



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΤΕΧΝΙΚΗΣ**

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου 157 80  
Τηλ: 210 772 3780, Fax: 210 772 3428, e-mail: [gbouck@central.ntua.gr](mailto:gbouck@central.ntua.gr)  
[www.georgebouckovalas.com](http://www.georgebouckovalas.com)

**ΠΡΑΞΗ:**

**«ΘΑΛΗΣ- ΕΜΠ: ΠΡΩΤΟΤΥΠΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΑΘΡΩΝ  
ΓΕΦΥΡΩΝ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟΠΟΙΗΣΙΜΟ ΕΔΑΦΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ  
ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΕΙΣΜΙΚΗΣ ΜΟΝΩΣΗΣ»**

**MIS 380043**

**Επιστημονικός Υπεύθυνος: Καθ. Γ. ΜΠΟΥΚΟΒΑΛΑΣ**

**ΔΡΑΣΗ 5**

*Ελατήρια και αποσβεστήρες Winkler για θεμέλια σε  
ρευστοποιήσιμο έδαφος*

**ΠΑΡΑΔΟΤΕΑ:**

*Τεχνική Έκθεση Πεπραγμένων (Π5)*

**Ιανουάριος 2014**



**Ευρωπαϊκή Ένωση**  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Abstract

---

## INTRODUCTION

This Technical Report constitutes **Final Deliverable 5** of the Research Project with title:

**THALIS-NTUA (MIS 380043)**

**Innovative Design of Bridge Piers on Liquefiable Soils with the use of Natural Seismic Isolation**

performed under the general coordination of Professor **George Bouckovalas** (Scientific responsible).

Namely, it presents the actions taken and the associated results of **Work Package WP5**, which aims at:

*“Soil springs and dashpots for footings on liquefiable soil”.*

## ELASTODYNAMIC ANALYSIS

The aim of this work package is to provide analytical expressions for the frequency dependent parameters of the soil springs and dashpots which will have to be attached at the base of the superstructure in order to simulate the interaction of the foundation with the pre-liquefied and the post-liquefied subsoil. For non-liquefiable soil profiles, this method is well established (at least for homogeneous half-space conditions) and a number of different solutions are available for footings of various shapes and profiles of various dynamic soil properties (e.g., Gazetas 1991, Vrettos 1999, Mylonakis et al 2006, Drosos and Mylonakis 2008). Nevertheless, such solutions are not applicable to liquefiable soil profiles, for two main reasons: (a) the existence of multi layer soil (e.g., in the sequence non-liquefiable crust – liquefiable layer – non-liquefiable base layer) with intense impedance contrasts between the layers, leading to the entrapment of the seismic waves within the liquefied soil layer, and (b) the mostly unknown mechanisms of seismic wave propagation within liquefied soil layers where the effective stresses and the wave propagation velocity may change even within each loading cycle.

To explore the above issues, a numerical study of the dynamic stiffness of a rigid surface footing resting on liquefiable soil under external harmonic loading, is presented. To this end, a 3-layer soil profile consisting of a surface non-liquefiable crust over a loose liquefiable sandy layer resting a stiff base stratum, are considered. Sharp impedance contrasts exists between the three layers, leading to strong wave reflections and trapping of energy within the intermediate soft layer. The numerical analyses cover a wide range of square footing sizes and excitation frequencies,

# Abstract

---

ranging from 2 to 7 meters and 0 to 30 Hz, respectively. Over  $3 \times 10^3$  analyses are conducted in total.

The dynamic impedance of the footing is expressed by a static component and two dimensionless dynamic modifiers corresponding to a storage stiffness (spring value) and a loss stiffness (damping value). Vertical, horizontal and rocking oscillations are considered leading to three static stiffness components and six dynamic modifiers. The dynamic stiffness coefficients are evaluated by means of both 3D Finite Element analyses and simplified Cone models based on Strength-of-Materials theory. The results obtained from the two independent solutions are in meaningful agreement.

A variety of topics are discussed, including the effect on dynamic impedance of: a) thickness and stiffness of surface crust, b) shear wave velocity and thickness of liquefiable soil, c) total profile thickness. Pertinent normalization schemes, derived by means of rigorous dimensional analyses, are also examined.

Results are presented in normalized form using graphs and charts which highlight salient aspects of the problem.

## ADVANCED LUMPED-PARAMETER MODELS

Determining the dynamic response of massless foundations often involves complicated three-dimensional elastodynamic analyses using rigorous methods, such as the finite element, the finite difference and the boundary element method. These models typically involve hundreds or thousands degrees of freedom, and the frequency-dependent dynamic stiffness of foundations is evaluated in the frequency domain.

In order to meet the requirements of real-time calculations and analysis in the time domain with non-linear superstructures, lumped-parameter models are particularly useful. A lumped-parameter model represents an unbounded soil domain, and the soil-structure interaction of a massless foundation can be modeled by assemblies of relatively few springs, dashpots and masses, all with real-valued, frequency-independent coefficients. Each degree of freedom at the foundation node of the structural model is coupled to a lumped-parameter model that may consist of additional internal degrees of freedom. A systematic procedure to obtain consistent lumped-parameter models with real coefficients has been suggested by Wolf (1991b) and they employed here. The procedure to calculate the springs and dashpots is as follows:

1. Determine the frequency-dependent impedance or the dynamic stiffness  $S(a_0)$  by means of the finite element method, finite difference or the boundary element method,  $a_0$  standing for the familiar dimensionless frequency ( $\omega R/V_s$ ). To this end, dynamic stiffness should be decomposed into a singular part,

# Abstract

---

$S_s(a_0)$ , and a regular part,  $S_r(a_0)$ . The singular part  $S_s(a_0)$  represents the asymptotic value of the dynamic stiffness at  $a_0 \rightarrow \infty$ , and it is usually considered to involve a vanishing real part  $k_\infty = 0$  and an imaginary part ( $\omega c_\infty$ ),  $c_\infty$  being a constant dashpot value determined using alternative procedures such as least squares or conservation of momentum. The difference between  $S(a_0)$  and  $S_s(a_0)$  defines the regular part  $S_r(a_0)$ .

2. Approximate the regular part  $S_r(a_0)$  by the ratio of two polynomials in dimensionless variable ( $i a_0$ ),  $P$  and  $Q$ . The degree of the polynomial in the denominator is  $M$  and the degree in the numerator is one less,  $(M-1)$ . The approximation of the regular part  $S_r(a_0)$  contains  $(2M-1)$  unknown real-valued constant coefficients, which are determined by a curve-fitting technique based on the least-squares method.
3. Establish the lumped-parameter model from the  $(2M-1)$  real coefficients. The lumped-parameter model may contain several zero-order, first-order and second-order discrete-element models. Definitions for these coefficients are provided in the main text. In this Introduction, it is sufficient to state that the zero-order model contains no internal degrees of freedom (simple springs and dashpots), the first-order model contains one internal degree of freedom (e.g., a spring and a dashpot attached in parallel) and the second-order model contains two internal degrees of freedom.
4. Finally, the lumped-parameter model is assembled by using springs, dashpots and masses with real-valued constants, which can be incorporated directly into dynamic programs such as SAP, ETABS, ANSYS, OPENSEES etc.

The four steps in the procedure are explained in detail in the main text of the Technical Report. It should be noted that the lumped-parameter models do not provide any information of the stresses or strains in the embedded foundations or the surrounding subsoil, yet they faithfully describe the global compliance of the foundation to dynamic loading, within a pre-specified frequency range. Another issue relates to potential negative values of the lumped parameter values, as explained in the ensuing.

## APPLICATION OF LUMPED-PARAMETER MODELS

One may apply the lumped-parameter models by using the Tables 4.1- 4.36 in Chapter 4. The application of lumped-parameter models can be performed as follows (a number of comments as to rationale are provided as well):

1. Select the dimensions of the footing, namely the width  $B$  for square footings considering, say, vertical loading in conjunction with a pertinent safety factor or other considerations. Based on dimensional analysis (Section 3.2) the results are applicable to all square footing sizes provided that all dimensionless problem parameters are identical to those in the

# Abstract

---

graphs (Figs. 3.10-3.15 and 4.1-4.12). In other words, absolute problem dimensions are not essential provided that the pertinent dimensionless ratios are employed (Section 3.2).

2. Depending on footing size, the total depth of the soil profile is assumed according to the criterion  $H/B > 4$  (Figure 3.17). Also on this preliminary step, the maximum frequency of excitation should be selected.
3. Based on elastodynamic analysis (Chapter 3) and as shown in Figures 3.10 – 3.15, the thickness of the liquefied soil stratum (middle layer) plays no significant role on the dynamic response of footing. In this light, Figures 4.1 – 4.12 and Tables 4.1 – 4.36 have been developed by assuming  $h_2/B = 0.5$ .
4. Figures and Tables in Chapter 4 are divided into three main groups based on oscillation mode (i.e., vertical, horizontal and rocking). It is noteworthy that even for the same soil profile, different lumped-parameter models should be applied for various oscillation modes. Figures 4.1 – 4.4, Figures 4.5 – 4.8 and Figures 4.9 – 4.12 provide results for vertical, horizontal and rocking modes, respectively. Tables 4.1 – 4.12, Tables 4.13 – 4.24, Tables 4.25 – 4.36 refer to discrete element coefficients for vertical, horizontal and rocking mode, respectively. These assemblies can be put together in standard engineering software. As discussed below, to overcome the issue of negative coefficients for mass, stiffness, and damping (stability issues not examined here), advanced structural solvers such as OPENSEES are recommended.
5. For each oscillation mode, results have been obtained by taking into account the situation before and during liquefaction, considering  $V_{s2} = 150 \text{ m/s}$  and  $V_{slq} = 25 \text{ m/s}$ , corresponding to the middle layer, respectively.
6. Keeping in mind that shear wave velocity and thickness of surface non-liquefiable soil crust are major factors in dynamic response of footing (Figs 3.10 – 3.15), two values for shear wave velocity ( $V_{s1} = 100 \text{ m/s}$  and  $250 \text{ m/s}$ ) and three values for footing thickness ( $h_1/B = 0.5, 1, 2$ ) for the specific layer are considered.
7. Based on footing size,  $B$ , maximum excitation frequency,  $f_{max}$ , shear wave velocity,  $V_{s1}$ , thickness of surface crust,  $h_1$ , and whether the middle soil stratum is liquefied condition or not ( $V_{slq}$  or  $V_{s2}$ ), one must choose the appropriate table with the discrete element coefficients in order to assemble the corresponding lumped-parameter model (Tables 4.1-4.51).
8. According to Chapter 2, three discrete element models are distinguished, zero-order (Fig. 2.4), first-order (Fig 2.5) and second-order term (Fig. 2.6). Complete lumped-parameter models are a combination of these terms and they are always arranged in parallel. The discrete element coefficients  $\kappa_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\kappa_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\kappa_{i1}$ ,  $\gamma_{i1}$ ,  $\kappa_{i2}$  and  $\gamma_{i2}$  in Tables 4.1 – 4.36 are defined in Figure 4.13. Coefficients  $\kappa_0$  and  $\gamma_0$  referred to zero-order term (no internal degrees of

# Abstract

---

freedom, spring and dashpot in parallel as shown in Fig. 4.13a), coefficients  $\kappa_i$  and  $\gamma_i$  referred to first-order term (one internal degree of freedom with spring-dashpot attached in series and second spring in parallel as shown in Fig. 4.13b), lastly, coefficients  $\kappa_{i1}$ ,  $\gamma_{i1}$ ,  $\kappa_{i2}$  and  $\gamma_{i2}$  referred to second-order term (arrangement of springs and dashpots as shown in Fig. 4.13c having two internal degrees of freedom). The index  $i$  denotes the number of the discrete element models obtained from curve-fitting. For example, an arrangement consisting of one zero-order, two first-order and two second-order terms may be obtained.

9. The accuracy of lumped-parameter approximation depends on the degree of polynomial in the denominator ( $M = 2, 3, 6, 8$ ). Wherever was feasible, discrete element coefficients of more than one lumped-parameter models were determined. Depending on target accuracy, one may use any of them. Generally speaking, high- degree polynomials lead to more elaborate lumped-parameter models.
10. It is noticeable that these dimensionless coefficients should be multiplied with appropriate values, to be applied into standard dynamic programs. According to theory in Chapter 2 and Figure 4.13, spring coefficients of discrete element models are always multiplied by the static value of stiffness, which is given, for every case, in dimensionless form in Table 3.2. Dashpot coefficients are multiplied by the ratio  $RK/V_{s1}$ , where  $R$  is the radius of circular footing or an equivalent radius in case of other shaped footing (as stated in section 3.3),  $K$  is the static stiffness and  $V_{s1}$  the shear wave velocity of the surface soil crust (250m/s or 100m/s depending on case).
11. With reference to the first-order term, we notice that discrete element coefficients may be positive or negative. To avoid negative coefficients of springs and dashpots, the monkey-tail model can be applied instead of the spring-dashpot one (Fig. 4.15a). In place of the second-order term with two internal nodes, one may use an alternative formulation consisting of springs, dashpots and mass with one internal degree of freedom (Fig. 4.15b). Discrete element coefficients in Tables 4.37 – 4.51 refer to Figure 4.15, and by means of these tables we obtain alternative lumped-parameter models.
12. Finally, it must be emphasized that the above developments refer to footings of square shape. For rectangular footings having aspect ratio ( $L/B$ ) in the range 1 to 4, static stiffnesses should be adjusted according to the values in Table 5.1, while dynamic multipliers can, as a first approximation, be taken as equal to those of the square footing.





# Πίνακας Περιεχομένων

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1. Εισαγωγή .....</b>                                                                   | <b>2</b>   |
| <b>2. Προσομοιώματα διακριτών παραμέτρων .....</b>                                         | <b>4</b>   |
| 2.1 Θεωρία .....                                                                           | 4          |
| 2.1.1 Στατική και δυναμική στιφρότητα .....                                                | 4          |
| 2.1.2 Απλά μηχανικά ανάλογα .....                                                          | 7          |
| 2.1.2.1 Μηχανικό ανάλογο μηδενικής τάξης .....                                             | 7          |
| 2.1.2.2 Μηχανικό ανάλογο πρώτης τάξης .....                                                | 9          |
| 2.2 Σύνθετα διακριτά προσομοιώματα .....                                                   | 12         |
| 2.2.1 Προσδιορισμός δυναμικής δυσκαμψίας με χρήση αυστηρών<br>ελαστοδυναμικών μεθόδων..... | 13         |
| 2.2.2 Διαχωρισμός της δυναμικής δυσκαμψίας σε ομαλό και ανώμαλο τμήμα ..                   | 13         |
| 2.2.3 Προσέγγιση ομαλού τμήματος ως λόγος δύο πολωνύμων.....                               | 14         |
| 2.2.4 Δημιουργία διακριτών προσομοιωμάτων .....                                            | 15         |
| 2.3 Παράδειγμα – ημιάπειρη ράβδος σε ελαστική θεμελίωση .....                              | 21         |
| <b>3. Ελαστοδυναμική ανάλυση.....</b>                                                      | <b>26</b>  |
| 3.1 Πρόβλημα προς επίλυση .....                                                            | 26         |
| 3.2 Διαστατική ανάλυση .....                                                               | 29         |
| 3.3 Κώδικες CONAN και SASSI.....                                                           | 31         |
| 3.3.1 CONAN.....                                                                           | 31         |
| 3.3.2 SASSI .....                                                                          | 37         |
| 3.3.3 Συγκριτικά αποτελέσματα 3D ανάλυσης .....                                            | 41         |
| 3.4 Παρουσίαση αποτελεσμάτων .....                                                         | 43         |
| 3.4.1 Αποτελέσματα για στατική στιφρότητα .....                                            | 43         |
| 3.4.2 Αποτελέσματα για δυναμική δυσκαμψία .....                                            | 45         |
| 3.5 Συμπεράσματα.....                                                                      | 55         |
| <b>4. Εφαρμογή προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων .....</b>                               | <b>56</b>  |
| 4.1 Προσέγγιση από το λόγο δύο πολωνύμων – Προσαρμογή καμπύλης.....                        | 56         |
| 4.2 Συντελεστές προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων .....                                  | 72         |
| 4.3 Θετικοί συντελεστές προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων .....                          | 110        |
| <b>5. Εφαρμογή σε ορθογωνικά θεμέλια .....</b>                                             | <b>126</b> |
| <b>Βιβλιογραφία .....</b>                                                                  | <b>130</b> |



## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα Τεχνική Έκθεση αποτελεί το 5ο Παραδοτέο (Π5) του Ερευνητικού Προγράμματος με τίτλο:

**ΘΑΛΗΣ-ΕΜΠ (MIS 380043)**

### **Πρωτότυπος Σχεδιασμός Βάθρων Γεφυρών σε Ρευστοποιήσιμο Έδαφος με Φυσική Σεισμική Μόνωση**

με Συντονιστή (Ερευνητικό Υπεύθυνο) τον Γεώργιο Μπουκοβάλα Καθηγητή ΕΜΠ.

Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της Δράσης Δ5, η οποία έχει ως αντικείμενο:

*“Ελατήρια και αποσβεστήρες Winkler για θεμέλια σε ρευστοποιήσιμο έδαφος”.*

Ο στόχος της Δράσης Δ5 περιγράφεται στην Ερευνητική Πρόταση ως εξής:

“Στόχος αυτής της εργασίας είναι η διατύπωση αναλυτικών λύσεων για τα εδαφικά ελατήρια και αποσβεστήρες Winkler, που θα πρέπει να προσαρτηθούν στη βάση της επιφανειακής θεμελίωσης, προκειμένου να ληφθεί υπόψη η αλληλεπίδραση του εδάφους και της ανωδομής. Για μη ρευστοποιήσιμα εδαφικά προφίλ, αυτή η μέθοδος έχει αναπτυχθεί και ένας μεγάλος αριθμός λύσεων είναι διαθέσιμος για θεμέλια διαφόρων σχημάτων και στρωματογραφιών (Gazetas 1991, Vrettos 1999, Mylonakis et al 2006, Drosos and Mylonakis 2008). Παρόλα αυτά, οι λύσεις αυτές δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε ρευστοποιήσιμα εδαφικά προφίλ για δύο κυρίως λόγους: α) σε ρευστοποιήσιμα εδάφη θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η ύπαρξη τουλάχιστον τρίστρωτης στρωματογραφίας (επιφανειακή μη ρευστοποιήσιμη κρούστα-ρευστοποιήσιμο έδαφος-μη ρευστοποιήσιμο υπόβαθρο) με έντονη αντίθεση κυματικής εμπίεσης μεταξύ των στρώσεων, που οδηγεί σε εγκλωβισμό των σεισμικών κυμάτων μέσα στη ρευστοποιήσιμη εδαφική στρώση, και β) οι αντίστοιχοι μηχανισμοί ανελαστικής μη-γραμμικής μετάδοσης σεισμικών κυμάτων είναι σχεδόν άγνωστοι.

Οι δραστηριότητες που θα απαιτηθούν για τη διερεύνηση του προβλήματος είναι οι ακόλουθες:

α) Η δυναμική απόκριση επιφανειακών θεμελίων υπό εξωτερική (αρμονική και παλμική) διέγερση θα προσομοιωθεί αριθμητικά με χρήση του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων FLAC 3D, ενισχυμένο με τη νέα υπο-ρουτίνα για ρευστοποιήσιμο έδαφος (στόχος Δράσης Δ2). Επιπρόσθετα, θα πραγματοποιηθούν αριθμητικές αναλύσεις βάσει κατάλληλων εμπορικών λογισμικών για λόγους σύγκρισης. Οι αριθμητικές αναλύσεις θα αφορούν τις βασικές μορφές ταλάντωσης θεμελίου (κατακόρυφη, οριζόντια και λικνιστική) και δύο τύπους εξωτερικής φόρτισης (αρμονικής και παλμικής).

β) Θα αναπτυχθούν αναλυτικές λύσεις για ελατήρια και αποσβεστήρες Winkler με βάση τη θεωρία ισοδύναμης ελαστικής κυματικής διάδοσης σε 2 και 3 διαστάσεις. Δεδομένου ότι η απόκριση του ρευστοποιήσιμου εδάφους είναι μη-γραμμική, οι λύσεις θα πρέπει να αναπτυχθούν για εφαρμογές τόσο στο πεδίο της συχνότητας όσο και στο πεδίο του χρόνου. Έμφαση πρέπει να δοθεί στην επίδραση των απομειωμένων μηχανικών ιδιοτήτων του ρευστοποιήσιμου εδαφικού στρώματος στις σταθερές των ισοδύναμων εδαφικών ελατηρίων και αποσβεστήρων, καθώς και στην αναμενόμενη μείωση της απόσβεσης ακτινοβολίας εξαιτίας της έντονης αντίθεσης κυματικής εμπίδησης στις διεπιφάνειες των εδαφικών στρώσεων.

γ) Με βάση τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων (α) και (β), θα διατυπωθούν απλές αναλυτικές σχέσεις για τις σταθερές των ελατηρίων και αποσβεστήρων.”

Οι δραστηριότητες (α), (β) και (γ) έχουν πραγματοποιηθεί με ικανοποιητική συνέπεια και τα αποτελέσματα παρατίθενται στην παρούσα τεχνική έκθεση.

## 2. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

### 2.1 Θεωρία

Το προσομοίωμα διακριτών παραμέτρων αναπαριστά τη μεταβολή με τη συχνότητα της δυναμικής δυσκαμψίας μιας θεμελίωσης (βαθιάς ή επιφανειακής) μέσω συμπλεγμάτων ελατηρίων, αποσβεστήρων και μαζών με σταθερές ιδιότητες. Ακολουθώντας την πρωτοποριακή εργασία των de Barros and Luco (1990), τα προσομοιώματα αυτά αναπτύχθηκαν από τους Wolf (1991a,b), Wolf & Paronesso (1991), Wolf (1994), Wu & Lee (2002, 2004), Andersen (2002), Ibsen & Liingaard (2006), Saitoh (2012). Στη συνέχεια της τεχνικής έκθεσης παρουσιάζονται αναλυτικά τα βήματα για την ανάπτυξη ενός διακριτού προσομοιώματος για την περιγραφή επιφανειακών θεμελίων.

#### 2.1.1 Στατική και δυναμική στιφρότητα

Η στατική στιφρότητα μιας θεμελίωσης μπορεί να εκφραστεί μέσω κατάλληλων συντελεστών δυσκαμψίας,  $K_{ij}^0$ , που αντιστοιχούν στην αντίσταση της θεμελίωσης στη διεύθυνση όλων των δυνατών βαθμών ελευθερίας  $i$  για κίνηση κατά τους βαθμούς ελευθερίας  $j$  (κατά την κατακόρυφη,  $K_{vv}^0$ , οριζόντια,  $K_{hh}^0$ , λικνιστική και  $K_{rr}^0$ , στρεπτική,  $K_{tb}^0$ , διεύθυνση). Στην περίπτωση συνδυασμένης οριζόντιας δύναμης και ροπής, εμφανίζεται επιπρόσθετα ο όρος σύζευξης μεταξύ οριζόντιας και λικνιστικής παλινδρόμησης,  $K_{hr}$ , ο οποίος είναι σημαντικός για εγκιβωτισμένες θεμελιώσεις.

Στην περίπτωση που η θεμελίωση είναι άκαμπτη και το έδαφος συμπεριφέρεται γραμμικώς ελαστικά, οι συντελεστές δυσκαμψίας είναι συναρτήσεις του μέτρου διάτμησης του εδάφους,  $G$ , και του λόγου Poisson,  $\nu$ . Για στατικές συνθήκες, οι όροι της δυσκαμψίας γράφονται

$$K_{ij}^0 = GB^m f(\nu) \quad (2.1)$$

όπου  $K_{ij}^0$  είναι η ανωτέρω στατική δυσκαμψία στη διεύθυνση  $i$  για μοναδιαία μετακίνηση στη διεύθυνση  $j$ , και  $m = 1$  για τους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας και  $m = 3$  για τους στροφικούς. Το μέτρο διάτμησης  $G$  περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της απομείωσης της εδαφικής στιφρότητας λόγω εύρους παραμόρφωσης (ASCE/SEI 7-10, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*. ASCE, 2010, και FEMA P-750, *NEHRP Recommended Seismic Provisions for New Buildings and Other Structures*. FEMA, 2009) Σε πρώτη προσέγγιση, οι τιμές της απομείωσης μπορούν να ληφθούν από τον Πίνακα 2.1. Το μέτρο διάτμησης για μικρές παραμορφώσεις,  $G_0$ , μπορεί να υπολογιστεί από την Εξ. (2.2)

$$G_0 = V_s^2 \rho \quad (2.2)$$

όπου το  $V_s$  αντιστοιχεί στην ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων στο έδαφος βάσει γεωφυσικών επιτόπου δοκιμών, και  $\rho$  η πυκνότητα του εδάφους. Εν γένει, μια μέση «ενεργός» τιμή του  $V_s$  υπολογίζεται μέχρι ένα συγκεκριμένο βάθος  $z_p$  όπως περιγράφεται από τους Stewart et al (2013).

**Πίνακας 2.1: Τιμές Απομείωσης μέτρου Διάτμησης συναρτήσει της Κατηγορίας Εδάφους και του Εύρους της Διέγερσης**

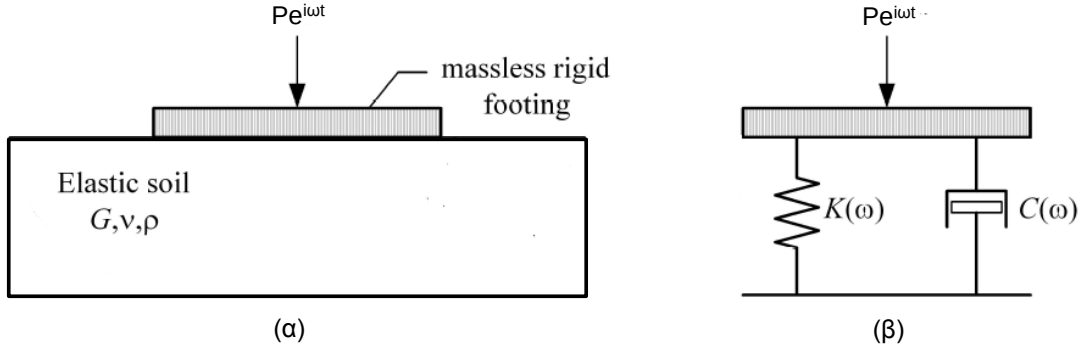
**Table 2.1: Values of Shear Wave Velocity and Shear Modulus Reduction for Various Site Classes and Shaking Amplitudes**

| Κατηγορία<br>εδάφους | Παράγων<br>απομείωσης $V_s = \sqrt{G/G_0}$ |      |            | Τιμή του $G/G_0$ |      |            |
|----------------------|--------------------------------------------|------|------------|------------------|------|------------|
|                      | PGA                                        |      |            | PGA              |      |            |
|                      | $\leq 0.1$                                 | 0.4  | $\geq 0.8$ | $\leq 0.1$       | 0.4  | $\geq 0.8$ |
| <b>A</b>             | 1.00                                       | 1.00 | 1.00       | 1.00             | 1.00 | 1.00       |
| <b>B</b>             | 1.00                                       | 0.97 | 0.95       | 1.00             | 0.95 | 0.90       |
| <b>C</b>             | 0.97                                       | 0.87 | 0.77       | 0.95             | 0.75 | 0.60       |
| <b>D</b>             | 0.95                                       | 0.71 | 0.32       | 0.90             | 0.50 | 0.10       |
| <b>E</b>             | 0.77                                       | 0.22 | *          | 0.60             | 0.05 | *          |
| <b>F</b>             | *                                          | *    | *          | *                | *    | *          |

Σημείωση: χρησιμοποιούμε γραμμική παρεμβολή για ενδιάμεσες τιμές του PGA

\* = απαιτείται ανάλυση κατά περίπτωση

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η θεμελίωση υπόκειται σε εξωτερική αρμονική διέγερση με κυκλική συχνότητα  $\omega$ . Για παράδειγμα, η περίπτωση κατακόρυφης διέγερσης ενός επιφανειακού, άκαμπτου και αβαρούς θεμελίου φαίνεται στο Σχήμα 2.1(α). Για κάθε βαθμό ελευθερίας, ή ισοδύναμα για κάθε μορφή ταλάντωσης, το δυναμικό σύστημα θεμελίου – εδάφους αντικαθίσταται από ελατήρια και αποσβεστήρες που μεταβάλλονται με τη συχνότητα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1(β). Η συχνοτική εξάρτηση των δύο παραμέτρων πηγάζει από την απαλοιφή των άπειρων δυναμικών βαθμών ελευθερίας του υποκείμενου εδάφους.



Σχήμα 2.1: α) Κατακόρυφη διέγερση άκαμπτου, αβαρούς θεμελίου πάνω σε ελαστικό ημίσφωρο, β) Μηχανικό ανάλογο της δυναμικής απόκρισης του εδάφους

Figure 2.1: a) Vertical oscillation of massless rigid footing on elastic halfspace, b) Physical interpretation of dynamic stiffness in vertical mode of vibration

Η δυναμική δυσκαμψία του θεμελίου για οποιαδήποτε μορφή ταλάντωσης γράφεται στη γενική μορφή

$$S_{ij}(\omega) = K_{ij}(\omega) + i\omega C_{ij}(\omega) \quad (2.3)$$

όπου  $K_{ij}$  και  $C_{ij}$  η δυναμική δυσκαμψία και απόσβεση, αντίστοιχα, και  $i$  η φανταστική μονάδα ( $\sqrt{-1}$ ).

Η συχνότητα περιγράφεται μέσω του αδιάστατου συντελεστή

$$a_0 = \frac{\omega B}{V_s} \quad (2.4)$$

όπου  $B$  μια χαρακτηριστική διάσταση του θεμελίου (συνήθως το μισό της μικρότερης διάστασης σε κάτοψη). Ο παραπάνω δείκτης έχει τη φυσική σημασία του λόγου του  $B$  προς το  $1/6$  του μήκους κύματος  $s$  στη συχνότητα διέγερσης  $\omega$ . Η συγκεκριμένη παράμετρος είναι ουσιαστικά μοναδική για συνθήκες ομοιογενούς ημίσφωρου, αλλά μπορεί να μην είναι βέλτιστη παρουσία βράχου σε μικρό σχετικά βάθος (Anoyatis & Mylonakis 2012).

Η δυναμική δυσκαμψία γράφεται εναλλακτικά ως εξής:

$$S_{ij}(a_0) = K_{ij}^0 [k_{ij}(a_0) + ia_0 c_{ij}(a_0)] \quad (2.5)$$

όπου  $K_{ij}^0$  η στατική τιμή της δυσκαμψίας και  $k_{ij}$ ,  $c_{ij}$  αδιάστατοι συντελεστές δυναμικής δυσκαμψίας και απόσβεσης, αντίστοιχα, συναρτήσεως της αδιάστατης συχνότητας  $a_0$ . Οι αδιάστατοι συντελεστές δυναμικής δυσκαμψίας και απόσβεσης  $k_{ij}$  και  $c_{ij}$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Σημειώνεται ότι ενώ ο  $k_{ij}$  μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές (ένδειξη διαφοράς φάσης μεταξύ απόκρισης και διέγερσης μεγαλύτερης των  $90^\circ$  υπό δυναμικές συνθήκες), ο συντελεστής  $c_{ij}$  είναι πάντοτε θετικός αριθμός.

Εναλλακτικά η Εξ. (2.5) γράφεται ως μέτρο και γωνία φάσης. Το μέτρο της δυναμικής δυσκαμψίας δίνεται από τη σχέση

$$|S_{ij}| = K_{ij}^0 \sqrt{k_{ij}^2 + (\omega c_{ij})^2} = K_{ij}^0 \sqrt{k_{ij}^2 + (a_0 c_{ij})^2} \quad (2.6)$$

και η γωνία φάσης από:

$$\phi_{ij} = \arctan\left(\frac{a_0 c_{ij}}{k_{ij}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{k_{ij}}{a_0 c_{ij}}\right) \quad (2.7)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω συντελεστές δυναμικής δυσκαμψίας είναι συναρτήσεις του λόγου Poisson του εδάφους,  $\nu$ , της αδιάστατης συχνότητας  $a_0$ , και του συντελεστή απόσβεσης  $\beta$  για δεδομένο σχήμα θεμελίωσης.

Στη συνέχεια η εργασία επικεντρώνεται σε θεμέλια τετραγωνικού και κυκλικού σχήματος. Πιο περίπλοκες γεωμετρίες εξετάζονται από τους Gazetas (1991), Mylonakis et al (2006), Andersen (2002) και Stewart et al (2013).

### 2.1.2 Απλά μηχανικά ανάλογα

Η εξάρτηση της δυναμικής δυσκαμψίας του θεμελίου από τη συχνότητα διέγερσης μπορεί να ληφθεί υπόψη μέσω απλών μηχανικών αναλόγων. Δύο τέτοια προσομοιώματα ανήκουν σε αυτή την κατηγορία: τα μηχανικά ανάλογα μηδενικής και πρώτης τάξης. Η παρουσίαση αυτών των μοντέλων βασίζεται στο σύγγραμμα του Wolf (1994).

#### 2.1.2.1 Μηχανικό ανάλογο μηδενικής τάξης

Το συγκεκριμένο προσομοίωμα περιλαμβάνει τρεις σταθερές,  $K$ ,  $C$  και  $M$ , για κάθε μορφή ταλάντωσης, Σχήμα 2.2. Η σταθερά του ελατηρίου  $K$  ισούται με την τιμή της στατικής δυσκαμψίας. Οι σταθερές του αποσβεστήρα και της μάζας δεν έχουν συγκεκριμένο φυσικό νόημα και οι τιμές τους συνήθως προκύπτουν από διαδικασία προσαρμογής καμπύλης (curve fitting). Οι παράμετροι  $C$  και  $M$  δίνονται μέσω δύο αδιάστατων, ανεξάρτητων από τη συχνότητα, συντελεστών  $\gamma$  και  $\mu$  από:

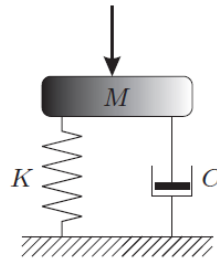
$$C = \frac{RK}{V_s} \gamma \quad (2.8\alpha)$$

$$M = \frac{R^2 K}{V_s^2} \mu \quad (2.8\beta)$$

Οι τιμές των παραμέτρων  $K$ ,  $\gamma$  και  $\mu$  για κυκλικό θεμέλιο με μάζα εδραζόμενο σε ελαστικό ημίχωρο δίνονται στον Πίνακα 2.2 (Wolf 1994). Σημειώνεται ότι για τους



στροφικούς όρους, ο συντελεστής  $M$  εκφράζει ροπή αδράνειας, και οι  $K$ ,  $C$  στροφικό ελατήριο και αποσβεστήρα, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.2: Μηχανικό ανάλογο μηδενικής τάξης για κατακόρυφη ταλάντωση

Figure 2.2: Standard lumped-parameter model for vertical motion

**Πίνακας 2.2: Τιμές των αδιάστατων συντελεστών για το μηχανικό ανάλογο μηδενικής τάξης. Οι συντελεστές αντιστοιχούν σε κυκλικό θεμέλιο με μάζα πάνω σε ελαστικό ημίχωρο.**

**Table 2.2: Non-dimensional coefficients for the standard lumped-parameter model. The coefficients correspond to a circular footing with mass on an elastic half space.**

|            | Στατική δυσκαμψία,<br>$K$     | Συντελεστής<br>απόσβεσης, $\gamma$                               | Συντελεστής<br>μάζας, $\mu$ |
|------------|-------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Οριζόντια  | $\frac{8G_s R}{2-\nu_s}$      | 0.58                                                             | 0.095                       |
| Κατακόρυφη | $\frac{4G_s R}{1-\nu_s}$      | 0.85                                                             | 0.27                        |
| Λικνισμός  | $\frac{8G_s R^3}{3(1-\nu_s)}$ | $\frac{0.3}{1+\frac{3(1-\nu_s)m}{8R^5\rho_s}}$                   | 0.24                        |
| Στρεπτική  | $\frac{16G_s R^3}{3}$         | $\frac{0.433}{1+\frac{2m}{R^5\rho_s}}\sqrt{\frac{m}{R^5\rho_s}}$ | 0.045                       |

Παρατηρείται ότι η μάζα του θεμελίου εισάγεται στις εκφράσεις για την παράμετρο  $\gamma$  στη λικνιστική ταλάντωση και στη στρεπτική. Ωστόσο είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες παράμετροι και για αβαρές θεμέλιο.

Με βάση τις παραπάνω σταθερές, η δυναμική δυσκαμψία μπορεί να γραφτεί στις ισοδύναμες μορφές:

$$S(\omega) = K - \omega^2 M + i\omega C \quad (2.9)$$

ή

$$S(a_0) = K [k(a_0) + i a_0 c(a_0)] \quad (2.10)$$

Από σύγκριση των Εξ. (2.9) και (2.10) προκύπτουν οι συντελεστές δυναμικής δυσκαμψίας και απόσβεσης για το μηχανικό ανάλογο μηδενικής τάξης

$$k(a_0) = 1 - \mu a_0^2 \quad (2.11\alpha)$$

$$c(a_0) = \gamma \quad (2.11\beta)$$

Παρατηρούμε ότι η Εξ. (2.11α) που αναπαριστά το κανονικοποιημένο πραγματικό μέρος της δυναμικής δυσκαμψίας  $k(a_0)$  (Εξ. 2.10) έχει παραβολική μορφή και τείνει στο μείον άπειρο με την αύξηση της συχνότητας. Επίσης το  $k(a_0)$  μηδενίζεται για  $a_0 = \mu^{-1/2}$ , το οποίο αντιστοιχεί σε μια υποθετική συχνότητα συντονισμού. Το παραβολικό σχήμα περιγράφει ικανοποιητικά την πραγματική δυσκαμψία μιας θεμελίωσης στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων αλλά δεν ενδείκνυται για την περιγραφή της δυσκαμψίας σε μεγαλύτερες συχνότητες (εκτός πιθανώς από την περίπτωση κατακόρυφης ταλάντωσης σε ασυμπίεστο έδαφος). Αναφορικά με την απόσβεση παρατηρείται ότι αυτή είναι σταθερή και ίση με την παράμετρο  $\gamma$ . Αυτή η συμπεριφορά δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή της απόσβεσης μιας πραγματικής θεμελίωσης, ειδικά στην περίπτωση λικνιστικής και στρεπτικής ταλάντωσης.

Το κύριο πλεονέκτημα του συγκεκριμένου προσομοιώματος είναι η απλότητα και η απουσία εσωτερικών βαθμών ελευθερίας. Ωστόσο, η περιγραφή της δυναμικής δυσκαμψίας είναι ανεπαρκής. Έτσι η χρήση του προσομοιώματος περιορίζεται στο εύρος των χαμηλών συχνοτήτων.

### 2.1.2.2 Μηχανικό ανάλογο πρώτης τάξης

Το συγκεκριμένο μηχανικό ανάλογο αποτελείται από μία παράμετρο με φυσική σημασία (στατική δυσκαμψία της θεμελίωσης) και τέσσερις παραμέτρους προσαρμογής. Σε αντίθεση με το προσομοίωμα μηδενικής τάξης, η συγκεκριμένη διάταξη έχει έναν εσωτερικό βαθμό ελευθερίας και μπορεί να μορφωθεί με διάφορους τρόπους, συνδυάζοντας ελατήρια, αποσβεστήρες και μάζες. Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζονται δύο ισοδύναμες επιλογές. Η σταθερά του ελατηρίου  $K$  είναι ίση με τη στατική στιφρότητα για ελαστικό ημίχωρο. Οι υπόλοιπες τέσσερις παράμετροι προκύπτουν από την προσομοίωση. Η διάταξη ελατήριο-αποσβεστήρας-μάζα (Σχήμα 2.3α) περιγράφεται από τις παραμέτρους  $M_0$ ,  $C_0$ ,  $K_1$  και  $C_1$  ενώ η διάταξη *monkey-tail* (Σχήμα 2.3β) περιγράφεται από τις παραμέτρους  $M_0$ ,  $C_0$ ,  $M_1$  και  $C_1$ . Αναφορικά με το προσομοίωμα *monkey-tail*, οι τέσσερις παράμετροι  $M_0$ ,  $C_0$ ,  $M_1$  και  $C_1$  υπολογίζονται με χρήση των αδιάστατων συντελεστών  $\mu_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\mu_1$  και  $\gamma_1$ , δηλαδή

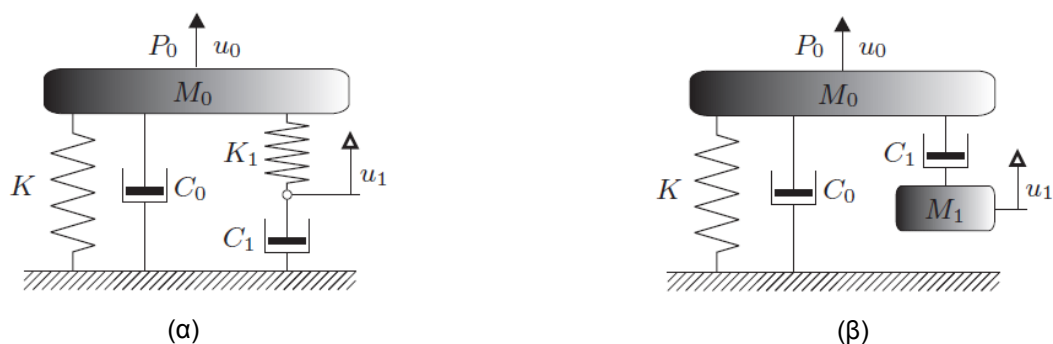
$$M_0 = \frac{R^2 K}{V_s^2} \mu_0 \quad (2.12\alpha)$$

$$C_0 = \frac{RK}{V_s} \gamma_0 \quad (2.12\beta)$$

$$M_1 = \frac{R^2 K}{V_s^2} \mu_1 \quad (2.12\gamma)$$

$$C_1 = \frac{RK}{V_s} \gamma_1 \quad (2.12\delta)$$

Οι τιμές των συντελεστών  $K$ ,  $\mu_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\mu_1$  και  $\gamma_1$  για κυκλικό θεμέλιο σε ελαστικό ημίχωρο δίνονται στον Πίνακα 2.3 (Wolf 1994). Οι περισσότεροι συντελεστές, με εξαίρεση αυτών που αναφέρονται στη στρέψη, εξαρτώνται από τον λόγο Poisson,  $\nu$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι κάποιοι από τους αδιάστατους συντελεστές για ορισμένες μορφές ταλάντωσης είναι μηδενικοί.



Σχήμα 2.3: Μηχανικά ανάλογα πρώτης τάξης. α) Διάταξη ελατηρίου-αποσβεστήρα, β) προσομοίωμα τύπου monkey-tail

Figure 2.3: Fundamental lumped-parameter models. a) Spring-dashpot model, b) monkey-tail model

**Πίνακας 2.3: Τιμές των αδιάστατων συντελεστών για το μηχανικό ανάλογο πρώτης τάξης. Οι συντελεστές αντιστοιχούν σε αβαρές, κυκλικό θεμέλιο πάνω σε ελαστικό ημίσφαιρο.**

**Table 2.3: Non-dimensional coefficients for the fundamental lumped-parameter model. The coefficients correspond to a circular footing on an elastic half space.**

|            | Στατικές<br>δυσκαμψίες        | Αποσβεστήρες    |                   | Μάζες                 |                                        |
|------------|-------------------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|----------------------------------------|
|            | $K$                           | $\gamma_0$      | $\gamma_1$        | $\mu_0$               | $\mu_1$                                |
| Οριζόντια  | $\frac{8G_s R}{2-\nu_s}$      | $0.78-0.4\nu_s$ | —                 | —                     | —                                      |
| Κατακόρυφη | $\frac{4G_s R}{1-\nu_s}$      | 0.8             | $0.34-4.3\nu_s^4$ | $\nu_s < \frac{1}{3}$ | 0                                      |
|            |                               |                 |                   | $\nu_s > \frac{1}{3}$ | $0.9\left(\nu_s - \frac{1}{3}\right)$  |
| Λικνισμός  | $\frac{8G_s R^3}{3(1-\nu_s)}$ | —               | $0.42-0.3\nu_s^2$ | $\nu_s < \frac{1}{3}$ | 0                                      |
|            |                               |                 |                   | $\nu_s > \frac{1}{3}$ | $0.16\left(\nu_s - \frac{1}{3}\right)$ |
| Στρεπτική  | $\frac{16G_s R^3}{3}$         | 0.017           | 0.291             | —                     | 0.171                                  |

Για να προσδιορίσουμε τη δυναμική δυσκαμψία του μηχανικού συστήματος πρώτης τάξης γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας στο πεδίο της συχνότητας για κάθε βαθμό ελευθερίας,  $u_0(\omega)$  και  $u_1(\omega)$ , του Σχήματος 2.3β.

$$-\omega^2 M_1 u_1(\omega) + i\omega C_1 [u_1(\omega) - u_0(\omega)] = 0 \quad (2.13\alpha)$$

$$-\omega^2 M_0 u_0(\omega) + i\omega(C_0 + C_1)u_0(\omega) - i\omega C_1 u_1(\omega) + K u_0(\omega) = P_0(\omega) \quad (2.13\beta)$$

όπου  $u_0(\omega)$  είναι η μετατόπιση λόγω της εξωτερικής φόρτισης  $P_0(\omega)$ . Με απαλοιφή του εσωτερικού βαθμού ελευθερίας  $u_1(\omega)$  από τις Εξισώσεις (2.13α και β), η σχέση μεταξύ δύναμης και μετατόπισης γράφεται

$$P_0(\omega) = K \left[ 1 - \frac{\frac{\omega^2 M_1}{K}}{1 + \frac{\omega^2 M_1^2}{C_1^2}} - \frac{\omega^2 M_0}{K} + i\omega \left( \frac{M_1}{C_1} \frac{\frac{\omega^2 M_1}{K}}{1 + \frac{\omega^2 M_1^2}{C_1^2}} + \frac{C_0}{K} \right) \right] u_0(\omega) \quad (2.14)$$

Η δυναμική δυσκαμψία στην Εξ. (2.14) μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει της αδιάστατης συχνότητας  $\alpha_0$  (Εξ. 2.10). με αντικατάσταση της Εξ. (2.12) στην Εξ. (2.14) και σύγκριση με την Εξ. (2.10) προκύπτουν οι συντελεστές δυναμικής δυσκαμψίας και απόσβεσης για το μηχανικό ανάλογο τύπου *monkey-tail*

$$k(a_0) = 1 - \frac{\mu_1 a_0^2}{1 + \frac{\mu_1^2}{\gamma_1^2} a_0^2} - \mu_0 a_0^2 \quad (2.15)$$

$$c(a_0) = \frac{\mu_1}{\gamma_1} \frac{\mu_1 a_0^2}{1 + \frac{\mu_1^2}{\gamma_1^2} a_0^2} + \gamma_0 \quad (2.16)$$

Σε αντίθεση με το μηχανικό ανάλογο μηδενικής τάξης, το προσομοίωμα πρώτης τάξης παρουσιάζει διπλή ασυμπτωτική συμπεριφορά, δηλαδή η προσέγγιση  $S(\alpha_0)$  μπορεί να γίνει ακριβής όταν η συχνότητα τείνει στο μηδέν (στατικό όριο),  $k(0) \rightarrow 1$ ,  $c(0) \rightarrow \gamma_0$ , και όταν η συχνότητα τείνει στο άπειρο,  $k(\infty) \rightarrow \gamma_1^2/\mu_1$ ,  $c(\infty) \rightarrow \gamma_1/\mu_1 + \gamma_0$ , με προσαρμογή των ανωτέρω συντελεστών στις τιμές της ελαστοδυναμικής ανάλυσης. Για παράδειγμα, με την υπόθεση  $\gamma_0 = \mu_0 = 0$ , οι υπόλοιποι συντελεστές υπολογίζονται ως  $\gamma_1 = k(\infty) / c(\infty)$ ,  $\mu_1 = k(\infty) / c^2(\infty)$ .

## 2.2 Σύνθετα διακριτά προσομοιώματα

Ο προσδιορισμός της δυναμικής δυσκαμψίας μιας θεμελίωσης απαιτεί πολύπλοκες τριδιάστατες ελαστοδυναμικές αναλύσεις μέσω αυστηρών αριθμητικών μεθόδων όπως αυτή των πεπερασμένων στοιχείων, των πεπερασμένων διαφορών ή των συνοριακών στοιχείων. Αυτά τα μοντέλα συνήθως περιλαμβάνουν εκατοντάδες ή χιλιάδες βαθμούς ελευθερίας και η ανάλυση για τον προσδιορισμό της δυναμικής δυσκαμψίας γίνεται στο πεδίο της συχνότητας. Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η αλληλεπίδραση εδάφους-θεμελίωσης-κατασκευής και να ενσωματωθεί στο πρόγραμμα στατικής ανάλυσης της ανωδομής στο πεδίο του χρόνου, είναι απαραίτητη η ανάπτυξη προσομοιωμάτων που περιγράφουν ικανοποιητικά, (τουλάχιστον για ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων), τη δυναμική δυσκαμψία της θεμελίωσης.

Δεδομένης της απαίτησης για ανάλυση στο πεδίο του χρόνου, τα διακριτά προσομοιώματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα. Με τη χρήση των διακριτών προσομοιωμάτων, η αλληλεπίδραση εδάφους-θεμελίωσης μπορεί να προσομοιωθεί από συμπλέγματα ελατηρίων, αποσβεστήρων και μαζών που έχουν πραγματικούς, ανεξάρτητους από τη συχνότητα, συντελεστές. Κάθε βαθμός ελευθερίας στον κόμβο θεμελίωσης της ανωδομής είναι συνδεδεμένος με ένα διακριτό προσομοίωμα, το οποίο μπορεί να αποτελείται από επιπρόσθετους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Ένας συστηματικός τρόπος δημιουργίας προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων με

πραγματικούς συντελεστές έχει προταθεί από τον Wolf (1991b). Η διαδικασία είναι ως ακολούθως:

- Προσδιορίζεται η δυναμική δυσκαμψία της θεμελίωσης  $S(\alpha_0)$  με χρήση κατάλληλης μεθόδου (συνήθως αριθμητικής φύσης τύπου πεπερασμένων ή συνοριακών στοιχείων).
- Η δυναμική δυσκαμψία  $S(\alpha_0)$  χωρίζεται σε δύο τμήματα, το ανώμαλο (singular),  $S_s(\alpha_0)$ , και το ομαλό (regular),  $S_r(\alpha_0)$ . Το ανώμαλο τμήμα είναι απλά η ασυμπτωτική τιμή της δυναμικής δυσκαμψίας για  $\alpha_0 \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $S_s(\alpha_0) = K^0(k^\infty + i\alpha_0 c^\infty)$ . Η διαφορά των  $S(\alpha_0)$  και  $S_s(\alpha_0)$  ορίζει το ομαλό τμήμα  $S_r(\alpha_0)$ .
- Το ομαλό τμήμα  $S_r(\alpha_0)$  προσεγγίζεται αριθμητικά από το λόγο δύο πολυωνύμων της μεταβλητής  $i\alpha_0$ ,  $P$  και  $Q$ . Ο βαθμός του πολυωνύμου στον παρονομαστή είναι  $M$  ενώ στον αριθμητή είναι  $(M - 1)$ , έτσι ώστε  $S_r(\alpha_0 \rightarrow \infty) \rightarrow 0 + 0i$ . Η προσέγγιση του ομαλού τμήματος  $S_r(\alpha_0)$  περιλαμβάνει  $2M - 1$  άγνωστους, τους συντελεστές των πολυωνύμων που προσδιορίζονται με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.
- Στη συνέχεια ο λόγος των πολυωνύμων αναλύεται σε άθροισμα επιμέρους κλασμάτων. Κάθε κλάσμα αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο τύπο διακριτού προσομοιώματος, το οποίο συνδέεται παράλληλα με τα υπόλοιπα.

Τα τέσσερα βήματα της διαδικασίας εξηγούνται εκτενώς στις επόμενες ενότητες. Αξίζει να τονισθεί ότι τα προσομοιώματα διακριτών παραμέτρων δεν παρέχουν πληροφορία για τις τάσεις επί του θεμελίου ή τις παραμορφώσεις του εδάφους.

### 2.2.1 Προσδιορισμός δυναμικής δυσκαμψίας με χρήση αυστηρών ελαστοδυναμικών μεθόδων

Για τις ανάγκες του συγκεκριμένου κεφαλαίου, οι συναρτήσεις  $S_{ij}(\omega)$  θεωρούνται γνωστές. Οι σχετικές αναλύσεις θα παρουσιαστούν σε επόμενη ενότητα.

### 2.2.2 Διαχωρισμός της δυναμικής δυσκαμψίας σε ομαλό και ανώμαλο τμήμα

Όπως προαναφέρθηκε, η μιγαδική δυναμική δυσκαμψία  $S(\alpha_0)$  διαχωρίζεται σε ένα ανώμαλο τμήμα,  $S_s(\alpha_0)$  το οποίο λαμβάνει μη μηδενικές τιμές για  $\alpha_0 \rightarrow \infty$ , και σε ένα ομαλό,  $S_r(\alpha_0)$  το οποίο τείνει στο μηδέν με την αύξηση της συχνότητας.

$$S(\alpha_0) = S_s(\alpha_0) + S_r(\alpha_0) \quad (2.17)$$

όπου

$$S_s(\alpha_0) = K^0 [k^\infty + i\alpha_0 c^\infty] \quad (2.18)$$

Στην οριακή περίπτωση  $\alpha_0 \rightarrow \infty$ , ο όρος της απόσβεσης στο δεξιό μέρος της Εξ. (2.18) κυριαρχεί, δηλαδή

$$S_s(a_0) \approx K^0 [i a_0 c^\infty] \quad (2.19)$$

Η συμπεριφορά στις υψηλές συχνότητες ενός επιφανειακού θεμελίου σε έδαφος χωρίς απόσβεση υλικού χαρακτηρίζεται από γωνία φάσης περίπου ίση με  $\pi/2$  για  $a_0 \rightarrow \infty$  και το διάγραμμα μέτρου - συχνότητας είναι ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η κλίση της ευθείας είναι ίση με την παράμετρο  $c^\infty$ . Για παράδειγμα, στην περίπτωση της κατακόρυφης ταλάντωσης η οριακή τιμή της απόσβεσης στο άπειρο μιας κυκλικής επιφανειακής θεμελίωσης δίνεται από

$$C_{VV}^\infty = \rho V_p A \quad (2.20)$$

όπου  $A$  είναι το εμβαδό της θεμελίωσης,  $\rho$  η ειδική πυκνότητα του εδάφους και  $V_p$  η ταχύτητα διάδοσης του κύματος συμπίεσης. Εάν η οριακή τιμή της απόσβεσης εκφρασθεί συναρτήσει της αδιάστατης συχνότητας  $a_0$ , τότε η Εξ. (2.20) παίρνει τη μορφή

$$c_{VV}^\infty = (\rho V_p A) \frac{V_s}{K^0 R} \quad (2.21)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η τιμή της απόσβεσης στο άπειρο στη συγκεκριμένη μορφή ταλάντωσης εξαρτάται σημαντικά από το λόγο Poisson,  $\nu$ , καθώς στην εξίσωση υπεισέρχεται ο όρος της ταχύτητας διάδοσης του κύματος συμπίεσης. Για τη θεραπεία το προβλήματος, οι Gazetas & Dobry (1984) προτείνουν τη χρήση της ταχύτητας κύματος  $Lysmer$ ,  $V_{La} = 3.4 V_s / (\pi(1 - \nu))$ . Εναλλακτικά, ο Wolf (1994) προτείνει για τιμές του  $\nu$  μεταξύ  $1/3$  έως  $1/2$  σταθερό  $V_p$  και ίσο με τη τιμή του  $V_p$  για  $\nu = 1/3$ .

Παρατηρείται ότι ο προσδιορισμός του ανώμαλου τμήματος  $S_s(a_0)$  είναι σχετικά απλός. Το  $S_s(a_0)$  είναι συνάρτηση της πυκνότητας του εδάφους, της ταχύτητας διάδοσης των κυμάτων και του εμβαδού (ή της ροπής αδράνειας) της βάσης του θεμελίου. Το εμβαδό της θεμελίωσης υπεισέρχεται στην εξίσωση της απόσβεσης στους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας, ενώ η ροπή αδράνειας και η πολική ροπή αδράνειας της θεμελίωσης υπεισέρχονται στους στρωφικούς (λίκνιστικούς και στρεπτικούς) βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχα.

Το συμπληρωματικό ομαλό τμήμα  $S_r(a_0)$  προκύπτει από αφαίρεση του  $S_s(a_0)$  από το  $S(a_0)$ . Το ομαλό τμήμα χρησιμοποιείται ως δεδομένο για τη διαδικασία της προσαρμογής καμπύλης (curve-fitting) που περιγράφεται στο επόμενο εδάφιο.

### 2.2.3 Προσέγγιση ομαλού τμήματος ως λόγος δύο πολωνύμων

Το ομαλό τμήμα  $S_r(a_0)$  προσεγγίζεται από το λόγο δύο πολωνύμων  $P$  και  $Q$ , όπου άγνωστη μεταβλητή είναι η μιγαδική αδιάστατη συχνότητα  $ia_0$ , όπως φαίνεται ακολούθως

$$S_r(a_0) \approx S_r(ia_0) = \frac{P(ia_0)}{Q(ia_0)} = K^0 \frac{\frac{K^0 - K^\infty}{K^0} + p_1(ia_0) + p_2(ia_0)^2 + \dots + p_{M-1}(ia_0)^{M-1}}{1 + q_1(ia_0) + q_2(ia_0)^2 + \dots + q_M(ia_0)^M} \quad (2.22)$$

όπου  $p_i, q_i$  οι  $2(M-1)$  άγνωστοι πραγματικοί συντελεστές που προσδιορίζονται από τη διαδικασία προσαρμογής καμπύλης. Σημειώνεται ότι ο βαθμός του πολυωνύμου στον παρονομαστή είναι  $M$ , ενώ στον αριθμητή  $M-1$ . Επίσης ο πρώτος όρος στον αριθμητή,  $p_0$  είναι πάντοτε ίσος με  $(K_0 - K^\infty)/K^\infty$ .

Η προσέγγιση της δυναμικής δυσκαμψίας  $S(\alpha_0)$  προκύπτει από την άθροιση των Εξ. (2.18) και (2.22), όπως περιγράφεται στην Εξ. (2.17). Η προσέγγιση αυτή έχει δύο σημαντικά χαρακτηριστικά: α) είναι ακριβής στο στατικό όριο, όπου  $S(\alpha_0) \rightarrow K^0$  για  $\alpha_0 \rightarrow 0$  και β) είναι ακριβής στο όριο των υψηλών συχνοτήτων, όπου  $S(\alpha_0) \rightarrow S_s(\alpha_0)$  καθώς  $S_r(\alpha_0) \rightarrow 0$  για  $\alpha_0 \rightarrow \infty$ . Αυτό σημαίνει ότι η προσέγγιση είναι διπλά ασυμπτωτική.

Οι  $2(M-1)$  άγνωστοι πραγματικοί συντελεστές στην Εξ. (2.22) υπολογίζονται με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία προγραμματίστηκε από τους Συγγραφείς (βλ. Παράρτημα Α). Τα δεδομένα εισαγωγής του προγράμματος είναι οι μιγαδικές δυσκαμψίες, οι αντίστοιχες συχνότητες και οι βαθμοί των πολυωνύμων. Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από την εκτέλεση του αλγορίθμου είναι οι συντελεστές των πολυωνύμων,  $p_i$  και  $q_i$ .

#### 2.2.4 Δημιουργία διακριτών προσομοιωμάτων

Ο λόγος των πολυωνύμων (Εξ. 2.22) μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα επιμέρους κλασμάτων στη μορφή

$$\frac{S_r(ia_0)}{K^0} = \sum_{n=1}^M \frac{A_n}{ia_0 - s_n} \quad (2.23)$$

όπου  $s_n$  οι πόλοι (ρίζες του πολυωνύμου στον παρονομαστή του  $S_r(\alpha_0)$ ) και  $A_n$  τα αντίστοιχα ολοκληρωματικά υπόλοιπα (residues). Για να διασφαλιστεί ότι το σύστημα είναι ευσταθές στο πεδίο του χρόνου, πρέπει το πραγματικό μέρος των πόλων να είναι αρνητικό. Η συγκεκριμένη απαίτηση αποτελεί κριτήριο στον αλγόριθμο εύρεσης των  $p_i, q_i$ , όπου με επαναληπτική διαδικασία προσδιορίζονται οι κατάλληλοι συντελεστές έτσι ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές.

Οι συντελεστές των πολυωνύμων  $p_i$  και  $q_i$  της Εξ. (2.22) μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα επιμέρους κλασμάτων. Μερικοί από τους πόλους είναι πραγματικοί και άλλοι εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών. Συνεπώς τα αντίστοιχα ολοκληρωματικά υπόλοιπα εμφανίζονται είτε ως πραγματικοί είτε ως συζυγείς



μιγαδικοί αριθμοί. Όταν δύο όροι που αντιστοιχούν σε συζυγείς μιγαδικούς προστίθενται τότε προκύπτει ένας όρος με πραγματικούς συντελεστές όπως φαίνεται στην Εξ. (2.24).

$$\frac{S_r(i a_0)}{K^0} = \sum_{n=1}^J \frac{\beta_{1n} i a_0 + \beta_{0n}}{(i a_0)^2 + \alpha_{1n} i a_0 + \alpha_{0n}} + \sum_{n=1}^{M-2J} \frac{A_n}{i a_0 - s_n} \quad (2.24)$$

η οποία αντιστοιχεί σε  $J$  ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Οι συντελεστές  $\alpha_{0n}$ ,  $\alpha_{1n}$ ,  $\beta_{0n}$  και  $\beta_{1n}$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha_{0n} = s_{1n}^2 + s_{2n}^2 \quad (2.25\alpha)$$

$$\alpha_{1n} = -2s_{1n} \quad (2.25\beta)$$

$$\beta_{0n} = -2(A_{1n}s_{1n} + A_{2n}s_{2n}) \quad (2.25\gamma)$$

$$\beta_{1n} = 2A_{1n} \quad (2.25\delta)$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος των συζυγών μιγαδικών πόλων δηλώνονται με  $s_{1n}$  και  $s_{2n}$ , αντίστοιχα. Ομοίως, το πραγματικό και φανταστικό μέρος των συζυγών μιγαδικών ολοκληρωματικών υπολοίπων δηλώνονται με  $A_{1n}$  και  $A_{2n}$ , αντίστοιχα.

Εάν το ανώμαλο τμήμα (Εξ. 2.18) προστεθεί στην Εξ. (2.23) τότε προκύπτει η συνολική προσέγγιση της δυναμικής δυσκαμψίας

$$\frac{S(i a_0)}{K^0} = k^\infty + i \alpha_0 c^\infty + \sum_{n=1}^{M-2J} \frac{A_n}{i a_0 - s_n} + \sum_{n=1}^J \frac{\beta_{1n} i a_0 + \beta_{0n}}{(i a_0)^2 + \alpha_{1n} i a_0 + \alpha_{0n}} \quad (2.26)$$

Όπως παρατηρείται, η προσέγγιση της δυναμικής δυσκαμψίας (Εξ. 2.26) αποτελείται από τρεις τύπους χαρακτηριστικών όρων: έναν όρο μηδενικής τάξης, ένα πλήθος  $(M-2J)$  όρων πρώτης τάξης και ένα πλήθος  $J$  όρων δεύτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα διακρίνονται οι εξής συντελεστές

$$\text{Μηδενικής τάξης} \quad k^\infty + i \alpha_0 c^\infty \quad (2.27\alpha)$$

$$\text{Πρώτης τάξης} \quad \frac{A}{i a_0 - s} \quad (2.27\beta)$$

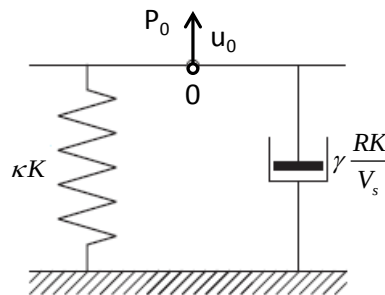
$$\text{Δεύτερης τάξης} \quad \frac{\beta_1 i a_0 + \beta_0}{(i a_0)^2 + \alpha_1 i a_0 + \alpha_0} \quad (2.27\gamma)$$

Είναι προφανές ότι ο αριθμός των όρων πρώτης ή δεύτερης τάξης που εμφανίζονται στην προσεγγιστική σχέση εξαρτάται από το βαθμό του πολυωνύμου  $M$ . Κάθε όρος αναπαρίσταται από ένα προσομοίωμα διακριτών παραμέτρων, όμοιο με αυτά των

Σχημάτων 2.2 και 2.3. Τα προσομοιώματα που αντιστοιχούν στους τρεις όρους περιγράφονται στη συνέχεια.

### Συντελεστής μηδενικής τάξης

Ο συγκεκριμένος όρος που δίνεται από την Εξ. (2.27α) αποτελείται από δυο γνωστές παραμέτρους,  $k^\infty$  και  $c^\infty$ , και αποτελεί το ανώμαλο τμήμα της δυναμικής δυσκαμψίας. Το διακριτό προσομοίωμα για αυτό τον όρο φαίνεται στο Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Διακριτό προσομοίωμα για όρο μηδενικής τάξης

Figure 2.4: Discrete-element model for the zero-order term

Η εξίσωση ισορροπίας ως προς τον κόμβο 0 (για αρμονική κίνηση) είναι

$$[\kappa K]u_0(\omega) + i\omega \left[ \gamma \frac{R}{V_s} K \right] u_0(\omega) = P_0(\omega) \quad (2.28)$$

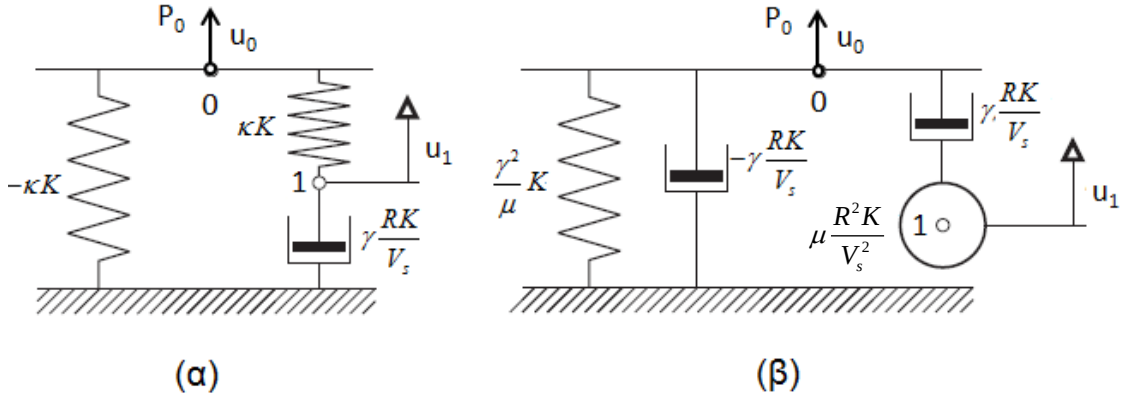
Η Εξ. (2.28), με χρήση της αδιάστατης συχνότητας  $\alpha_0$ , παίρνει τη μορφή

$$\frac{P_0(\alpha_0)}{K} = (\kappa + i\alpha_0\gamma)u_0(\alpha_0) \quad (2.29)$$

Από απλή σύγκριση της Εξ. (2.27α) και της Εξ. (2.29) είναι προφανές ότι οι αδιάστατοι συντελεστές  $\kappa$  και  $\gamma$  είναι ίσοι με  $k^\infty$  και  $c^\infty$ , αντίστοιχα.

### Συντελεστής πρώτης τάξης

Ο όρος πρώτης τάξης δίνεται από την Εξ. (2.27β). Το προσομοίωμα έχει δύο γνωστές παραμέτρους,  $A$  και  $s$ , και δίνεται σχηματικά στο Σχήμα 2.5α. Το μηχανικό ανάλογο περιλαμβάνει ένα ελατήριο ( $-\kappa K$ ) σε παράλληλη σύνδεση με ένα δεύτερο ελατήριο ( $\kappa K$ ) το οποίο με τη σειρά του είναι συνδεδεμένο σε σειρά με έναν αποσβεστήρα ( $\gamma R K/V_s$ ). Η σύνδεση σε σειρά του ελατηρίου με τον αποσβεστήρα έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός εσωτερικού βαθμού ελευθερίας (κόμβος 1).



Σχήμα 2.5: Διακριτό προσομοίωμα για όρο πρώτης τάξης. α) Διάταξη αποτελούμενη από ελατήρια και αποσβεστήρες, β) προσομοίωμα monkey-tail

Figure 2.5: Discrete-element model for the first-order term. a) Spring-dashpot model, b) monkey-tail model

Οι εξισώσεις ισορροπίας για τους κόμβους 0 και 1 (για αρμονική φόρτιση) είναι

$$[\kappa K][u_0(\omega) - u_1(\omega)] + [-\kappa K]u_0(\omega) = P_0(\omega) \quad (2.30\alpha)$$

$$[\kappa K][u_1(\omega) - u_0(\omega)] + i\omega \left[ \gamma \frac{R}{V_s} K \right] u_1(\omega) = 0 \quad (2.30\beta)$$

Απαλείφοντας τη μετατόπιση  $u_1(\omega)$  στις παραπάνω εξισώσεις, η σχέση δύναμης – μετατόπισης που προκύπτει δίνεται ακολούθως

$$\frac{P_0(\alpha_0)}{K} = \frac{-\frac{\kappa^2}{\gamma}}{i\alpha_0 + \frac{\kappa}{\gamma}} u_0(\alpha_0) \quad (2.31)$$

Με σύγκριση των Εξ. (2.27β) και (2.31) προσδιορίζονται οι αδιάστατοι συντελεστές  $\kappa$  και  $\gamma$

$$\kappa = \frac{A}{s} \quad (2.32\alpha)$$

$$\gamma = -\frac{A}{s^2} \quad (2.32\beta)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι ο όρος πρώτης τάξης μπορεί εναλλακτικά να αναπαρασταθεί χρησιμοποιώντας το μοντέλο *monkey-tail* (Σχήμα 2.5β). Στην περίπτωση που το ολοκληρωματικό υπόλοιπο,  $A$ , είναι θετικός αριθμός (ο πόλος  $s$ , είναι πάντα αρνητικός), παρατηρούμε ότι η σταθερά του ελατηρίου γίνεται αρνητική. Η εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου έχει το πλεονέκτημα ότι εξαλείφει τους

αρνητικούς συντελεστές, όταν υπάρχουν. Σε αντίθεση με την πρώτη διάταξη, όπου υπάρχουν μόνο ελατήρια και αποσβεστήρες, τώρα εισάγεται και μάζα. Από τις εξισώσεις ισορροπίας για το μοντέλο *monkey-tail* προκύπτουν οι ακόλουθοι συντελεστές

$$\gamma = \frac{A}{s^2} \quad (2.33\alpha)$$

$$\mu = -\frac{A}{s^3} \quad (2.33\beta)$$

$$\kappa = -\frac{A}{s} = \frac{\gamma^2}{\mu} \quad (2.33\gamma)$$

Με την υπόθεση  $A > 0$ , και οι τρεις παραπάνω συντελεστές είναι θετικές ποσότητες.

### Συντελεστής δεύτερης τάξης

Ο όρος δεύτερης τάξης δίνεται από την Εξ.(2.27γ). Το προσομοίωμα έχει τέσσερις γνωστές παραμέτρους  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_0$  και  $\beta_1$ . Ένα παράδειγμα διακριτού προσομοιώματος δεύτερης τάξης δίνεται στο Σχήμα 2.6α. Το συγκεκριμένο προσομοίωμα έχει δυο εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Όμοια με πριν, γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για τους κόμβους 0,1 και 2, όπως φαίνεται ακολούθως

$$[\kappa_1 K](u_0(\omega) - u_1(\omega)) + [-\kappa_1 K]u_0(\omega) = P_0(\omega) \quad (2.34\alpha)$$

$$[\kappa_1 K](u_1(\omega) - u_0(\omega)) + i\omega \left[ \gamma_1 \frac{R}{V_s} K \right] (u_1(\omega) - u_2(\omega)) = 0 \quad (2.34\beta)$$

$$[\kappa_2 K]u_2(\omega) + i\omega \left[ \gamma_2 \frac{R}{V_s} K \right] u_2(\omega) + i\omega \left[ \gamma_1 \frac{R}{V_s} K \right] (u_2(\omega) - u_1(\omega)) = 0 \quad (2.34\gamma)$$

Με απαλοιφή των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας, η σχέση δύναμης – μετατόπισης είναι

$$\frac{P_0(\alpha_0)}{K} = \frac{-\kappa_1^2 \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} i\alpha_0 - \frac{\kappa_1^2 \kappa_2}{\gamma_1 \gamma_2}}{(i\alpha_0)^2 + \left( \kappa_1 \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} + \frac{\kappa_2}{\gamma_2} \right) i\alpha_0 + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\gamma_1 \gamma_2}} u_0(\alpha_0) \quad (2.35)$$

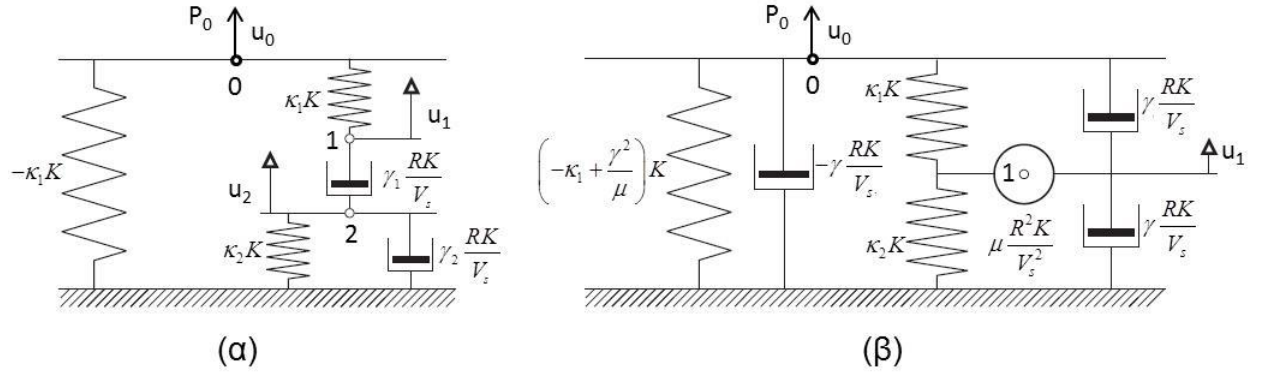
Εξισώνοντας τις Εξ. (2.27γ) και (2.35) προκύπτουν οι τέσσερις αδιάστατοι συντελεστές

$$\kappa_1 = -\frac{\beta_0}{\alpha_0} \quad (2.36\alpha)$$

$$\gamma_1 = -\frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_0^2} \quad (2.36\beta)$$

$$\kappa_2 = \frac{\beta_0}{\alpha_0^2} \frac{(-\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)^2}{\alpha_0\beta_1^2 - \alpha_1\beta_0\beta_1 + \beta_0^2} \quad (2.36\gamma)$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} \frac{-\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0}{\alpha_0\beta_1^2 - \alpha_1\beta_0\beta_1 + \beta_0^2} \quad (2.36\delta)$$



Σχήμα 2.6: Διακριτά προσομοιώματα για όρο δεύτερης τάξης. α) Διάταξη αποτελούμενη από ελατήρια και αποσβεστήρες με δύο εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας, β) Διάταξη αποτελούμενη από ελατήρια, αποσβεστήρες και μάζα με ένα εσωτερικό βαθμό ελευθερίας.

Figure 2.6: Discrete-element model for the second-order term. a) Spring-dashpot model with two internal degrees of freedom, b) Spring-dashpot-mass model with one internal degree of freedom.

Εισάγοντας ένα προσομοίωμα δεύτερης τάξης που περιλαμβάνει ελατήρια, αποσβεστήρες και μάζα, είναι δυνατό να απαλειφθεί ο ένας από τους δύο εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Το μοντέλο με τον ένα εσωτερικό βαθμό ελευθερίας και τη μάζα φαίνεται στο Σχήμα 2.6β. Η σχέση δύναμη – μετατόπισης για αυτή τη διάταξη γράφεται

$$\frac{P_0(\alpha_0)}{K} = \frac{2\left(\frac{\kappa_1\gamma}{\mu} + \frac{\gamma^3}{\mu^2}\right)ia_0 - \frac{\kappa_1^2}{\mu} + \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)\gamma^2}{\mu^2}}{(\alpha_0)^2 + 2\frac{\gamma}{\mu}ia_0 + \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\mu}} u_0(\alpha_0) \quad (2.37)$$

Ομοίως, εξισώνοντας την Εξ. (2.27γ) και την Εξ. (2.37) προσδιορίζονται οι τέσσερις παράμετροι  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\gamma$  και  $\mu$ . Προκειμένου να υπολογιστεί η σταθερά  $\mu$  για τη μάζα πρέπει να επιλυθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού. Η εξίσωση αυτή για το  $\mu$  είναι

$$a\mu^2 + b\mu + c = 0 \quad (2.38a)$$

όπου

$$\alpha = \alpha_1^4 - 4\alpha_0\alpha_1^2 \quad (2.38\beta)$$

$$b = -8\alpha_1\beta_1 + 16\beta_0 \quad (2.38\gamma)$$

$$c = 16 \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} \quad (2.38\delta)$$

Από την επίλυση της Εξ. (2.38α) προκύπτουν δύο τιμές για το  $\mu$ , που είναι και οι δύο αποδεκτές. Για να προκύψουν πραγματικές τιμές του  $\mu$ , ωστόσο, θα πρέπει η διακρίνουσα να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Όταν προσδιοριστεί το  $\mu$  οι υπόλοιποι συντελεστές υπολογίζονται ως εξής

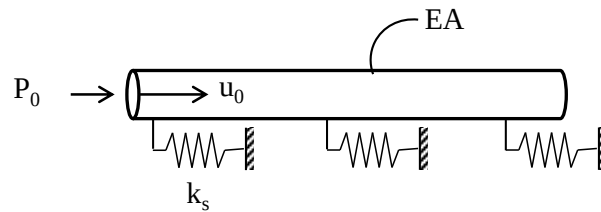
$$\kappa_1 = \frac{\mu\alpha_1^2}{4} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad (2.39\alpha)$$

$$\kappa_2 = \mu\alpha_0 - \kappa_1 \quad (2.39\beta)$$

$$\gamma = \frac{\mu\alpha_1}{2} \quad (2.39\gamma)$$

### 2.3 Παράδειγμα – ημιάπειρη ράβδος σε ελαστική θεμελίωση

Η ημιάπειρη ράβδος είναι σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας όταν θεωρηθεί μόνο η σχέση δύναμης – μετατόπισης στο άκρο της ράβδου. Τα κύματα διασποράς παρουσιάζουν μια συχνότητα αποκοπής κάτω από την οποία η απόσβεση ακτινοβολίας παύει να υπάρχει. Στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζεται σχηματικά το πρόβλημα της ράβδου ( $A$  είναι το εμβαδό διατομής και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας του υλικού και  $k_s$  η σταθερά των ελατηρίων Winkler). Το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκε ως πρόβλημα αναφοράς από τον Wolf (1994), και υιοθετείται εδώ ξανά για λόγους σύγκρισης.



Σχήμα 2.7: Ημιάπειρη ράβδος επί ελαστικής βάσης

Figure 2.7: Semi-infinite rod on elastic base

Η στατική τιμή της δυσκαμψίας δίνεται από

$$K^0 = EA\lambda \quad (2.40\alpha)$$

όπου

$$\lambda = \left( \frac{k_s}{EA} \right)^{1/2} \quad (2.40\beta)$$

Η δυναμική δυσκαμψία δίνεται από τη σχέση

$$S(a_0) = K^0 \sqrt{1 - a_0^2} \quad \text{για} \quad 0 \leq a_0 \leq 1 \quad (2.41\alpha)$$

$$S(a_0) = iK^0 \sqrt{a_0^2 - 1} \quad \text{για} \quad a_0 > 1 \quad (2.41\beta)$$

Ακολουθώντας την διαδικασία, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, χωρίζουμε τη δυναμική δυσκαμψία σε ανώμαλο και ομαλό τμήμα και κανονικοποιούμε με τη στατική τιμή, δηλαδή

$$\frac{S_s(a_0)}{K^0} = ia_0 \quad (2.42)$$

$$\frac{S_r(a_0)}{K^0} = \sqrt{1 - a_0^2} - ia_0 \quad (2.43)$$

Στη συνέχεια προσεγγίζουμε το ομαλό τμήμα με το λόγο δυο πολωνύμων, όπου το πολώνυμο στον παρονομαστή είναι τρίτου βαθμού,  $M = 3$  (στον αριθμητή είναι δευτέρου βαθμού). Η προσέγγιση γίνεται για το εύρος συχνοτήτων  $0 < \alpha_0 < 10$ .

Μετά την εύρεση των συντελεστών των πολωνύμων και την ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων, προκύπτει

$$\frac{S_r(ia_0)}{K^0} = \frac{-0.0152 - 0.1329i}{ia_0 - (-0.2246 + 0.9312)} + \frac{-0.0152 + 0.1329i}{ia_0 - (-0.2246 - 0.9312)} + \frac{0.5778}{ia_0 - (-0.7539)} \quad (2.44)$$

Παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος όλων των πόλων είναι αρνητικό. Εάν συνδυαστούν οι δύο πρώτοι όροι (Εξ. 2.44), που αποτελούν ζεύγος συζυγών μιγαδικών, λαμβάνουμε

$$\frac{S_r(ia_0)}{K^0} = \frac{-0.0304ia_0 + 0.2407}{(ia_0)^2 + 0.4492ia_0 + 0.9176} + \frac{0.5778}{ia_0 - (-0.7539)} \quad (2.45)$$

Ο τελευταίος όρος της Εξ. (2.45) είναι όρος πρώτης τάξης και αντιστοιχεί σε ένα διακριτό προσομοίωμα με συντελεστές που υπολογίζονται από την Εξ. (2.32)

$$\kappa = -0.7664, \quad \gamma = -1.0166 \quad (2.46\alpha, \beta)$$

Οι συντελεστές του ελατηρίου και του αποσβεστήρα είναι αρνητικοί, εάν θέλουμε το διακριτό προσομοίωμα να έχει θετικούς συντελεστές τότε εφαρμόζουμε τη διάταξη *monkey-tail* και οι συντελεστές προκύπτουν (Εξ. 2.33)

$$\kappa = 0.7664, \quad \gamma = 1.0166, \quad \mu = 1.3485 \quad (2.47\alpha, \beta, \gamma)$$

Ο πρώτος όρος της Εξ. (2.45) περιγράφει ένα προσομοίωμα δεύτερης τάξης, οι αντίστοιχοι συντελεστές υπολογίζονται από την Εξ. (2.36)

$$\kappa_1 = -0.2623, \quad \gamma_1 = -0.1615, \quad \kappa_2 = 0.0852, \quad \gamma_2 = 0.1508 \quad (2.48\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

Εάν για το προσομοίωμα δεύτερης τάξης προτιμήσουμε τη δεύτερη διάταξη με τη μάζα (και κρατήσουμε τη θετική τιμή του συντελεστή  $\mu$ ) τότε οι νέοι συντελεστές υπολογίζονται (Εξ. 2.39)

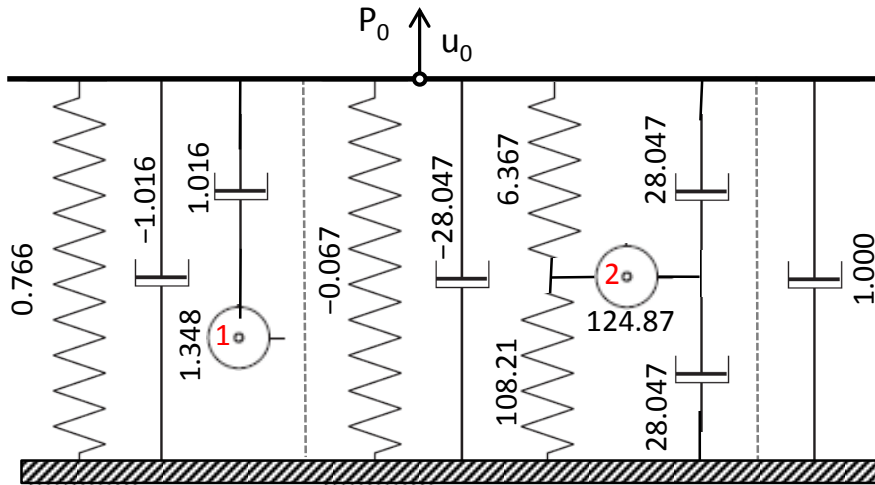
$$\mu = 124.876, \quad \kappa_1 = 6.367, \quad \kappa_2 = 108.216, \quad \gamma = 28.047 \quad (2.49\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η διάταξη έχει ένα εσωτερικό βαθμό ελευθερίας και όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί. Εάν είχε επιλεγθεί η αρνητική τιμή του  $\mu$  τότε θα προέκυπταν και αρνητικοί συντελεστές. Γενικά, ο μετασχηματισμός με την εισαγωγή της μάζας δεν εξασφαλίζει πάντα μη αρνητικούς συντελεστές.

Το ανώμαλο τμήμα  $S_s(a_0)$ , που αποτελεί τον όρο μηδενικής τάξης, έχει συντελεστές

$$\kappa = 0, \quad \gamma = 1 \quad (2.50)$$

Συνολικά, το προσομοίωμα φαίνεται στο Σχήμα 1.8

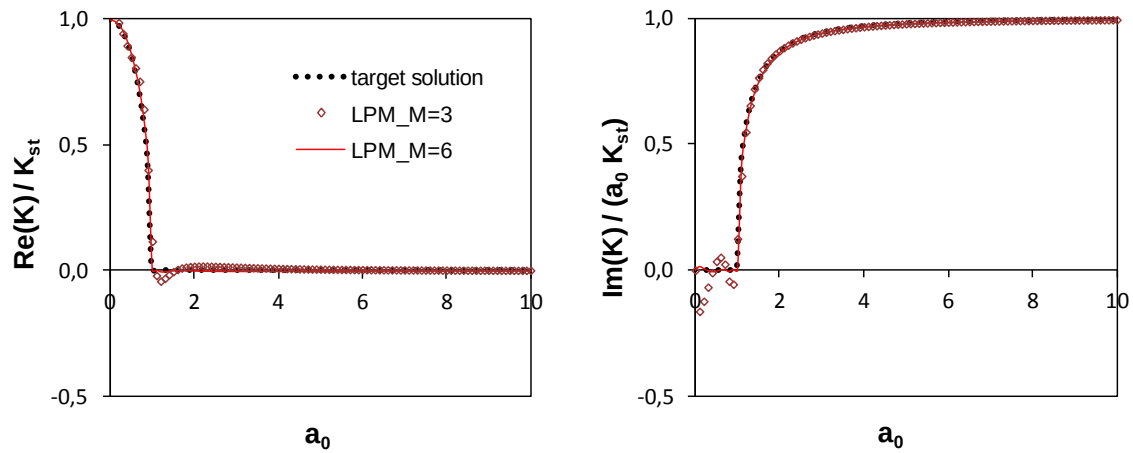


Σχήμα 2.8: Μηχανικό ανάλογο ράβδου επί ελαστικής θεμελίωσης – Βαθμός πολωνύμου στον παρονομαστή  $M = 3$

Figure 2.8: Lumped-parameter model of semi-infinite rod on elastic base – Degree of polynomial in the denominator  $M=3$



Επίσης στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζεται γραφικά η δυναμική δυσκαμψία και απόσβεση της ράβδου. Η ακριβής καμπύλη συγκρίνεται με δύο άλλες που προέκυψαν από την εφαρμογή των διακριτών προσομοιωμάτων. Η μία προσέγγιση έγινε χρησιμοποιώντας ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού στον παρονομαστή, ενώ η δεύτερη με χρήση ενός πολυωνύμου έκτου βαθμού. Παρατηρείται ότι η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική ακόμη και με τη χρήση του πολυωνύμου τρίτου βαθμού. Η προσαρμογή με  $M = 6$  είναι εξαιρετική.



Σχήμα 2.9: Προσέγγιση της δυναμικής δυσκαμψίας με χρήση μηχανικών αναλόγων

Figure 2.9: Lumped-parameter model approximation of dynamic stiffness

Στην περίπτωση αυτή, οι ρίζες του πολυωνύμου και τα αντίστοιχα ολοκληρωματικά υπόλοιπα είναι ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών, όπως φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 2.4.

**Πίνακας 2.4: Πόλοι και αντίστοιχα ολοκληρωματικά υπόλοιπα για βαθμό πολυωνύμου στον παρονομαστή  $M=6$**

**Table 2.4: Poles and residues for the partial-fraction expansion when the degree of polynomial in the denominator is  $M=6$**

|   | Πόλοι $s$         | Ολοκληρωματικά<br>υπόλοιπα $A$ |
|---|-------------------|--------------------------------|
| 1 | $-0.0263+0.9977i$ | $-0.0040-0.0060i$              |
|   | $-0.0263-0.9977i$ | $-0.0040+0.0060i$              |
| 2 | $-0.2384+0.9463i$ | $-0.0200-0.0831i$              |
|   | $-0.2384-0.9463i$ | $-0.0200+0.0831i$              |
| 3 | $-0.7237+0.5052i$ | $+0.2697-0.2547i$              |
|   | $-0.7237-0.5052i$ | $+0.2697+0.2547i$              |

Από την Εξ. (2.36) προσδιορίζονται οι αδιάστατοι συντελεστές των τριών διακριτών προσομοιωμάτων δευτέρας τάξης και παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.5. Δηλαδή για

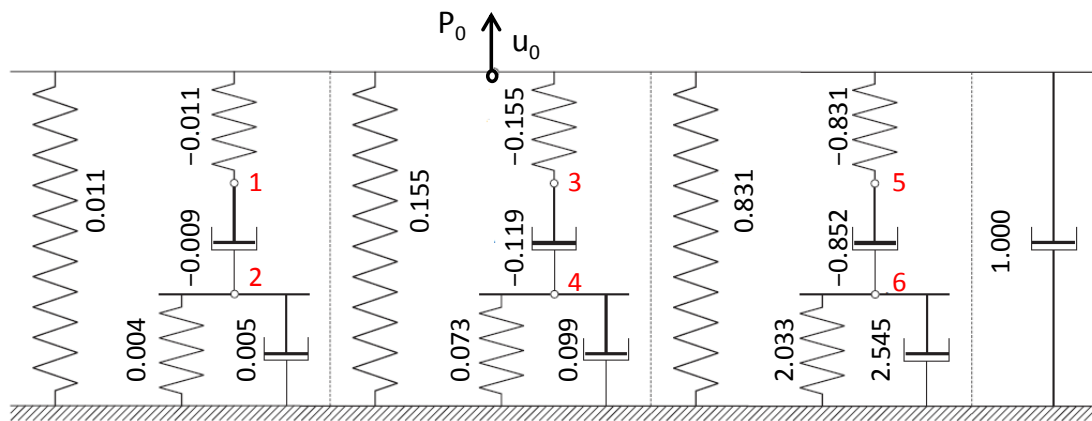
κάθε ζεύγος συζυγών μιγαδικών πόλων, υπολογίζονται οι τέσσερις αδιάστατοι συντελεστές  $\kappa_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\kappa_2$  και  $\gamma_2$ .

**Πίνακας 2.5: Αδιάστατοι συντελεστές για τα διακριτά προσομοιώματα δεύτερης τάξης**

**Table 2.5: Non-dimensional coefficients of second-order discrete-elements**

|   | $\kappa_1$ | $\gamma_1$ | $\kappa_2$ | $\gamma_2$  |
|---|------------|------------|------------|-------------|
| 1 | -0.011787  | -0.0094569 | +0.0047266 | +0.00591426 |
| 2 | -0.155136  | -0.119675  | +0.0733321 | +0.0998208  |
| 3 | -0.831500  | -0.852555  | +2.033430  | +2.545950   |

Όπως και προηγούμενα, το ανώμαλο τμήμα  $S_s(a_0)$ , έχει μηδενικό συντελεστή για το ελατήριο και μοναδιαίο συντελεστή για τον αποσβεστήρα. Το προσομοίωμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.10.



*Σχήμα 2.10: Μηχανικό ανάλογο ράβδου επί ελαστικής θεμελίωσης – Βαθμός πολυωνύμου στον παρονομαστή  $M = 6$*

*Figure 2.10: Lumped-parameter model of semi-infinite rod on elastic base – Degree of polynomial in the denominator  $M=6$*

### 3. ΕΛΑΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στο παρόν κεφάλαιο ορίζεται το υπό εξέταση πρόβλημα και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής προσομοίωσης, βάσει των λογισμικών ελαστοδυναμικής ανάλυσης CONAN & SASSI, αναφορικά με την απόκριση επιφανειακού θεμελίου επί ρευστοποιήσιμης εδαφικής στρώσης υπό εξωτερική αρμονική διέγερση.

#### 3.1 Πρόβλημα προς επίλυση

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζεται το υπό εξέταση πρόβλημα: άκαμπτο, επιφανειακό, τετραγωνικό θεμέλιο πλάτους  $B$ , εδραζόμενο σε ρευστοποιήσιμο έδαφος, υποκείμενο σε εξωτερική φόρτιση με τη μορφή δύναμης και ροπής. Λαμβάνεται υπόψη τρίστρωτη στρωματογραφία που αποτελείται από επιφανειακή μη ρευστοποιήσιμη κρούστα (αργιλική ή αμμώδη), ακολουθούμενη από ρευστοποιήσιμο αμμώδες έδαφος, υπερκείμενο βραχώδους υποστρώματος ή ακόμη και υποστρώματος από φυσικό έδαφος που δεν έχει όμως ρευστοποιηθεί. Οι στρώσεις παρουσιάζουν έντονη αντίθεση κυματικής εμπέδησης με συνέπεια τον εγκλωβισμό των μηχανικών κυμάτων. Η αριθμητική προσομοίωση αφορά σε τετραγωνικά θεμέλια μικρών ή μεγάλων διαστάσεων (πλευράς 2m μέχρι 7m) που χρησιμοποιούνται σε συνήθεις κατασκευές και σε γεφυροποιία. Οι συχνότητες διέγερσης κυμαίνονται από 0 ως 30 Hz και καλύπτουν το εύρος που αφορά σεισμικές διεγέρσεις.

Η ανάλυση πραγματοποιείται σε δύο στάδια: σε αυτό πριν τη ρευστοποίηση και σε αυτό κατά τη διάρκεια της ρευστοποίησης, όπου οι ιδιότητες του εδαφικού στρώματος μεταβάλλονται. Η σημαντικότερη εδαφική ιδιότητα που μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ρευστοποίησης είναι η ταχύτητα διάδοσης των διατμητικών κυμάτων, η οποία βάσει πρόσφατων μελετών (Miwa and Ikeda, 2006, Θεοχάρης, 2011) μπορεί να μειωθεί στο 10–30% της αρχικής της τιμής. Στο πλαίσιο της ελαστοδυναμικής ανάλυσης για τον προσδιορισμό ισοδύναμων ελατηρίων και αποσβεστήρων που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά της θεμελίωσης, η κυριότερη παράμετρος αφορά στη μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης των διατμητικών κυμάτων στην εδαφική στρώση.

Αναφορικά με την απόσβεση υλικού, έχει παρατηρηθεί ότι τη στιγμή που το έδαφος ρευστοποιείται οι απώλειες ενέργειας λόγω τριβής αυξάνονται θεαματικά, και ο σχετικός συντελεστής απόσβεσης παίρνει τιμές που υπερβαίνουν το 20%. Στις εν λόγω αναλύσεις, θεωρείται ότι το εδαφικό στρώμα χωρίς ρευστοποίηση έχει συντελεστή απόσβεσης 3%, ενώ παρουσία ρευστοποίησης 20%.

Αναφορικά με τον λόγο Poisson, το έδαφος θεωρείται πλήρως κορεσμένο, δηλαδή με βαθμό κορεσμού  $S_r=100\%$ , οπότε η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων συμπίεσης

θεωρείται ίση με  $V_p = 1500\text{m/s}$  – ίση με την αντίστοιχη ταχύτητα διάδοσης στο νερό. Από το νόμο του Hooke ισχύει

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad (3.1)$$

και επομένως ο ισοδύναμος λόγος Poisson μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\nu = \frac{1}{2} \left[ \frac{\left(V_p/V_s\right)^2 - 2}{\left(V_p/V_s\right)^2 - 1} \right] \quad (3.2)$$

Για παράδειγμα, με την υπόθεση ότι  $V_s=150\text{m/s}$  για συνθήκες χωρίς ρευστοποίηση, και  $V_{s,liq}=25\text{m/s}$  για συνθήκες με ρευστοποίηση. Η Εξ. (3.2) δίνει

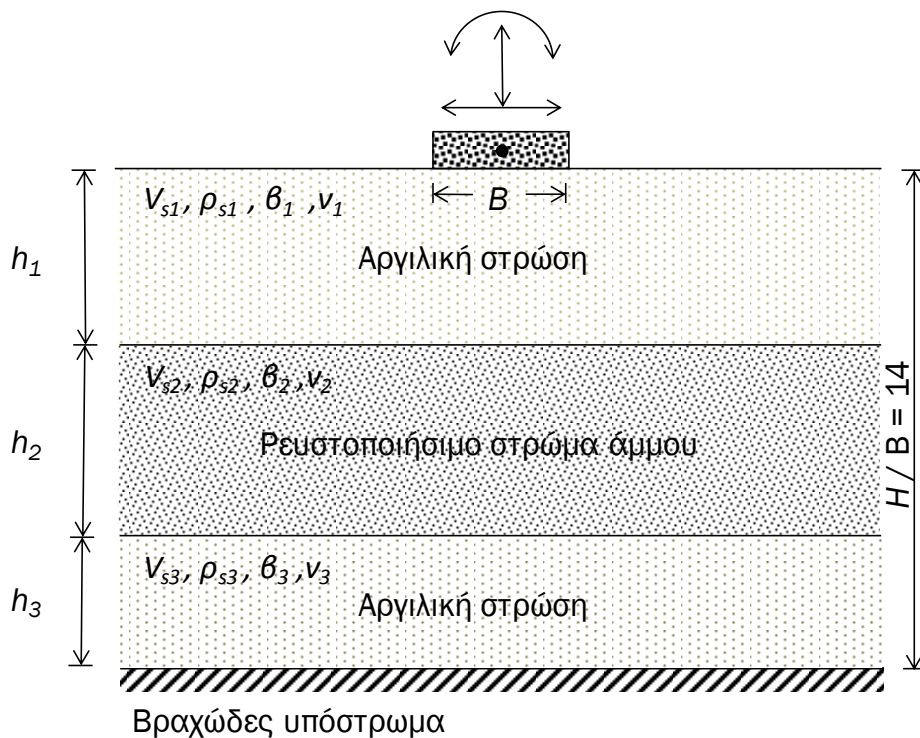
$$\text{για } V_p / V_{s,0} = 1500/150, \quad \nu = 0.49 \quad (3.3\alpha)$$

$$\text{και για } V_p / V_{s,liq} = 1500 / 25, \quad \nu = 0.499 \quad (3.3\beta)$$

Στις αναλύσεις που ακολουθούν υιοθετείται η τιμή  $\nu=0.49$ .

Σημαντικός παράγων στη συμπεριφορά του θεμελίου αποτελεί το πάχος της ρευστοποιήσιμης εδαφικής στρώσης και γι'αυτό η συγκεκριμένη ιδιότητα διερευνάται παραμετρικά. Επίσης σημαντική ιδιότητα που διερευνάται παραμετρικά είναι το πάχος της μη ρευστοποιήσιμης κρούστας το οποίο οφείλει να καλύπτει την πρόσθετη απαίτηση φέρουσας ικανότητας. Επομένως τόσο το πάχος όσο και η στιφρότητα (ταχύτητα  $V_s$  της κρούστας) αποτελούν κύριες παραμέτρους της ανάλυσης.

Οι χαρακτηριστικές παράμετροι κάθε εδαφικού στρώματος είναι το πάχος του,  $h_i$ , η ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος,  $V_{si}$ , η πυκνότητα,  $\rho_{si}$ , ο λόγος Poisson,  $\nu_i$  και ο συντελεστής απόσβεσης,  $\beta_i$ . Για την αριθμητική προσομοίωση και για συμβατότητα με προηγούμενη έρευνα (Θεοχάρης 2011), θεωρείται ότι ο λόγος του συνολικού πάχους της στρωματογραφίας,  $H$ , προς το πλάτος του θεμελίου,  $B$ , παραμένει σταθερός και ίσος περίπου με 15. Στη συνέχεια της εργασίας σχολιάζεται η επιλογή για το συνολικό πάχος του εδαφικού προφίλ και αποδεικνύεται ότι η επιρροή του στη δυναμική απόκριση του θεμελίου δεν είναι σημαντική όταν ο λόγος υπερβαίνει το  $H/B=4$ . Επίσης η πυκνότητα του εδάφους και ο συντελεστής απόσβεσης είναι ίδιοι για όλες τις εδαφικές στρώσεις. Αναλυτικά οι ιδιότητες κάθε εδαφικού στρώματος παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1.



Σχήμα 3.1: Το υπό εξέταση πρόβλημα και οι κύριες φυσικές παράμετροι

Figure 3.1: Problem definition and basic physical parameters

Πίνακας 3.1: Ιδιότητες εδαφικών στρώσεων (σε παρένθεση οι τιμές κατά τη διάρκεια της ρευστοποίησης)

Table 3.1: Properties of soil layers (the values during liquefaction are given in parenthesis)

| Επιφανειακό Αργιλικό Στρώμα |                   |                                  |           |         | Ρευστοποιήσιμο Στρώμα Άμμου |                   |                                  |                |         | Αργιλικό Στρώμα Βάσης              |                   |                                  |           |         |
|-----------------------------|-------------------|----------------------------------|-----------|---------|-----------------------------|-------------------|----------------------------------|----------------|---------|------------------------------------|-------------------|----------------------------------|-----------|---------|
| $h_1 / B$                   | $V_{s1}$<br>(m/s) | $\rho_1$<br>(Mg/m <sup>3</sup> ) | $\beta_1$ | $\nu_1$ | $h_2 / B$                   | $V_{s2}$<br>(m/s) | $\rho_2$<br>(Mg/m <sup>3</sup> ) | $\beta_2$      | $\nu_2$ | $h_3 / B$                          | $V_{s3}$<br>(m/s) | $\rho_3$<br>(Mg/m <sup>3</sup> ) | $\beta_3$ | $\nu_3$ |
| 0.5                         | 100<br>250        | 2                                | 0.03      | 0.33    | 0.5                         | 150<br>(25)       | 2                                | 0.03<br>(0.20) | 0.49    | $H / B$<br>–<br>$-(h_1/B + h_2/B)$ | 300               | 2                                | 0.03      | 0.33    |
| 1                           |                   |                                  |           |         | 1                           |                   |                                  |                |         |                                    |                   |                                  |           |         |
| 2                           |                   |                                  |           |         | 2                           |                   |                                  |                |         |                                    |                   |                                  |           |         |

Σημειώνεται ότι εξετάζονται 36 εδαφικά προφίλ για τρεις μορφές ταλάντωσης, κατακόρυφη, οριζόντια και λικνιστική, δηλαδή συνολικά πραγματοποιούνται 108 αναλύσεις. Η ανάλυση πραγματοποιείται για εύρος συχνοτήτων  $f = 0-30$  Hz.

### 3.2 Διαστατική ανάλυση

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα εντοπίζονται οι παρακάτω έξι (6) κύριες διαστατικές παράμετροι:

- Πάχος επιφανειακής αργιλικής κρούστας,  $h_1$
- Πάχος ρευστοποιήσιμης στρώσης,  $h_2$
- Ταχύτητα διατμητικού κύματος στη μη ρευστοποιήσιμη κρούστα,  $V_{s1}$
- Ταχύτητα διατμητικού κύματος στο ρευστοποιήσιμο στρώμα,  $V_{s2}$
- Πλάτος θεμελίου,  $B$
- Συχνότητα διέγερσης,  $f$

Οι υπόλοιπες παράμετροι που απεικονίζονται στο Σχήμα 3.1 θεωρούνται ήσσονος σημασίας και δεν εξετάζονται παραμετρικά, συμπεριλαμβανομένων της στιφρότητας του τρίτου στρώματος και του συνολικού πάχους του εδαφικού προφίλ.

Από απλή εποπτεία των παραπάνω κύριων μεγεθών προκύπτει ότι οι θεμελιώδεις διαστάσεις είναι δύο:

- Μήκος,  $[L]$
- Χρόνος,  $[t]$

Με εφαρμογή του θεωρήματος του Buckingham (1914) προκύπτει ότι για την περιγραφή της συμπεριφοράς του θεμελίου απαιτείται ο παρακάτω αριθμός αδιάστατων λόγων:

$M = 6$  : Διαστατικές Παράμετροι

$N = 2$  : Θεμελιώδεις Διαστάσεις

$M - N = 4$  : Αδιάστατοι λόγοι

Για το σκοπό αυτό μπορούν να επιλεγούν οι ακόλουθες παράμετροι

$h_1/B$  ,  $h_2/B$  ,  $V_{s1}/V_{s2}$  ,  $2\pi f B/V_{s1}$

οι οποίες αρκούν για να περιγράψουν τα κύρια χαρακτηριστικά του προβλήματος.

Για την τεκμηρίωση της παραπάνω υπόθεσης εξετάζονται δύο θεμέλια διαφορετικού πλάτους που εδράζονται σε εδάφη με διαφορετική στρωματογραφία υποκείμενα σε αρμονική διέγερση διαφορετικής συχνότητας, με ίδιους αδιάστατους λόγους. Πιο αναλυτικά ισχύουν:

1<sup>η</sup> περίπτωση

$$B = 1 \text{ m}, h_1 = 1 \text{ m}, h_2 = 1 \text{ m}, V_{s1} = 100 \text{ m/s}, V_{s2} = 200 \text{ m/s}, f = 127 \text{ Hz}$$

2<sup>η</sup> περίπτωση

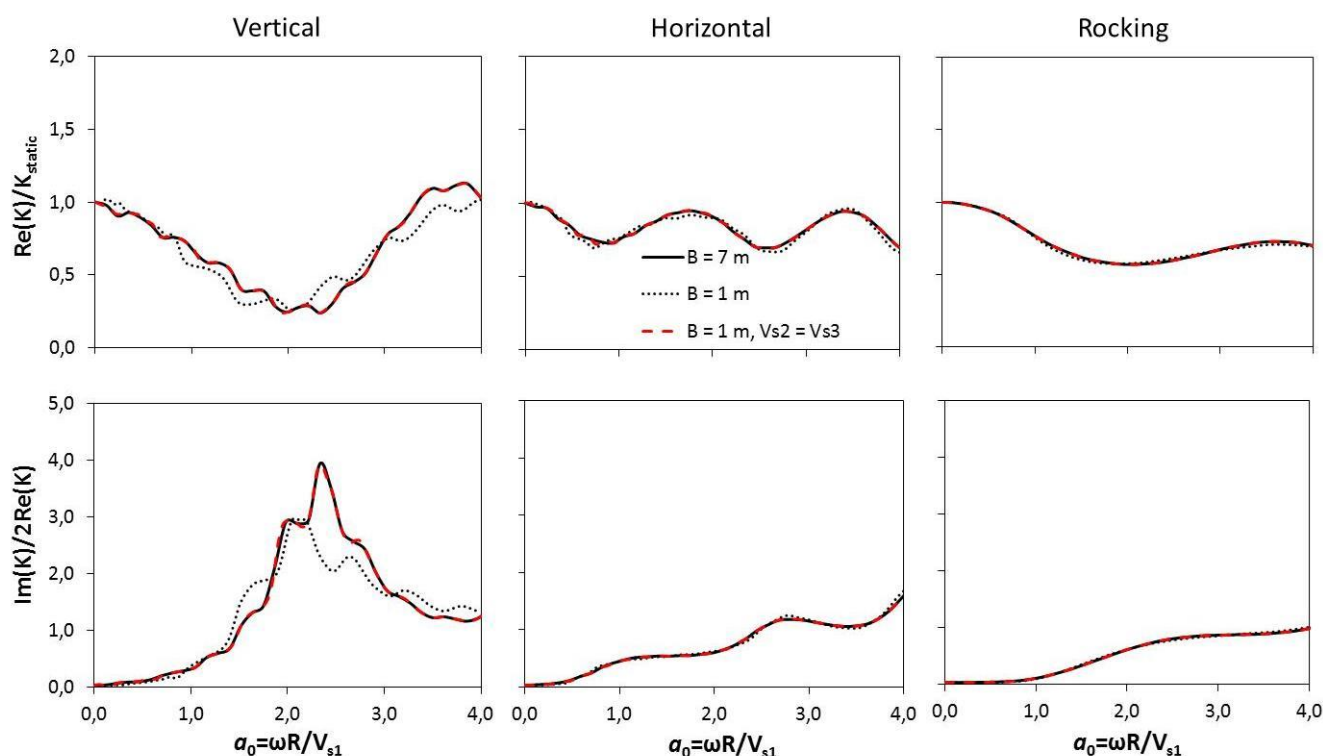
$$B = 7 \text{ m}, h_1 = 7 \text{ m}, h_2 = 7 \text{ m}, V_{s1} = 150 \text{ m/s}, V_{s2} = 300 \text{ m/s}, f = 28 \text{ Hz}$$

Οι τιμές των αδιάστατων λόγων και για τις δύο περιπτώσεις είναι:

$$h_1/B = 1, h_2/B = 1, V_{s1}/V_{s2} = 1/2, a_0 = 0 - 4$$

Σημειώνεται ότι η πυκνότητα είναι ίδια για όλα τα στρώματα  $\rho_{s1} = \rho_{s2} = \rho_{s3} = 2 \text{ Mg/m}^3$  όπως επίσης ο λόγος Poisson  $\nu_{s1} = \nu_{s2} = \nu_{s3} = 0.33$  και ο συντελεστής απόσβεσης  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 3\%$ . Επιπλέον, η ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων θεωρείται σταθερή και ίση με  $V_{s3} = 300 \text{ m/s}$  οπότε ο λόγος των ταχυτήτων των διατμητικών κυμάτων του δεύτερου προς το τρίτο στρώμα ισούται με  $V_{s2}/V_{s3} = 0.67$  και 1, αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα της ελαστοδυναμικής ανάλυσης για τη δυναμική δυσκαμψία παρουσιάζονται σε αδιάστατη μορφή στο Σχήμα 3.2 (λεπτομέρειες για τη μέθοδο δίνονται στη συνέχεια). Η δυναμική δυσκαμψία είναι κανονικοποιημένη ως προς τη στατική τιμή, ενώ αντί για την απόσβεση παρουσιάζεται στα διαγράμματα ο συντελεστής απόσβεσης. Πρέπει να αναφερθεί ότι στη συνέχεια της εργασίας θα σχολιαστούν εκτενώς οι εναλλακτικές μορφές κανονικοποίησης της απόσβεσης και η σημασία τους. Στον οριζόντιο άξονα η συχνότητα διέγερσης κανονικοποιείται με την ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων του πρώτου εδαφικού στρώματος και την ισοδύναμη κυκλική ακτίνα,  $R = B/\sqrt{\pi}$ . Παρατηρείται εξαιρετική συμφωνία των αποτελεσμάτων για τις δύο περιπτώσεις, ειδικά για την οριζόντια και τη λικνιστική ταλάντωση. Αξίζει να σημειωθεί ότι εάν υποθεθεί επιπλέον ότι  $V_{s2}/V_{s3} = 1$  και για τις δύο περιπτώσεις, τότε οι καμπύλες ταυτίζονται απόλυτα.



Σχήμα 3.2: Σύγκριση κανονικοποίησης δυναμικής δυσκαμψίας δύο διαφορετικών θεμελίων βάσει διαστατικής ανάλυσης

Figure 3.2: Dimensional analysis – comparison of two different foundation problems

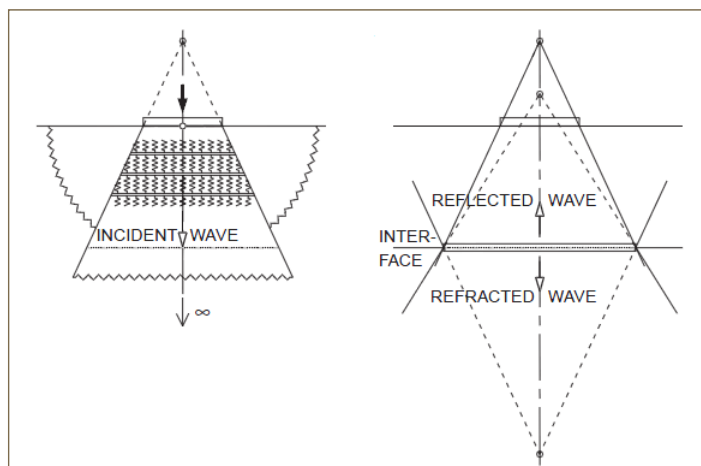
### 3.3 Κώδικες CONAN και SASSI

Οι ελαστοδυναμικές αριθμητικές αναλύσεις βασισμένες στη διάδοση κυμάτων μέσω κώνων (σε 1 ή 2 διαστάσεις) και συνεχούς μέσου (σε 3 διαστάσεις) με χρήση των λογισμικών CONAN και SASSI, αντίστοιχα. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές αρχές λειτουργίας των δύο λογισμικών.

#### 3.3.1 CONAN

Ο κώδικας CONAN βασίζεται στη διάδοση κυμάτων μέσα στο έδαφος μέσω της θεωρίας κυματικής διάδοσης σε κώνους (Σχήμα 3.3). Η συγκεκριμένη μέθοδος αναπτύχθηκε από τους Wolf and Deeks (2004) και βάσει αυτής μπορεί να προσδιοριστεί η δυναμική απόκριση επιφανειακών ή εμπεδωμένων κυκλικών θεμελίων. Επίσης είναι δυνατό να αναλυθούν και άλλα σχήματα θεμελίων λαμβάνοντας υπόψη μια ισοδύναμη κυκλική ακτίνα.

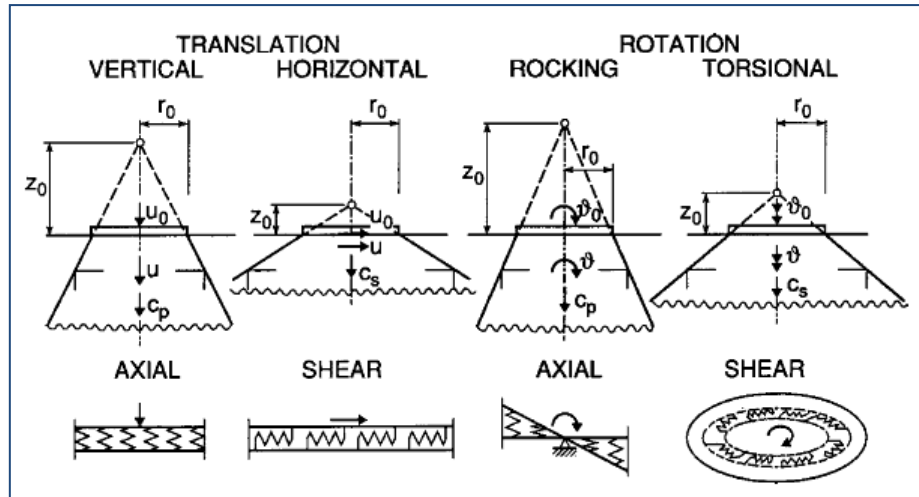




Σχήμα 3.3: Διάδοση κυμάτων σε κώνους (Wolf & Deeks, 2004)

Figure 3.3: Wave propagation in cones (Wolf & Deeks, 2004)

Το έδαφος θεωρείται γραμμικώς ελαστικό μέσο με πυκνότητα  $\rho$ . Συνήθως, για την επίλυση προβλημάτων Εδαφομηχανικής οι κύριες εδαφικές ιδιότητες είναι το μέτρο ελαστικότητας,  $E$  και ο λόγος Poisson,  $\nu$ . Ωστόσο, όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος του κώνου, οι πιο κατάλληλες εδαφικές ιδιότητες είναι οι ταχύτητες διάδοσης των εγκάρσιων και διαμήκων κυμάτων. Για κάθε βαθμό ελευθερίας, το έδαφος εξιδανικεύεται ως ημιάπειρος ελαστικός κώνος με διαφορετικό ύψος κορυφής,  $z_0$  όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4. Ο λόγος του ύψους κορυφής προς την ακτίνα θεμελίου  $z_0/r_0$  δηλώνει τη γωνία ανοίγματος του κώνου. Για κάθε βαθμό ελευθερίας προσδιορίζεται ο λόγος  $z_0/r_0$  με εξίσωση της ακριβούς στατικής στιφρότητας του θεμελίου (για ελαστικό ημίχωρο) με αυτή που προκύπτει με χρήση του μοντέλου κώνου. Όταν εφαρμοστεί εξωτερικό φορτίο σε επιφανειακό θεμέλιο, η επιφάνεια πάνω στην οποία ασκούνται τάσεις αυξάνεται ανάλογα με το βάθος και αναπαρίσταται με το μοντέλο του κώνου. Από τη θεωρία της Αντοχής των Υλικών υποτίθεται ότι οι επίπεδες επιφάνειες παραμένουν επίπεδες και επίσης το εδαφικό υλικό που βρίσκεται εκτός κώνου αμελείται. Ανάλογα με το είδος της παραμόρφωσης, αξονικής ή διατμητικής, διακρίνουμε το μοντέλο κώνου για οριζόντια και στρεπτική ταλάντωση, όπου χρησιμοποιείται η ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων,  $V_s$ , και το μοντέλο κώνου για κατακόρυφη και λικνιστική ταλάντωση, όπου χρησιμοποιείται η ταχύτητα διάδοσης διαμηκών κυμάτων,  $V_p$ .



Σχήμα 3.4: Μοντέλα κώνου για διαφορετικές μορφές ταλάντωσης (Wolf & Deeks, 2004)

Figure 3.4: Cone models for various modes of vibration (Wolf & Deeks, 2004)

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές κλειστές αναλυτικές λύσεις για τον προσδιορισμό της στατικής στιφρότητας,  $K$ , κυκλικού θεμελίου επί ελαστικού ημίσφαιρου. Όπως προαναφέρθηκε, με εξίσωση της ακριβούς στατικής στιφρότητας του θεμελίου, για ελαστικό ημίσφαιρο, με αυτή που προκύπτει με χρήση του μοντέλου κώνου προσδιορίζεται το άνοιγμα του κώνου  $z_0/r_0$ . Για παράδειγμα, στη συνέχεια προσδιορίζεται το άνοιγμα του κώνου για την κατακόρυφη φόρτιση επιφανειακού θεμελίου ακτίνας  $r_0$ . Το εμβαδό του θεμελίου είναι  $A_0 = \pi r_0^2$ , σε κάποιο βάθος  $z$ , το οποίο μετράται από την κορυφή του κώνου, το εμβαδό της επιφάνειας πάνω στην οποία ασκούνται τάσεις ισούται με  $A = (z^2/z_0^2) A_0$ . Επίσης, εάν  $u$  είναι η αξονική μετακίνηση και  $N$  η αξονική φόρτιση του θεμελίου, τότε για ένα απειροελάχιστο στοιχείο η εξίσωση ισορροπίας γράφεται

$$-N + N + \frac{\partial N}{\partial z} dz = 0 \quad (3.4)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην Εξ. (3.4) τη σχέση δύναμης-μετατόπισης

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.5)$$

όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας του εδάφους, και προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial(zu)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.6)$$

Η λύση της οποίας είναι

$$zu = c_1 + c_2 z \quad (3.7)$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Με επιβολή των συνοριακών συνθηκών

$$u(z = z_0) = u_0, \quad u(z = \infty) = 0 \quad (3.8)$$

λαμβάνουμε

$$u = \frac{z_0}{z} u_0 \quad (3.9)$$

Από τη σχέση

$$P_0 = -N(z = z_0) = -EA_0 \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_0} \quad (3.10)$$

με αντικατάσταση της Εξ. (3.9) προκύπτει η σχέση δύναμης-μετατόπισης

$$P_0 = \frac{EA_0}{z_0} u_0 \quad (3.11)$$

Οπότε η στατική δυσκαμψία του θεμελίου για κώνο που αντιστοιχεί σε κατακόρυφη κίνηση είναι

$$K = \frac{EA_0}{z_0} \quad (3.12)$$

Αντίστοιχα, με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζεται η δυσκαμψία για κώνο που αντιστοιχεί σε οριζόντια φόρτιση, δηλαδή μετακίνηση κάθετη στον άξονα του κώνου και ανάπτυξη διατμητικής παραμόρφωσης,

$$K = \frac{GA_0}{z_0} \quad (3.13)$$

Γενικά η στατική δυσκαμψία για κώνο που αντιστοιχεί σε μετάθεση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$K = \frac{\rho V^2 A_0}{z_0} \quad (3.14)$$

όπου  $V$  ισούται με τη ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων,  $V_s$ , για οριζόντια μετάθεση και με τη ταχύτητα διάδοσης διαμηκών κυμάτων,  $V_p$ , για κατακόρυφη.

Ανάλογα, προσδιορίζεται η στατική δυσκαμψία για κώνο που αντιστοιχεί σε στροφή και η γενική μορφή της είναι

$$K_g = \frac{3\rho V^2 I_0}{z_0} \quad (3.15)$$

όπου  $I_0$  η ροπή αδράνειας του θεμελίου και  $V$  ισούται με  $V_s$  και  $V_p$  για στρεπτική και λικνιστική κίνηση, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια για κάθε βαθμό ελευθερίας, με εξίσωση της στατικής δυσκαμψίας όπως προσδιορίστηκε παραπάνω με την ακριβή τιμή, προκύπτει ο λόγος  $z_0/r_0$ . Παράδειγμα, για την οριζόντια κίνηση η ακριβής τιμή της στατικής δυσκαμψίας θεμελίου πάνω σε ελαστικό ημίχωρο είναι

$$K = \frac{8Gr_0}{2-\nu} \quad (3.16)$$

Με εξίσωση των Εξ. (3.14) και (3.16), για οποιαδήποτε τιμή του λόγου Poisson, προκύπτει

$$\frac{z_0}{r_0} = \frac{\pi}{8}(2-\nu) \quad (3.17)$$

Η εξίσωση ισορροπίας για το δυναμικό πρόβλημα της κατακόρυφης φόρτισης κυκλικού θεμελίου γράφεται

$$-N(z,t) + N(z,t) + \frac{\partial N(z,t)}{\partial z} dz - \rho A(z) dz \ddot{u}(z,t) = 0 \quad (3.18)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης δύναμης-μετατόπισης

$$N(z,t) = \rho V_p^2 A(z) \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \quad (3.19)$$

στην Εξ. (3.18), προκύπτει η εξίσωση κίνησης για το κώνο στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} - \frac{1}{V_s^2} \ddot{u}(z,t) = 0 \quad (3.20)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί σαν εξίσωση μονοδιάστατου κύματος συναρτήσει του όρου  $z u(z,t)$

$$\frac{\partial^2 [zu(z,t)]}{\partial z^2} - \frac{1}{V_s^2} [z\ddot{u}(z,t)] = 0 \quad (3.21)$$

Η λύση για την παραπάνω εξίσωση είναι

$$u(z,t) = \frac{z_0}{z} f\left(t - \frac{z-z_0}{V_p}\right) + \frac{z_0}{z} g\left(t + \frac{z-z_0}{V_p}\right) \quad (3.22)$$

Ο όρος  $z_0/V_s$  εισάγεται στο όρισμα της Εξ. (3.22) ώστε να διασφαλιστεί ότι τη χρονική στιγμή  $t=0$  και για βάθος  $z=z_0$  η τιμή του ορίσματος είναι μηδέν. Οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  αναπαριστούν κύματα που διαδίδονται στη θετική και αρνητική

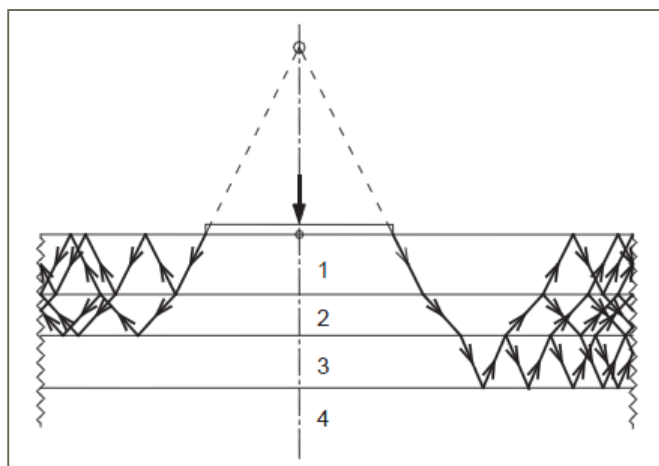
κατεύθυνση, αντίστοιχα, του κατακόρυφου άξονα  $z$ , με σταθερή ταχύτητα  $V_p$ . Σε αντίθεση με τη διάδοση κυμάτων σε πρισματική ράβδο, σε ένα κώνο το σχήμα του κύματος δεν είναι σταθερό αλλά είναι αντιστρόφως ανάλογο του βάθους  $z$ .

Στην περίπτωση που το έδαφος δεν είναι ομοιογενές αλλά στρωματομένο, η διάδοση του κύματος κοντά στο κυκλικό θεμέλιο δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη κάποιας εδαφικής στρώσης διαφορετικών ιδιοτήτων σε κάποιο βάθος, οπότε το κύμα διαδίδεται προς τα κάτω σε ένα αρχικό κώνο. Μόλις το κύμα συναντήσει τη διεπιφάνεια δύο στρωμάτων, τότε δημιουργείται μια πηγή διατάραξης που μπορεί να θεωρηθεί ως ένα φανταστικό θεμέλιο πάνω σε αυτή τη διεπιφάνεια. Το προσπίπτον κύμα  $f$  του αρχικού κώνου οδηγεί σε ένα ανακλώμενο κύμα  $g$  που διαδίδεται προς την επιφάνεια του εδάφους και ένα διαθλώμενο κύμα  $h$  που διαδίδεται προς την αντίθετη κατεύθυνση, και τα δύο απομακρύνονται μακριά από την πηγή (φανταστικό θεμέλιο) σε δικούς τους αρχικούς κώνους. Η ακτίνα του φανταστικού θεμελίου στην διεπιφάνεια είναι  $r = ((z_0 + d)/z_0)r_0$ . Το άνοιγμα του κώνου αυξάνεται στην κατεύθυνση της διάδοσης του κύματος προσομοιώνοντας με αυτό το τρόπο τη διασπορά των κυμάτων στο εδαφικό μέσο. Σε κάθε πακτωμένο ή ελεύθερο σύνορο πάνω στο οποίο προσπίπτει ένα κύμα, το άνοιγμα του κώνου, κατά μήκος του οποίου διαδίδεται το ανακλώμενο κύμα, αυξάνεται. Επομένως, τα κύματα μειώνονται σε πλάτος και η ενέργεια διαδίδεται κατά την οριζόντια διεύθυνση (Σχήμα 3.5).

Σε ένα πολύστρωτο έδαφος, λαμβάνει χώρα ένας μεγάλος αριθμός από ανακλάσεις και διαθλάσεις κυμάτων. Η προκύπτουσα μετακίνηση  $u(z,t)$  ισούται με το άθροισμα της συνεισφοράς στη μετακίνηση όλων των κώνων, δηλαδή οι μετακινήσεις από το αρχικό προσπίπτον κύμα, το ανακλώμενο, το διαθλώμενο καθώς και οι μετακινήσεις που προέρχονται από όλες τις ακόλουθες διαδόσεις κυμάτων. Στην περίπτωση ενός επιφανειακού θεμελίου πάνω σε πολύστρωτο έδαφος, η μετακίνηση  $u(z,t)$  σε βάθος  $z$  και χρόνο  $t$ , εκφράζεται στην ακόλουθη κυματομορφή

$$u(z,t) = \frac{z_0}{z_0 + z} \bar{u}_0 \left( t - \frac{z}{c} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left[ \frac{z_0 \bar{u}_0 \left( t - \frac{2jd}{c} + \frac{z}{c} \right)}{z_0 + 2jd - z} + \frac{z_0 \bar{u}_0 \left( t - \frac{2jd}{c} - \frac{z}{c} \right)}{z_0 + 2jd + z} \right] \quad (3.23)$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος αναφέρεται στο προσπίπτον κύμα, ο δεύτερος όρος δείχνει τη συνεισφορά στη μετακίνηση των κυμάτων που ανακλώνται από το πακτωμένο σύνορο και ο τελευταίος τη συνεισφορά των κυμάτων που ανακλώνται από την ελεύθερη επιφάνεια.



Σχήμα 3.5: Διάδοση-ανάκλαση κυμάτων για κατακόρυφη φόρτιση επιφανειακού θεμελίου σε στρωματομένο έδαφος (Wolf & Deeks, 2004)

Figure 3.5: Downwards and upwards wave propagation in cone segments for surface disk on layered halfspace

Στη συγκεκριμένη εργασία, τα θεμέλια που αναλύονται είναι τετραγωνικά με πλάτος  $B$ . Για την ανάλυση μέσω της μεθόδου του κώνου χρησιμοποιείται μια ισοδύναμη κυκλική ακτίνα. Αυτή μπορεί να υπολογισθεί εξισώνοντας το εμβαδό του πραγματικού τετραγωνικού θεμελίου με το εμβαδό ενός κυκλικού, για τους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας, ή με εξίσωση των ροπών αδρανείας για τους στρωματικούς.

### 3.3.2 SASSI

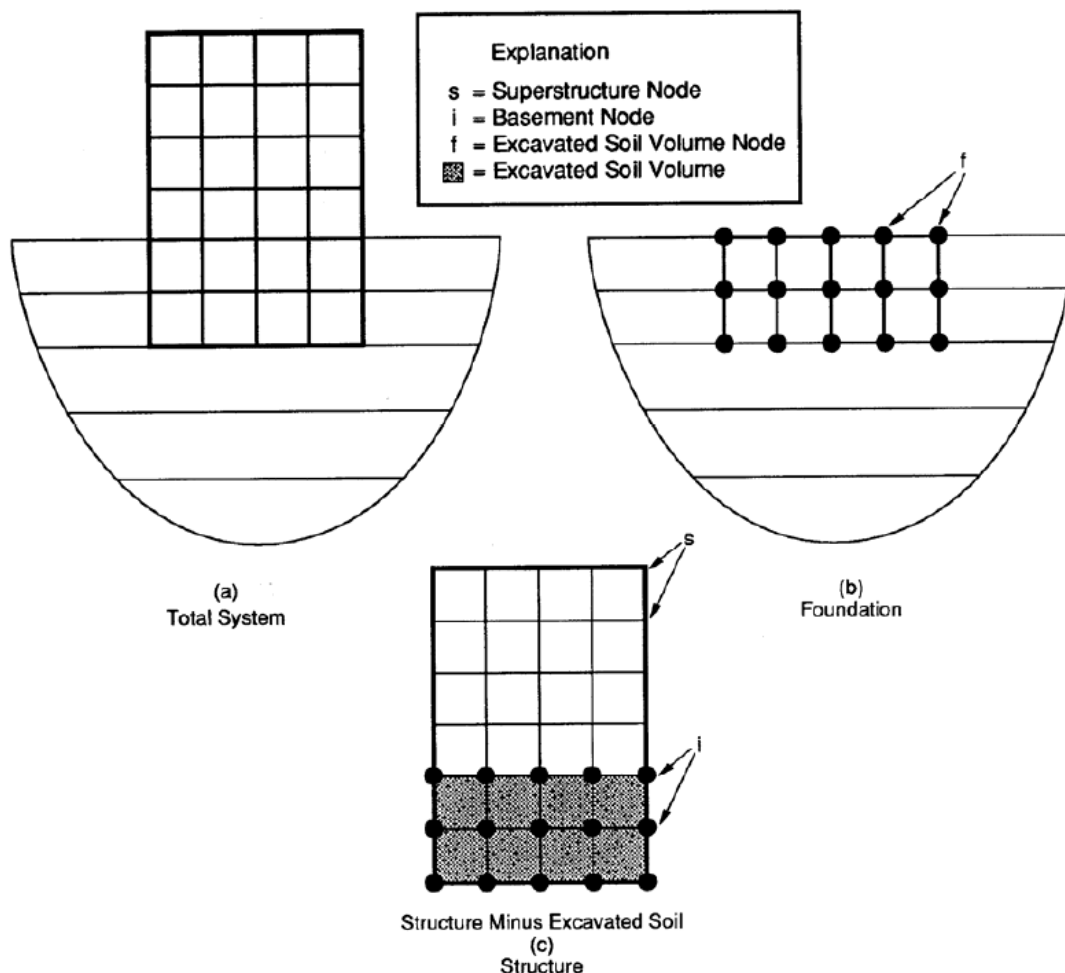
Το πρόγραμμα αναπτύχθηκε από μια ομάδα ερευνητών του πανεπιστημίου του Berkeley με πρωτεργάτες τους Lysmer et al. (1999). Ο συγκεκριμένος κώδικας λειτουργεί με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και παρέχει τη δυνατότητα ανάλυσης επιφανειακών και βαθιών θεμελιώσεων. Επίσης είναι δυνατό να προσομοιωθεί η κατασκευή με την υποκείμενη θεμελίωση καθώς και το εδαφικό περιβάλλον. Στην ανάλυση δυναμικής δυσκαμψίας λαμβάνεται υπόψη η αλληλεπίδραση εδάφους – κατασκευής, καθώς το πρόγραμμα επιδέχεται την εισαγωγή κόμβων αλληλεπίδρασης.

Οι βασικές μέθοδοι ανάλυσης είναι δύο: η μέθοδος εύκαμπτου όγκου/*flexible volume* και η μέθοδος της αφαίρεσης/*subtraction method*. Η ανάλυση και με τις δύο μεθόδους γίνεται στο πεδίο της συχνότητας με χρήση της μεθόδου μιγαδικής απόκρισης και της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

#### Μέθοδος εύκαμπτου όγκου / *flexible volume*

Στη μέθοδο εύκαμπτου όγκου, το σύστημα εδάφους-κατασκευής (Σχήμα 3.6α) διαχωρίζεται σε δύο υποδομές, τη θεμελίωση και την κατασκευή όπως φαίνεται στα

Σχήματα 3.6β και 3.6γ, αντίστοιχα. Η κατασκευή αποτελείται από το τμήμα της ανωδομής και από το εμπεδωμένο στο έδαφος τμήμα με αφαίρεση του εδάφους εκσκαφής. Στην ανάλυση το υπόγειο τμήμα της κατασκευής θεωρείται ως εκσκαπτόμενο έδαφος με τις ιδιότητες της θεμελίωσης. Σε αυτή τη μέθοδο ανάλυσης, όλοι οι κόμβοι που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια του εδάφους είναι κόμβοι αλληλεπίδρασης.



Σχήμα 3.6: Μέθοδος flexible volume

Figure 3.6: Method of flexible volume

Οι εξισώσεις κίνησης για τη μέθοδο του εύκαμπτου όγκου αναπτύσσονται με συνδυασμό της εξίσωσης κίνησης για την κατασκευή με αυτή για το έδαφος στο πεδίο της συχνότητας, βάσει του διαχωρισμού που περιγράφηκε παραπάνω, οπότε προκύπτει

$$\begin{bmatrix} C_{ss} & C_{si} \\ C_{is} & (C_{ii} - C_{ff} + X_{ff}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u'_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_{ff} u'_f \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προσδιορίζονται οι τελικές μετακινήσεις της κατασκευής. Οι δείκτες  $s$ ,  $i$  και  $f$  αναφέρονται στους βαθμούς ελευθερίας που

σχετίζονται με την ανωδομή, το υπόγειο και το έδαφος εκσκαφής, αντίστοιχα.  $C$  είναι το μητρώο δυσκαμψίας που εξαρτάται από τη συχνότητα

$$C(\omega) = K - \omega^2 M \quad (3.25)$$

όπου  $M$  και  $K$  είναι τα μητρώα μάζας και μιγαδικής δυσκαμψίας, αντίστοιχα.  $\omega$  είναι η συχνότητα διέγερσης,  $u$  είναι το διάνυσμα της μιγαδικής μετακίνησης των κόμβων,  $X_{ff}$  είναι το εξαρτόμενο από τη συχνότητα μητρώο που αναπαριστά τη δυναμική δυσκαμψία της θεμελίωσης στους κόμβους αλληλεπίδρασης.

Η Εξίσωση 3.24 λαμβάνει υπόψη μόνο σεισμικές δυνάμεις. Εξωτερικά φορτία, που επιβάλλονται στην ανωδομή ή/και στους κόμβους του εμπεδωμένου τμήματος της κατασκευής, προστίθενται στο διάνυσμα των δυνάμεων (δεξιό μέρος της Εξ. 3.24) για κάθε συχνότητα. Επομένως οι τελικές μετακινήσεις της κατασκευής λαμβάνονται από

$$\begin{bmatrix} C_{ss} & C_{si} \\ C_{is} & (C_{ii} - C_{ff} + X_{ff}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s \\ U_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_s \\ P_f \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

όπου  $P_s$  και  $P_f$  είναι οι εξωτερικές φορτίσεις της ανωδομής και των κόμβων του εμπεδωμένου τμήματος, αντίστοιχα.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σχολιαστεί ότι η μέθοδος αφαίρεσης/*subtraction method* βασίζεται στο ίδιο σκεπτικό με τη μέθοδο εύκαμπτου όγκου/*flexible volume*, αναφορικά με το διαχωρισμό του συστήματος εδάφους-κατασκευής σε τμήματα που αναλύονται ξεχωριστά και στη συνέχεια συντίθενται με βάση την αρχή της επαλληλίας. Η διαφορά των δύο μεθόδων έγκειται στη διαφορετική θεώρηση για τους κόμβους αλληλεπίδρασης. Στη μέθοδο της αφαίρεσης υποτίθεται ότι αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής συμβαίνει μόνο στο κοινό σύνορο των επιμέρους τμημάτων, δηλαδή στο σύνορο μεταξύ θεμελίωσης και εδάφους. Η θεώρηση αυτή οδηγεί σε μικρότερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τη μέθοδο εύκαμπτου όγκου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η λύση του προβλήματος αλληλεπίδρασης εδάφους-κατασκευής αναπτύσσεται σε τρία βήματα (για κάθε συχνότητα):

- Προσδιορισμός της κίνησης του ελεύθερου πεδίου  $U_f$  μέσα στο εμπεδωμένο τμήμα της κατασκευής
- Προσδιορισμός του μητρώου δυναμικής δυσκαμψίας της θεμελίωσης  $X_{ff}$
- Προσδιορισμός των μιγαδικών μητρώων δυσκαμψίας και δυνάμεων (Εξ. 3.24 και 3.26)
- Επίλυση των Εξ. (3.24) και (3.26) για τον προσδιορισμό των τελικών μετακινήσεων της κατασκευής



### Ανάλυση απόκρισης πεδίου

Το έδαφος αποτελείται από οριζόντιες εδαφικές στρώσεις με ιξωδοελαστική συμπεριφορά, κάτω από τις οποίες θεωρείται ελαστικός ημίχωρος. Η δυσκαμψία και η απόσβεση κάθε στρώσης προσδιορίζονται με χρήση της ισοδύναμης γραμμικής μεθόδου. Επίσης υπάρχουν διάφορες μέθοδοι υπολογισμού της απόκρισης του πεδίου που αντιστοιχεί σε κεκλιμένα κύματα χώρου και σε επιφανειακά κύματα.

Για την ανάλυση είναι σημαντική η απόκριση του ελεύθερου πεδίου στις διεπιφάνειες μεταξύ των εδαφικών στρώσεων και της κατασκευής. Συνεπώς, για οποιοδήποτε τύπο σεισμικού κύματος, η μετακίνηση εκφράζεται στη μορφή

$$u'_f(x) = U'_f \exp[i(\omega t - kx)] \quad (3.27)$$

όπου  $U'_f$  είναι το διάνυσμα ιδιομορφών που περιέχει τις μετακινήσεις της διεπιφάνειας στο σημείο ελέγχου και κάτω από αυτό ( $x=0$ ) και  $k$  ο μιγαδικός κυματικός αριθμός που εκφράζει πόσο γρήγορα το κύμα διαδίδεται και εξασθενεί στην οριζόντια διεύθυνση  $x$ . Έχουν αναπτυχθεί αποτελεσματικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό των κατάλληλων ιδιομορφών και κυματικών αριθμών που αντιστοιχούν στην κίνηση του σημείου ελέγχου σε οποιαδήποτε διεπιφάνεια αυτό βρίσκεται, και για οποιοδήποτε τύπο κύματος, κεκλιμένα  $P$ -,  $SV$ - και  $SH$ -κύματα, κύματα Rayleigh και Love. Επίσης μπορεί να εφαρμοστεί οποιοσδήποτε συνδυασμός κυμάτων.

### Ανάλυση δυσκαμψίας

Όπως προαναφέρθηκε, το μητρώο δυσκαμψίας αναπαριστά τη δυναμική δυσκαμψία της θεμελίωσης στους κόμβους αλληλεπίδρασης και προσδιορίζεται με αντιστροφή του δυναμικού μητρώου ευκαμψίας  $F_{ff}$  για τους συγκεκριμένους κόμβους

$$X_{ff} = F_{ff}^{-1} \quad (3.28)$$

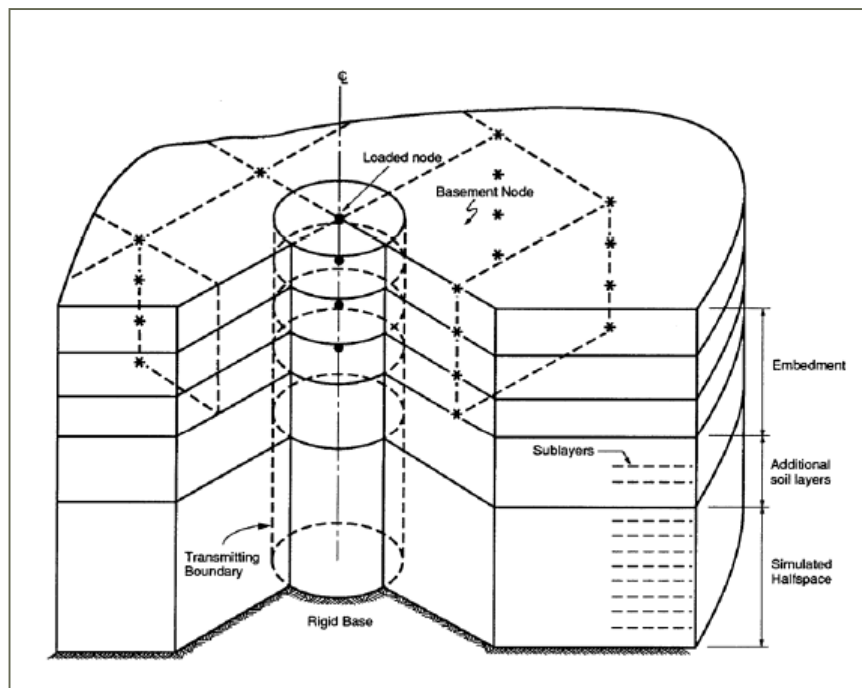
όπου  $F_{ff}$  είναι ένα συμμετρικό μιγαδικό μητρώο. Αυτή η μέθοδος υπολογισμού του μητρώου δυσκαμψίας καλείται *άμεση μέθοδος/direct method*. Το πρόγραμμα επιτρέπει τη χρήση ακόμα δύο μεθόδων, *skin method* και *subtraction method*.

### Ανάλυση κατασκευής

Η ανωδομή και η υπόγεια κατασκευή χωρίς το εκσκαπτόμενο έδαφος αναλύονται σε δύο ή τρεις διαστάσεις με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

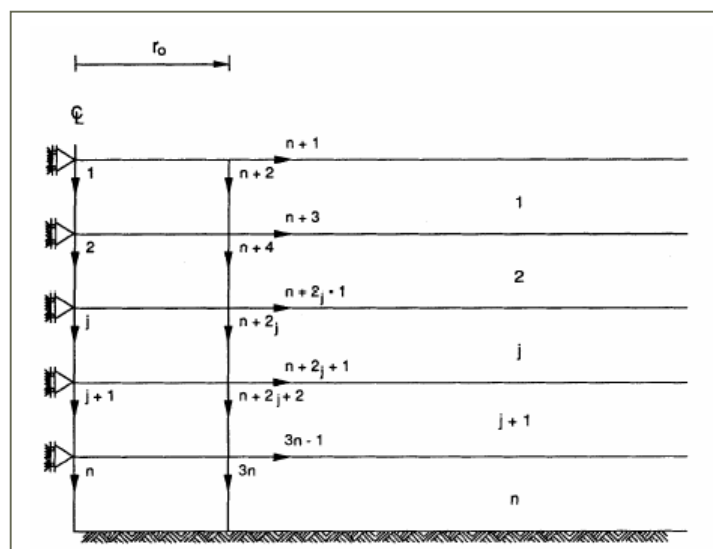
Τέλος, η επίλυση των Εξ. (3.24) και (3.26) παρέχει τη δυναμική απόκριση του συστήματος.

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνεται ένα τυπικό αξονοσυμμετρικό προσομοίωμα του προγράμματος και οι παραδοχές που γίνονται αναφορικά με τις συνοριακές συνθήκες του μοντέλου.



Σχήμα 3.6: Αξονοσυμμετρικό προσομοίωμα

Figure 3.6: Axisymmetric model



Σχήμα 3.7: Συνοριακές συνθήκες για κατακόρυφη ταλάντωση

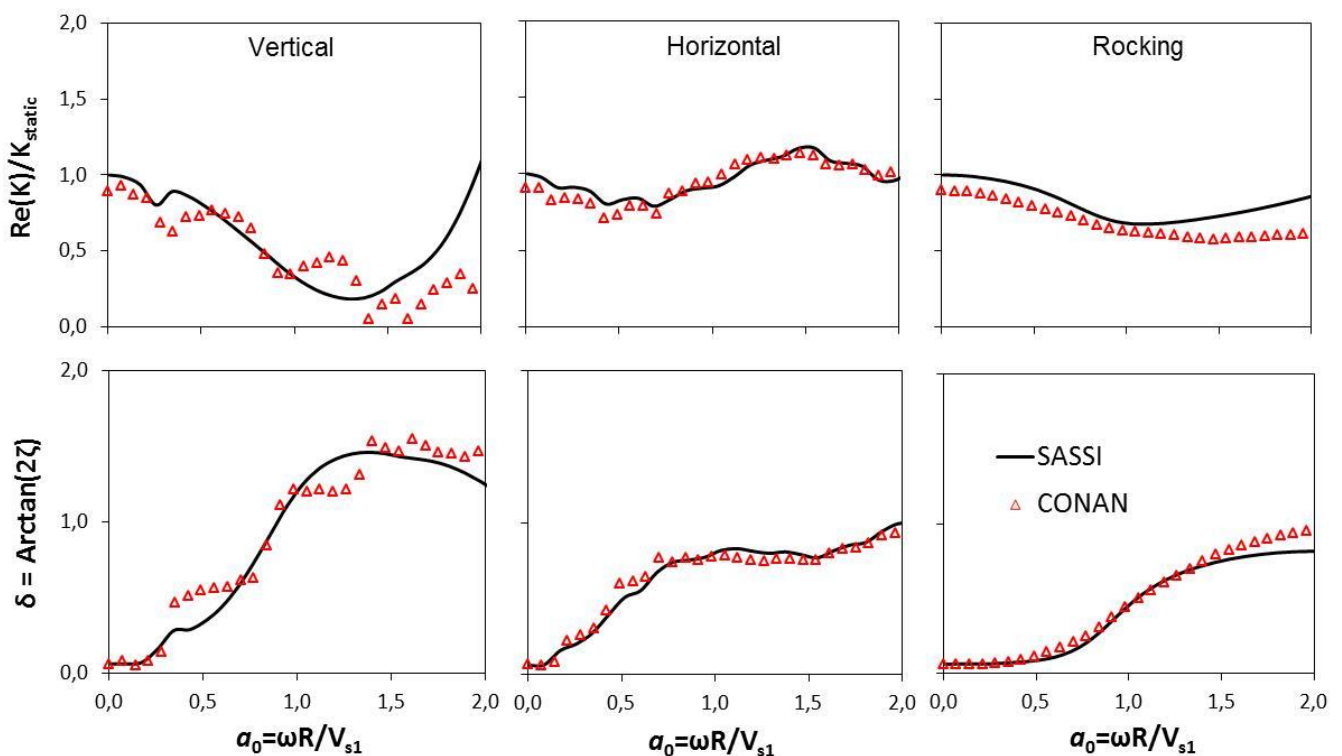
Figure 3.7: Boundary conditions for vertical vibration

### 3.3.3 Συγκριτικά αποτελέσματα 3D ανάλυσης

Στη συνέχεια εξετάζεται η δυναμική απόκριση ενός τετραγωνικού επιφανειακού θεμελίου πλάτους  $B = 6.2 \text{ m}$ , που εδράζεται πάνω σε τρίστρωτη στρωματογραφία έτσι

όπως περιγράφηκε στην Ενότητα 3.1. Τα πάχη των εδαφικών στρώσεων είναι:  $h_1 = h_2 = 3.5m$  και  $h_3 = 35m$ . Το θεμέλιο αναλύεται για τις τρεις μορφές ταλάντωσης (οριζόντια, κατακόρυφη και λικνισμό) και με τους δύο κώδικες. Για την ανάλυση μέσω τη μεθόδου του κώνου απαιτείται η εύρεση μιας ισοδύναμης κυκλικής ακτίνας, όπως σχολιάστηκε προηγούμενα. Η ακτίνα υπολογίζεται ίση με  $R=3.5m$ , για μεταφορική κίνηση και  $R=3.57m$  για λικνισμό.

Τα αποτελέσματα για τη δυναμική δυσκαμψία παρουσιάζονται σε αδιάστατη μορφή και κανονικοποιημένα ως προς τη στατική τιμή που δίνει το SASSI ενώ για την απόσβεση υιοθετείται μια εναλλακτική κανονικοποίηση (γωνία φάσης). Παρατηρούμε πολύ καλή συμφωνία των λύσεων για όλες τις μορφές ταλάντωσης και ιδιαίτερα για την πλευρική μετάθεση.



Σχήμα 3.8: Σύγκριση αποτελεσμάτων δυναμικής δυσκαμψίας από αριθμητική ανάλυση με χρήση των προγραμμάτων SASSI και CONAN

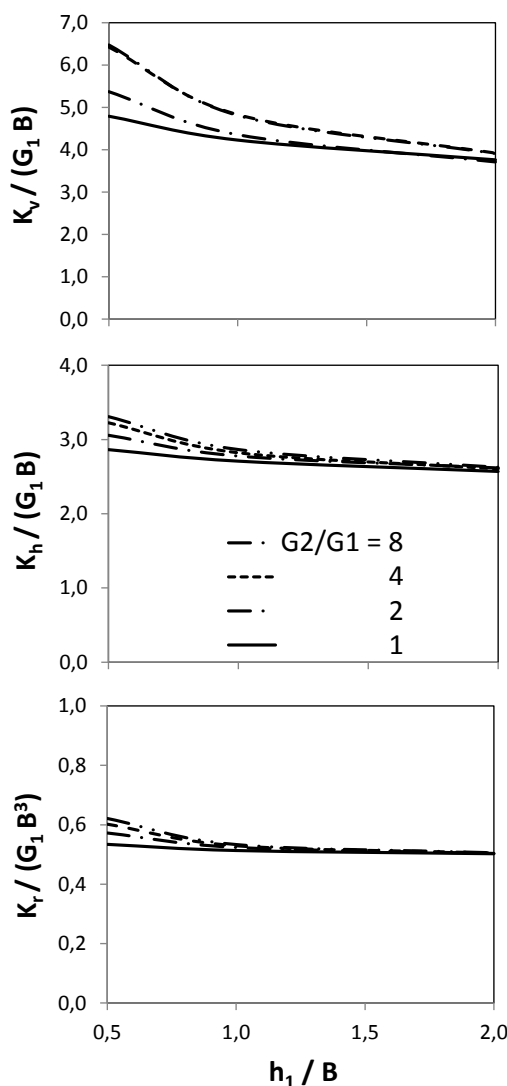
Figure 3.8: Numerical results for dynamic stiffness – SASSI versus CONAN

### 3.4 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα αριθμητικών αναλύσεων για τη στατική και τη δυναμική στιφρότητα τετραγωνικού και επιφανειακού θεμελίου. Το θεμέλιο θεωρείται άκαμπτο και αβαρές. Για κάθε περίπτωση εδαφικού προφίλ γίνονται δύο αναλύσεις, η πρώτη αφορά τη δυναμική δυσκαμψία πριν τη ρευστοποίηση της άμμου και η δεύτερη τη δυναμική δυσκαμψία κατά τη διάρκεια της ρευστοποίησης. Η ανάλυση βασίζεται κυρίως στη μέθοδο κώνου και το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται για λόγους σύγκρισης.

#### 3.4.1 Αποτελέσματα για στατική στιφρότητα

Όπως προαναφέρθηκε, κατά τη διάρκεια της ρευστοποίησης η τιμή της ταχύτητας διάδοσης διατμητικών κυμάτων,  $V_s$ , στο εδαφικό στρώμα μειώνεται δραματικά το οποίο συνεπάγεται μείωση του μέτρου διάτμησης του εδάφους. Στο Σχήμα 3.9 φαίνεται η επίδραση της μείωσης του μέτρου διάτμησης του ρευστοποιήσιμου αμμώδους στρώματος στη στατική στιφρότητα, για όλες τις μορφές ταλάντωσης, όταν οι υπόλοιπες παράμετροι του προβλήματος παραμένουν σταθερές. Οι παράμετροι του προβλήματος ορίστηκαν στην Ενότητα 3.1 και τα αποτελέσματα των διαγραμμάτων προέκυψαν για τετραγωνικό θεμέλιο πλάτους  $B = 7m$  (ισοδύναμη κυκλική ακτίνα  $R = 3.95m$ ),  $h_2/B = 0.5$ ,  $h_3/B = 13$ ,  $G_1 = 20 MPa$  και  $G_3 = 180 MPa$ . Η στατική στιφρότητα μεταβάλλεται με το πάχος της μη ρευστοποιήσιμης κρούστας.



Σχήμα 3.9: Μεταβολή της στατικής στιφρότητας με το πάχος της μη ρευστοποιήσιμης κρούστας για διάφορους λόγους στιφροτήτων

Figure 3.9: Variation of static stiffness with the thickness of non-liquefiable surface crust for various stiffness ratios  $G_2/G_1$

Για δεδομένο πάχος μη ρευστοποιήσιμης επιφανειακής στρώσης, παρατηρούμε ότι η αύξηση του λόγου στιφροτήτων  $G_2/G_1$  επιφέρει αύξηση στη στατική τιμή της στιφρότητας του θεμελίου, με τη μεταβολή αυτή να είναι ιδιαίτερα σημαντική για κατακόρυφη μετάθεση. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι η στατική στιφρότητα παραμένει ουσιαστικά αμετάβλητη για μεγάλο πάχος επιφανειακής μη ρευστοποιήσιμης στρώσης (βολβός τάσεων και βάθος επιρροής) και ανεξάρτητη από το λόγο στιφροτήτων.

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται συνολικά τα αποτελέσματα των αναλύσεων για τη στατική τιμή της στιφρότητας. Οι τιμές είναι σε αδιάστατη μορφή, κανονικοποιημένες με το μέτρο διάτμησης της μη ρευστοποιήσιμης κρούστας και το πλάτος του θεμελίου.

**Πίνακας 3.2: Αδιάστατες τιμές στατικής στιφρότητας****Table 3.2: Non-dimensional values for static stiffness**

| Κ <sub>i</sub> / (G × B <sup>m</sup> ) |     |                                   |      |                     |      |                         |      |                     |      |                         |      |                     |      |
|----------------------------------------|-----|-----------------------------------|------|---------------------|------|-------------------------|------|---------------------|------|-------------------------|------|---------------------|------|
| h1 / B    h2 / B                       |     | Κατακόρυφη (m = 1)                |      |                     |      | Οριζόντια (m = 1)       |      |                     |      | Λικνισμός (m = 3)       |      |                     |      |
|                                        |     | Πριν τη<br>ρευστοποίηση           |      | Κατά τη<br>διάρκεια |      | Πριν τη<br>ρευστοποίηση |      | Κατά τη<br>διάρκεια |      | Πριν τη<br>ρευστοποίηση |      | Κατά τη<br>διάρκεια |      |
|                                        |     |                                   |      |                     |      |                         |      |                     |      |                         |      |                     |      |
|                                        |     | V <sub>s1</sub> / V <sub>s2</sub> |      |                     |      |                         |      |                     |      |                         |      |                     |      |
|                                        |     | 0.67                              | 1.67 | 4                   | 10   | 0.67                    | 1.67 | 4                   | 10   | 0.67                    | 1.67 | 4                   | 10   |
| 0.5                                    | 0.5 | 6.32                              | 2.97 | 1.75                | 1.0  | 3.08                    | 2.26 | 1.67                | 1.31 | 0.59                    | 0.46 | 0.39                | 0.34 |
|                                        | 1   | 5.95                              | 2.65 | 1.52                | 0.88 | 3.02                    | 2.17 | 1.39                | 1.18 | 0.58                    | 0.45 | 0.37                | 0.33 |
|                                        | 2   | 5.63                              | 2.38 | 1.25                | 0.78 | 2.95                    | 2.06 | 1.27                | 1.08 | 0.58                    | 0.44 | 0.36                | 0.33 |
| 1                                      | 0.5 | 4.90                              | 3.11 | 2.39                | 1.56 | 2.80                    | 2.39 | 1.74                | 1.77 | 0.53                    | 0.49 | 0.46                | 0.44 |
|                                        | 1   | 4.80                              | 2.87 | 1.98                | 1.41 | 2.75                    | 2.32 | 1.66                | 1.64 | 0.52                    | 0.48 | 0.45                | 0.44 |
|                                        | 2   | 4.58                              | 2.66 | 1.70                | 1.25 | 2.71                    | 2.27 | 1.58                | 1.53 | 0.52                    | 0.48 | 0.45                | 0.44 |
| 2                                      | 0.5 | 4.10                              | 3.18 | 2.45                | 2.30 | 2.61                    | 2.44 | 1.85                | 2.10 | 0.50                    | 0.50 | 0.49                | 0.48 |
|                                        | 1   | 4.13                              | 3.05 | 2.34                | 2.08 | 2.60                    | 2.42 | 1.82                | 2.02 | 0.50                    | 0.49 | 0.49                | 0.48 |
|                                        | 2   | 3.96                              | 2.88 | 2.22                | 1.85 | 2.54                    | 2.37 | 1.97                | 1.92 | 0.50                    | 0.49 | 0.49                | 0.48 |

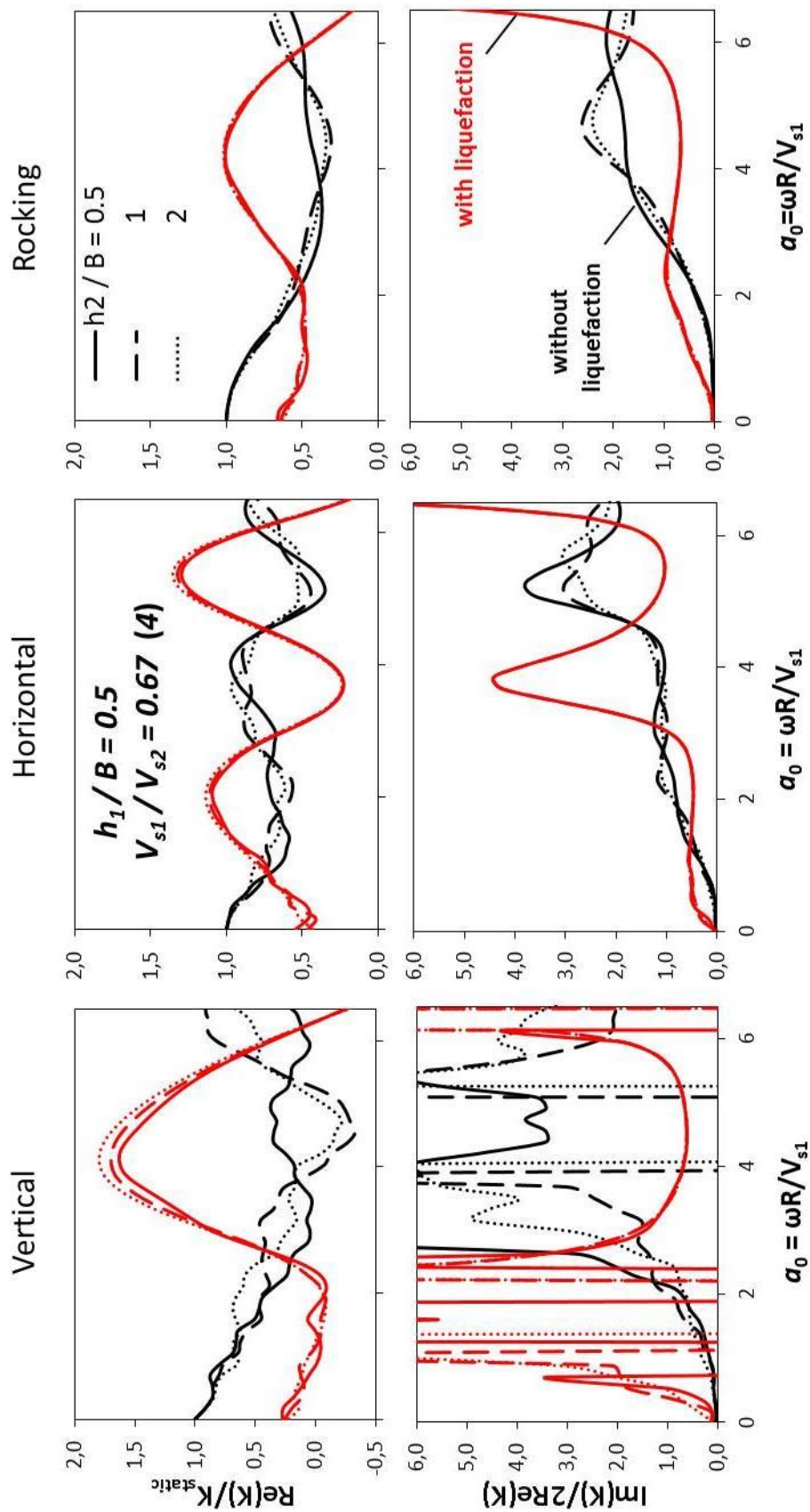
### 3.4.2 Αποτελέσματα για δυναμική δυσκαμψία

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα για τη δυναμική δυσκαμψία θεμελίου (ή σταθερές εμπέδησης) με τη μορφή αδιάστατων διαγραμμάτων. Το πραγματικό μέρος της δυναμικής δυσκαμψίας είναι κανονικοποιημένο με τη στατική τιμή και το φανταστικό με δύο φορές το αντίστοιχο πραγματικό, που ορίζεται ως ο λόγος απόσβεσης. Όπως προαναφέρθηκε, ο οριζόντιος άξονας είναι κανονικοποιημένος με την ισοδύναμη κυκλική ακτίνα και τη ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος της κρούστας, η συχνότητα φτάνει μέχρι  $f = 28 \text{ Hz}$ .

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι για οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση, το πάχος της ρευστοποιημένης ζώνης ( $h_2/B$ ) και η αντίστοιχη ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος ( $V_{sliq}/V_{s0}$ ) δεν επιδρούν σημαντικά στη δυναμική δυσκαμψία. Επίσης για λόγο πάχους αργιλικής κρούστας προς πλάτος θεμελίου  $h_1/B \geq 1$  ούτε η ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος ούτε το πάχος της επιφανειακής κρούστας επιδρούν σημαντικά. Επιπρόσθετα, οι συναρτήσεις εμπέδησης είναι ομαλές, χωρίς μηδενισμούς του πραγματικού μέρους και απειρισμούς του φανταστικού μέχρι τουλάχιστον την αδιάστατη συχνότητα  $\alpha_0 = 2\pi f R/V_{s1} = 8$ .

Αναφορικά με την κατακόρυφη ταλάντωση, η μείωση του λόγου  $h_1/B$  κάτω από 1 οδηγεί σε ασταθείς λύσεις, με απειρισμούς του συντελεστή απόσβεσης. Επίσης η στιφρότητα της ρευστοποιημένης στρώσης (λόγος  $V_{sliq}/V_{s0}$ ) φαίνεται να επιδρά σημαντικά. Οι συναρτήσεις εμπέδησης δεν είναι ομαλές για το μεγαλύτερο εύρος

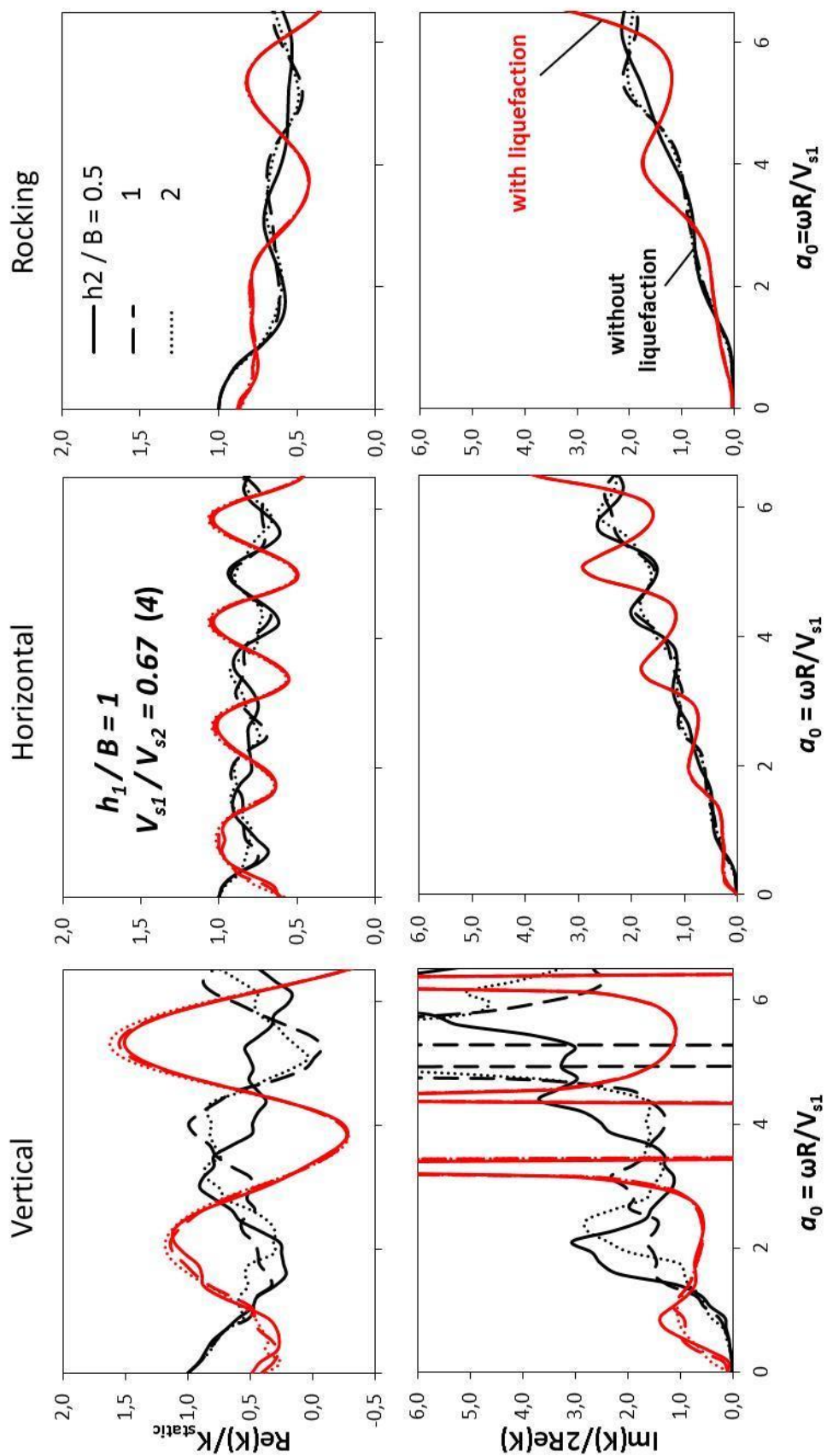
συχνοτήτων και απαιτείται εναλλακτική κανονικοποίηση. Τέλος, ο λόγος στιφρότητας  $V_{s1}/V_{s2}$  μάλλον επιδρά σημαντικά στις συναρτήσεις εμπέδησης.



Σχήμα 3.10. Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ χωρίς και με ρευστοποίηση για κατακόρυφη, οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση. Αποτελέσματα αριθμητικής προσομοίωσης τύπου κώνου για  $h_1/B=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (χωρίς ρευστοποίηση) και  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (με ρευστοποίηση).

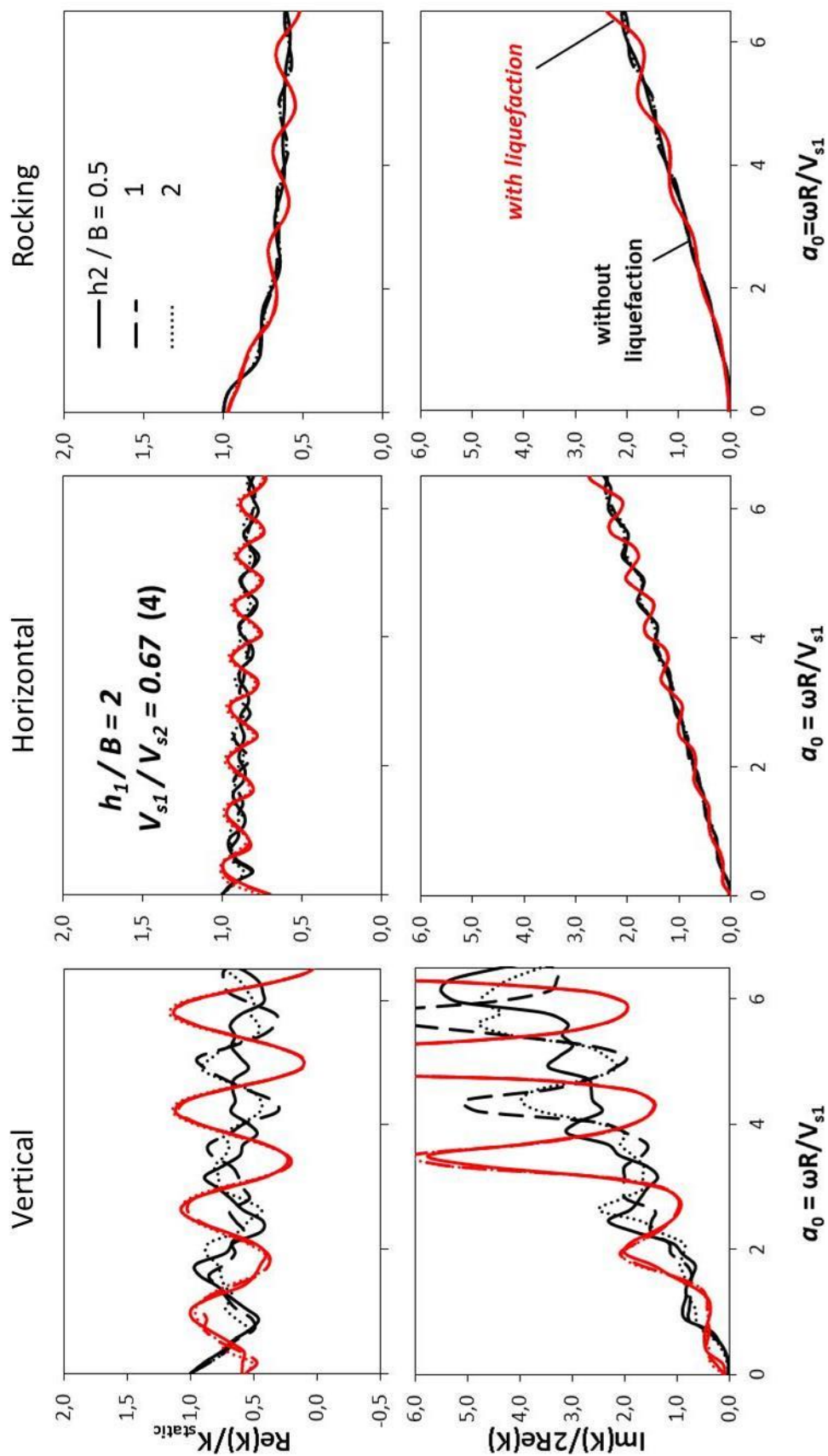
Figure 3.10. Dynamic Impedance of square footing on 3-layered soil-profile with or without liquefaction for vertical, horizontal and rocking mode. CONAN results:  $h_1/B=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (without liquefaction) and  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (with liquefaction).





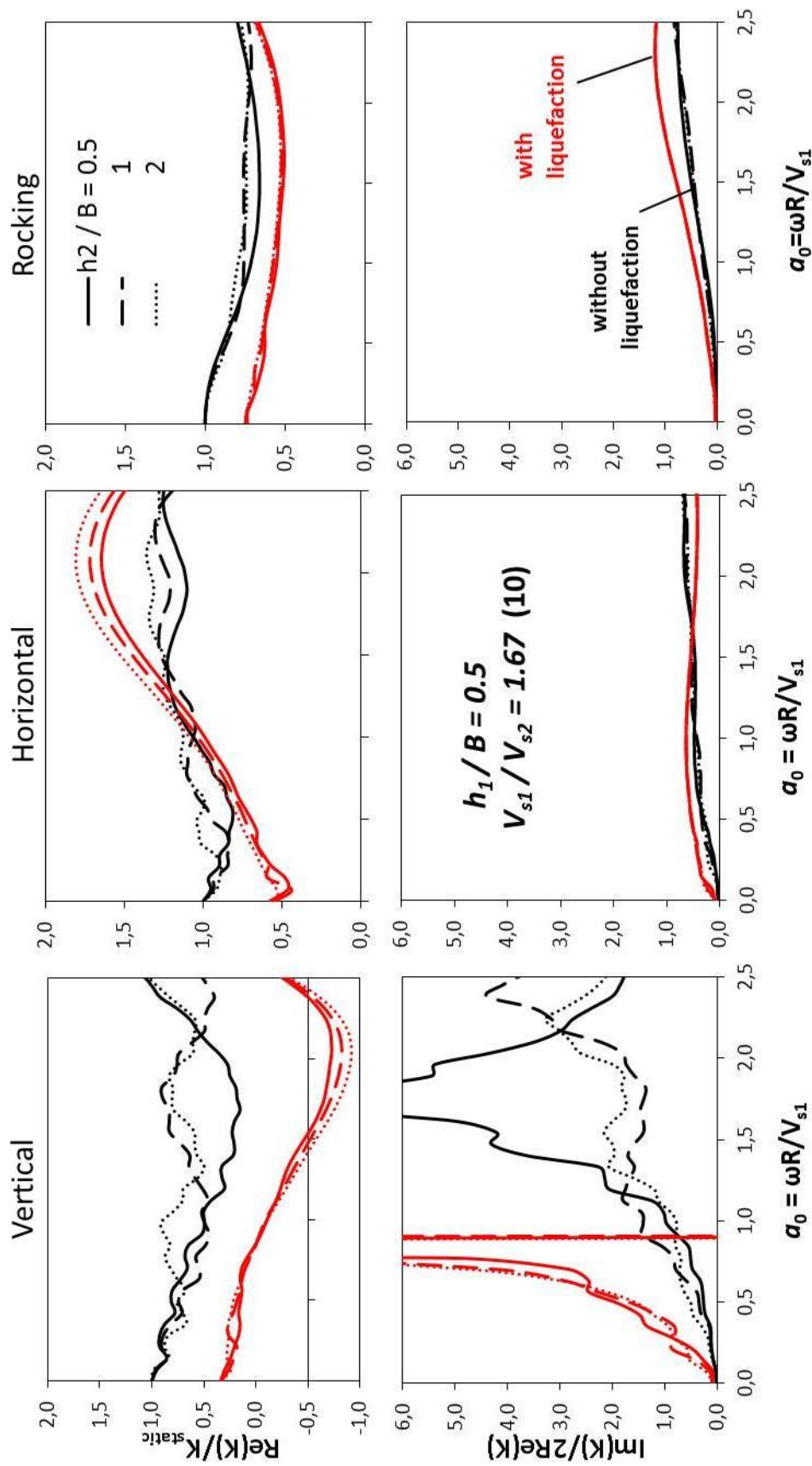
Σχήμα 3.11. Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριών στρωτων εδαφικού προφίλ χωρίς και με ρευστοποίηση για κατακόρυφη, οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση. Αποτελέσματα αριθμητικής προσομοίωσης τύπου κώνων για  $h_1/B=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (χωρίς ρευστοποίηση) και  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (με ρευστοποίηση).

Figure 3.11. Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile with or without liquefaction for vertical, horizontal and rocking mode. CONAN results:  $h_1/B=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (without liquefaction) and  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (with liquefaction).



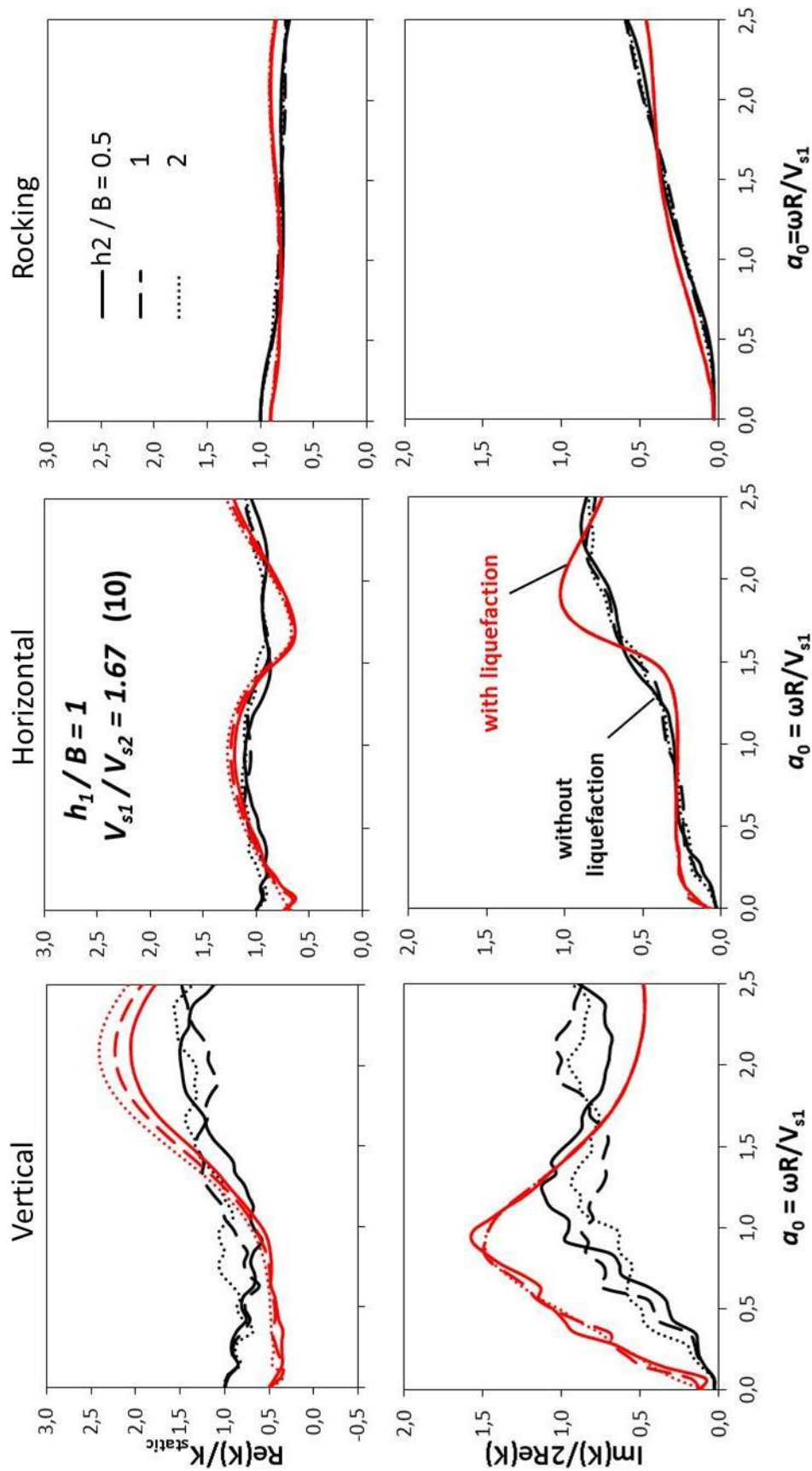
Σχήμα 3.12. Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτον εδαφικού προφίλ χωρίς και με ρευστοποίηση για κατακόρυφη, οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση. Αποτελέσματα αριθμητικής προσομοίωσης τύπου κώνου για  $h_1/B=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (χωρίς ρευστοποίηση) και  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (με ρευστοποίηση).

Figure 3.12. Dynamic Impedance of square footing on 3-layered soil-profile with or without liquefaction for vertical, horizontal and rocking mode. CONAN results:  $h_1/B=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (without liquefaction) and  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (with liquefaction).



Σχήμα 3.13. Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωton εδαφικού προφίλ χωρίς και με ρευστοποίηση για κατακόρυφη, οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση. Αποτελέσματα αριθμητικής προσομοίωσης τύπου κώνου για  $h_1/B=0.5$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (χωρίς ρευστοποίηση) και  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (με ρευστοποίηση).

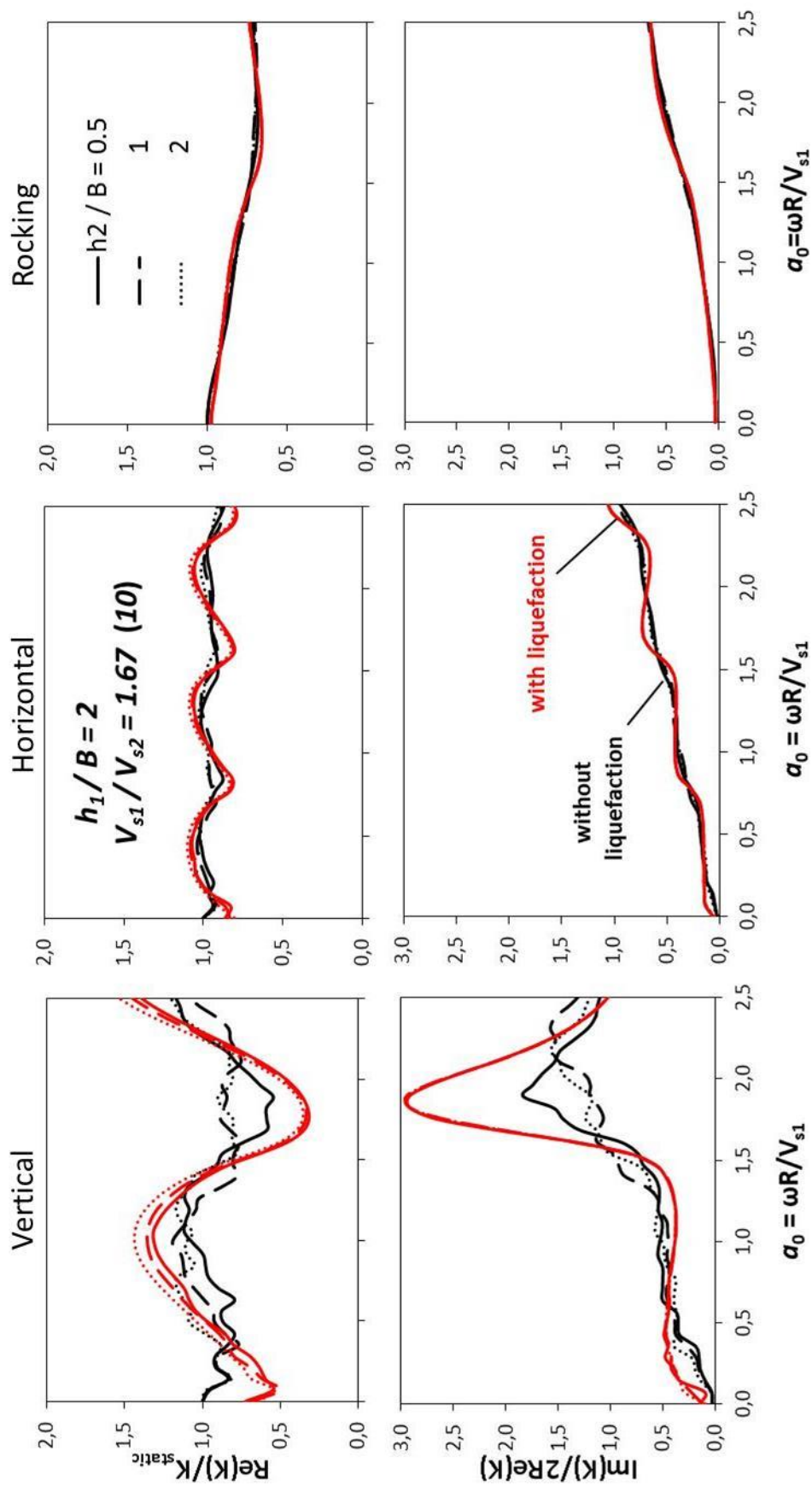
Figure 3.13. Dynamic Impedance of square footing on 3-layered soil-profile with or without liquefaction for vertical, horizontal and rocking mode. CONAN results:  $h_1/B=0.5$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (without liquefaction) and  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (with liquefaction).



Σχήμα 3.14. Συνεργήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωton εδαφικού προφίλ χωρίς και με ρευστοποίηση για κατακόρυφη, οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση. Αποτελέσματα αριθμητικής προσομοίωσης τύπου κώνου για  $h_1/B=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (χωρίς ρευστοποίηση) και  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (με ρευστοποίηση).

Figure 3.14. Dynamic Impedance of square footing on 3-layered soil-profile with or without liquefaction for vertical, horizontal and rocking mode. CONAN results:  $h_1/B=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (without liquefaction) and  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (with liquefaction).





Σχήμα 3.15. Συναρτήσεις δυναμικής εμπίδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ χωρίς και με ρευστοποίηση για κατακόρυφη, οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση. Αποτελέσματα αριθμητικής προσομοίωσης τύπου κώνου για  $h_1/B=2$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (χωρίς ρευστοποίηση) και  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (με ρευστοποίηση).

Figure 3.15. Dynamic Impedance of square footing on 3-layered soil-profile with or without liquefaction for vertical, horizontal and rocking mode. CONAN results:  $h_1/B=2$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$  (without liquefaction) and  $V_{s2}=25\text{m/s}$  (with liquefaction).

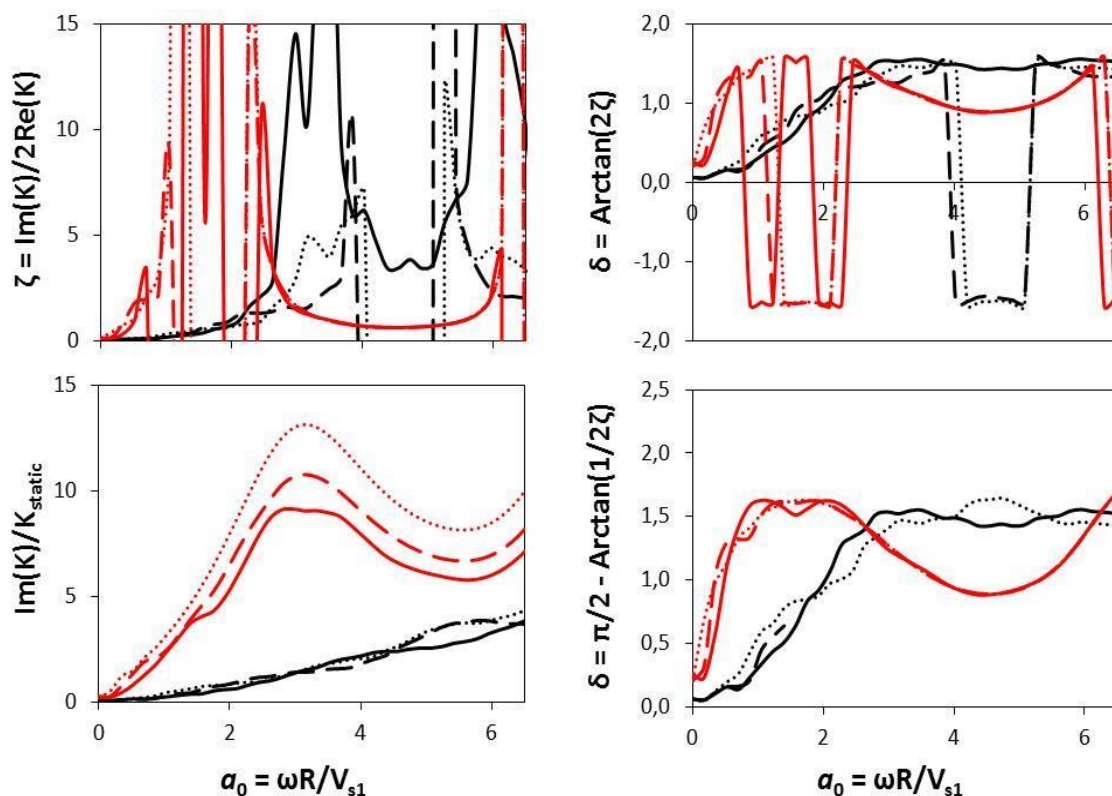
Αξιοπρόσεκτο είναι το γεγονός, ειδικά για την κατακόρυφη συνιστώσα, ότι στα διαγράμματα ο συντελεστής απόσβεσης παρουσιάζει απειρισμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί το πραγματικό μέρος της δυναμικής δυσκαμψίας γίνεται πολύ μικρό ακόμη και αρνητικό. Το αρνητικό πρόσημο στη δυναμική δυσκαμψία υποδηλώνει διαφορά φάσης μεταξύ της διέγερσης και της απόκρισης του θεμελίου μεγαλύτερη των  $90^\circ$ . Σε αυτή την περίπτωση θα ήταν κατάλληλο να εφαρμοστούν άλλες μορφές κανονικοποίησης. Η δυναμική δυσκαμψία μπορεί να γραφεί στις παρακάτω μορφές:

$$K + i\omega C = K + ia_0 C = \text{Re}(K) + i \text{Im}(K) = K(1 + i2\zeta) = K(1 + i \tan \delta) \quad (3.29)$$

όπου

$$\delta = \arctan(2\zeta) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2\zeta}\right) \quad (3.30)$$

Για παράδειγμα, στην περίπτωση που  $V_{s1}=100 \text{ m/s}$  και  $h_1/B=0.5$ , εφαρμόζουμε τις παραπάνω εναλλακτικές κανονικοποιήσεις. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 3.16.

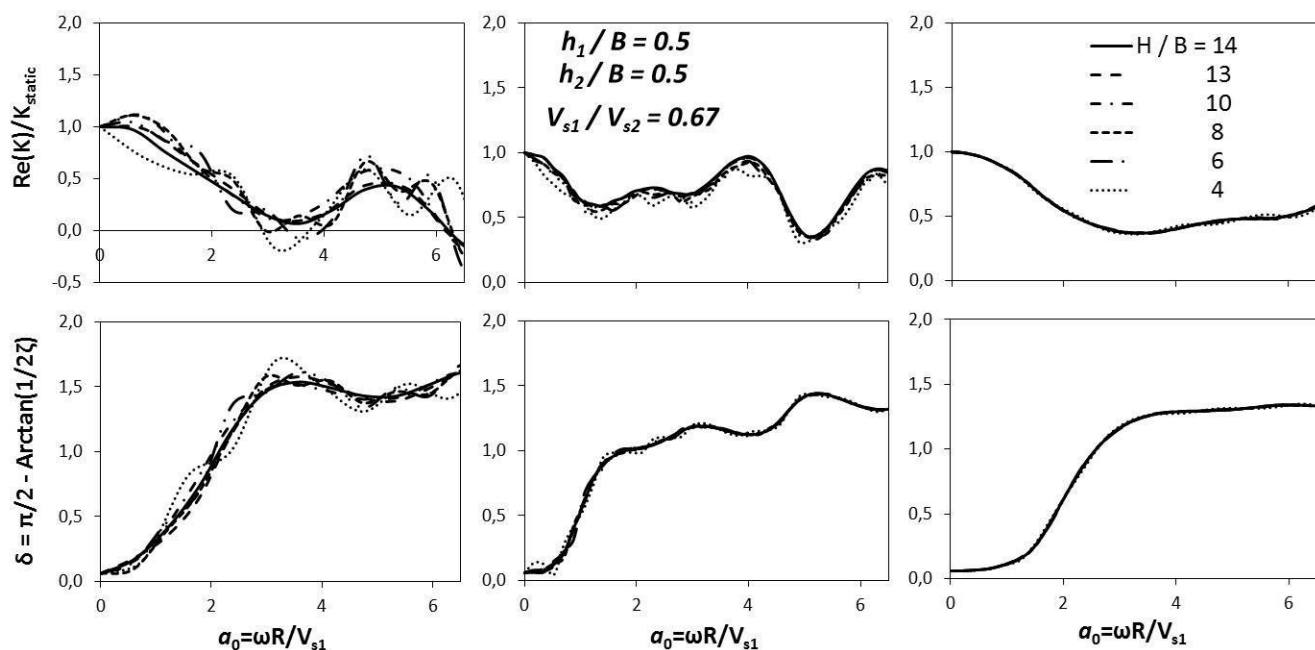


Σχήμα 3.16: Εναλλακτικές μορφές κανονικοποίησης της απόσβεσης

Figure 3.16: Alternative normalization schemes for damping

Τέλος, αξίζει να σχολιαστούν κάποια αποτελέσματα σχετικά με το συνολικό πάχος του εδαφικού προφίλ,  $H/B$ . Η επιλογή του πάχους του εδαφικού προφίλ βασίστηκε

στο προσομοίωμα της εργασίας του Θεοχάρη (2011), στην οποία διερευνάται το φαινόμενο της επίδρασης του πάχους του ρευστοποιήσιμου στρώματος στην απόκριση του εδάφους και ειδικότερα στην απόσβεση της σεισμικής κίνησης στην επιφάνεια του εδάφους λόγω του ρευστοποιήσιμου στρώματος. Στο Σχήμα 3.17 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη διερεύνηση της επίδρασης του συνολικού πάχους του εδαφικού προφίλ στις συναρτήσεις εμπέδησης του θεμελίου. Εδώ, εξετάζεται η περίπτωση ενός τετραγωνικού θεμελίου πλάτους  $B=7\text{m}$  πάνω σε τρίστρωτο έδαφος με συνολικό πάχος  $14 \times B$  (δηλ.  $H=98\text{ m}$ ). Το πάχος του αργιλικού στρώματος είναι ίσο με το πάχος του αμμώδους στρώματος και ισούται με  $h_1=h_2=3.5\text{ m}$ . Οι ταχύτητες διάδοσης διατμητικού κύματος στο πρώτο και στο δεύτερο στρώμα είναι  $V_{s1}=100\text{ m/s}$  και  $V_{s2}=150\text{ m/s}$ , αντίστοιχα. Στην ανάλυση αυτή, τα πάχη των δύο πρώτων στρωμάτων θεωρούνται σταθερά και το συνολικό πάχος του εδαφικού προφίλ μεταβάλλεται, δηλαδή μεταβάλλεται το πάχος του τρίτου στρώματος που βρίσκεται πάνω από το βράχο. Παρατηρούμε ότι το βάθος στο οποίο βρίσκεται το βραχώδες υπόστρωμα δεν επηρεάζει σημαντικά τη δυναμική απόκριση του θεμελίου, ειδικά για οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση, όταν ο λόγος  $H/B$  είναι μεγαλύτερος του 4.



Σχήμα 3.17: Επίδραση συνολικού πάχους προφίλ στις συναρτήσεις εμπέδησης του θεμελίου για  $h_1/B=0.5$ ,  $h_2/B=0.5$ ,  $V_{s1}/V_{s2}=0.67$ .

Figure 3.17: Effect on dynamic impedance of total profile thickness for  $h_1/B=0.5$ ,  $h_2/B=0.5$ ,  $V_{s1}/V_{s2}=0.67$ .

### 3.5 Συμπεράσματα

Από την παραπάνω αριθμητική ανάλυση προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τη δυναμική στιφρότητα επιφανειακού θεμελίου επί ρευστοποιήσιμης εδαφικής στρώσης.

Σε οριζόντιες και λικνιστικές ταλαντώσεις

- Το πάχος της ρευστοποιημένης ζώνης ( $h_2/B$ ) και η αντίστοιχη ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος ( $V_{slq}/V_{s0}$ ) δεν επιδρούν σημαντικά στις σταθερές εμπέδησης
- Για  $h_1/B \geq 1$  ούτε η ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος ούτε το πάχος της επιφανειακής κρούστας επιδρούν σημαντικά στις συναρτήσεις εμπέδησης
- Με δεδομένο το μεγάλο λόγο στιφρότητας,  $V_{s1}/V_{s2}$ , το συνολικό πάχος της εδαφικής στρώσης ( $H/B$ ) είναι ήσσονος σημασίας
- Οι συναρτήσεις εμπέδησης είναι ομαλές, χωρίς μηδενισμούς του πραγματικού μέρους και απειρισμούς του φανταστικού μέχρι τουλάχιστον την αδιάστατη συχνότητα  $\alpha_0 = 2\pi f R/V_{s1} = 8$

Σε κατακόρυφες ταλαντώσεις

- Η μείωση του λόγου  $h_1/B$  κάτω από 1 και του  $H/B$  κάτω από 12 οδηγεί σε ασταθείς λύσεις
- Επίσης η στιφρότητα της ρευστοποιημένης στρώσης (λόγος  $V_{slq}/V_{s0}$ ) είναι σημαντική
- Οι συναρτήσεις εμπέδησης δεν είναι ομαλές για το μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων και απαιτείται εναλλακτική κανονικοποίηση
- Ο λόγος στιφρότητας  $V_{s1}/V_{s2}$  φαίνεται να επιδρά σημαντικά στις συναρτήσεις εμπέδησης

Επίσης παρατηρούμε ότι

- Η επίδραση του λόγου του Poisson στην οριζόντια και λικνιστική ταλάντωση είναι μικρή
- Για μεγάλες τιμές της συχνότητας και αρχικό λόγο  $V_{s1}/V_{s2} = 0.67$  παρατηρούνται μεγάλες τιμές του λόγου απόσβεσης
- Αναφορικά με τις στατικές στιφρότητες μεγαλύτερη μείωση της δυσκαμψίας παρατηρείται για τους λόγους  $h_1/B = 0.5$ ,  $h_2/B = 2$  και  $V_{s1}/V_{s2} = 0.67$ , έως και 70% για κατακόρυφη μετάθεση, 56% για οριζόντια και 36% για λικνισμό
- Τα αποτελέσματα του προγράμματος CONAN βρίσκονται γενικώς σε καλή συμφωνία με τις αυστηρές ελαστοδυναμικές λύσεις του SASSI.



## 4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

### 4.1 Προσέγγιση από το λόγο δύο πολωνύμων

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσονται προσομοιώματα διακριτών παραμέτρων για την προσομοίωση της δυναμικής δυσκαμψίας τετραγωνικού θεμελίου επί ρευστοποιήσιμης εδαφικής στρώσης. Η διαδικασία που ακολουθείται για τη δημιουργία των προσομοιωμάτων περιγράφηκε εκτενώς στο πρώτο κεφάλαιο της τεχνικής έκθεσης. Βάσει της ελαστοδυναμικής ανάλυσης που διεξήχθη στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναπτύσσονται μηχανικά ανάλογα που αποτελούνται από ελατήρια, αποσβεστήρες και μάζες και προσομοιώνουν ικανοποιητικά τις συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τρίστρωτου εδαφικού προφίλ.

Όπως ήδη αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, η προσέγγιση επιτυγχάνεται με προσαρμογή καμπύλης  $\hat{S}_r(ia_0)$  στο ομαλό τμήμα της δυναμικής δυσκαμψίας  $S_r(a_0)$ , κάνοντας χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων με σταθμισμένους συντελεστές. Στο σημείο αυτό, αξίζει να γίνουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Η δυναμική απόκριση του υπό εξέταση προβλήματος πρέπει να περιγράφεται με ακρίβεια από το προσομοίωμα διακριτών παραμέτρων για το εύρος συχνοτήτων που ενδιαφέρει.
- Οι «ακριβείς» τιμές του  $S_r(a_0)$  παρέχονται για ένα ορισμένο εύρος συχνοτήτων,  $a_0 \in [0; a_{0 \max}]$ . Πέραν αυτού του εύρους, το ανώμαλο τμήμα της δυναμικής δυσκαμψίας,  $S_s(a_0)$ , πρέπει να διέπει την απόκριση. Επιπρόσθετα, οι τιμές του  $S_r(a_0)$  είναι γνωστές για ένα πεπερασμένο πλήθος διακριτών τιμών της συχνότητας. Η συνάρτηση  $\hat{S}_r(ia_0)$  θα πρέπει να είναι συνεχής μεταξύ δύο διακριτών τιμών της συχνότητας για τις οποίες είναι γνωστό το  $S_r(a_0)$  και δεν θα πρέπει να εμφανίζονται κορυφές και κοιλάδες πέραν της συχνότητας  $a_0 = a_{0 \max}$ .
- Όπως έχει ήδη τονισθεί στο Κεφάλαιο 2, προκειμένου το σύστημα να είναι ευσταθές στο πεδίο του χρόνου, οι πόλοι του  $\hat{S}_r(ia_0)$  πρέπει να βρίσκονται στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή το πραγματικό μέρος των πόλων να είναι αρνητικό.

Για το σκοπό αυτό, αναπτύχθηκε ένας απλός αλγόριθμος στη Matlab, ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

$$f = \sum_{j=1}^J w(a_{0j}) \left[ \hat{S}_r(ia_{0j}) - S_{rj} \right]^2 \quad (4.1)$$

όπου  $w(a_0)$  είναι συντελεστές βαρύτητας συναρτήσει της αδιάστατης συχνότητας και  $S_{rj}$  είναι οι γνωστές τιμές της δυναμικής δυσκαμψίας για τις διακριτές τιμές της συχνότητας  $a_{0j}$ ,  $j=1,2,\dots,J$ .

Από τη διερεύνηση που έγινε, παρατηρείται ότι για την ακριβή προσέγγιση των συναρτήσεων εμπέδησης ενός θεμελίου επί πολύστρωτου εδάφους ο βαθμός του πολωνύμου του παρονομαστή πρέπει να είναι  $M=3-8$ , όπως φαίνεται στα αποτελέσματα της προσέγγισης που ακολουθούν. Πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού είναι δύσκολο να προσαρμοστούν στις διακριτές τιμές των δεδομένων ενώ πολυώνυμα μικρότερου βαθμού παρέχουν φτωχή προσέγγιση.

Επίσης, για την επιτυχή προσαρμογή καμπύλης στο χαμηλό εύρος συχνοτήτων,  $\alpha_0 < 0.2-2$ , πρέπει οι συντελεστές βαρύτητας,  $w(\alpha_0)$ , της Εξ. (4.1), να έχουν πολύ μεγαλύτερη τιμή συγκριτικά με αυτούς που αντιστοιχούν στο υψηλό εύρος συχνοτήτων. Ο Wolf (1994) προτείνει οι συντελεστές βαρύτητας να κυμαίνονται από  $10^3$  έως  $10^5$  στο χαμηλό εύρος συχνοτήτων και στο υπόλοιπο εύρος να χρησιμοποιείται μοναδιαίος συντελεστής βαρύτητας. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, οι παραπάνω συντελεστές οδηγούν σε καλή προσαρμογή καμπύλης. Εναλλακτικά, ο Andersen (2010) προτείνει για το  $w(\alpha_0)$  μια σχέση της μορφής

$$w(\alpha_0) = \frac{1}{\left[1 + (x_1 \alpha_0)^{x_2}\right]^{x_3}} \quad (4.2)$$

όπου  $x_1$ ,  $x_2$  και  $x_3$  είναι ευρετικές παράμετροι και προσδιορίζονται με αριθμητική διερεύνηση. Για το εύρος συχνοτήτων  $\alpha_0 \in [0; 2]$  προτείνεται  $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ . Γενικά, οι συντελεστές βαρύτητας παίζουν σημαντικό ρόλο στην προσαρμογή καμπύλης και γι' αυτό το λόγο είναι σημαντική η σωστή επιλογή τους.

Στη συνέχεια, εξετάζεται η προσέγγιση της δυναμικής στιφρότητας του θεμελίου, για κάθε εδαφικό προφίλ και για κάθε μορφή ταλάντωσης, από το λόγο δύο πολωνύμων. Ο βαθμός του πολωνύμου στον παρονομαστή κυμαίνεται από 2 έως 8. Οι περισσότερες περιπτώσεις προσομοιώνονται ικανοποιητικά όταν ο βαθμός του πολωνύμου του παρονομαστή είναι 3. Ο συντελεστής βαρύτητας επιλέχθηκε ίσος με  $10^3$  για  $\alpha_0 \in [0; 2]$  και μονάδα για τις υπόλοιπες αδιάστατες συχνότητες. Επίσης, οι διατάξεις ελατηρίων και αποσβεστήρων, που προκύπτουν έτσι όπως περιγράφεται στην Ενότητα 2.2, είναι συνήθως συνδυασμός μηχανικών αναλόγων πρώτης και δεύτερης τάξης, και περιλαμβάνουν 1 ως 3 εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας.

Τα αποτελέσματα της ελαστοδυναμικής ανάλυσης που παρουσιάστηκαν στα Σχήματα 3.10-3.15 αξιοποιούνται σε περαιτέρω αναλύσεις, με χρήση των προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων. Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι το πάχος της ρευστοποίησιμης στρώσης δεν παίζει σημαντικό ρόλο στη δυναμική δυσκαμψία του θεμελίου (οι καμπύλες για τους διαφορετικούς λόγους  $h_2/B$  ταυτίζονται στα Σχήματα 3.10-3.15, ειδικά στην περίπτωση με ρευστοποίηση – κόκκινες καμπύλες) και επομένως η προσέγγιση γίνεται μόνο για λόγο  $h_2/B=0.5$ .

Πρέπει να τονισθεί ότι η προσέγγιση γίνεται πιο ακριβής όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός του πολωνύμου στον παρονομαστή. Παρόλα αυτά, οι διατάξεις ελατηρίων, αποσβεστήρων και μαζών που προκύπτουν είναι αυξημένης πολυπλοκότητας και

είναι δύσκολη η εφαρμογή σε ένα πρόγραμμα στατικής ανάλυσης. Απο την άλλη πλευρά, ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού είναι αδύνατο να προσομοιώσει με ακρίβεια την περιπλοκότητα των δυναμικών συναρτήσεων εμπέδησης.

Βάσει των παραπάνω, ο στόχος της εργασίας είναι: τα προσομοιώματα να είναι όσο γίνεται πιο απλά και η προσομοίωση να είναι ακριβής τουλάχιστον μέχρι τα 10-15 Hz, δηλαδή στο εύρος που αφορά τις σεισμικές διεγέρσεις. Για τις περισσότερες περιπτώσεις, η χρήση βαθμού πολωνύμου  $M=3$  ήταν επαρκής. Παρόλα αυτά, σε κάποιες περιπτώσεις, για λόγους πληρότητας αλλά και σύγκρισης παρατίθενται αποτελέσματα προσέγγισης της δυναμικής δυσκαμψίας, με χρήση μεγαλύτερου βαθμού πολωνύμου. Όπου η προσέγγιση γίνεται με μία μόνο καμπύλη αυτό σημαίνει ότι η ακρίβεια δεν αυξανόταν θεαματικά με χρήση μεγαλύτερου βαθμού πολωνύμου.

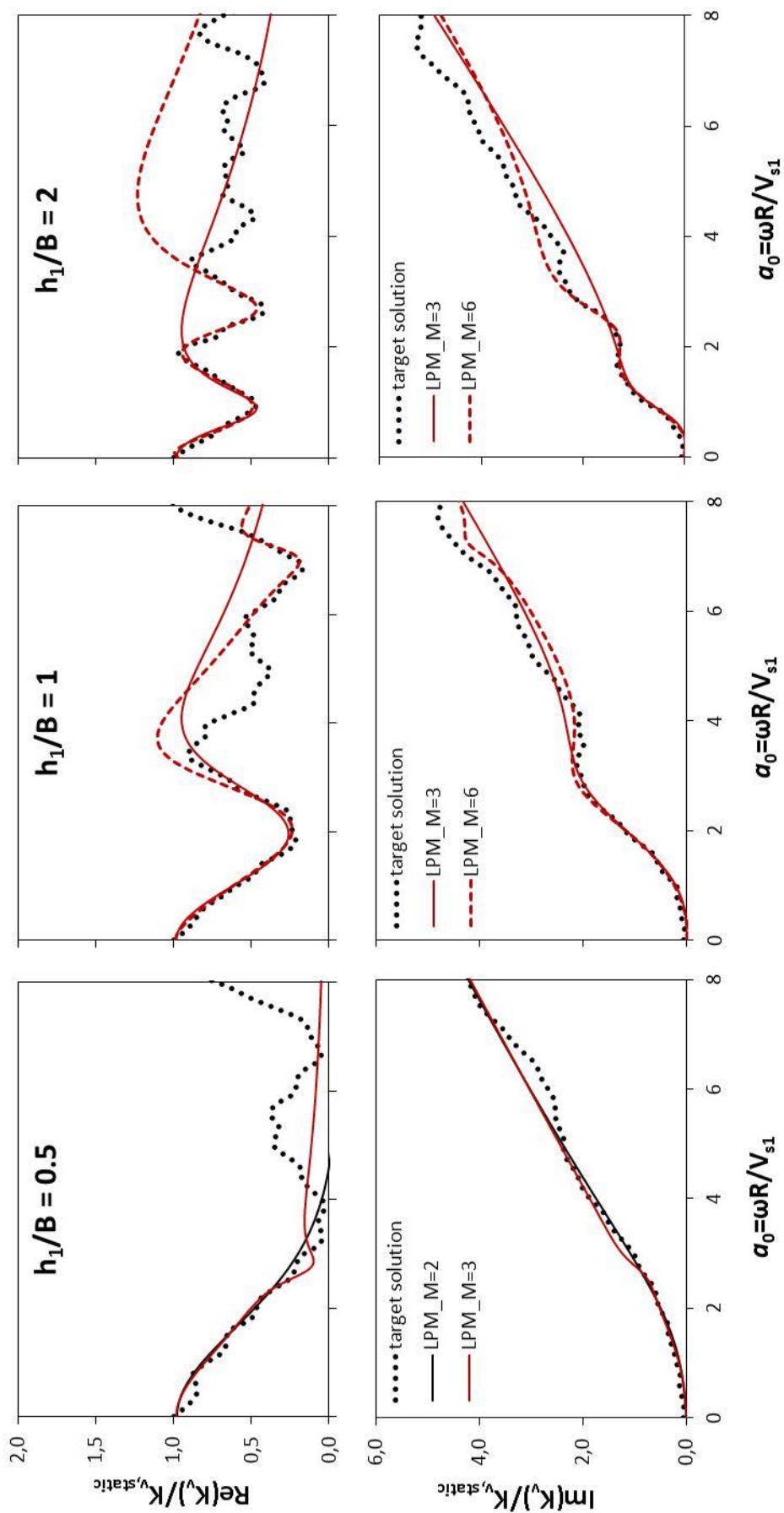
Στα διαγράμματα που ακολουθούν, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής δυναμικής δυσκαμψίας κανονικοποιούνται ως προς τη στατική τιμή της δυναμικής δυσκαμψίας και είναι συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας  $\alpha_0 = \omega R / V_{s1}$ , όπου  $R$  η ισοδύναμη κυκλική ακτίνα του θεμελίου και  $V_{s1}$  η ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος της αργιλικής κρούστας. Δεδομένου ότι εξετάζονται δύο περιπτώσεις διαφορετικής τιμής του  $V_{s1}$ , 100m/s και 250m/s, η μέγιστη τιμή του  $\alpha_0$  είναι 8 και 3, αντίστοιχα, για το ίδιο εύρος συχνοτήτων ( $f_{max}=30\text{Hz}$ ). Η προσομοίωση της δυναμικής δυσκαμψίας γίνεται και για τις δύο περιπτώσεις, με και χωρίς ρευστοποίηση, για όλους τους διαφορετικούς λόγους πάχους αργιλικής κρούστας προς πλάτος θεμελίου,  $h_1/B=0.5, 1, 2$ .

Πιο συγκεκριμένα, στα Σχήματα 4.1-4.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα προσομοίωσης των συναρτήσεων δυναμικής εμπέδησης για κατακόρυφη ταλάντωση. Γίνεται εμφανές ότι όλα τα προσομοιώματα διακριτών παραμέτρων παρέχουν ικανοποιητική ακρίβεια στο στατικό όριο, δηλαδή ξεκινούν από τη μονάδα, και έχουν σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά στο υψηλό πεδίο συχνοτήτων. Παρατηρούμε ότι τα προσομοιώματα διακριτών παραμέτρων, που έχουν βαθμό πολωνύμου  $M=3$  προσεγγίζουν με εξαιρετική ακρίβεια τις συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης στο πεδίο χαμηλών συχνοτήτων, μέχρι περίπου 10Hz. Το προσομοίωμα με βαθμό πολωνύμου  $M=6$  παρέχει μεγαλύτερη ακρίβεια για μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων που φτάνει ως και τα 20Hz. Όπου η προσέγγιση γίνεται με μία μόνο καμπύλη, παρατηρείται ότι οποιαδήποτε αύξηση στο βαθμό του πολωνύμου δεν βελτιώνει την προσέγγιση και γι' αυτό το λόγο επιλέγεται το προσομοίωμα που έχει το μικρότερο βαθμό πολυπλοκότητας.

Τα αποτελέσματα της προσέγγισης των συναρτήσεων δυναμικής εμπέδησης για οριζόντια ταλάντωση παρατίθενται στα Σχήματα 4.5-4.8. Η προσαρμογή καμπύλης είναι εξαιρετικά δύσκολη, ειδικά στην περίπτωση που  $V_{s1}=100\text{m/s}$ , εξαιτίας της έντονης κυματικής μορφής που παρουσιάζουν οι καμπύλες δυσκαμψίας και απόσβεσης στην οριζόντια κίνηση. Η προσέγγιση είναι ικανοποιητική στο χαμηλό εύρος συχνοτήτων όταν χρησιμοποιείται πολυώνυμο τρίτου βαθμού, και βελτιώνεται

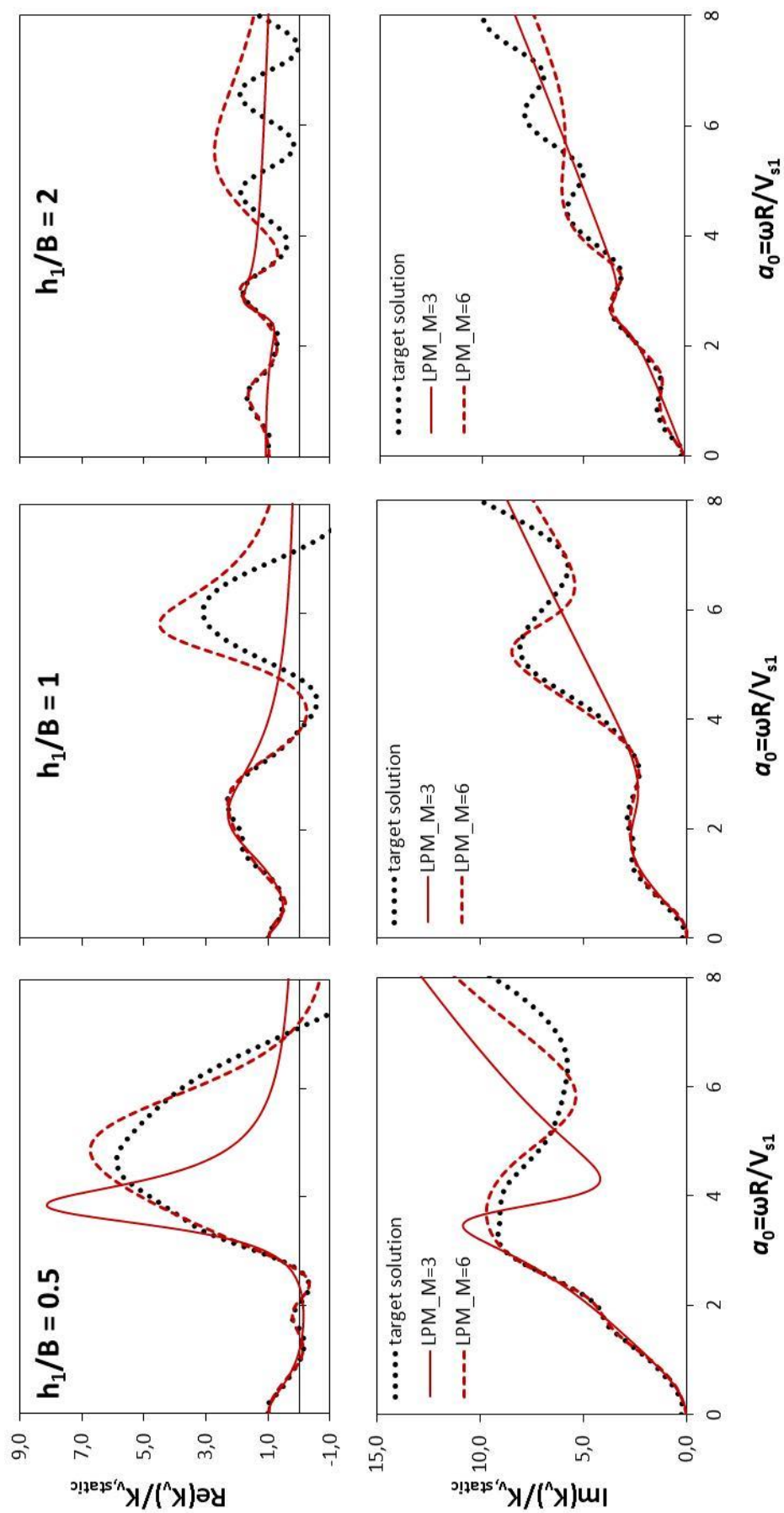
ελάχιστα όταν χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερος βαθμός πολωνύμου. Συνολικά όμως η προσέγγιση θεωρείται καλή καθώς ικανοποιείται η απαίτηση για μοναδιαία τιμή στο στατικό όριο και σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά στο άπειρο. Επίσης σημειώνεται ότι, στην περίπτωση που είναι  $h_1/B=2$ , για την προσέγγιση της δυσκαμψίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί η στατική τιμή καθώς το πλάτος της κυματικής καμπύλης είναι μικρό και μεταβάλλεται εκατέρωθεν αυτής.

Στα Σχήματα 4.9-4.12 παρουσιάζεται η προσέγγιση της δυναμικής δυσκαμψίας για λικνιστική ταλάντωση. Τα προσομοιώματα με βαθμό πολωνύμου  $M=3$  παρέχουν ικανοποιητική ακρίβεια και για αυτή τη μορφή ταλάντωσης. Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση είναι εξαιρετική για εύρος συχνοτήτων από 0 μέχρι 15 Hz. Σε κάποιες περιπτώσεις, η χρήση πολωνύμου έκτου βαθμού προσομοιώνει τις συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης ικανοποιητικά για όλο το εύρος συχνοτήτων, μέχρι 30 Hz.



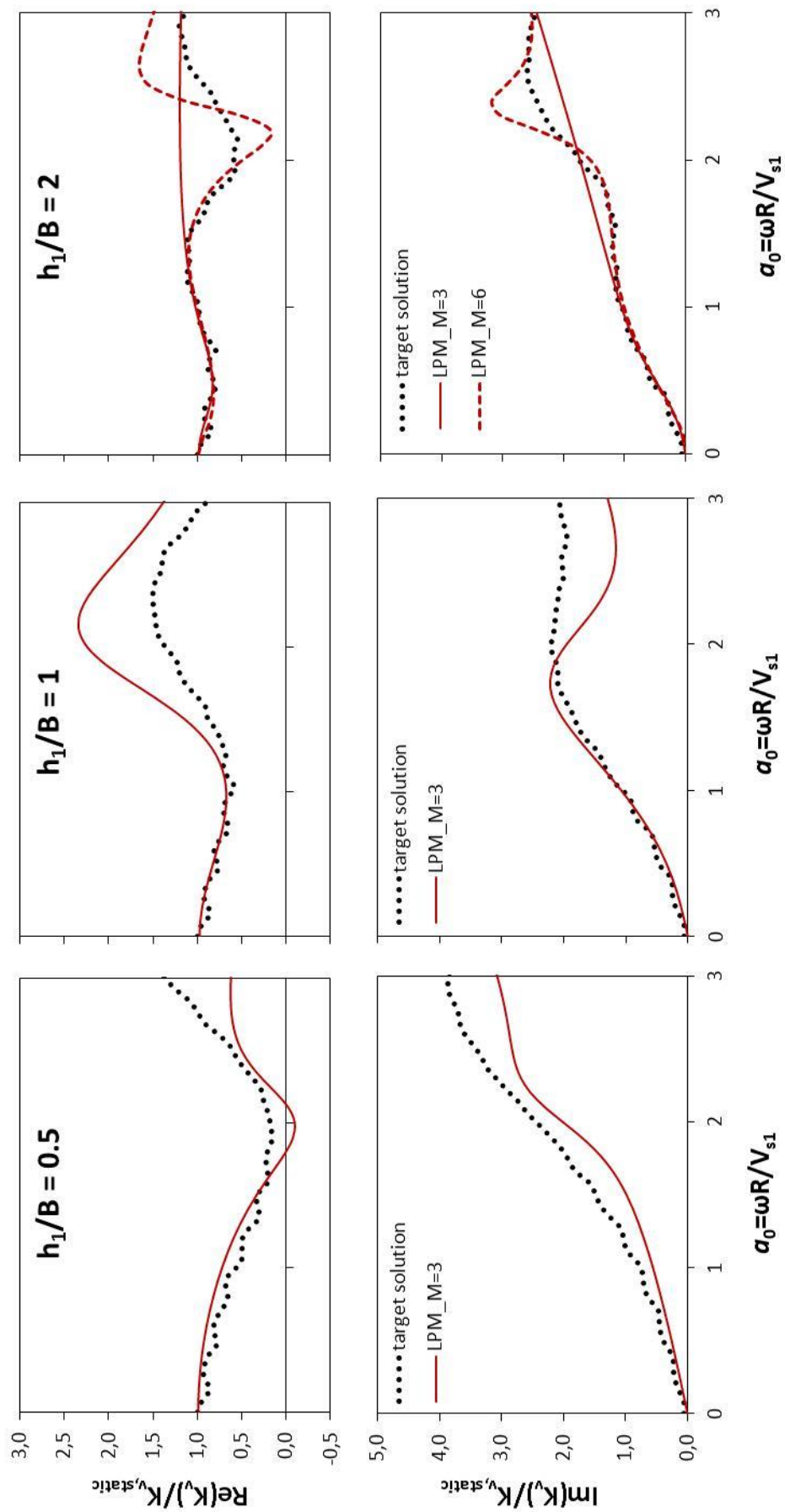
Σχήμα 4.1: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για κατακόρυφη ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .

Figure 4.1: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for vertical oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .



Σχήμα 4.2: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για κατακόρυφη ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .

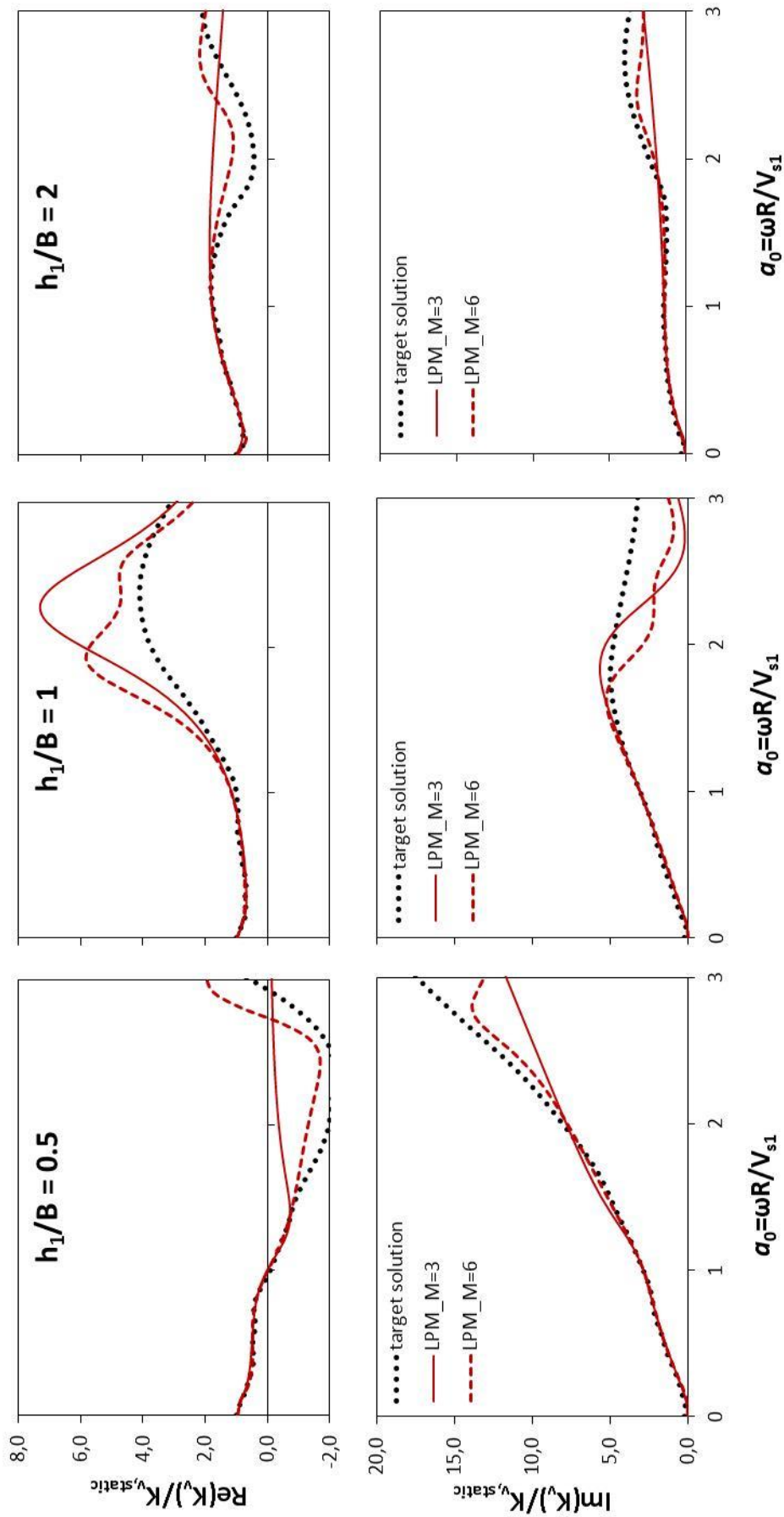
Figure 4.2: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for vertical oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .



Σχήμα 4.3: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για κατακόρυφη ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .

Figure 4.3: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for vertical oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .

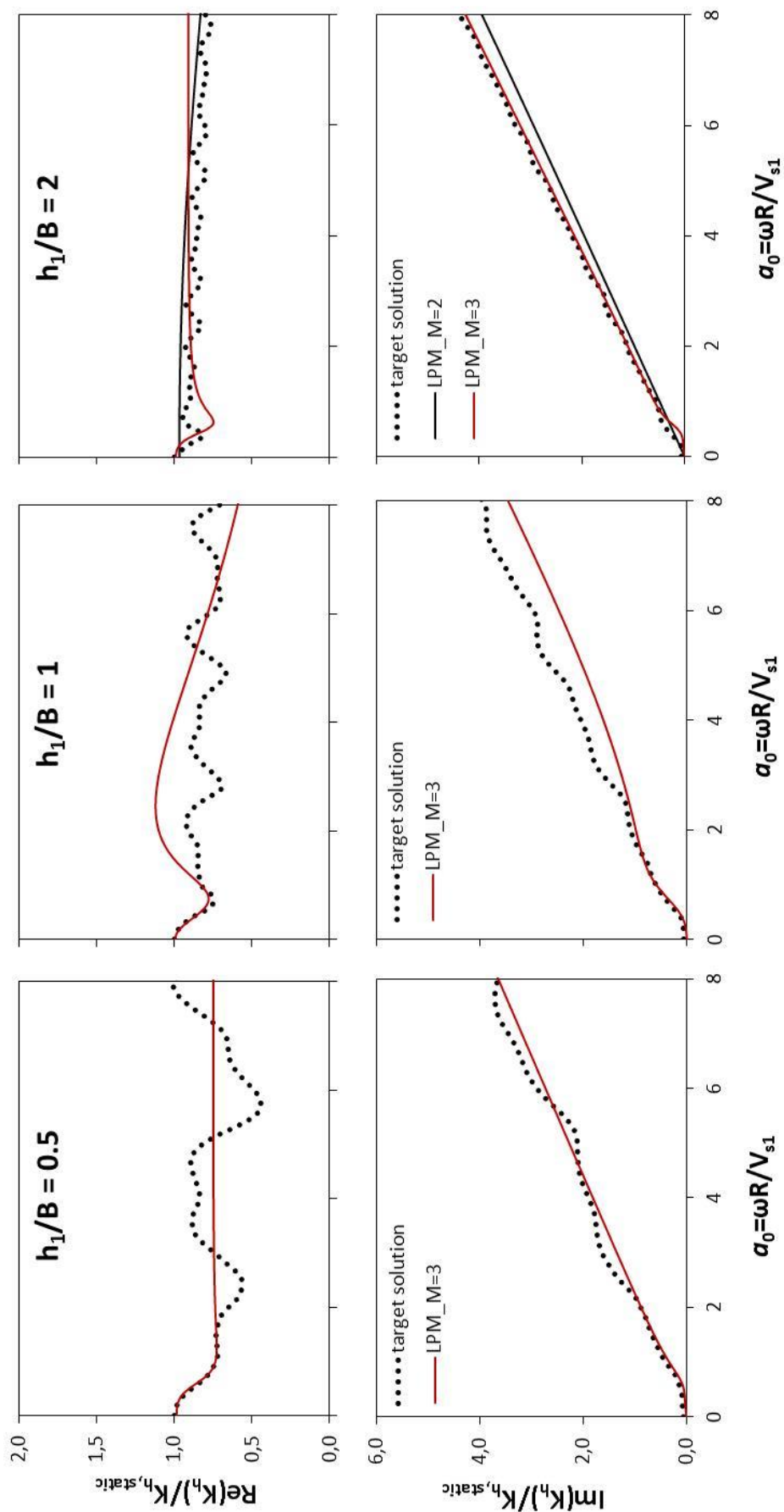




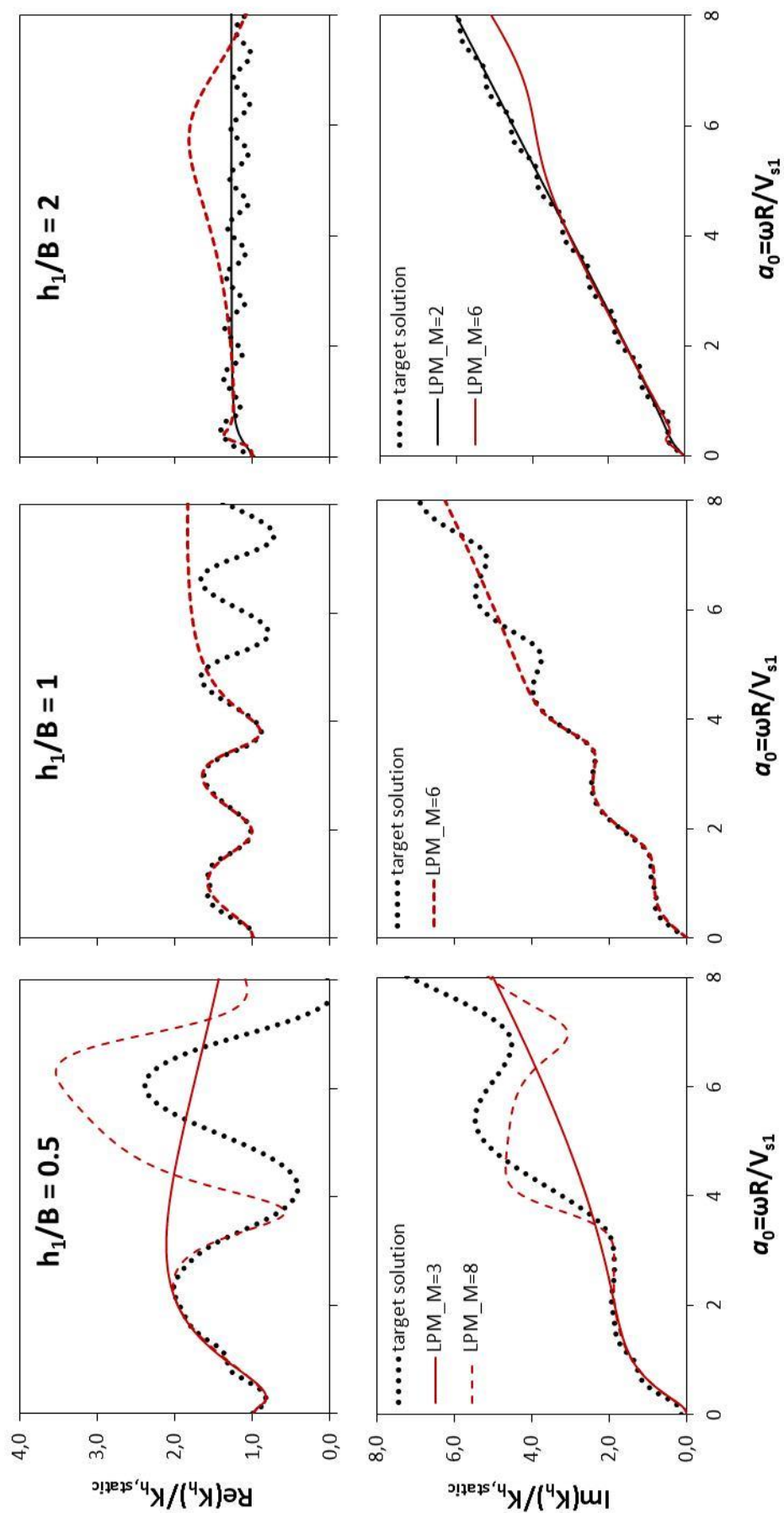
Σχήμα 4.4: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για κατακόρυφη ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .

Figure 4.4: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for vertical oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .

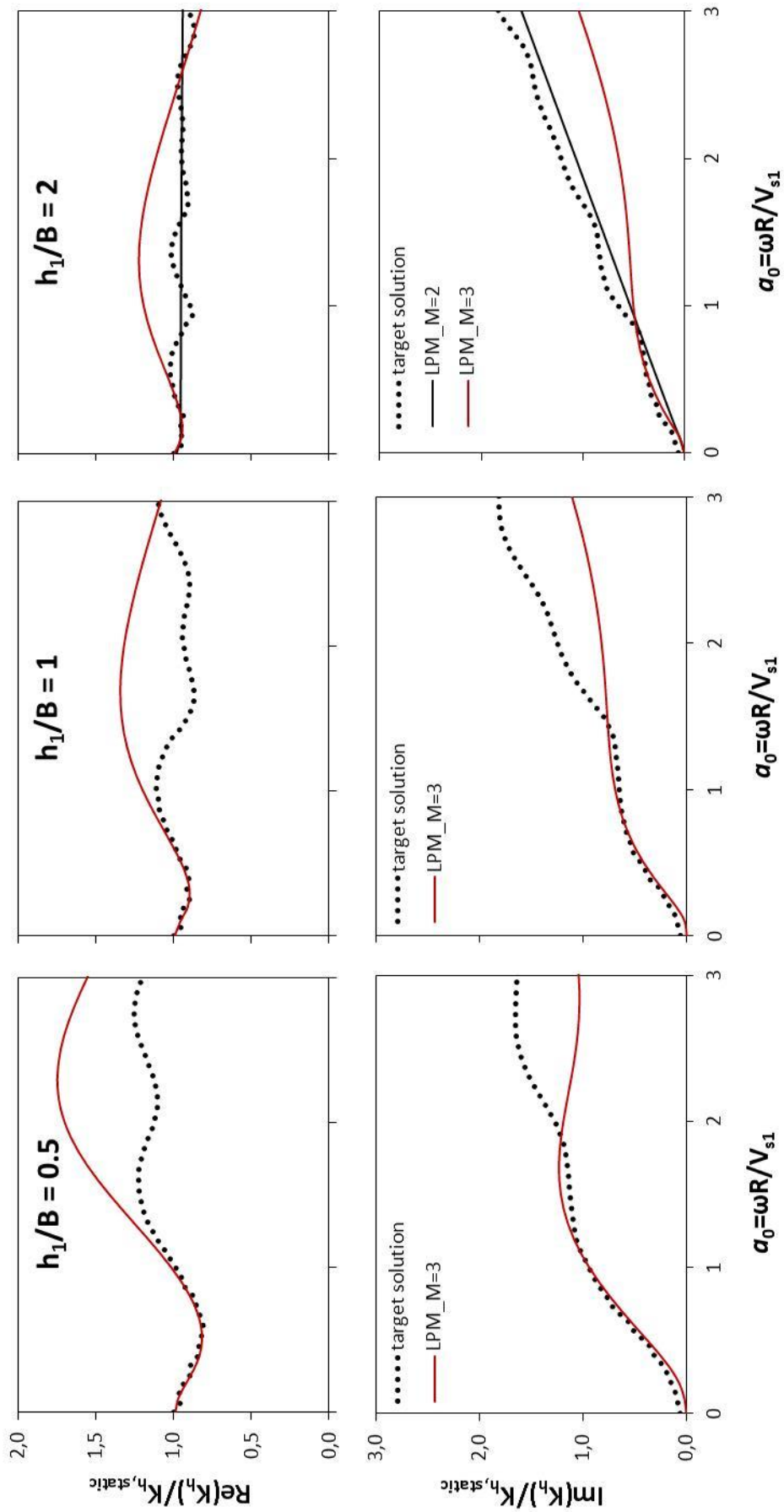




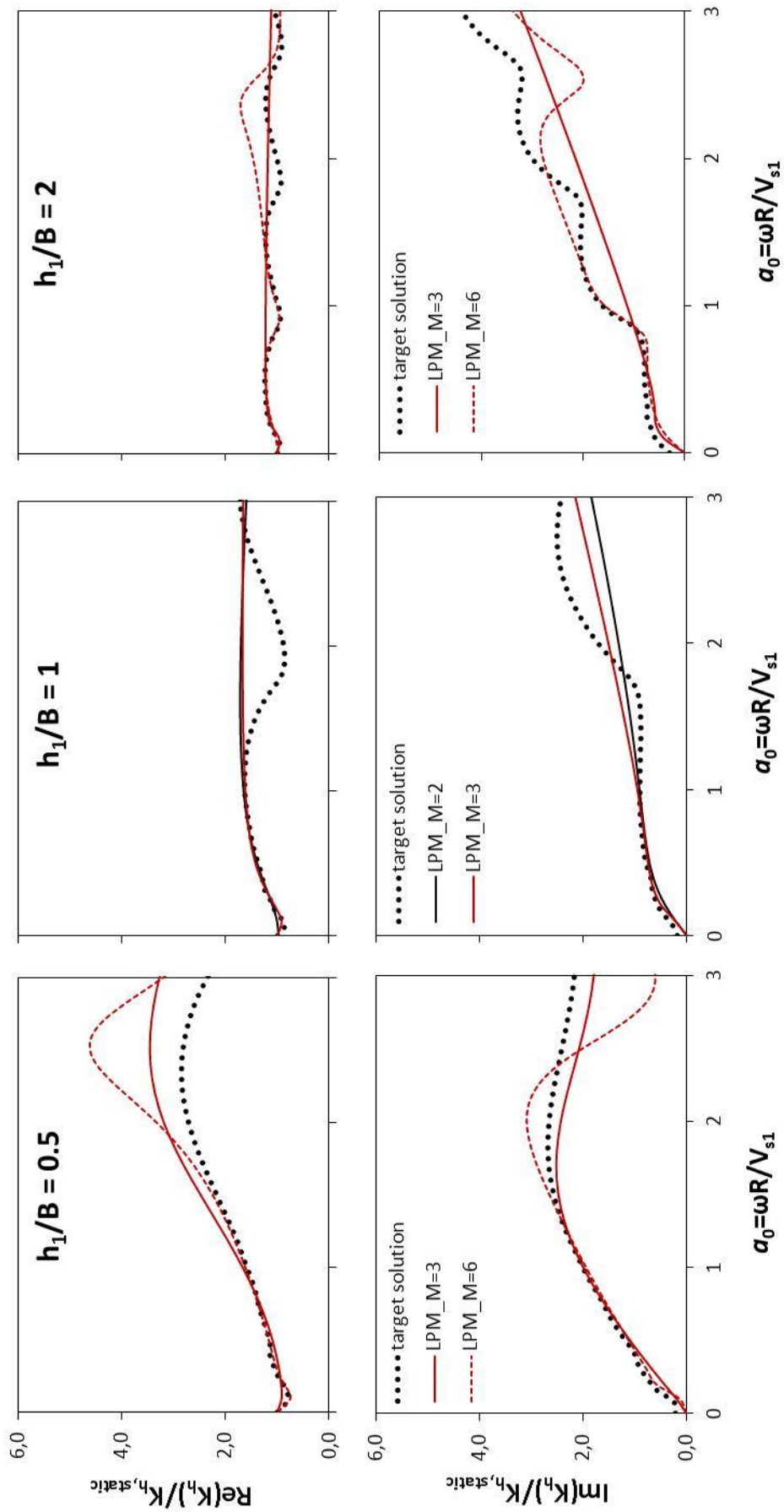
Σχήμα 4.5: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριςτρωτον εδαφικού προφίλ για οριζόντια ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .  
 Figure 4.5: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for horizontal oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .



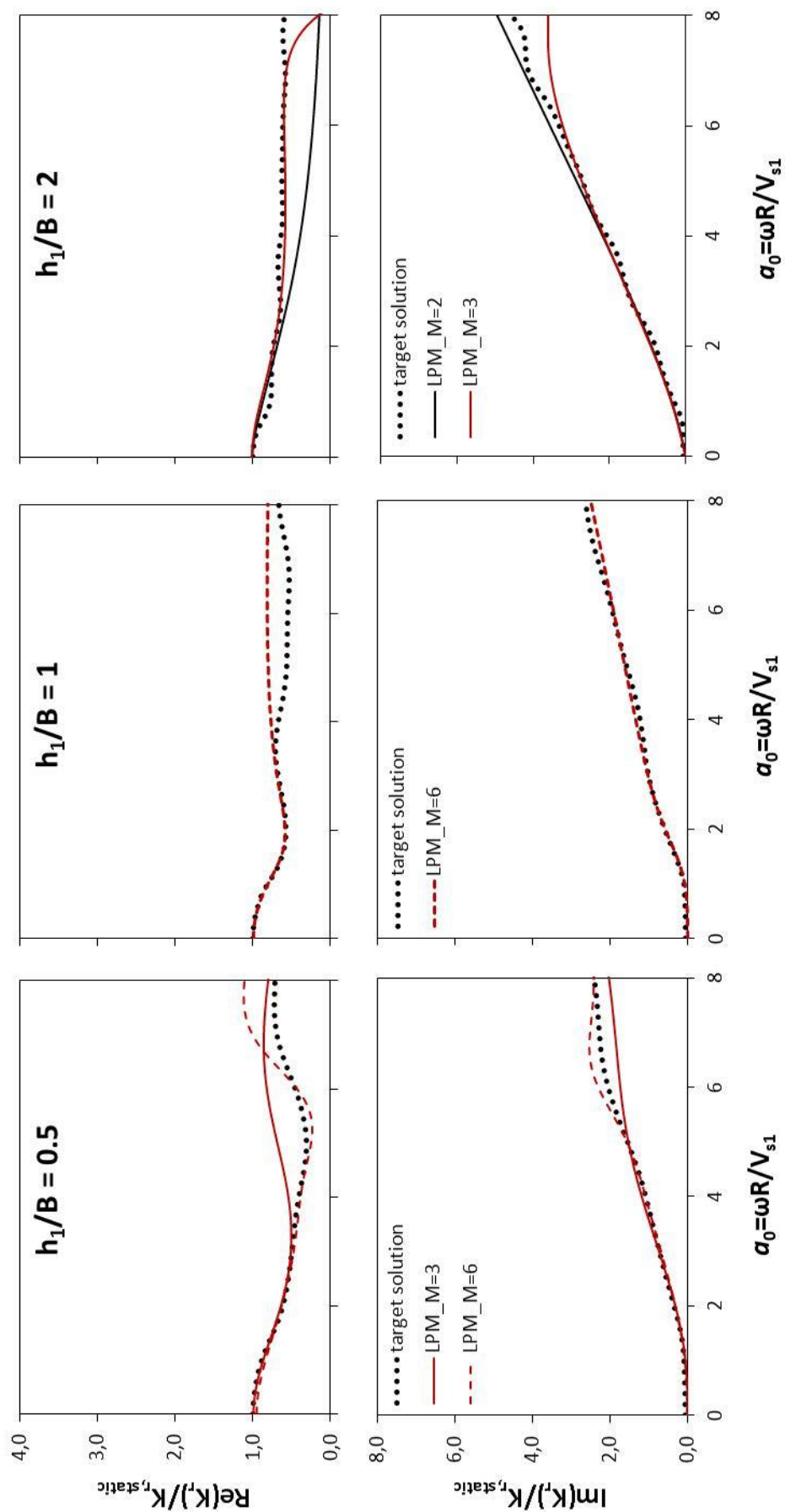
Σχήμα 4.6: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριών στρωτων εδαφικού προφίλ για οριζόντια ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .  
 Figure 4.6: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for horizontal oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .



Σχήμα 4.7: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριςρωτον εδαφικού προφίλ για οριζόντια ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .  
 Figure 4.7: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for horizontal oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .

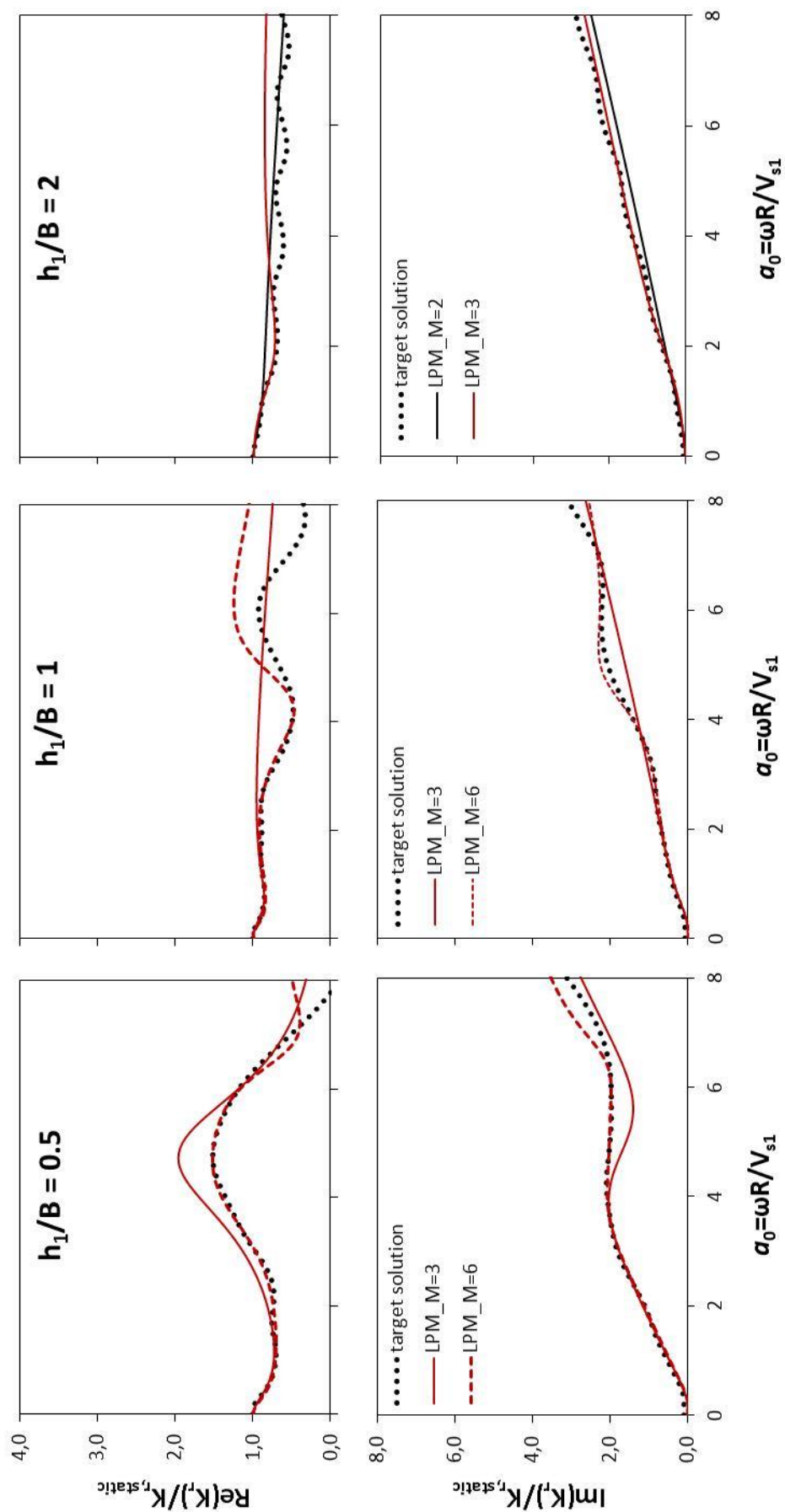


Σχήμα 4.8: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για οριζόντια ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .  
 Figure 4.8: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for horizontal oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .



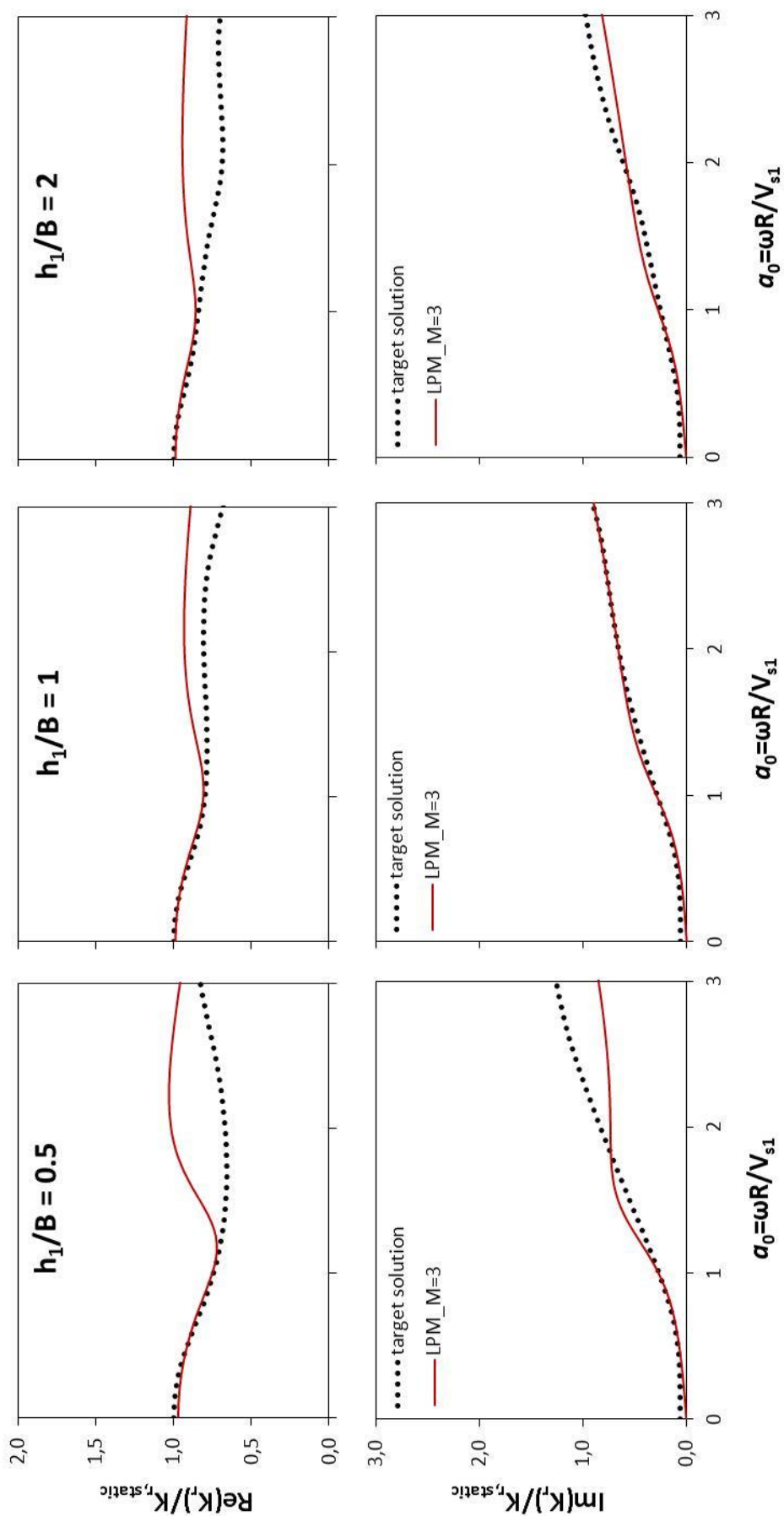
Σχήμα 4.9: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για λιγνιστική ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .  
 Figure 4.9: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for rocking oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .





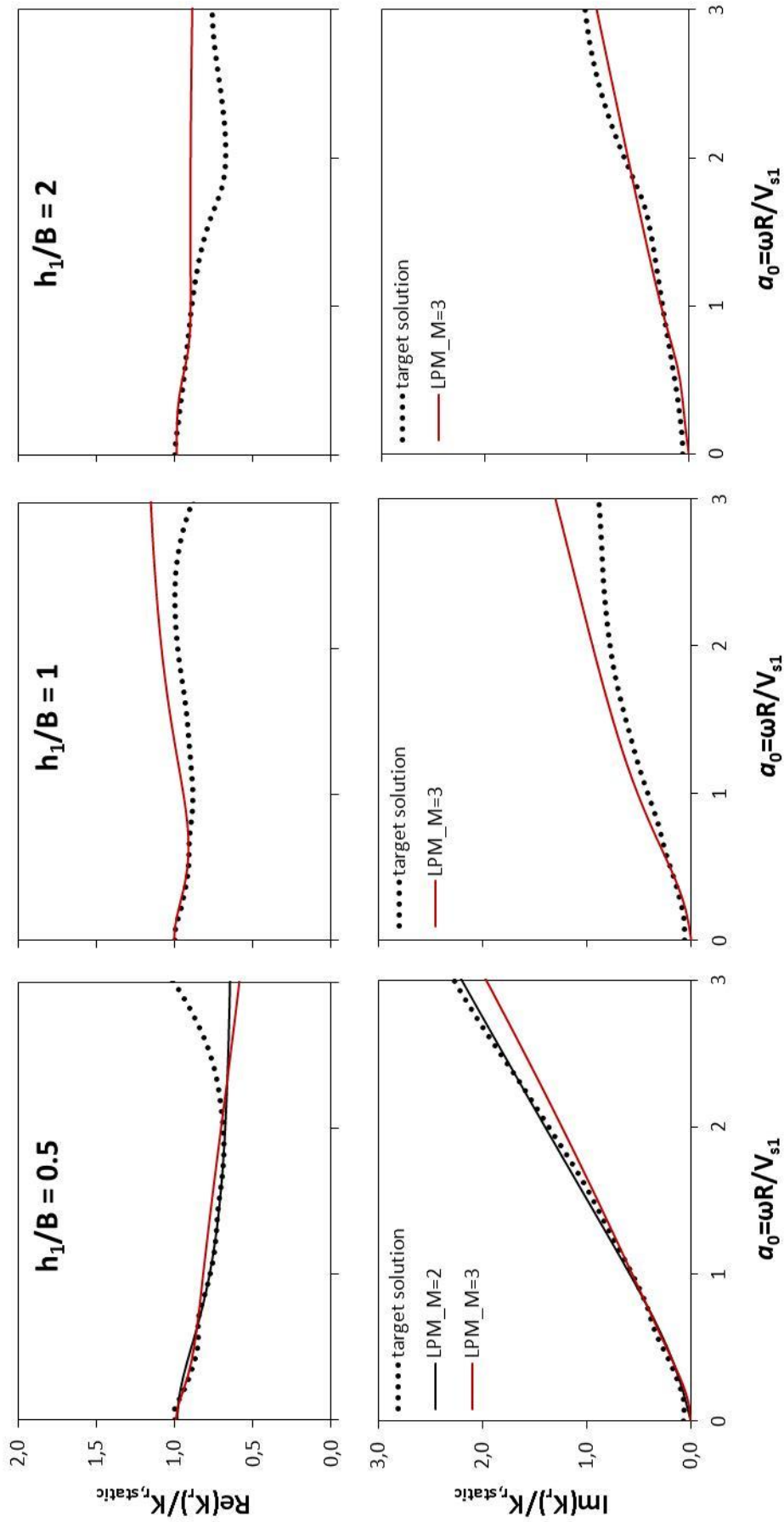
Σχήμα 4.10: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για λικνιστική ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .

Figure 4.10: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for rocking oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .



Σχήμα 4.11: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για λικνιστική ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .

Figure 4.11: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for rocking oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$ .



Σχήμα 4.12: Συναρτήσεις δυναμικής εμπέδησης τετραγωνικού θεμελίου επί τριστρωτού εδαφικού προφίλ για λικνιστική ταλάντωση. Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής προσομοίωσης κώνου με αποτελέσματα από χρήση διακριτών προσομοιωμάτων,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .

Figure 4.12: Dynamic impedance of square footing on 3-layered soil-profile for rocking oscillation mode. Comparison between CONAN results and lumped-parameter approximation,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=25\text{m/s}$ .



## 4.2 Συντελεστές προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων

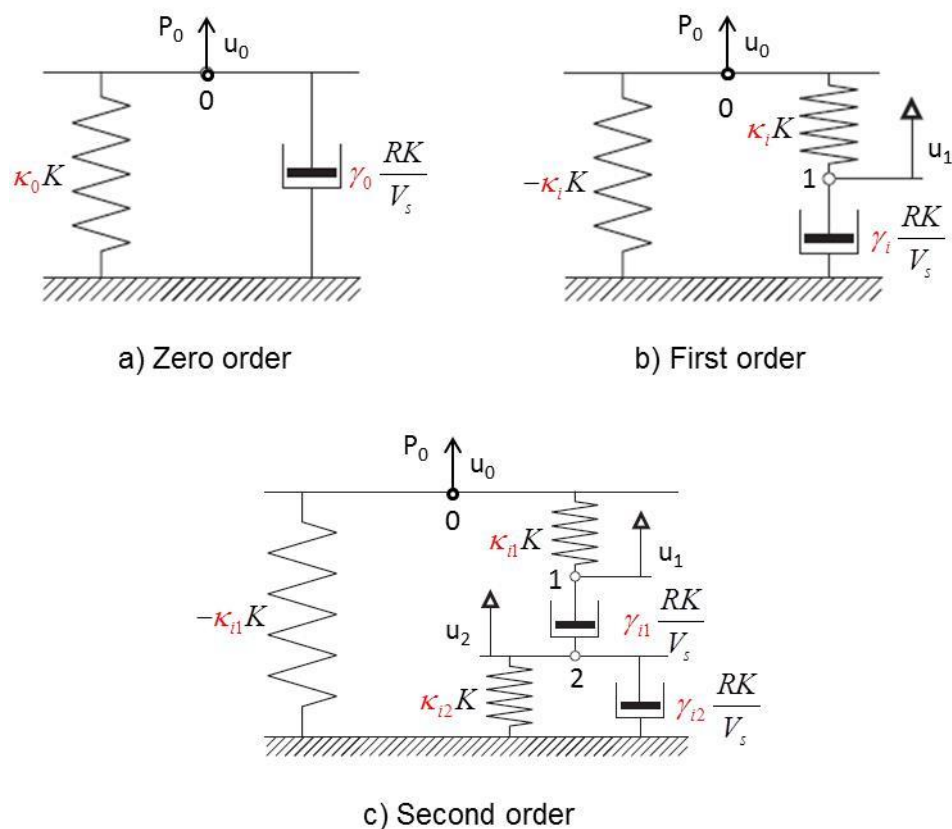
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται σε μορφή πινάκων οι συντελεστές των προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων. Δίνονται σε αδιάστατη μορφή οι συντελεστές των ελατηρίων και αποσβεστήρων που χρησιμοποιούνται, σε διάφορες διατάξεις, για την προσομοίωση της δυναμικής συμπεριφοράς του θεμελίου.

Ανάλογα με το βαθμό του πολωνύμου στον παρονομαστή και με το εάν οι ρίζες αυτού του πολωνύμου είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί, προκύπτουν διατάξεις αποτελούμενες από προσομοιώματα μηδενικής, πρώτης και δεύτερης τάξης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.13. Όπως προαναφέρθηκε, η προσέγγιση είναι ακριβής στο άπειρο και επομένως ο όρος της απόσβεσης κυριαρχεί στο άπειρο και η συμπεριφορά αυτή ελέγχεται από τον όρο μηδενικής τάξης, ο οποίος περιλαμβάνεται σε όλες τις διατάξεις. Στα προσομοιώματα που χρησιμοποιούνται εδώ, ο συντελεστής  $k_0$  είναι μηδενικός ενώ ο  $\gamma_0$  προκύπτει από προσαρμογή καμπύλης.

Στα διακριτά προσομοιώματα πρώτης και δεύτερης τάξης (Σχήμα 4.13), ο δείκτης  $i$  στους συντελεστές, υποδηλώνει τον αριθμό των επιμέρους διακριτών προσομοιωμάτων που συνδέονται παράλληλα για να δημιουργηθεί η τελική διάταξη που θα προσομοιώνει τη δυναμική δυσκαμψία. Για παράδειγμα, αν μια διάταξη αποτελείται από έναν όρο μηδενικής τάξης και δύο όρους πρώτης τάξης, που αντιστοιχεί σε βαθμό πολωνύμου 2 με πραγματικές ρίζες, τότε η διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 4.14.

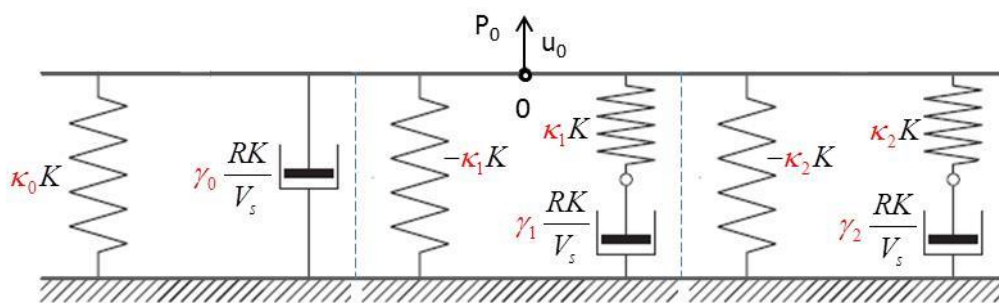
Πρέπει να επισημάνουμε, ότι οι τιμές των συντελεστών των ελατηρίων πολλαπλασιάζονται με τη τιμή της στατικής στιφρότητας,  $K$ , και αυτές των αποσβεστήρων με το λόγο της ισοδύναμης ακτίνας θεμελίου επί τη στατική στιφρότητα διαιρεμένη με τη ταχύτητα διάδοσης διατμητικού κύματος του πρώτου στρώματος,  $RK/V_{s1}$ .

Εάν παρατηρήσουμε τις τιμές των συντελεστών, γίνεται εμφανές ότι οι περισσότεροι από τους συντελεστές αυτούς είναι αρνητικοί αριθμοί. Σε πολλά προγράμματα στατικής ανάλυσης είναι δύσκολη η εφαρμογή ελατηρίων με αρνητική σταθερά, διότι δημιουργείται αστάθεια στη λύση στο πεδίο του χρόνου. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί εύκολα στην περίπτωση που η προσομοίωση περιέχει διακριτό προσομοίωμα πρώτης τάξης, με χρήση του εναλλακτικού προσομοιώματος *monkey-tail* και την εισαγωγή μάζας. Επιπρόσθετα, η μετατροπή ενός διακριτού προσομοιώματος δεύτερης τάξης με δύο εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας σε αντίστοιχο, με έναν εσωτερικό βαθμό ελευθερίας και μάζα, οδηγεί κάποιες φορές στην απαλοιφή των αρνητικών σταθερών στα ελατήρια. Στη συγκεκριμένη εργασία έγινε διερεύνηση, ώστε να προκύψουν προσομοιώματα με θετικές σταθερές ελατηρίων. Η μετατροπή ήταν επιτυχής μόνο στις 15 από τις 36 συνολικά περιπτώσεις όπου έγινε προσαρμογή καμπύλης.



Σχήμα 4.13: Προσομοιώματα διακριτών παραμέτρων. α) μηδενικής, β) πρώτης και γ) δεύτερης τάξης

Figure 4.13: Lumped-parameter models. a) zero, b) first, and c) second order terms



Σχήμα 4.14: Παράδειγμα προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων που αποτελείται από ένα μηχανικό ανάλογο μηδενικής τάξης και δύο πρώτης τάξης

Figure 4.14: Complete lumped-parameter model consisted of a zero-term discrete-element model and two first order-term element models (in parallel)

Στους Πίνακες 4.1 – 4.36 δίνονται οι τιμές των συντελεστών των προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων, δηλαδή οι τιμές των συντελεστών  $\kappa_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\kappa_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\kappa_{i1}$ ,  $\gamma_{i1}$ ,  $\kappa_{i2}$  και  $\gamma_{i2}$ , με ακρίβεια έξι σημαντικών ψηφίων.

**Πίνακας 4.1:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

**Table 4.1:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

| Order | Term          | Rank M    |            |   |   |
|-------|---------------|-----------|------------|---|---|
|       |               | 2         | 3          | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0         | 0          |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.5492    | 0.5492     |   |   |
| 1     | $k_1$         |           | -0.954545  |   |   |
|       | $\gamma_1$    |           | -0.468558  |   |   |
|       | $k_2$         |           |            |   |   |
|       | $\gamma_2$    |           |            |   |   |
|       | $k_3$         |           |            |   |   |
|       | $\gamma_3$    |           |            |   |   |
|       | $k_4$         |           |            |   |   |
|       | $\gamma_4$    |           |            |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | -0.978816 | -0.0287307 |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.474385 | -0.0253892 |   |   |
|       | $k_{12}$      | 4.42437   | 0.027211   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.788915  | 0.004175   |   |   |
|       | $k_{21}$      |           |            |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |           |            |   |   |
|       | $k_{22}$      |           |            |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |           |            |   |   |
|       | $k_{31}$      |           |            |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |           |            |   |   |
|       | $k_{32}$      |           |            |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |           |            |   |   |

**Πίνακας 4.2:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

**Table 4.2:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

| Order | Term          | Rank M |           |             |   |
|-------|---------------|--------|-----------|-------------|---|
|       |               | 2      | 3         | 6           | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0         | 0           |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.6058    | 0.6058      |   |
| 1     | $k_1$         |        | -2.785    | -1.99422    |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -1.14032  | -0.784569   |   |
|       | $k_2$         |        |           | -0.101543   |   |
|       | $\gamma_2$    |        |           | -0.227115   |   |
|       | $k_3$         |        |           |             |   |
|       | $\gamma_3$    |        |           |             |   |
|       | $k_4$         |        |           |             |   |
|       | $\gamma_4$    |        |           |             |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 1.80105   | 0.0466656   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | 0.540935  | -0.00088774 |   |
|       | $k_{12}$      |        | -1.96768  | -0.00085351 |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | -0.659946 | 0.00085909  |   |
|       | $k_{21}$      |        |           | 1.06006     |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |           | 0.314375    |   |
|       | $k_{22}$      |        |           | -0.817891   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |           | -0.28385    |   |
|       | $k_{31}$      |        |           |             |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |           |             |   |
|       | $k_{32}$      |        |           |             |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |           |             |   |

**Πίνακας 4.3: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$**

**Table 4.3: Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$**

| Order | Term          | Rank M |           |           |   |
|-------|---------------|--------|-----------|-----------|---|
|       |               | 2      | 3         | 6         | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0         | 0         |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.6773    | 0.6773    |   |
| 1     | $k_1$         |        | -1.33035  | -7.0942   |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.259161 | -1.68029  |   |
|       | $k_2$         |        |           | 29.2045   |   |
|       | $\gamma_2$    |        |           | 16.8306   |   |
|       | $k_3$         |        |           | -22.5857  |   |
|       | $\gamma_3$    |        |           | -15.7821  |   |
|       | $k_4$         |        |           | 0.0491159 |   |
|       | $\gamma_4$    |        |           | 0.964949  |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 0.347161  | -0.546376 |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | -0.501587 | -0.341038 |   |
|       | $k_{12}$      |        | -0.153668 | 0.54296   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | 0.105049  | 0.132954  |   |
|       | $k_{21}$      |        |           |           |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |           |           |   |
|       | $k_{22}$      |        |           |           |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |           |           |   |
|       | $k_{31}$      |        |           |           |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |           |           |   |
|       | $k_{32}$      |        |           |           |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |           |           |   |

**Πίνακας 4.4:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_I/b=0.5$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

**Table 4.4:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_I/b=0.5$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

| Order | Term          | Rank M |            |            |   |
|-------|---------------|--------|------------|------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 1.7783     | 1.7783     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -1.43065   |            |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -1.91341   |            |   |
|       | $k_2$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            |            |   |
|       | $k_3$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            |            |   |
|       | $k_4$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            |            |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 0.445723   | -4.37839   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | 0.595949   | 0.201674   |   |
|       | $k_{12}$      |        | -0.451955  | 0.240726   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | -0.0235106 | -0.165446  |   |
|       | $k_{21}$      |        |            | -1.78549   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            | -0.873792  |   |
|       | $k_{22}$      |        |            | 1.47382    |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            | 0.545286   |   |
|       | $k_{31}$      |        |            | 5.18091    |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            | -0.415468  |   |
|       | $k_{32}$      |        |            | -0.0879743 |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            | 0.335435   |   |

**Πίνακας 4.5: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_l/b=1$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

**Table 4.5: Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_l/b=1$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

| Order | Term          | Rank M |             |            |   |
|-------|---------------|--------|-------------|------------|---|
|       |               | 2      | 3           | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0           | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 1.1798      | 1.1798     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -0.810247   |            |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -2.56245    |            |   |
|       | $k_2$         |        |             |            |   |
|       | $\gamma_2$    |        |             |            |   |
|       | $k_3$         |        |             |            |   |
|       | $\gamma_3$    |        |             |            |   |
|       | $k_4$         |        |             |            |   |
|       | $\gamma_4$    |        |             |            |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | -0.174827   | 0.609516   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | 0.942691    | 0.295181   |   |
|       | $k_{12}$      |        | 0.160477    | -0.596222  |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | -0.00547081 | -0.0389997 |   |
|       | $k_{21}$      |        |             | -2.34594   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |             | -0.16839   |   |
|       | $k_{22}$      |        |             | 0.154666   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |             | 0.189553   |   |
|       | $k_{31}$      |        |             | 0.753913   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |             | -0.964752  |   |
|       | $k_{32}$      |        |             | -0.225691  |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |             | 0.271935   |   |

**Πίνακας 4.6:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_l/b=2$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

**Table 4.6:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_l/b=2$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

| Order | Term          | Rank M |            |             |   |
|-------|---------------|--------|------------|-------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6           | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0           |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 1.1182     | 1.1182      |   |
| 1     | $k_1$         |        | -1.28966   |             |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.0937674 |             |   |
|       | $k_2$         |        |            |             |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            |             |   |
|       | $k_3$         |        |            |             |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            |             |   |
|       | $k_4$         |        |            |             |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            |             |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 0.21326    | 0.889301    |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | 0.0366832  | 0.582032    |   |
|       | $k_{12}$      |        | -0.0400493 | -1.04099    |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | -0.0331582 | -0.0610257  |   |
|       | $k_{21}$      |        |            | -0.639269   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            | 0.0516765   |   |
|       | $k_{22}$      |        |            | 0.0385159   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            | -0.0449471  |   |
|       | $k_{31}$      |        |            | -1.22139    |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            | -0.00215307 |   |
|       | $k_{32}$      |        |            | 0.00000811  |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            | 0.00215774  |   |



**Πίνακας 4.7:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

**Table 4.7:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 1.0717     |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -1.32083   |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.478563  |   |   |   |
|       | $k_2$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |            |   |   |   |
|       | $k_3$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | 0.32972    |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.0944574 |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | -0.075752  |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.0574683  |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.8:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

**Table 4.8:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M    |   |   |   |
|-------|---------------|-----------|---|---|---|
|       |               | 2         | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0         |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.8448    |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -1.5601   |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -1.17495  |   |   |   |
|       | $k_2$         |           |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |           |   |   |   |
|       | $k_3$         |           |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |           |   |   |   |
|       | $k_4$         |           |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |           |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | 0.584125  |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | 0.840819  |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | -0.668766 |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | -0.109796 |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |           |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |           |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |           |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |           |   |   |   |

**Πίνακας 4.9:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{s2}=150$  m/s

**Table 4.9:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{s2}=150$  m/s

| Order | Term          | Rank M |            |            |   |
|-------|---------------|--------|------------|------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.8827     | 0.8827     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -1.33039   | -0.819281  |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.129681  | -0.0255385 |   |
|       | $k_2$         |        |            | -0.298533  |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            | -1.28789   |   |
|       | $k_3$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            |            |   |
|       | $k_4$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            |            |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 0.34394    | 0.291916   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | -0.306156  | -0.0458025 |   |
|       | $k_{12}$      |        | -0.0492262 | -0.031978  |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | 0.135413   | 0.0380919  |   |
|       | $k_{21}$      |        |            | -0.164051  |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            | 0.453367   |   |
|       | $k_{22}$      |        |            | 0.12533    |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            | -0.0148249 |   |
|       | $k_{31}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            |            |   |
|       | $k_{32}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            |            |   |

**Πίνακας 4.10:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_l/b=0.5$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

**Table 4.10:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_l/b=0.5$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M |           |            |   |
|-------|---------------|--------|-----------|------------|---|
|       |               | 2      | 3         | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0         | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 3.8643    | 3.8643     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -0.531268 | -0.846486  |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -3.10502  | -5.21878   |   |
|       | $k_2$         |        |           | 0.159744   |   |
|       | $\gamma_2$    |        |           | 5.10366    |   |
|       | $k_3$         |        |           |            |   |
|       | $\gamma_3$    |        |           |            |   |
|       | $k_4$         |        |           |            |   |
|       | $\gamma_4$    |        |           |            |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | -0.45288  | 0.717022   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | -0.532057 | 0.103018   |   |
|       | $k_{12}$      |        | 0.431848  | -0.106821  |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | 0.244026  | -0.0955869 |   |
|       | $k_{21}$      |        |           | -0.986355  |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |           | -0.240051  |   |
|       | $k_{22}$      |        |           | 0.0738056  |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |           | 0.292189   |   |
|       | $k_{31}$      |        |           |            |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |           |            |   |
|       | $k_{32}$      |        |           |            |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |           |            |   |

**Πίνακας 4.11:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{slq}=25$ m/s

**Table 4.11:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{slq}=25$ m/s

| Order | Term          | Rank M |           |             |   |
|-------|---------------|--------|-----------|-------------|---|
|       |               | 2      | 3         | 6           | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0         | 0           |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 1.577     | 1.577       |   |
| 1     | $k_1$         |        | -0.37689  | -0.40865    |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -4.07008  | -0.0173267  |   |
|       | $k_2$         |        |           | -0.314872   |   |
|       | $\gamma_2$    |        |           | -3.22945    |   |
|       | $k_3$         |        |           |             |   |
|       | $\gamma_3$    |        |           |             |   |
|       | $k_4$         |        |           |             |   |
|       | $\gamma_4$    |        |           |             |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | -0.610838 | -0.0891218  |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | 1.3918    | 0.293901    |   |
|       | $k_{12}$      |        | 0.541679  | 0.0851746   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | -0.044003 | -0.00379883 |   |
|       | $k_{21}$      |        |           | -0.166908   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |           | 1.00817     |   |
|       | $k_{22}$      |        |           | 0.159934    |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |           | -0.00717104 |   |
|       | $k_{31}$      |        |           |             |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |           |             |   |
|       | $k_{32}$      |        |           |             |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |           |             |   |

**Πίνακας 4.12:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{slq}=25$  m/s

**Table 4.12:** Discrete element coefficients for vertical mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{slq}=25$  m/s

| Order | Term          | Rank M |           |            |   |
|-------|---------------|--------|-----------|------------|---|
|       |               | 2      | 3         | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0         | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 1.2098    | 1.2098     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -2.52257  |            |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.682549 |            |   |
|       | $k_2$         |        | 1.94023   |            |   |
|       | $\gamma_2$    |        | 2.96581   |            |   |
|       | $k_3$         |        | -0.410582 |            |   |
|       | $\gamma_3$    |        | -4.34478  |            |   |
|       | $k_4$         |        |           |            |   |
|       | $\gamma_4$    |        |           |            |   |
| 2     | $k_{11}$      |        |           | 0.503579   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        |           | 0.0404978  |   |
|       | $k_{12}$      |        |           | -0.0192521 |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        |           | -0.0415421 |   |
|       | $k_{21}$      |        |           | -1.25366   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |           | 1.52411    |   |
|       | $k_{22}$      |        |           | 0.535267   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |           | -0.183886  |   |
|       | $k_{31}$      |        |           | -0.219767  |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |           | -1.72513   |   |
|       | $k_{32}$      |        |           | 0.0481951  |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |           | 1.80238    |   |

**Πίνακας 4.13:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

**Table 4.13:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M      |   |   |   |
|-------|---------------|-------------|---|---|---|
|       |               | 2           | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0           |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.4628      |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -0.75344    |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.00570701 |   |   |   |
|       | $k_2$         |             |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |             |   |   |   |
|       | $k_3$         |             |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |             |   |   |   |
|       | $k_4$         |             |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |             |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | -0.232713   |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.323013   |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | 0.304071    |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.442241    |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |             |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |             |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |             |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |             |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |             |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |             |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |             |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |             |   |   |   |

**Πίνακας 4.14:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

**Table 4.14:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M |            |             |   |
|-------|---------------|--------|------------|-------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6           | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0           |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.508      | 0.508       |   |
| 1     | $k_1$         |        | -1.43702   | -0.659615   |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.210106  | -0.0284012  |   |
|       | $k_2$         |        |            | -0.236318   |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            | -1.95952    |   |
|       | $k_3$         |        |            |             |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            |             |   |
|       | $k_4$         |        |            |             |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            |             |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 0.441208   | -0.0545377  |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | -0.243009  | 0.0033992   |   |
|       | $k_{12}$      |        | -0.0587685 | 0.0146868   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | 0.114991   | -0.00231177 |   |
|       | $k_{21}$      |        |            | -0.0491258  |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            | 0.0193585   |   |
|       | $k_{22}$      |        |            | 0.0189275   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            | -0.00937344 |   |
|       | $k_{31}$      |        |            |             |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            |             |   |
|       | $k_{32}$      |        |            |             |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            |             |   |



**Πίνακας 4.15.** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

**Table 4.15:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M     |             |   |   |
|-------|---------------|------------|-------------|---|---|
|       |               | 2          | 3           | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          | 0           |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.537      | 0.537       |   |   |
| 1     | $k_1$         | -0.988972  | -0.913811   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.0526374 | -0.00502619 |   |   |
|       | $k_2$         | 0.0208599  |             |   |   |
|       | $\gamma_2$    | 0.00442659 |             |   |   |
|       | $k_3$         |            |             |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |             |   |   |
|       | $k_4$         |            |             |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |             |   |   |
| 2     | $k_{11}$      |            | -0.0784923  |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |            | -0.401404   |   |   |
|       | $k_{12}$      |            | 0.100129    |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |            | 0.0594989   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |             |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |             |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |             |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |             |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |             |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |             |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |             |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |             |   |   |

**Πίνακας 4.16.** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

**Table 4.16:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

| Order    | Term          | Rank M     |   |   |   |
|----------|---------------|------------|---|---|---|
|          |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| <b>0</b> | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|          | $\gamma_0$    | 0.7549     |   |   |   |
| <b>1</b> | $k_1$         | -2.72899   |   |   |   |
|          | $\gamma_1$    | -0.310381  |   |   |   |
|          | $k_2$         | 2.17351    |   |   |   |
|          | $\gamma_2$    | 1.69726    |   |   |   |
|          | $k_3$         | -0.442926  |   |   |   |
|          | $\gamma_3$    | -1.95208   |   |   |   |
|          | $k_4$         | 0.260516   |   |   |   |
|          | $\gamma_4$    | 3.53481    |   |   |   |
| <b>2</b> | $k_{11}$      | -0.535613  |   |   |   |
|          | $\gamma_{11}$ | -0.0113607 |   |   |   |
|          | $k_{12}$      | 0.0120029  |   |   |   |
|          | $\gamma_{12}$ | 0.0114759  |   |   |   |
|          | $k_{21}$      | 0.121313   |   |   |   |
|          | $\gamma_{21}$ | -0.177112  |   |   |   |
|          | $k_{22}$      | -0.11129   |   |   |   |
|          | $\gamma_{22}$ | 0.00532582 |   |   |   |
|          | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|          | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|          | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|          | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.17: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

**Table 4.17: Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

| Order    | Term          | Rank M     |   |   |   |
|----------|---------------|------------|---|---|---|
|          |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| <b>0</b> | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|          | $\gamma_0$    | 0.8048     |   |   |   |
| <b>1</b> | $k_1$         | -2.17984   |   |   |   |
|          | $\gamma_1$    | -0.091838  |   |   |   |
|          | $k_2$         | 1.31943    |   |   |   |
|          | $\gamma_2$    | 1.62292    |   |   |   |
|          | $k_3$         |            |   |   |   |
|          | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|          | $k_4$         |            |   |   |   |
|          | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| <b>2</b> | $k_{11}$      | -0.187261  |   |   |   |
|          | $\gamma_{11}$ | -0.0813856 |   |   |   |
|          | $k_{12}$      | 0.154559   |   |   |   |
|          | $\gamma_{12}$ | 0.0265844  |   |   |   |
|          | $k_{21}$      | 0.0528359  |   |   |   |
|          | $\gamma_{21}$ | -0.395513  |   |   |   |
|          | $k_{22}$      | -0.0502524 |   |   |   |
|          | $\gamma_{22}$ | 0.00164092 |   |   |   |
|          | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|          | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|          | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|          | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.18:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

**Table 4.18:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

| Order | Term          | Rank M      |   |             |   |
|-------|---------------|-------------|---|-------------|---|
|       |               | 2           | 3 | 6           | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0           |   | 0           |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.7529      |   | 0.7529      |   |
| 1     | $k_1$         | -1.27377    |   | -0.741987   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.00168804 |   | -0.00779522 |   |
|       | $k_2$         | 0.259667    |   | 0.0762676   |   |
|       | $\gamma_2$    | 0.816305    |   | 0.162479    |   |
|       | $k_3$         |             |   |             |   |
|       | $\gamma_3$    |             |   |             |   |
|       | $k_4$         |             |   |             |   |
|       | $\gamma_4$    |             |   |             |   |
| 2     | $k_{11}$      |             |   | -0.476415   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |             |   | 0.0379771   |   |
|       | $k_{12}$      |             |   | 0.0833635   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |             |   | -0.023733   |   |
|       | $k_{21}$      |             |   | 0.136037    |   |
|       | $\gamma_{21}$ |             |   | 0.70127     |   |
|       | $k_{22}$      |             |   | -0.150236   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |             |   | -0.272993   |   |
|       | $k_{31}$      |             |   |             |   |
|       | $\gamma_{31}$ |             |   |             |   |
|       | $k_{32}$      |             |   |             |   |
|       | $\gamma_{32}$ |             |   |             |   |

**Πίνακας 4.19:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

**Table 4.19:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.5922     |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -0.521937  |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -1.18649   |   |   |   |
|       | $k_2$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |            |   |   |   |
|       | $k_3$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | -0.467582  |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | 0.725293   |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | 0.324229   |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | -0.0335387 |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.20:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

**Table 4.20:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M    |   |   |   |
|-------|---------------|-----------|---|---|---|
|       |               | 2         | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0         |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.5853    |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -3.18644  |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -1.08745  |   |   |   |
|       | $k_2$         | 0.243373  |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    | 0.0165167 |   |   |   |
|       | $k_3$         | -0.240506 |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    | -1.12755  |   |   |   |
|       | $k_4$         |           |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |           |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |           |   |   |   |
|       | $k_{12}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |           |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |           |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |           |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |           |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |           |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |           |   |   |   |

**Πίνακας 4.21: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{s2}=150$  m/s**

**Table 4.21: Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{s2}=150$  m/s**

| Order    | Term          | Rank M     |            |   |   |
|----------|---------------|------------|------------|---|---|
|          |               | 2          | 3          | 6 | 8 |
| <b>0</b> | $k_0$         | 0          | 0          |   |   |
|          | $\gamma_0$    | 0.5713     | 0.5713     |   |   |
| <b>1</b> | $k_1$         | -0.954741  | -2.97201   |   |   |
|          | $\gamma_1$    | -0.0371068 | -1.2146    |   |   |
|          | $k_2$         | -0.0272109 | 2.06224    |   |   |
|          | $\gamma_2$    | -0.92554   | 1.49243    |   |   |
|          | $k_3$         |            | -0.0861079 |   |   |
|          | $\gamma_3$    |            | -0.98861   |   |   |
|          | $k_4$         |            |            |   |   |
|          | $\gamma_4$    |            |            |   |   |
| <b>2</b> | $k_{11}$      |            |            |   |   |
|          | $\gamma_{11}$ |            |            |   |   |
|          | $k_{12}$      |            |            |   |   |
|          | $\gamma_{12}$ |            |            |   |   |
|          | $k_{21}$      |            |            |   |   |
|          | $\gamma_{21}$ |            |            |   |   |
|          | $k_{22}$      |            |            |   |   |
|          | $\gamma_{22}$ |            |            |   |   |
|          | $k_{31}$      |            |            |   |   |
|          | $\gamma_{31}$ |            |            |   |   |
|          | $k_{32}$      |            |            |   |   |
|          | $\gamma_{32}$ |            |            |   |   |

**Πίνακας 4.22: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_I/b=0.5$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$**

**Table 4.22: Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_I/b=0.5$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$**

| Order | Term          | Rank M |            |            |   |
|-------|---------------|--------|------------|------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.9464     | 0.9464     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -0.102902  | -1.33344   |   |
|       | $\gamma_1$    |        | 2.7151     | -0.036374  |   |
|       | $k_2$         |        |            | 1.13087    |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            | 0.82908    |   |
|       | $k_3$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            |            |   |
|       | $k_4$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            |            |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | -0.896063  | -0.807113  |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | 1.3152     | 0.427847   |   |
|       | $k_{12}$      |        | 0.632294   | 0.444444   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | -0.0586452 | -0.116157  |   |
|       | $k_{21}$      |        |            | 0.0208397  |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            | -2.46599   |   |
|       | $k_{22}$      |        |            | -0.0193246 |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            | 0.0106507  |   |
|       | $k_{31}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            |            |   |
|       | $k_{32}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            |            |   |



**Πίνακας 4.23:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

**Table 4.23:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

| Order    | Term          | Rank M    |            |   |   |
|----------|---------------|-----------|------------|---|---|
|          |               | 2         | 3          | 6 | 8 |
| <b>0</b> | $k_0$         | 0         | 0          |   |   |
|          | $\gamma_0$    | 0.7818    | 0.7818     |   |   |
| <b>1</b> | $k_1$         | -1.89513  | -1.72137   |   |   |
|          | $\gamma_1$    | -0.255815 | -0.0996263 |   |   |
|          | $k_2$         | 0.919674  | 0.936735   |   |   |
|          | $\gamma_2$    | 1.70215   | 2.731      |   |   |
|          | $k_3$         |           | -0.218153  |   |   |
|          | $\gamma_3$    |           | -3.47377   |   |   |
|          | $k_4$         |           |            |   |   |
|          | $\gamma_4$    |           |            |   |   |
| <b>2</b> | $k_{11}$      |           |            |   |   |
|          | $\gamma_{11}$ |           |            |   |   |
|          | $k_{12}$      |           |            |   |   |
|          | $\gamma_{12}$ |           |            |   |   |
|          | $k_{21}$      |           |            |   |   |
|          | $\gamma_{21}$ |           |            |   |   |
|          | $k_{22}$      |           |            |   |   |
|          | $\gamma_{22}$ |           |            |   |   |
|          | $k_{31}$      |           |            |   |   |
|          | $\gamma_{31}$ |           |            |   |   |
|          | $k_{32}$      |           |            |   |   |
|          | $\gamma_{32}$ |           |            |   |   |

**Πίνακας 4.24:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

**Table 4.24:** Discrete element coefficients for horizontal mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

| Order | Term          | Rank M |            |            |   |
|-------|---------------|--------|------------|------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.6588     | 0.6588     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -1.24547   | -1.11423   |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.139895  | -0.0133986 |   |
|       | $k_2$         |        |            | 0.319392   |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            | 1.21442    |   |
|       | $k_3$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            |            |   |
|       | $k_4$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            |            |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 0.244199   | -0.140372  |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | -0.468975  | 0.0207121  |   |
|       | $k_{12}$      |        | -0.0069647 | 0.0158928  |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | 0.34923    | -0.0170934 |   |
|       | $k_{21}$      |        |            | -0.0528693 |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            | -0.147882  |   |
|       | $k_{22}$      |        |            | 0.0526392  |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            | 0.0242003  |   |
|       | $k_{31}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            |            |   |
|       | $k_{32}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            |            |   |

**Πίνακας 4.25: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

**Table 4.25: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

| Order | Term          | Rank M |            |             |   |
|-------|---------------|--------|------------|-------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6           | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0           |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.3034     | 0.3034      |   |
| 1     | $k_1$         |        | -1.38753   | -0.635185   |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.480531  | -0.025073   |   |
|       | $k_2$         |        |            | -0.751575   |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            | -0.313587   |   |
|       | $k_3$         |        |            |             |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            |             |   |
|       | $k_4$         |        |            |             |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            |             |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 0.394833   | 0.514128    |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | 0.178368   | 0.0375698   |   |
|       | $k_{12}$      |        | -0.541274  | -0.115752   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | -0.0283175 | -0.0374357  |   |
|       | $k_{21}$      |        |            | -0.0792641  |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            | 0.0201618   |   |
|       | $k_{22}$      |        |            | 0.0360762   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            | -0.00639784 |   |
|       | $k_{31}$      |        |            |             |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            |             |   |
|       | $k_{32}$      |        |            |             |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            |             |   |

**Πίνακας 4.26: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

**Table 4.26: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.3349     |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -0.922     |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.0357721 |   |   |   |
|       | $k_2$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |            |   |   |   |
|       | $k_3$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | -0.0715254 |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.279935  |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | 0.0850471  |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.00640385 |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.27: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

**Table 4.27: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.6617     |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -0.624439  |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.291685  |   |   |   |
|       | $k_2$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |            |   |   |   |
|       | $k_3$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | -0.385822  |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.0450827 |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | 0.23135    |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.0249918  |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.28:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την στροφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_I/b=0.5$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

**Table 4.28:** Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_I/b=0.5$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M |            |            |   |
|-------|---------------|--------|------------|------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.4799     | 0.4799     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -0.395336  | -0.744176  |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.720233  | -0.019094  |   |
|       | $k_2$         |        |            | -0.358434  |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            | -0.820404  |   |
|       | $k_3$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            |            |   |
|       | $k_4$         |        |            |            |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            |            |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | -0.597493  | -0.182646  |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | 0.150219   | -0.026344  |   |
|       | $k_{12}$      |        | 0.287179   | 0.102125   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | -0.0427496 | 0.0160127  |   |
|       | $k_{21}$      |        |            | 0.287141   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            | 0.140359   |   |
|       | $k_{22}$      |        |            | -0.332612  |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            | -0.0386904 |   |
|       | $k_{31}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            |            |   |
|       | $k_{32}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            |            |   |

**Πίνακας 4.29: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$**

**Table 4.29: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$**

| Order | Term          | Rank M |            |            |   |
|-------|---------------|--------|------------|------------|---|
|       |               | 2      | 3          | 6          | 8 |
| 0     | $k_0$         |        | 0          | 0          |   |
|       | $\gamma_0$    |        | 0.3835     | 0.3835     |   |
| 1     | $k_1$         |        | -1.03016   | -3.33339   |   |
|       | $\gamma_1$    |        | -0.0784209 | -0.526335  |   |
|       | $k_2$         |        |            | 2.14018    |   |
|       | $\gamma_2$    |        |            | 0.643955   |   |
|       | $k_3$         |        |            | -0.329848  |   |
|       | $\gamma_3$    |        |            | -1.11247   |   |
|       | $k_4$         |        |            | 0.0972089  |   |
|       | $\gamma_4$    |        |            | 0.9356     |   |
| 2     | $k_{11}$      |        | 0.0362535  | 0.441244   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |        | -0.291038  | -0.0318377 |   |
|       | $k_{12}$      |        | -0.0279737 | -0.0402498 |   |
|       | $\gamma_{12}$ |        | 0.00563803 | 0.0248741  |   |
|       | $k_{21}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{21}$ |        |            |            |   |
|       | $k_{22}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{22}$ |        |            |            |   |
|       | $k_{31}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{31}$ |        |            |            |   |
|       | $k_{32}$      |        |            |            |   |
|       | $\gamma_{32}$ |        |            |            |   |

**Πίνακας 4.30:** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στροφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

**Table 4.30:** Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{sl}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M     |             |   |   |
|-------|---------------|------------|-------------|---|---|
|       |               | 2          | 3           | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          | 0           |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.3594     | 0.3594      |   |   |
| 1     | $k_1$         | -0.849578  | -0.970284   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.0682304 | -0.0430916  |   |   |
|       | $k_2$         | -0.144369  |             |   |   |
|       | $\gamma_2$    | -0.228035  |             |   |   |
|       | $k_3$         |            |             |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |             |   |   |
|       | $k_4$         |            |             |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |             |   |   |
| 2     | $k_{11}$      |            | -0.0169528  |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |            | -0.175309   |   |   |
|       | $k_{12}$      |            | 0.018079    |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |            | 0.000402158 |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |             |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |             |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |             |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |             |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |             |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |             |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |             |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |             |   |   |



**Πίνακας 4.31: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στροφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

**Table 4.31: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.4022     |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -1.28582   |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.245873  |   |   |   |
|       | $k_2$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |            |   |   |   |
|       | $k_3$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | 0.31446    |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.0446563 |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | -0.0109286 |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.0368677  |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.32: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωτική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=150\text{m/s}$**

**Table 4.32: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=150\text{m/s}$**

| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.4034     |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -1.14204   |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.17688   |   |   |   |
|       | $k_2$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |            |   |   |   |
|       | $k_3$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | 0.14206    |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.125514  |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | -0.0479353 |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.0387211  |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.33. Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{s2}=150$  m/s**

**Table 4.33: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{s2}=150$  m/s**

| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.359      |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -1.06278   |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.127401  |   |   |   |
|       | $k_2$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |            |   |   |   |
|       | $k_3$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | 0.073791   |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.109073  |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | -0.0358484 |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.0198494  |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.34.** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_l/b=0.5$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

**Table 4.34:** Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_l/b=0.5$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

| Order | Term          | Rank M      |             |   |   |
|-------|---------------|-------------|-------------|---|---|
|       |               | 2           | 3           | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0           | 0           |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.7772      | 0.7772      |   |   |
| 1     | $k_1$         | -0.621057   | -0.193517   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.00992842 | -0.00863497 |   |   |
|       | $k_2$         | -0.362854   | -0.66003    |   |   |
|       | $\gamma_2$    | -0.41626    | -0.179025   |   |   |
|       | $k_3$         |             | -0.140014   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |             | -0.480486   |   |   |
|       | $k_4$         |             |             |   |   |
|       | $\gamma_4$    |             |             |   |   |
| 2     | $k_{11}$      |             |             |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |             |             |   |   |
|       | $k_{12}$      |             |             |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |             |             |   |   |
|       | $k_{21}$      |             |             |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |             |             |   |   |
|       | $k_{22}$      |             |             |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |             |             |   |   |
|       | $k_{31}$      |             |             |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |             |             |   |   |
|       | $k_{32}$      |             |             |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |             |             |   |   |

**Πίνακας 4.35: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στροφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sl}=250$  m/s,  $V_{slq}=25$ m/s**

**Table 4.35: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sl}=250$  m/s,  $V_{slq}=25$ m/s**

| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.3857     |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -1.23177   |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.0003339 |   |   |   |
|       | $k_2$         | 0.76861    |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    | 0.653135   |   |   |   |
|       | $k_3$         | -0.541409  |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    | -0.836541  |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{12}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

**Πίνακας 4.36: Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{slq}=25$  m/s**

**Table 4.36: Discrete element coefficients for rocking mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250$  m/s,  $V_{slq}=25$  m/s**

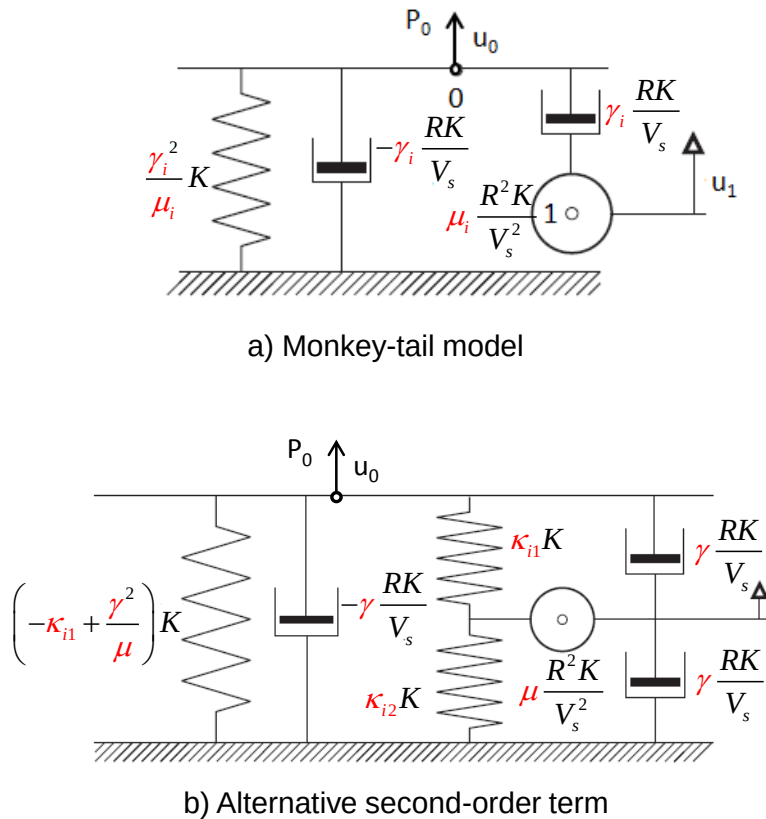
| Order | Term          | Rank M     |   |   |   |
|-------|---------------|------------|---|---|---|
|       |               | 2          | 3 | 6 | 8 |
| 0     | $k_0$         | 0          |   |   |   |
|       | $\gamma_0$    | 0.3517     |   |   |   |
| 1     | $k_1$         | -0.917133  |   |   |   |
|       | $\gamma_1$    | -0.0515988 |   |   |   |
|       | $k_2$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_2$    |            |   |   |   |
|       | $k_3$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_3$    |            |   |   |   |
|       | $k_4$         |            |   |   |   |
|       | $\gamma_4$    |            |   |   |   |
| 2     | $k_{11}$      | -0.0717603 |   |   |   |
|       | $\gamma_{11}$ | -0.114118  |   |   |   |
|       | $k_{12}$      | 0.0879053  |   |   |   |
|       | $\gamma_{12}$ | 0.128981   |   |   |   |
|       | $k_{21}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{21}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{22}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{22}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{31}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{31}$ |            |   |   |   |
|       | $k_{32}$      |            |   |   |   |
|       | $\gamma_{32}$ |            |   |   |   |

### 4.3 Θετικοί συντελεστές προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων

Όπως ήδη αναφέρθηκε, για ορισμένες περιπτώσεις από τις παραπάνω κατέστη δυνατό να προκύψουν προσομοιώματα με θετικούς συντελεστές, ειδικά για τις σταθερές των ελατηρίων. Για τους όρους πρώτης τάξης, αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή μάζας έτσι ώστε να προκύπτει το εναλλακτικό προσομοίωμα πρώτης τάξης, που είναι γνωστό ως *monkey-tail*. Με τη συγκεκριμένη τροποποίηση εξασφαλίζεται πάντα θετική τιμή για τη σταθερά του ελατηρίου. Για τους όρους δεύτερης τάξης, με την εισαγωγή μάζας απαλείφεται ο ένας από τους δύο βαθμούς ελευθερίας και ενδέχεται να προκύψουν θετικοί συντελεστές. Σε αντίθεση με το *monkey-tail*, το εναλλακτικό προσομοίωμα δεύτερης τάξης δεν εξασφαλίζει θετικές τιμές στις σταθερές των ελατηρίων και αποσβεστήρων.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι ακόμη και αν εξασφαλισθούν θετικές τιμές για τους συντελεστές  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\kappa_{i1}$  και  $\kappa_{i2}$  του εναλλακτικού όρου δεύτερης τάξης, ο συντελεστής  $-\kappa_{i1} + \gamma^2/\mu$  μπορεί να προκύψει αρνητικός, όπως συμβαίνει σε κάποιες από τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται ακολούθως.

Στο Σχήμα 4.15 φαίνονται οι εναλλακτικοί όροι πρώτης και δεύτερης τάξης και σημειώνονται με κόκκινο χρώμα, οι συντελεστές που προσδιορίζονται για κάθε περίπτωση. Οι τιμές αυτών των συντελεστών δίνονται στους Πίνακες 4.37-4.51.



Σχήμα 4.15: Εναλλακτικοί όροι πρώτης και δεύτερης τάξης  
Figure 4.15: Alternative first-order and second-order terms

**Πίνακας 4.37. Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

**Table 4.37: Coefficients of alternative discrete elements for rocking mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

| Order | Term       | Rank M |              |
|-------|------------|--------|--------------|
|       |            | 2      | 3            |
| 0     | $k_0$      |        | 0            |
|       | $\gamma_0$ |        | 0.4628       |
| 1     | $k$        |        |              |
|       | $\gamma$   |        |              |
|       | $k_1$      |        | 0.75344      |
|       | $\gamma_1$ |        | 0.00570701   |
|       | $\mu_1$    |        | 0.0000432284 |
|       | $k_2$      |        |              |
|       | $\gamma_2$ |        |              |
|       | $\mu_2$    |        |              |
|       | $k_3$      |        |              |
|       | $\gamma_3$ |        |              |
|       | $\mu_3$    |        |              |
| 2     | $\mu$      |        | 1.05729      |
|       | $k_{11}$   |        | 0.154272     |
|       | $k_{12}$   |        | 0.369464     |
|       | $\gamma$   |        | 0.466161     |



**Πίνακας 4.38.** Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

**Table 4.38.** Coefficients of alternative discrete elements for horizontal mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{ m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

| Order | Term       | Rank M     |              |
|-------|------------|------------|--------------|
|       |            | 2          | 3            |
| 0     | $k_0$      | 0          | 0            |
|       | $\gamma_0$ | 0.537      | 0.537        |
| 1     | $k$        | 0.0208599  |              |
|       | $\gamma$   | 0.00442659 |              |
|       | $k_1$      | 0.988972   | 0.913811     |
|       | $\gamma_1$ | 0.0526374  | 0.00502619   |
|       | $\mu_1$    | 0.00280159 | 0.0000276453 |
|       | $k_2$      |            |              |
|       | $\gamma_2$ |            |              |
|       | $\mu_2$    |            |              |
|       | $k_3$      |            |              |
|       | $\gamma_3$ |            |              |
|       | $\mu_3$    |            |              |
| 2*    | $\mu$      |            | 2.42984      |
|       | $k_{11}$   |            | 0.347681     |
|       | $k_{12}$   |            | 0.451923     |
|       | $\gamma$   |            | 0.679382     |

\* Για τον όρο δεύτερης τάξης ο συντελεστής  $(-\kappa_{11}+\gamma^2/\mu)$  προκύπτει αρνητικός.

**Πίνακας 4.39.** Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{m/s}$

**Table 4.39.** Coefficients of alternative discrete elements for horizontal mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{s1}=100\text{ m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

| Order | Term       | Rank M |          |
|-------|------------|--------|----------|
|       |            | 2      | 3        |
| 0     | $k_0$      |        | 0        |
|       | $\gamma_0$ |        | 0.7549   |
| 1     | $k$        |        | 2.17351  |
|       | $\gamma$   |        | 1.69726  |
|       | $k_1$      |        | 2.72899  |
|       | $\gamma_1$ |        | 0.310381 |
|       | $\mu_1$    |        | 0.035301 |
|       | $k_2$      |        | 0.442926 |
|       | $\gamma_2$ |        | 1.95208  |
|       | $\mu_2$    |        | 8.60325  |
|       | $k_3$      |        |          |
|       | $\gamma_3$ |        |          |
|       | $\mu_3$    |        |          |
| 2     | $\mu$      |        |          |
|       | $k_{11}$   |        |          |
|       | $k_{12}$   |        |          |
|       | $\gamma$   |        |          |

**Πίνακας 4.40.** Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{sI}=100\text{m/s}$ ,  $V_{sliq}=25\text{m/s}$

**Table 4.40.** Coefficients of alternative discrete elements for horizontal mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{sI}=100\text{ m/s}$ ,  $V_{sliq}=25\text{ m/s}$

| Order | Term       | Rank M                   |   |
|-------|------------|--------------------------|---|
|       |            | 2                        | 3 |
| 0     | $k_0$      | 0                        |   |
|       | $\gamma_0$ | 0.7529                   |   |
| 1     | $k$        | 0.259667                 |   |
|       | $\gamma$   | 0.816305                 |   |
|       | $k_1$      | 1.27377                  |   |
|       | $\gamma_1$ | 0.00168804               |   |
|       | $\mu_1$    | $2.23704 \times 10^{-6}$ |   |
|       | $k_2$      |                          |   |
|       | $\gamma_2$ |                          |   |
|       | $\mu_2$    |                          |   |
|       | $k_3$      |                          |   |
|       | $\gamma_3$ |                          |   |
|       | $\mu_3$    |                          |   |
| 2     | $\mu$      |                          |   |
|       | $k_{11}$   |                          |   |
|       | $k_{12}$   |                          |   |
|       | $\gamma$   |                          |   |

**Πίνακας 4.41. Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

**Table 4.41. Coefficients of alternative discrete elements for horizontal mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$**

| Order | Term       | Rank M |           |
|-------|------------|--------|-----------|
|       |            | 2      | 3         |
| 0     | $k_0$      |        | 0         |
|       | $\gamma_0$ |        | 0.5853    |
| 1     | $k$        |        | 0.243373  |
|       | $\gamma$   |        | 0.0165167 |
|       | $k_1$      |        | 3.18644   |
|       | $\gamma_1$ |        | 1.08745   |
|       | $\mu_1$    |        | 0.371117  |
|       | $k_2$      |        | 0.240506  |
|       | $\gamma_2$ |        | 1.12755   |
|       | $\mu_2$    |        | 5.28621   |
|       | $k_3$      |        |           |
|       | $\gamma_3$ |        |           |
|       | $\mu_3$    |        |           |
| 2     | $\mu$      |        |           |
|       | $k_{11}$   |        |           |
|       | $k_{12}$   |        |           |
|       | $\gamma$   |        |           |

**Πίνακας 4.42. Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$**

**Table 4.42. Coefficients of alternative discrete elements for horizontal mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$**

| Order | Term       | Rank M     |           |
|-------|------------|------------|-----------|
|       |            | 2          | 3         |
| 0     | $k_0$      | 0          | 0         |
|       | $\gamma_0$ | 0.5713     | 0.5713    |
| 1     | $k$        |            | 2.06224   |
|       | $\gamma$   |            | 1.49243   |
|       | $k_1$      | 0.954741   | 2.97201   |
|       | $\gamma_1$ | 0.0371068  | 1.2146    |
|       | $\mu_1$    | 0.00144219 | 0.496383  |
|       | $k_2$      | 0.0272109  | 0.0861079 |
|       | $\gamma_2$ | 0.92554    | 0.98861   |
|       | $\mu_2$    | 31.481     | 11.3503   |
|       | $k_3$      |            |           |
|       | $\gamma_3$ |            |           |
|       | $\mu_3$    |            |           |
| 2     | $\mu$      |            |           |
|       | $k_{11}$   |            |           |
|       | $k_{12}$   |            |           |
|       | $\gamma$   |            |           |

**Πίνακας 4.43. Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την οριζόντια συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sI}=250\text{m/s}$ ,  $V_{sliq}=25\text{m/s}$**

**Table 4.43. Coefficients of alternative discrete elements for horizontal mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sI}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{sliq}=25\text{ m/s}$**

| Order | Term       | Rank M    |            |
|-------|------------|-----------|------------|
|       |            | 2         | 3          |
| 0     | $k_0$      | 0         | 0          |
|       | $\gamma_0$ | 0.7818    | 0.7818     |
| 1     | $k$        | 0.919674  | 0.936735   |
|       | $\gamma$   | 1.70215   | 2.731      |
|       | $k_1$      | 1.89513   | 1.72137    |
|       | $\gamma_1$ | 0.255815  | 0.0996263  |
|       | $\mu_1$    | 0.0345313 | 0.00576598 |
|       | $k_2$      |           | 0.218153   |
|       | $\gamma_2$ |           | 3.47377    |
|       | $\mu_2$    |           | 55.3148    |
|       | $k_3$      |           |            |
|       | $\gamma_3$ |           |            |
|       | $\mu_3$    |           |            |
| 2     | $\mu$      |           |            |
|       | $k_{11}$   |           |            |
|       | $k_{12}$   |           |            |
|       | $\gamma$   |           |            |

**Πίνακας 4.44.** Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την στρωτική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{sl}=100$  m/s,  $V_{slq}=25$  m/s

**Table 4.44.** Coefficients of alternative discrete elements for rocking mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{sl}=100$  m/s,  $V_{slq}=25$  m/s

| Order | Term       | Rank M     |   |
|-------|------------|------------|---|
|       |            | 2          | 3 |
| 0     | $k_0$      | 0          |   |
|       | $\gamma_0$ | 0.3594     |   |
| 1     | $k$        |            |   |
|       | $\gamma$   |            |   |
|       | $k_1$      | 0.849578   |   |
|       | $\gamma_1$ | 0.0682304  |   |
|       | $\mu_1$    | 0.00547965 |   |
|       | $k_2$      | 0.144369   |   |
|       | $\gamma_2$ | 0.228035   |   |
|       | $\mu_2$    | 0.360188   |   |
|       | $k_3$      |            |   |
|       | $\gamma_3$ |            |   |
|       | $\mu_3$    |            |   |
| 2     | $\mu$      |            |   |
|       | $k_{11}$   |            |   |
|       | $k_{12}$   |            |   |
|       | $\gamma$   |            |   |

**Πίνακας 4.45. Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

**Table 4.45. Coefficients of alternative discrete elements for rocking mode:  $h_1/b=0.5$ ,  $V_{sl}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

| Order | Term       | Rank M      |             |
|-------|------------|-------------|-------------|
|       |            | 2           | 3           |
| 0     | $k_0$      | 0           | 0           |
|       | $\gamma_0$ | 0.7772      | 0.7772      |
| 1     | $k$        |             |             |
|       | $\gamma$   |             |             |
|       | $k_1$      | 0.621057    | 0.193517    |
|       | $\gamma_1$ | 0.00992842  | 0.00863497  |
|       | $\mu_1$    | 0.000158719 | 0.000385302 |
|       | $k_2$      | 0.362854    | 0.66003     |
|       | $\gamma_2$ | 0.41626     | 0.179025    |
|       | $\mu_2$    | 0.477527    | 0.0485584   |
|       | $k_3$      |             | 0.140014    |
|       | $\gamma_3$ |             | 0.480486    |
|       | $\mu_3$    |             | 1.64889     |
| 2     | $\mu$      |             |             |
|       | $k_{11}$   |             |             |
|       | $k_{12}$   |             |             |
|       | $\gamma$   |             |             |



**Πίνακας 4.46.** Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωτική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

**Table 4.46.** Coefficients of alternative discrete elements for rocking mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{sl}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

| Order | Term       | Rank M |                          |
|-------|------------|--------|--------------------------|
|       |            | 2      | 3                        |
| 0     | $k_0$      |        | 0                        |
|       | $\gamma_0$ |        | 0.3857                   |
| 1     | $k$        |        | 0.76861                  |
|       | $\gamma$   |        | 0.653135                 |
|       | $k_1$      |        | 1.23177                  |
|       | $\gamma_1$ |        | 0.000333904              |
|       | $\mu_1$    |        | $9.05133 \times 10^{-8}$ |
|       | $k_2$      |        | 0.541409                 |
|       | $\gamma_2$ |        | 0.836541                 |
|       | $\mu_2$    |        | 1.29255                  |
|       | $k_3$      |        |                          |
|       | $\gamma_3$ |        |                          |
|       | $\mu_3$    |        |                          |
| 2     | $\mu$      |        |                          |
|       | $k_{11}$   |        |                          |
|       | $k_{12}$   |        |                          |
|       | $\gamma$   |        |                          |

**Πίνακας 4.47. Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στροφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{sl}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

**Table 4.47. Coefficients of alternative discrete elements for rocking mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{sl}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$**

| Order | Term       | Rank M |           |
|-------|------------|--------|-----------|
|       |            | 2      | 3         |
| 0     | $k_0$      |        | 0         |
|       | $\gamma_0$ |        | 0.3517    |
| 1     | $k$        |        |           |
|       | $\gamma$   |        |           |
|       | $k_1$      |        | 0.917133  |
|       | $\gamma_1$ |        | 0.0515988 |
|       | $\mu_1$    |        | 0.002903  |
|       | $k_2$      |        |           |
|       | $\gamma_2$ |        |           |
|       | $\mu_2$    |        |           |
|       | $k_3$      |        |           |
|       | $\gamma_3$ |        |           |
|       | $\mu_3$    |        |           |
| 2     | $\mu$      |        | 0.491307  |
|       | $k_{11}$   |        | 0.0629324 |
|       | $k_{12}$   |        | 0.147626  |
|       | $\gamma$   |        | 0.185223  |

**Πίνακας 4.48.** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στροφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{m/s}$

**Table 4.48.** Coefficients of alternative discrete elements for rocking mode:  $h_1/b=1$ ,  $V_{s1}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

| Order | Term       | Rank M |           |
|-------|------------|--------|-----------|
|       |            | 2      | 3         |
| 0     | $k_0$      |        | 0         |
|       | $\gamma_0$ |        | 0.4034    |
| 1     | $k$        |        |           |
|       | $\gamma$   |        |           |
|       | $k_1$      |        | 1.14204   |
|       | $\gamma_1$ |        | 0.17688   |
|       | $\mu_1$    |        | 0.0273952 |
|       | $k_2$      |        |           |
|       | $\gamma_2$ |        |           |
|       | $\mu_2$    |        |           |
|       | $k_3$      |        |           |
|       | $\gamma_3$ |        |           |
|       | $\mu_3$    |        |           |
| 2*    | $\mu$      |        | 0.521523  |
|       | $k_{11}$   |        | 0.497449  |
|       | $k_{12}$   |        | 0.233288  |
|       | $\gamma$   |        | 0.338729  |

\* Για τον όρο δεύτερης τάξης ο συντελεστής  $(-k_{11}+\gamma^2/\mu)$  προκύπτει αρνητικός.

**Πίνακας 4.49. Συντελεστές εναλλακτικού προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για τη στρωφική συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$**

**Table 4.49. Coefficients of alternative discrete elements for rocking mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$**

| Order | Term       | Rank M |           |
|-------|------------|--------|-----------|
|       |            | 2      | 3         |
| 0     | $k_0$      |        | 0         |
|       | $\gamma_0$ |        | 0.359     |
| 1     | $k$        |        |           |
|       | $\gamma$   |        |           |
|       | $k_1$      |        | 1.06278   |
|       | $\gamma_1$ |        | 0.127401  |
|       | $\mu_1$    |        | 0.0152722 |
|       | $k_2$      |        |           |
|       | $\gamma_2$ |        |           |
|       | $\mu_2$    |        |           |
|       | $k_3$      |        |           |
|       | $\gamma_3$ |        |           |
|       | $\mu_3$    |        |           |
| 2*    | $\mu$      |        | 0.400572  |
|       | $k_{11}$   |        | 0.334441  |
|       | $k_{12}$   |        | 0.154989  |
|       | $\gamma$   |        | 0.247353  |

\* Για τον όρο δεύτερης τάξης ο συντελεστής  $(-\kappa_{11}+\gamma^2/\mu)$  προκύπτει αρνητικός.

**Πίνακας 4.50.** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

**Table 4.50.** Coefficients of alternative discrete elements for vertical mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=100\text{ m/s}$ ,  $V_{s2}=150\text{ m/s}$

| Order | Term       | Rank M |           |
|-------|------------|--------|-----------|
|       |            | 2      | 3         |
| 0     | $k_0$      |        | 0         |
|       | $\gamma_0$ |        | 0.6773    |
| 1     | $k$        |        |           |
|       | $\gamma$   |        |           |
|       | $k_1$      |        | 1.33035   |
|       | $\gamma_1$ |        | 0.259161  |
|       | $\mu_1$    |        | 0.0504863 |
|       | $k_2$      |        |           |
|       | $\gamma_2$ |        |           |
|       | $\mu_2$    |        |           |
|       | $k_3$      |        |           |
|       | $\gamma_3$ |        |           |
|       | $\mu_3$    |        |           |
| 2*    | $\mu$      |        | 1.86947   |
|       | $k_{11}$   |        | 1.40671   |
|       | $k_{12}$   |        | 0.486044  |
|       | $\gamma$   |        | 1.07476   |

\* Για τον όρο δεύτερης τάξης ο συντελεστής  $(-k_{11}+\gamma^2/\mu)$  προκύπτει αρνητικός.

**Πίνακας 4.51.** Συντελεστές προσομοιώματος διακριτών παραμέτρων για την κατακόρυφη συνιστώσα της δυναμικής δυσκαμψίας:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

**Table 4.51.** Coefficients of alternative discrete elements for vertical mode:  $h_1/b=2$ ,  $V_{s1}=250\text{ m/s}$ ,  $V_{slq}=25\text{ m/s}$

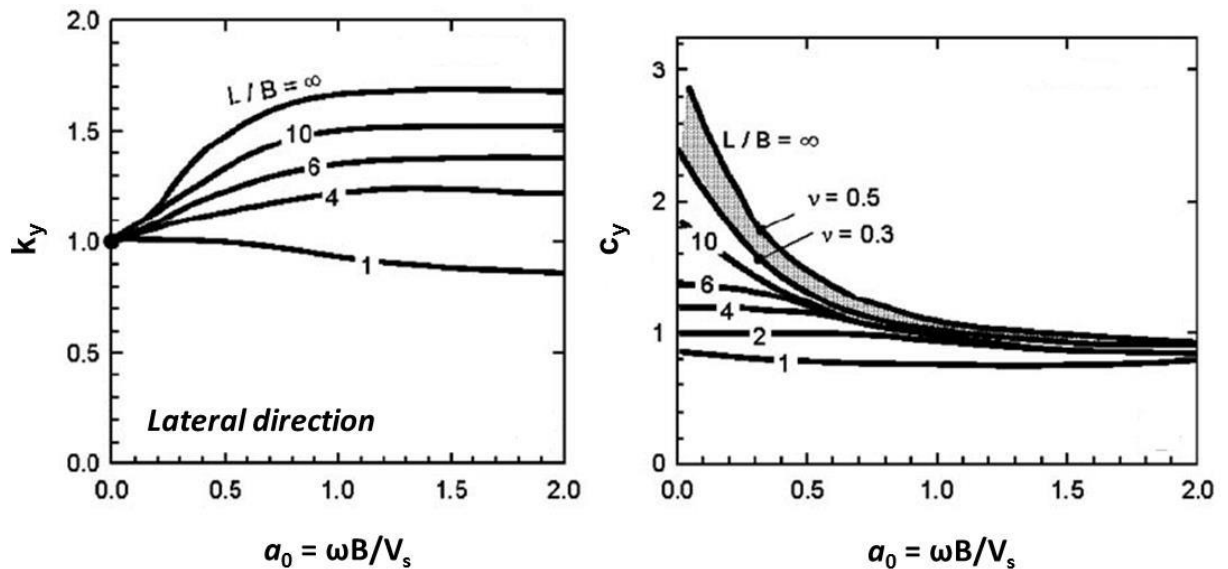
| Order | Term       | Rank M |          |
|-------|------------|--------|----------|
|       |            | 2      | 3        |
| 0     | $k_0$      |        | 0        |
|       | $\gamma_0$ |        | 1.2098   |
| 1     | $k$        |        | 1.94023  |
|       | $\gamma$   |        | 2.96581  |
|       | $k_1$      |        | 2.52257  |
|       | $\gamma_1$ |        | 0.682549 |
|       | $\mu_1$    |        | 0.184682 |
|       | $k_2$      |        | 0.410582 |
|       | $\gamma_2$ |        | 4.34478  |
|       | $\mu_2$    |        | 45.9765  |
|       | $k_3$      |        |          |
|       | $\gamma_3$ |        |          |
|       | $\mu_3$    |        |          |
| 2     | $\mu$      |        |          |
|       | $k_{11}$   |        |          |
|       | $k_{12}$   |        |          |
|       | $\gamma$   |        |          |

## 5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΑ ΘΕΜΕΛΙΑ

Η ελαστοδυναμική ανάλυση και η ανάπτυξη προσομοιωμάτων διακριτών παραμέτρων που περιγράφηκαν στα Κεφάλαια 3 και 4 αφορούν σε τετραγωνικά θεμέλια. Ο λόγος είναι ότι τα εύχρηστα προσομοιώματα κώνων που υιοθετήθηκαν στις αναλύσεις δεν λαμβάνουν εύκολα υπόψη φαινόμενα κυματικής διάδοσης και αλληλεπίδρασης εδαφους-θεμελίου κατά την οριζόντια έννοια, τα οποία είναι απαραίτητα για την ανάλυση του προβλήματος σε επιμήκη θεμέλια. Σύμφωνα με σχετικές παρατηρήσεις των Wolf & Deeks (2004) αλλά και άλλα στοιχεία από τη βιβλιογραφία, τα διαθέσιμα αποτελέσματα μπορούν να εφαρμοστούν προσεγγιστικά και σε ορθογωνικά θεμέλια με λόγο ακμής ( $L/B$ ) μέχρι περίπου 4. Με την απλοποιητική αλλά εύλογη υπόθεση ότι οι δυναμικοί συντελεστές ορθογωνικών θεμελίων είναι περίπου ίδιοι, η διαφοροποίηση έγκειται μόνο στις τιμές των συντελεστών στατικής στιφρότητας, οι οποίες υπολογίζονται συναρτήσει των αντίστοιχων συντελεστών τετραγωνικών θεμελίων με βάση τον Πίνακα 5.1 και των εξισώσεων 5.1 έως 5.6.

Για ένα ορθογωνικό θεμέλιο πλάτους  $B$  και μήκους  $L$ , η μεταβολή της δυναμικής δυσκαμψίας και απόσβεσης με τη συχνότητα κατά την οριζόντια έννοια δίνονται στο Σχήμα 5.1 (Mylonakis et al 2006). Η κανονικοποίηση έχει γίνει ως προς τη στατική στιφρότητα του ορθογωνικού θεμελίου. Παρατηρούμε ότι η μορφή της συνάρτησης εμπέδησης είναι περίπου ίδια για τους διαφορετικούς λόγους  $L/B$ , μέχρι περίπου την προαναφερθείσα τιμή.

Για μεγαλύτερες τιμές του λόγου  $L/B$ , το πρόβλημα μετατρέπεται σταδιακά σε πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης, και έτσι η στατική στιφρότητα ανά μέτρο μήκους θεμελίου μειώνεται σημαντικά, ενώ αυξάνεται η απόσβεση λόγω φαινομένων κυματικής συμβολής.



Σχήμα 5.1: Μεταβολή δυναμικής δυσκαμψίας ορθογωνικού θεμελίου για οριζόντια μορφή ταλάντωσης συναρτήσει της συχνότητας (Mylonakis et al 2006)

Figure 5.1: Frequency-dependent spring and damper for horizontal motion of rectangular foundation (Mylonakis et al 2006)

Τα ίδια ισχύουν και αναφορικά με τους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή για την κατακόρυφη ταλάντωση και τον λικνισμό.

Επομένως, τα ορθογωνικά θεμέλια με λόγο μεγάλης προς μικρής πλευράς στο διάστημα  $1 < L/B < 4$  μπορούν να αντιμετωπιστούν, ως πρώτη προσέγγιση, μέσω ισοδύναμων τετραγωνικών θεμελίων, με την προϋπόθεση ότι οι συντελεστές στατικής δυσκαμψίας πολλαπλασιάζονται με έναν συντελεστή ο οποίος λαμβάνει υπόψη τη διαφορά στο σχήμα, με την υπόθεση ότι η μικρή διάσταση του θεμελίου,  $B$ , είναι η ίδια και στις δύο γεωμετρίες. Δηλαδή

$$K_{ij}^{(\text{rectangular})} = \chi_{ij} K_{ij}^{(\text{square})} \quad (5.1)$$

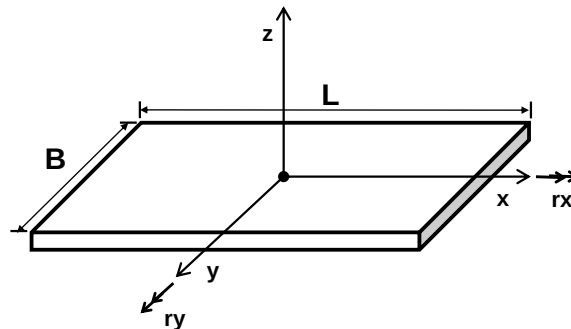
Ο Πίνακας 5.1 παρέχει τις τιμές συντελεστών  $\chi_{ij}$  για την τροποποίηση της στατικής στιφρότητας. Σημειώνεται ότι καθώς το θεμέλιο μεγαλώνει σε μήκος, η απόλυτη τιμή της στιφρότητας αυξάνεται επίσης, αλλά η ένταση της στιφρότητας, δηλαδή η στιφρότητα ανά τρέχον μέτρο θεμελίου κατά τη διεύθυνση  $L$ , μειώνεται.



**Πίνακας 5.1. Τροποποιητικοί συντελεστές για στατική στιφρότητα για ορθογωνικά θεμέλια ( $1 < L/B < 4$ )**

**Table 5.1. Modification factors for static stiffness for foundations of rectangular shape ( $1 < L/B < 4$ )**

| Oscillation mode                       | Static Stiffness modifier $\chi_{ij}$ |                     |                     |                     |
|----------------------------------------|---------------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                                        | Rectangular (L/B=1)                   | Rectangular (L/B=2) | Rectangular (L/B=3) | Rectangular (L/B=4) |
| Vertical, z                            | 1                                     | 1.45                | 1.84                | 2.21                |
| Horizontal, y (lateral direction)      | 1                                     | 1.51                | 1.95                | 2.35                |
| Horizontal, x (longitudinal direction) | 1                                     | 1.42                | 1.77                | 2.08                |
| Rocking, rx (around x axis)            | 1                                     | 1.8                 | 2.6                 | 3.4                 |
| Rocking, ry (around y axis)            | 1                                     | 4.98                | 13.1                | 26                  |



Για ενδιαμέσες τιμές του λόγου ( $L/B$ ) συνιστάται η χρήση των σχέσεων (Pais & Kausel 1988, Mylonakis et al 2006)

$$K_z^{(\text{rectangular})} = \left[ 0.66 \left( \frac{L}{B} \right)^{0.75} + 0.34 \right] K_z^{(\text{square})} \quad (5.2)$$

$$K_y^{(\text{rectangular})} = \left[ 0.74 \left( \frac{L}{B} \right)^{0.65} + 0.09 \left( \frac{L}{B} \right) + 0.17 \right] K_y^{(\text{square})} \quad (5.3)$$

## Κεφάλαιο 5. Εφαρμογή της μεθόδου σε ορθογωνικά θεμέλια

$$K_x^{(\text{rectangular})} = \left[ 0.74 \left( \frac{L}{B} \right)^{0.65} + 0.26 \right] K_x^{(\text{square})} \quad (5.4)$$

$$K_{rx}^{(\text{rectangular})} = \left[ 0.8 \left( \frac{L}{B} \right) + 0.2 \right] K_{rx}^{(\text{square})} \quad (5.5)$$

$$K_{ry}^{(\text{rectangular})} = \left[ 0.93 \left( \frac{L}{B} \right)^{2.4} + 0.07 \right] K_{ry}^{(\text{square})} \quad (5.6)$$

Στις οποίες  $B$  = κοινό μήκος ακμής τετραγωνικού και ορθογωνικού θεμελίου,  $L$  = μήκος ακμής ορθογωνικού θεμελίου ( $L > B$ ).

## Βιβλιογραφία

- Andersen L., (2002), *Wave propagation in infinite structures and media*. Phd thesis, Department of Civil Engineering, Aalborg University, Denmark.
- Anoyatis, G. and Mylonakis, G. (2012). ‘Dynamic Winkler modulus for axially loaded piles’. *Geotechnique*, Vol. 62, pp. 521-536.
- Buckingham, E. (1914). ‘On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations’. *Physical Review* **4** (4): 345–376.
- De Barros, F. C. P. and Luco, J. E., (1990). “Discrete Models for Vertical Vibrations of Surface and Embedded Foundations,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 289-303.
- Drosos, S. and Mylonakis, G. (2008). “Energy solutions for stiffness and damping of single piles in inhomogeneous soil”, Diploma thesis, in Greek
- Gazetas G. and Dobry R. (1984). ‘Horizontal response of piles in layered soils’, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 110:1, pp. 20-40.
- Gazetas, G. (1991). “Formulas and charts for impedances of surface and embedded foundations.”, *Journal of Geotechnical Engineering*, 117(9), 1363–1381.
- Ibsen, LB. and Liingaard, M. (2006), *Lumped-parameter models*. Aalborg University, Department of Civil Engineering, Aalborg. DCE Technical Reports, no. 11
- Lysmer, J., et al., 1999, “SASSI2000 – Theoretical Manual,” Revision 1, Geotechnical Engineering, University of California, Berkeley.
- Miwa, S. and Ikeda, T. (2006), ‘Shear modulus and strain of liquefied ground and their application to evaluation of the response of foundation structures’, *Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE*, Vol. 23, No.1, pp. 167-179
- Mylonakis, G., Nikolaou, S., Gazetas, G., (2006). ‘Footings under seismic loading: Analysis and design issues with emphasis on bridge foundations’, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26, Issue 9, 824-853.
- Pais, A., and Kausel, E. (1988). "Approximate formulas for dynamic stiffness of rigid foundations." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 7, 213-227.
- Saitoh, M., (2012). ‘On the performance of lumped parameter models with gyro-mass elements for the impedance function of a pile-group supporting a single-degree-of-freedom system’, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.41, pp.623-641.
- Stewart et al (2013). ‘Soil-structure interaction for building structures’, Technical Report NIST GCR 12-917-21
- Theocharis, A., (2011). *Numerical analysis of liquefied ground response under harmonic seismic excitation – Variable thickness of liquefied layer*. Diploma thesis, Department of Civil Engineering, NTUA, Greece (in Greek)

- Vrettos, C. (1999). "Vertical and rocking impedances for rigid rectangular foundations on soils with bounded non-homogeneity." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28 (12), 1525–1540.
- Wolf, J. and A. Paronesso, (1991). Errata: 'Consistent lumped-parameter models for unbounded soil'. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 20, 597–599.
- Wolf, J. (1991a). 'Consistent lumped-parameter models for unbounded soil: frequency-independent stiffness, damping and mass matrices', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20: 33–41.
- Wolf, J. (1991b). 'Consistent lumped-parameter models for unbounded soil: physical representation', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20: 11–32.
- Wolf, J. (1994). *Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Wolf, J.P. and Deeks, A.J. (2004), *Foundation Vibration Analysis: A Strength-of-Materials Approach*, Elsevier, Oxford, UK
- Wu, W.-H. and Lee, W.-H. (2002). 'Systematic lumped-parameter models for foundations based on polynomial-fraction approximation', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 31(7): 1383–1412.
- Wu, W.-H. and Lee, W.-H. (2004). 'Nested lumped-parameter models for foundation vibrations', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33(9): 1051–1058.