μητρώο $[K]$ είναι συνάρτηση της επιζητούμενης λύσης ή/και της επιβαλλόμενης φόρτισης:

$$[K(q_i, F_i)] \{q\} = \{F\} \quad i = 1, \dots, \text{βαθμοί ελευθερίας} \quad (6.1)$$

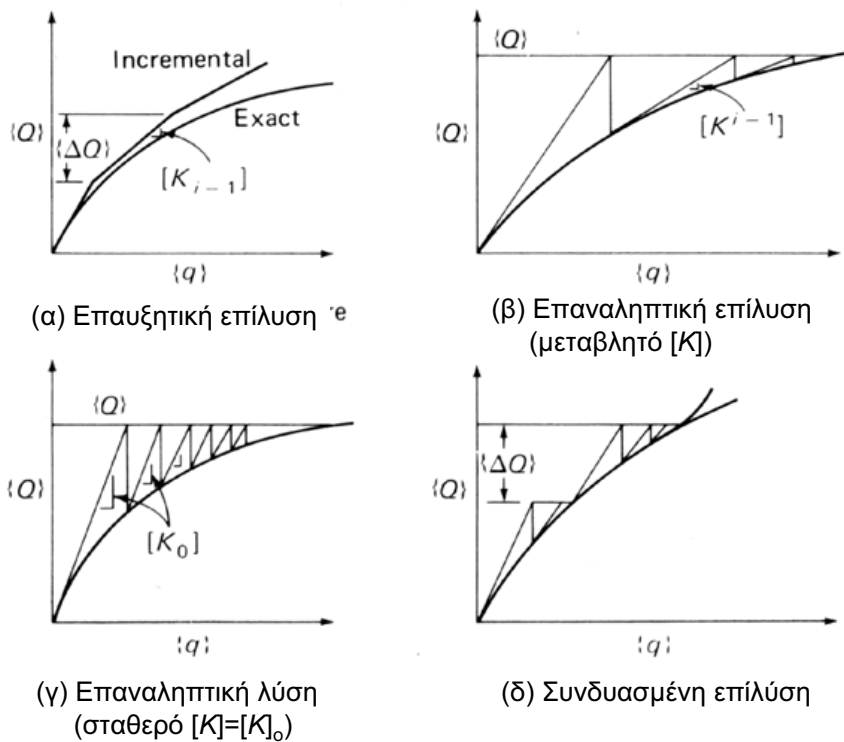
Στην περίπτωση αυτή, όπως εξ' άλλου και στην περίπτωση μη γραμμικών εξισώσεων, η επίλυση περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό

- **μικρών βημάτων** (επαναληπτική μέθοδος επίλυσης ή *incremental solution*), ή
- **επαναλήψεων** (επαναληπτική μέθοδος επίλυσης ή *iterative solution*).

Η βασική ιδέα των ανωτέρω μεθόδων επιδεικνύεται στο Σχήμα 6.1.

Επισημαίνεται ότι η αποτελεσματικότητα της κάθε μεθόδου εξαρτάται από τον τύπο του προβλήματος που επιλύεται. Για παράδειγμα, η *επαναληπτική μέθοδος* προϋποθέτει ότι στην Εξ. 6.1 υπεισέρχεται η μεταβολή της άγνωστης μεταβλητής ($\{\Delta q\}$ αντί για $\{q\}$) και της γενικευμένης φόρτισης ($\{\Delta q\}$ αντί για $\{q\}$). Για προβλήματα δύναμης-μετατόπισης, αυτό σημαίνει ότι η διατύπωση των εξισώσεων Π.Σ. γίνεται με την βοήθεια του *εφαπτομενικού* και όχι του *τέμνοντος* μητρώου δυσκαμψίας....

Γ. Δ. Μπουκοβάλας, Καθηγητής Σχολής Πολ. Μηχανικών, Ε.Μ.Π.



ΣΧΗΜΑ 6.1
Μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης Μη-Γραμμικών προβλημάτων

ΑΣΚΗΣΗ για το σπίτι:

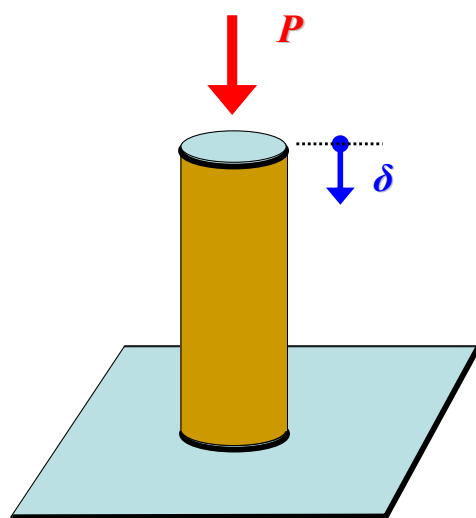
Για να απομυθοποιήσετε τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών (συστημάτων) εξισώσεων, ας θεωρήσουμε την εδαφική στήλη του σχήματος (ένα μοναδικό Π.Σ.) για την οποία ισχύει η εξής μη γραμμική σχέση μεταξύ της δύναμης και της μετατόπισης στην κορυφή:

$$K \cdot \delta = P$$

$$\text{με } K = \frac{K_o}{1 + (\delta/\delta_o)^\alpha}$$

Μπορείτε να κατασκευάσετε αριθμητικά την καμπύλη $P-\delta$ για $P=0 \div 5000kN$ χρησιμοποιώντας κάποιες από τις μεθόδους που περιγράφονται στο Σχήμα 6.1;

Οι τιμές των παραμέτρων είναι $K_o=10^4 kN/m$, $\delta_o=0.30m$ και $\alpha=0.80$.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Για την σύντομη περιγραφή των μεθόδων Π.Δ. και Π.Σ. που προηγήθηκε (Κεφ. 4, 5 και 6) χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω βιβλιογραφία:

1. Μ. ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗ: *Ανάλυση Φορέων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001
2. C. S. DESAI & J. T. CHRISTIAN: *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, McGraw Hill, 1977
3. P. TONG & J. N. ROSSETTOS: *Finite-Element Method, basic Technique and Implementation*, The MIT Press, 1977
4. O. C. ZIENKIEWICZ: *The Finite Element Method*, McGraw Hill, 1977