

*Παραδείγματα σχέσεων διασποράς Παραπάνω, φαίνεται η απόκριση ενός διηλεκτρικού μέσου σε*

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}'}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (2.40)$$

where  $\omega_0 = \sqrt{q/m}$  is called the resonance frequency of the bound electrons. According to Eq. (2.40), the electron oscillates with the frequency of the incident field. Also, the total polarization  $\vec{P}$  is given as

$$\vec{P} = N\vec{p} = -Ne\vec{r} = \frac{Ne^2\vec{E}'}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.41)$$

Comparing Eq. (2.41) with Eq. (2.20) gives the medium's polarizability

$$\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (2.42)$$

*ηλεκτρομαγνητικό κύμα κυκλ. Συχνότητας  $\omega$ . Παρατηρούμε ότι η πολωσιμότητα του μέσου εξαρτάται με την εκφραση 2.42 από τη συχνότητα.*

*Με αντικατάσταση στο νόμο των Lorentz-Lorenz παίρνουμε:*

Substituting the above expression into the Lorentz-Lorenz Eq. (2.23), we find that the explicit dependence of the refractive index on frequency can be expressed as:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.43)$$

So far we have assumed that the system has only one resonance frequency. In general there are many such frequencies so that Eq. (2.43) can be replaced by a more general expression:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}, \quad (2.44)$$

where the fraction  $f_i$  is known as the oscillator strength corresponding to the resonance frequency

*Ένα από τα πλέον χαρακτηριστικά πρόσφατα παραδείγματα εφαρμογής της κυματικής είναι στη*

*μέτρηση του δείκτη διάθλασης του αέρα και άλλων αερίων με τη μέθοδο της χτένας οπτικών συχνοτήτων.*

*Άλλες εφαρμογές της χτένας οπτικών συχνοτήτων συναντιούνται στην ακριβή μέτρηση συχνοτήτων laser αλλά και σπουδαίων ατομικών μεταβάσεων, όπως εκείνες στο άτομο υδρογόνου.*

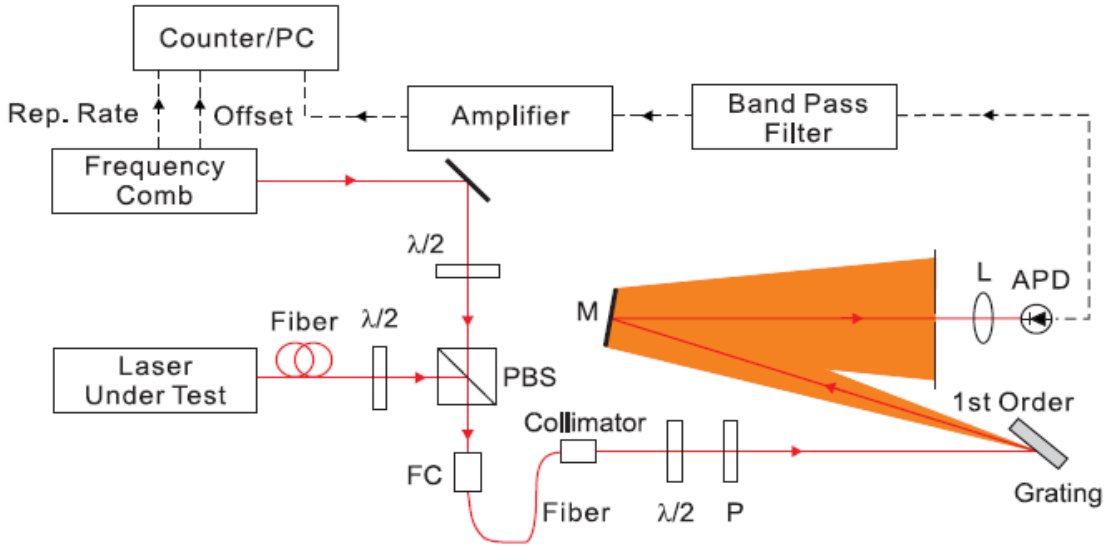
drogen transition frequency with an atomic cesium fountain clock [149]. In the year of 2000, the development of the microstructured fiber allowed octave-spanning spectra to be easily generated, which resulted in a single-step measurement process of absolute optical frequencies from microwave standards [72, 123, 124]. In 2004, L.-S. Ma and co-workers demonstrated optical frequencies intercomparison at the level of  $10^{-19}$  using four different frequency comb systems [150], which was further reduced to  $8 \times 10^{-20}$  in 2007 [151]. The comparison concludes that femtosecond laser frequency combs are accurate frequency synthesizers that span from RF to UV, providing frequency uncertainties as small as the primary frequency standards can support. Since then frequency comb techniques have started to gain widespread use, with precision measurements in Rb [152], Ca [153], H [154], I<sub>2</sub> [155], Hg<sup>+</sup> [156], Sr<sup>+</sup> [157], Yb<sup>+</sup> [158] and In<sup>+</sup> [159] been reported so far. Presently, the most precise frequency values recommended by the Comité International des Poids et Mesures (CIPM) have increased from only 10<sup>-15</sup> to 10<sup>-16</sup> relative uncertainties covering the visible and IR regions of the electromagnetic spectrum. These measurements have reduced the relative uncertainties for the realization of the meter to 10<sup>-16</sup> and those

**⚠️ Άγνωστη συσκευή USB**

Μία από τις συσκευές USB που είναι συνδεδεμένες σε αυτόν τον υπολογιστή δεν λειτουργεί κανονικά και δεν αναγνωρίζεται από τα Windows. Για βοήθεια σχετικά με την επίλυση του προβλήματος, κάντε κλικ σε αυτό το μήνυμα.

*Μέτρηση συχνότητας άγνωστων laser με OFC μέσω επίτευξης διακροτήματος*

spectral intensities of interest frequencies in order to increase the S/N ratio of the beat frequency.



**Figure 5.3:** Schematics of the frequency measurement arrangement.  $\lambda/2$ , half waveplate; FC, fiber coupler; P, polarizer; L, Lens; APD, avalanche photodiode.

...  
*Παραγωγή ανώτερων αρμονικών στα lasers*  
<http://www.ist-brighter.eu/tuto11.htm#video> Βίντεο...

*Πρωτο πείραμα με λειζερ ρουβιδίου*

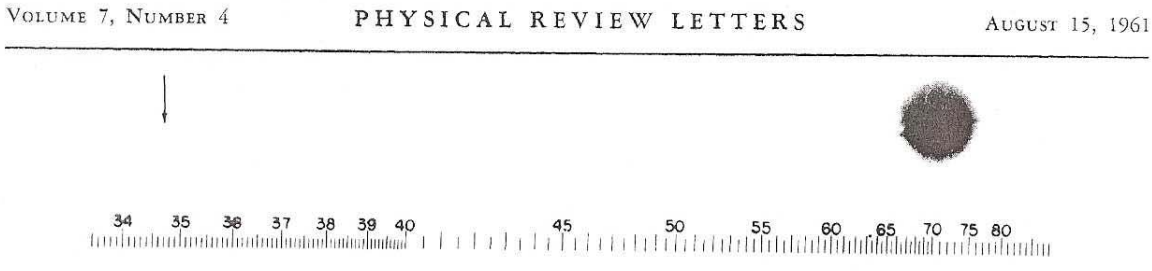
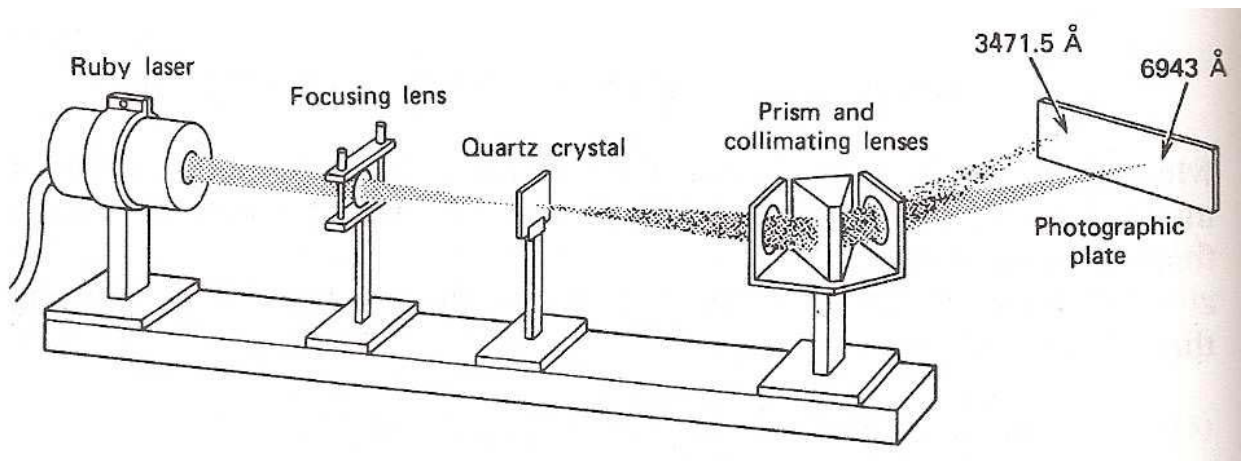
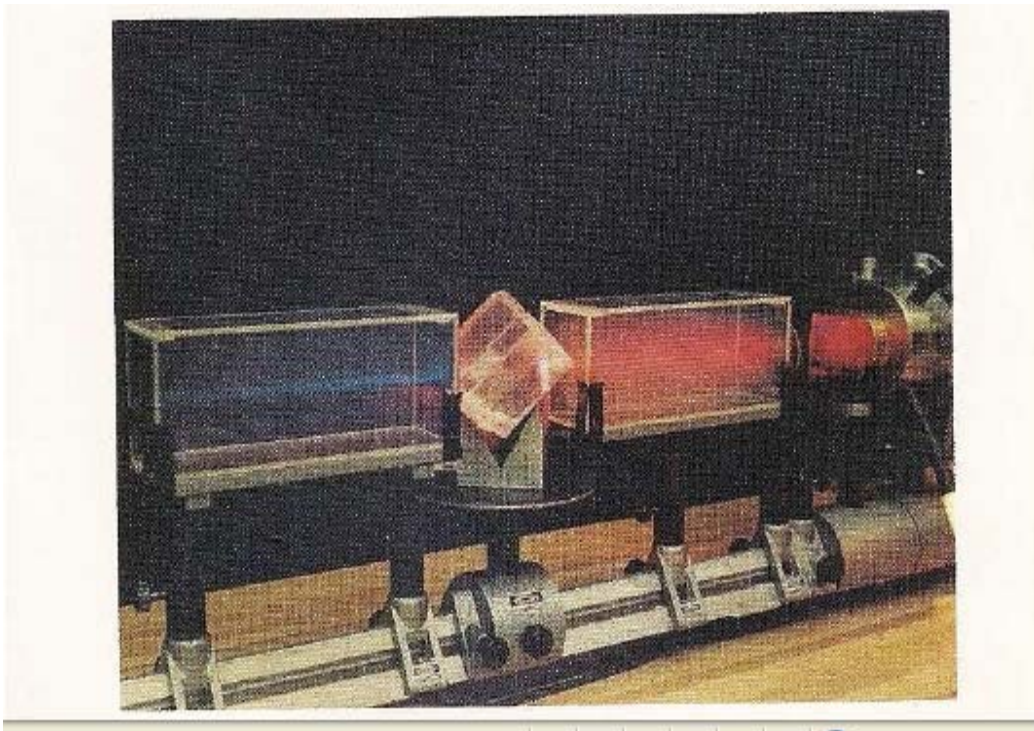


FIG. 1. A direct reproduction of the first plate in which there was an indication of second harmonic. The wavelength scale is in units of 100 Å. The arrow at 3472 Å indicates the small but dense image produced by the second harmonic. The image of the primary beam at 6943 Å is very large due to halation.



*Μετατροπή ερυθρού σε μπλε λέιζερ :*



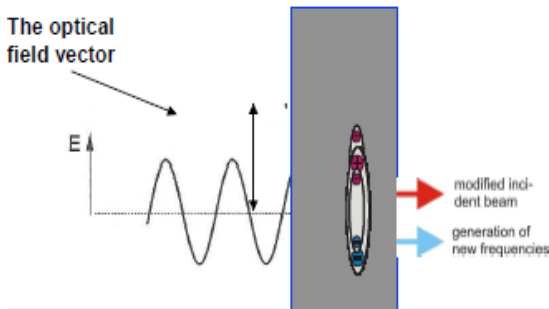
*Εξήγηση των ανωτερω*

..

# Optical Polarisation induced in Solids

The optical electrical field induces electrical dipole moments in the nonlinear material. The induced dipoles modify the incident beam and for strong optical fields leads to the generation of new k-vectors and new frequencies.

$P$  is the dipole moment per unit volume.



The induced dipoles represents accelerating charged particles that radiates electromagnetic radiation perpendicular to the acceleration vector.

(*ιδετε αναφορα στο :[http://www.ist-brighter.eu/tuto11/CONF2/Cambridge\\_Petersen.pdf](http://www.ist-brighter.eu/tuto11/CONF2/Cambridge_Petersen.pdf)*)

## Ανάλυση Fourier

### Fourier Analysis

Η γενική κίνηση χορδής  
Δίνεται από

$$\psi(z,t) = A_1 \sin k_1 z \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin k_2 z \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \dots$$

Τα  $A_n$  και οι σταθερές φάσης  $\phi_n$  καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή στιγμιαία μετατόπιση  $\psi(z,t)$  και στιγμιαία ταχύτητα για  $t=0$ .

Στην περίπτωση χορδής που εκτελεί ένα συγκεκριμένο τρόπο ταλάντωσης

$$y_n(x,t) = A_n \exp[i(\omega_n t - \delta_n)] \sin(n\pi x/L)$$

Μπορούμε να φαντασθούμε ότι μία αυθαίρετη σύνθεση (επαλληλία) από τρόπους ταλάντωσης είναι επιτρεπτή! Πάρτε ένα στιγμιότυπο για την αρχή των χρόνων.

Τότε

$$y_n(x,0) = A_n \exp[i(-\delta_n)] \sin(n\pi x/L) \rightarrow$$



$$y_n(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L) \quad (F1)$$

$$B_n = \cos(\omega_n t_0 - \delta_n)$$

### Ισχύει και το αντίστροφο της (F1)

Μπορεί μια αυθαίρετη κυματομορφή με κάποια περιοδικότητα να αναλυθεί σε άπειρη σειρά ημιτονικών συναρτήσεων όπως εκείνες της (F1).

Αυτό φαίνεται αρκετά αυθαίρετο, ωστόσο όμως η αυθαιρεσία εξαφανίζεται

όταν πάμε στο όριο  $N \Rightarrow \infty$  της περίπτωσης συζευγμένων σφαιριδίων  $N$  το πλήθος που εκτελούν εγκάρσιες μικρού πλάτους ταλαντώσεις. Εκεί έχουμε  $N$  το πλήθος τρόπους ταλάντωσης. Η περιγραφή εκάστου τρόπου περιλάμβανε εκεί δύο σταθερές ρυθμιζόμενες

(1) πλάτος και (2) φάση. Αρα έχουμε  $2N$  προς προσδιορισμό σταθερές. Αυτές μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε αυθαίρετες τιμές αρχικής απομάκρυνσης και ταχύτητας εκάστου σωματιδίου. Ο προηγούμενος ισχυρισμός είναι λογική συνέπεια της εφαρμογής του αποτελέσματος των  $N$  σφαιριδίων σε αυθαίρετα μεγάλο αριθμό συνδεδεμένων σωματιδίων.

### **Αναφορές**

1. <http://biology-web.nmsu.edu/twright/BIOL450/Lectures/Hand03.ppt#1>

**Μάθημα 29-11-05 τέλος**

### **Μάθημα 18<sup>ο</sup> : 1 -12-05 αρχή**

**Επανάληψη των περιόδων ανάλυσης Φουριέ.**

Στην πραγματικότητα, έχουμε περιπτώσεις όπου η ταλαντωτική κίνηση χορδής δεν αντιστοιχεί σε συνοριακές συνθήκες με ακλόνητα τα δύο άκρα. Π.χ. έχουμε το ένα άκρο ακλόνητο, ενώ το άλλο άκρο μπορεί να συνδέεται με ένα γλιστερό και αβαρή κρίκο που να μετακινείται χωρίς τριβή κατά μήκος ενός στήλου. Τέλος, αυτός ο κρίκος θα μπορούσε να έχει πεπερασμένη μάζα.

Με βάση το θεώρημα του J. Fourier το 1822, *οποιαδήποτε πολύπλοκη περιοδική ταλάντωση μπορεί να αναλυθεί σε ένα σύνολο απλών αρμονικών ταλαντώσεων με συχνότητες που είναι πολλαπλάσια της περιόδου της περιοδικής αυτής κίνησης. Οι διάφορες συνιστώσες κινήσεις με τα σχετικά των πλάτη και φάσεις, όταν προστίθενται σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, μπορεί να δώσουν την αρχική πολύπλοκη περιοδική κίνηση.*

Μία συνάρτηση είναι περιοδική όταν ικανοποιεί τη σχέση

$f(t+\tau) = f(t)$  διά κάθε  $t$ , όπου  $\tau$  είναι η περίοδος της. Το  $t$  μπορεί να είναι μία μεταβλητή που να αντιστοιχεί σε θέση,  $x$ , δηλαδή να έχουμε στην υπό θεώρηση συνάρτηση χωρική περιοδικότητα.

### **Το θεώρημα του Fourier (Μοιράστηκαν σχετικές σημειώσεις)**

Σύμφωνα με αυτό, οποιαδήποτε μονοσήμαντη περιοδική συνάρτηση  $f(x)$  που είναι είτε συνεχής είτε κατά τμήματα συνεχής, και έχει έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών (στο  $f$  ή στην κλίση  $df/dx$ ), μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα όρων της μορφής:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

### Υπολογισμός των συντελεστών, $a_0$ , $a_n$ , και $b_n$

Για να βρούμε τον συντελεστή  $a_n$  πολλαπλασιάζουμε την Εξ.(1) επί  $\cos nx$ , και στα δύο σκέλη της, και στη συνέχεια κάνουμε, και στα δύο σκέλη, ολοκλήρωση πάνω σε όλη την περίοδο του  $x$  (0 ως  $2\pi$ ).

Τότε, μπορεί να δειχθεί ότι

$$a_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

Ανάλογα, μπορεί να δειχθεί ότι:

$$b_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Τέλος, αποδεικνύεται εύκολα πως

$$a_0 = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

Στις σχέσεις για τα  $a_n$  και  $b_n$  σημαντικό ρόλο παίζουν οι ιδιότητες

$$(1/\pi) \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \text{ και}$$

$$(1/\pi) \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \delta_{nm}$$

### Μιγαδική αναπαράσταση των σειρών Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Θέτοντας,  $a_n = c_n \sin \theta_n$ , και  $b_n = c_n \cos \theta_n$ , οπότε προκύπτει

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx + \theta_n)$$

όπου

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad \text{και} \quad \theta_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n}$$

Πράγματι, από τις σχέσεις

$$a_n = c_n \sin \theta_n, \text{ και } b_n = c_n \cos \theta_n$$

υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε :  $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$

Επίσης, διαιρώντας κατά μέλη τις:

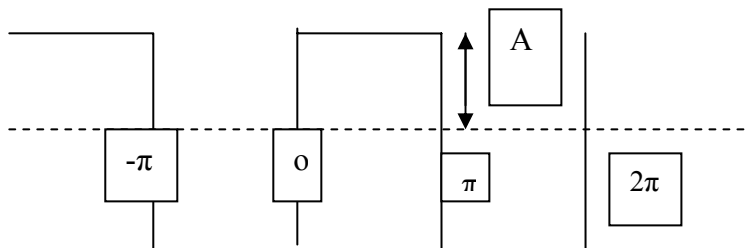
$$a_n = c_n \sin\theta_n \text{ και } b_n = c_n \cos\theta_n$$

παίρνουμε την

$$\tan\theta_n = a_n / b_n$$

## Προβλήματα

### 1. Τετραγωνικός παλμός, περιοδικός



Σχήμα 9.1

$$a_0 = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) dx = (1/\pi) 0 = 0$$

$$a_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = (1/\pi) \left[ \int_0^\pi A \cos nx dx + \int_\pi^{2\pi} (-A) \cos nx dx \right] = 0$$

διότι,

$$\int_0^\pi A \cos nx dx = + \int_\pi^{2\pi} \cos nx dx = 0$$



$$b_n = (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= (1/\pi) \left[ \int_0^\pi A \sin nx \, dx + \int_0^\pi (-A) \sin nx \, dx \right] = (2/\pi) A \int_0^\pi A \sin nx \, dx =$$

$$(2/n\pi) A [\cos nx]_0^\pi = (2/n\pi) A (1 - \cos n\pi)$$

Άρα,  $b_n=0$ , για άρτια  $n$ , και είναι ίσο με  $4A/(n\pi)$ , για περιττό  $n$ .

Έτσι,

$$f(x) = (4A/\pi) \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

### Αναφορές

1. Fast Fourier Transforms:  
<http://www.library.cornell.edu/nr/bookcpdf/c12-0.pdf>
2. Crash course on Fourier Transforms:  
[http://www.astro.psu.edu/users/mce/A451\\_2/A451/downloads/notes2.pdf](http://www.astro.psu.edu/users/mce/A451_2/A451/downloads/notes2.pdf)
3. **Tutorial on Fourier Theory**  
[http://www.cs.otago.ac.nz/cosc453/student\\_tutorials/fourier\\_analysis.pdf](http://www.cs.otago.ac.nz/cosc453/student_tutorials/fourier_analysis.pdf)
4. Fast Fourier Transform (60 σελίδες):  
<http://asl.umbc.edu/pub/strow/p640/fftall.pdf>
5. Introduction to Optics and Spectroscopy (Univ. Delaware)  
<http://asl.umbc.edu/pub/strow/p640/fftall.pdf>
6. Introduction to Optics and Spectroscopy , Wirth  
[www.udel.edu/chem/sneal/sntch/Resources/Chi.pdf](http://www.udel.edu/chem/sneal/sntch/Resources/Chi.pdf)
- 7 <http://www.complextoreal.com/chapters/fft1.pdf>
1. <http://www.complextoreal.com/fft3.htm>
2. <http://cnyack.homestead.com/files/afourtr/foutr1.htm> (ωραίο φροντιστήριο)
3. Μετασχηματισμός Φουριέ αποσβενύμενης ημιτονικής συνάρτησης:  
<http://cnyack.homestead.com/files/afourtr/ftdsoid.htm>
4. Short time Fourier transform  
<http://cnyack.homestead.com/files/artran/stft2t1.htm>
5. Nice sound Fourier analysis:  
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=33>
6. Συνελίξεις:  
[http://artemis.univ-mrs.fr/cybermeca/Formcont/Traisig/Convolution/java\\_convolution.htm](http://artemis.univ-mrs.fr/cybermeca/Formcont/Traisig/Convolution/java_convolution.htm)
14. <http://math.haifa.ac.il/robotics/Background/Convolution/node4.html>