



ΟΠΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Νο. 4

Ημερομηνία Παράδοσης: **22 Μαΐου 2024**

(Οι προς παράδοση ασκήσεις έχουν μη μηδενικό συντελεστή βαρύτητας)

Άσκηση 1 (Reflected and Transmitted Powers): [0%]

Ο τύπος του Sellmeier μας δίνει την εξάρτηση του δείκτη διάθλασης ενός υλικού, $n(\lambda)$ από το μήκος κύματος (προσεγγιστικά). Προς διευκόλυνσή σας ο τύπος του Sellmeier δίδεται παρακάτω μαζί με ένα πίνακα των σχετικών σταθερών, B και C, για 3 υλικά (ο κρύσταλλος του σαφφείρου - sapphire – είναι ανισοτροπικός και γι' αυτό δίδονται δύο διαφορετικοί τύποι για τον κανονικό και τον έκτακτο δείκτη διάθλασης).

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i}$$

Table of coefficients of Sellmeier equation

Material	B ₁	B ₂	B ₃	C ₁	C ₂	C ₃
borosilicate crown glass (known as BK7)	1.03961212	0.231792344	1.01046945	$6.00069867 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$	$2.00179144 \times 10^{-2} \mu\text{m}^2$	$1.03560653 \times 10^2 \mu\text{m}^2$
sapphire (for ordinary wave)	1.43134930	0.65054713	5.3414021	$5.2799261 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$	$1.42382647 \times 10^{-2} \mu\text{m}^2$	$3.25017834 \times 10^2 \mu\text{m}^2$
sapphire (for extraordinary wave)	1.5039759	0.55069141	6.5927379	$5.48041129 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$	$1.47994281 \times 10^{-2} \mu\text{m}^2$	$4.0289514 \times 10^2 \mu\text{m}^2$
fused silica (quartz)	0.696166300	0.407942600	0.897479400	$4.67914826 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$	$1.35120631 \times 10^{-2} \mu\text{m}^2$	$97.9340025 \mu\text{m}^2$

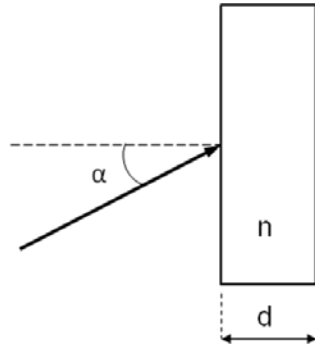
Για το συγκεκριμένο πρόβλημα υποθέσετε ότι φως από κάποιο μονοχρωματιστή προσπίπτει υπό γωνία θ (από αέρα) πάνω σε μια επίπεδη και λεία επιφάνεια από **quartz (fused silica)**. Η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος μπορεί να είναι TE ή TM.

(α) Το μήκος κύματος του προσπίπτοντος επιπέδου κύματος είναι 633nm. Να παρουσιαστούν σε γραφήματα οι συντελεστές ανάκλασης, διάθλασης, καθώς και τα ποσοστά της ανακλώμενης και διαθλώμενης ισχύος σαν συναρτήσεις της γωνίας πρόσπτωσης ($0 \leq \theta \leq 90\text{deg}$) και για τις δύο πολώσεις. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το πρόγραμμα [fresnel_equations.m](#) – matlab – που υπάρχει στην ιστοσελίδα του μαθήματος).

(β) Σε αυτήν την περίπτωση η γωνία πρόσπτωσης είναι σταθερή και ίση με $\theta = 30\text{deg}$. Να παρουσιαστούν σε γραφήματα οι συντελεστές ανάκλασης, διάθλασης, καθώς και τα ποσοστά της ανακλώμενης και διαθλώμενης ισχύος σαν συναρτήσεις του μήκους κύματος ($0.1\mu\text{m} \leq \lambda \leq 2.0\mu\text{m}$) και για τις δύο πολώσεις.

Άσκηση 2 (Interference Filter): [0%]

Είναι επιθυμητό για κάποια εφαρμογή να χρησιμοποιηθούν φίλτρα συμβολής πάχους μισού μήκους κύματος ($d = \lambda/2$ ή $d = (2m+1) \lambda/2$ όπου m ακέραιος) για να σκανάρουν μια περιοχή οπτικών συχνοτήτων γύρω από το μήκος κύματος λ_0 (μήκος κύματος στο κενό). Το φίλτρο συμβολής είναι σχεδιασμένο να λειτουργεί σε μήκος κύματος $\lambda_s > \lambda_0$. Το υλικό του στρώματος που έχει πάχος μισό μήκος κύματος έχει δείκτη διάθλασης n . Να υπολογιστεί ο ρυθμός της γωνιακής ρύθμισης του φίλτρου (δηλαδή η μεταβολή του μήκους κύματος συντονισμού ως προς την μεταβολή της γωνίας του φίλτρου) στο μήκος κύματος λ_0 . Αν το φίλτρο είναι σχεδιασμένο για $\lambda_s = 520nm$ και ο δείκτης διάθλασης του υλικού είναι $n = 1.40$ να υπολογιστεί ο ρυθμός γωνιακής ρύθμισης για το $\lambda_0 = 514.5nm$ (Ar-Ion Laser).



Άσκηση 3 (Fabry-Perot Interference Filter): [0%]

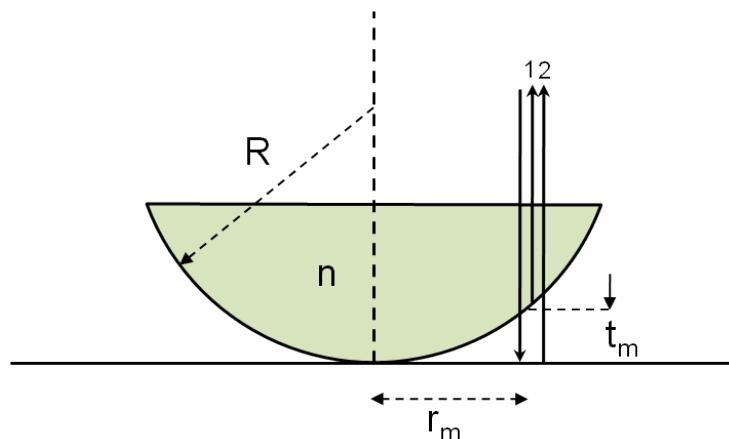
Μια δέσμη λευκού φωτός (με συνεχές φάσμα από τα $400nm$ ως τα $700nm$) προσπίπτει υπό γωνία 45 deg πάνω σε δύο παράλληλες γυάλινες πλάκες που χωρίζουν ένα λεπτό στρώμα αέρα πάχους $0.001cm$. Το ανακλώμενο φως διέρχεται από ένα φασματοσκόπιο πρίσματος. Πόσες και ποιες σκοτεινές (dark lines) γραμμές φαίνονται στο φάσμα;

Άσκηση 4 (Fabry-Perot Interference Filter): [0%]

Ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot αποτελείται από μια πλάκα διαφανούς υλικού με δείκτη διάθλασης $n = 4.50$ και πάχος $2cm$. Οι παράλληλες επιφάνειες της πλάκας έχουν ανακλαστικότητα (r^2) 90% . Αν το συμβολόμετρο χρησιμοποιείται στην περιοχή μήκους κύματος $546nm$ να προσδιοριστεί (α) ο υψηλότερης τάξης κροσσός συμβολής (μεγαλύτερη τιμή του ακεραίου m), (β) ο λόγος T_{max}/T_{min} , και (γ) η αναλυτική δύναμη του συμβολομέτρου (resolving power).

Άσκηση 5 (Newton's Rings): [0%]

Δακτύλιοι συμβολής του Νεύτωνα (Newton's rings) σχηματίζονται μεταξύ ενός επιπεδόκυρτου φακού και μιας επίπεδης οπτικής επιφάνειας όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι κροσσοί συμβολής σχηματίζονται λόγω της συμβολής των επιμέρους ανακλωμένων ακτινών 1 και 2 όπως υποδεικνύεται στο σχήμα. Αν η διάμετρος του $10^{ου}$ φωτεινού δακτυλίου είναι $7.89mm$ όταν το προσπίπτων φως είναι μήκους κύματος $546.1nm$ να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας R της σφαιρικής επιφάνειας του φακού. Ποια είναι η εστιακή του απόσταση αν ο δείκτης διάθλασης $n = 1.50$;



Άσκηση 6 (Antireflection Layer): [25%]

Ζητείται ο σχεδιασμός αντι-ανακλαστικού επιστρώματος μεταξύ δύο υλικών με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 αντίστοιχα. Το προσπίπτον επίπεδο κύμα έχει μήκος κύματος λ_d και προσπίπτει υπό γωνία θ_1 όπως φαίνεται και στο κάτωθι σχήμα. Από την ηλεκτρομαγνητική ανάλυση του προβλήματος (χρησιμοποιώντας την θεωρία των γραμμών μεταφοράς) ο συντελεστής ανάκλασης Γ (του κύματος που ανακλάται από τον συνδυασμό του αντι-ανακλαστικού επιστρώματος και της ημι-άπειρης περιοχής με δείκτη διάθλασης n_2) δίδεται από τις κάτωθι εξισώσεις (για TE και TM πόλωση και γωνία πρόσπτωσης θ_1):

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - \tilde{Z}_1}{Z_{in} + \tilde{Z}_1}$$

$$Z_{in} = \tilde{Z}_c \frac{\tilde{Z}_2 \cos(k_o n_c d_c \cos \theta_c) + j \tilde{Z}_c \sin(k_o n_c d_c \cos \theta_c)}{\tilde{Z}_c \cos(k_o n_c d_c \cos \theta_c) + j \tilde{Z}_2 \sin(k_o n_c d_c \cos \theta_c)}$$

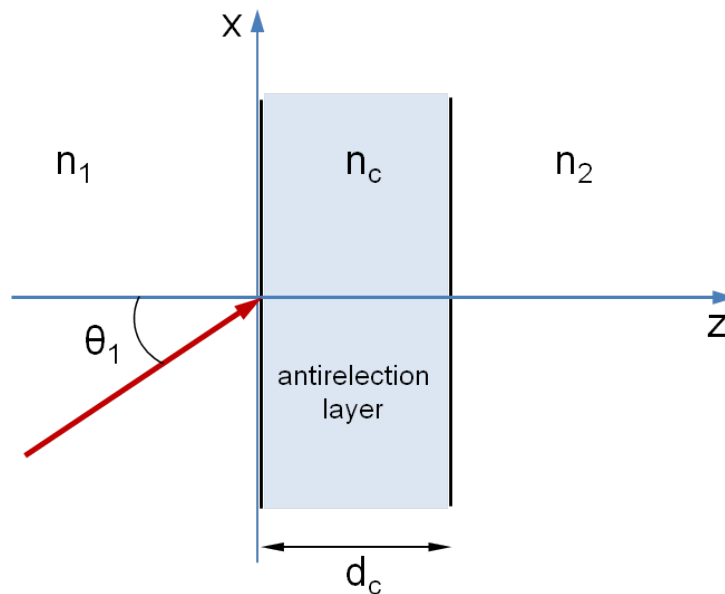
$$\tilde{Z}_i = Z_i / \cos \theta_i \quad (i = 1, 2, c) \quad \text{TE Polarization}$$

$$\tilde{Z}_i = Z_i \cos \theta_i \quad (i = 1, 2, c) \quad \text{TM Polarization}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις τα Z_i αντιστοιχούν στις κυματικές αντιστάσεις των διαφόρων υλικών ($i = 1, 2, c$, όπου c το αντι-ανακλαστικό επίστρωμα πάχους d_c). Οι γωνίες θ_i αντιστοιχούν στις γωνίες που σχηματίζει το επίπεδο κύμα μέσα σε κάθε υλικό. Για τις αριθμητικές εφαρμογές θεωρήστε ότι $\lambda_d = 500nm$ (design wavelength), $n_1 = 1.0$, και $n_2 = 2.0$.

(α) Αρχικά θεωρήστε τον σχεδιασμό του αντι-ανακλαστικού επιστρώματος για κάθετη πρόσπτωση $\theta_1 = 0 \text{ deg}$. Να υπολογιστεί το ελάχιστο πάχος d_c καθώς και ο δείκτης διάθλασης n_c . Να γίνει η γραφική παράσταση της ανακλώμενης ισχύος σαν συνάρτηση του μήκους κύματος στην περιοχή $300nm \leq \lambda_0 \leq 700nm$ όταν το αντι-ανακλαστικό επίστρωμα έχει σχεδιαστεί για το μήκος κύματος λ_d . Επίσης να γίνει η γραφική παράσταση της ανακλώμενης ισχύος σαν συνάρτηση της γωνίας θ_1 ($-90 \text{ deg} \leq \theta_1 \leq +90 \text{ deg}$) για το μήκος κύματος που έχει σχεδιαστεί το αντι-ανακλαστικό επίστρωμα.

(β) Τώρα θεωρήστε τον σχεδιασμό του αντι-ανακλαστικού επιστρώματος για πρόσπτωση υπό γωνία $\theta_1 = 45 \text{ deg}$. Να υπολογιστεί το ελάχιστο πάχος d_c καθώς και ο δείκτης διάθλασης n_c τόσο για την πόλωση TE όσο και για την πόλωση TM. Να γίνει η γραφική παράσταση της ανακλώμενης ισχύος σαν συνάρτηση του μήκους κύματος στην περιοχή $300nm \leq \lambda_0 \leq 700nm$ όταν το αντι-ανακλαστικό επίστρωμα έχει σχεδιαστεί για το μήκος κύματος λ_d (για κάθε πόλωση ξεχωριστά). Επίσης να γίνει η γραφική παράσταση της ανακλώμενης ισχύος σαν συνάρτηση της γωνίας θ_1 ($-90 \text{ deg} \leq \theta_1 \leq +90 \text{ deg}$) και για τις δύο πολώσεις για σχεδιασμό σε TE πόλωση και αντίστοιχα για σχεδιασμό σε TM πόλωση.



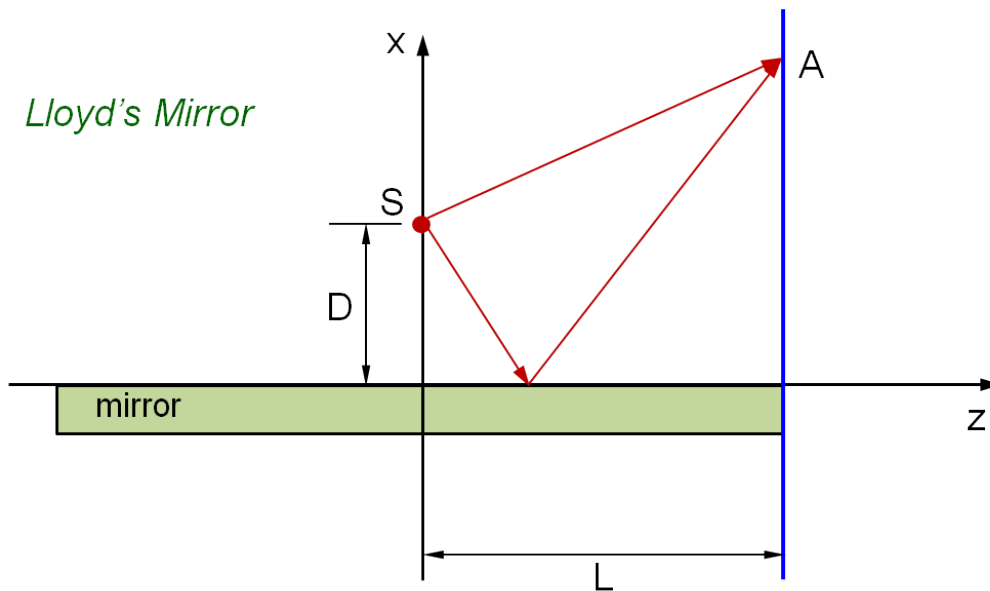
Άσκηση 7 (Lloyd's Mirror): [20%]

Ο καθρέπτης του Lloyd είναι μια διάταξη όπου μπορούν να παρατηρηθούν φαινόμενα συμβολής παρόμοια με αυτά του πειράματος του Young. Στην διάταξη του σχήματος ακτίνες που φεύγουν από την μονοχρωματική πηγή S συμβάλλουν στο σημείο A είτε προερχόμενες απευθείας από την πηγή είτε μέσω ανάκλασης από τον καθρέπτη. Υποθέσετε ότι το περιβάλλον μέσον είναι αέρας.

(α) Να προσδιοριστεί η εξίσωση στο σύστημα xz που προσδιορίζει τα μέγιστα (maxima) και η εξίσωση που προσδιορίζει τα ελάχιστα (minima) στο χώρο της συμβολής των κυμάτων της μονοχρωματικής πηγής S . Οι εξισώσεις να είναι στην μορφή $f(x,y,z) = 0$.

(β) Να προσδιοριστούν στο επίπεδο xz ($y=0$) οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων όπου παρατηρούνται τα μέγιστα και τα ελάχιστα της συμβολής. Να γίνει αριθμητική εφαρμογή όταν $D = 5\mu\text{m}$, $\lambda=1\mu\text{m}$. Να γίνει η γραφική παράσταση των γεωμετρικών τόπων για $-20\mu\text{m} < z < 20\mu\text{m}$ και $0\mu\text{m} < x < 15\mu\text{m}$.

(γ) Αν $z = L = 20\mu\text{m}$ να προσδιοριστούν [αριθμητικά, με τα δεδομένα του (β)] στο επίπεδο $z=L$ (με $y=0$) τα πρώτα 5 μέγιστα (ενισχυτική συμβολή) και τα πρώτα 5 ελάχιστα (αφαιρετική συμβολή). Να συγκρίνετε τα ακριβή μέγιστα και ελάχιστα με τις προσεγγιστικές τους τιμές.



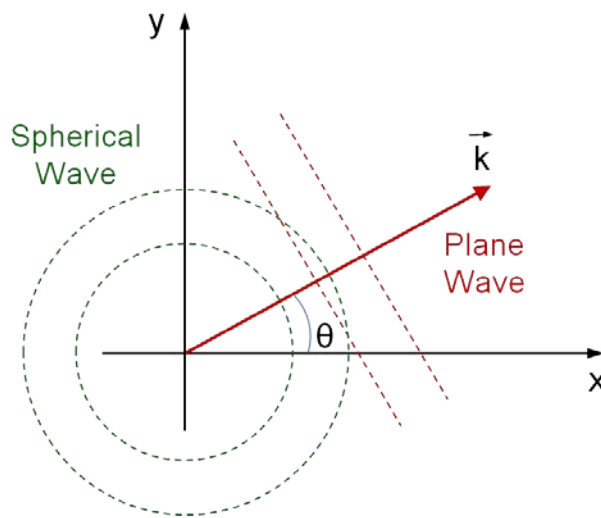
Άσκηση 8 (Spherical and Plane Wave Interference): [20%]

Ένα σφαιρικό και ένα επίπεδο κύμα, του ίδιου μήκους κύματος, συμβάλουν στο κενό. Το σφαιρικό κύμα πηγάζει από την αρχή των αξόνων (0,0,0) και έχει την μορφή $E_{sw} = (E_0/r) \exp(-jk_0r)$ όπου k_0 είναι ο κυματριθμός του κενού και $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Το επίπεδο κύμα έχει κυματοδιάνυσμα $\vec{k} = k_0(\cos\theta \hat{i}_x + \sin\theta \hat{i}_y)$ και είναι της μορφής $E_{pw} = E_0 \exp[-jk_0(x\cos\theta + y\sin\theta)]$. Υποθέτουμε ότι η πόλωση των δύο κυμάτων είναι στην ίδια διεύθυνση ώστε να μην απαιτείται διανυσματική θεώρηση.

(α) [10%] Να προσδιοριστεί η εξίσωση που προσδιορίζει τα μέγιστα (maxima) και η εξίσωση που προσδιορίζει τα ελάχιστα (minima) στο χώρο της συμβολής των κυμάτων στο σύστημα xyz. Οι εξισώσεις να είναι στην μορφή $f(x,y,z) = 0$.

(β) [20%] Να προσδιοριστούν στο επίπεδο xy ($z=0$) οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων όπου παρατηρούνται τα μέγιστα και τα ελάχιστα της συμβολής. Να γίνει αριθμητική εφαρμογή όταν $\lambda_0=1\mu\text{m}$ και $\theta = 30\text{deg}$. Να γίνει η γραφική παράσταση των γεωμετρικών τόπων για $-20\mu\text{m} < x < 20\mu\text{m}$ και $-20\mu\text{m} < y < 20\mu\text{m}$. Να προσδιοριστούν οι γεωμετρικοί τόποι για αρκετές τιμές των διαφορών οπτικής απόστασης.

(γ) [10%] Να προσδιοριστούν [αριθμητικά, με τα δεδομένα του (β)] στην ευθεία $x = 20\mu\text{m}$ ($z = 0$) τα μέγιστα (ενισχυτική συμβολή) και τα ελάχιστα (αφαιρετική συμβολή) κατά μήκος της y διεύθυνσης που αντιστοιχούν στις παραμέτρους του (β).



Άσκηση 9 (Young's Double Slit Experiment): [10%]

Σε μια διάταξη δύο σχισμών προσπίπτει χωρικά σύμφωνα λευκό φως (380nm-780nm). Η απόσταση των δύο σχισμών είναι 0.5mm και το παραπέτασμα που παρατηρείται η συμβολή είναι 50cm μακριά από το επίπεδο των σχισμών. Στο παραπέτασμα υπάρχει μια μικρή οπή σε απόσταση 1mm από την κεντρική γραμμή της διάταξης.

(α) [5%] Ποιά μήκη κύματος θα απουσιάζουν από το φως που περνά από την οπή?

(β) [5%] Ποιά μήκη κύματος θα έχουν ισχυρή ένταση από το φως που περνά από την οπή?

Άσκηση 10 (Three-Plane-Wave Interference): [25%]

Τρία σύμφωνα (coherent) επίπεδα κύματα, της ίδιας συχνότητας, συμβάλουν μέσα σε ομογενές, ιστροπικό, γραμμικό υλικό. Το πρόβλημα αυτό βασίζεται σε περιπτώσεις που αναφέρονται στο journal paper: **J. L. Stay and T. K. Gaylord, "Three-beam-interference lithography: contrast and crystallography," Appl. Opt., vol. 47, no. 18, pp. 3221-3230, Jun. 20, 2008.**

Τα κυματοδιανύσματα των τριών επιπέδων κυμάτων είναι τα \vec{k}_i (όπου $i = 1,2,3$). Ένα τυχαίο κυματοδιάνυσμα φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Το κάθε επίπεδο κύμα μπορεί να γραφεί υπό μορφή φασιθέτου ως

$$\vec{E}_i = E_i \hat{e}_i \exp[-j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi_{0i})],$$

όπου \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης, E_i είναι το πλάτος του επιπέδου κύματος i (θεωρήστε το πραγματικό αριθμό), φ_{0i} είναι μια διαφορά φάσης, και \hat{e}_i είναι το διάνυσμα πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου του επιπέδου κύματος i (θεωρείστε ότι είναι πραγματικό διάνυσμα και επομένως όλα τα επίπεδα κύματα είναι γραμμικά πολωμένα).

(α) [8%] Να βρεθεί η ένταση, $I(x, y, z) = |\vec{E}|^2$, της συμβολής των τριών επιπέδων κυμάτων στο χώρο (x,y,z).

(β) [8%] Από το ερώτημα (α) φαίνεται ότι η συμβολή χαρακτηρίζεται από τρεις όρους που αντιστοιχούν στην συμβολή των τριών κυμάτων ανά δύο. Δηλαδή ένας όρος αντιστοιχεί στην συμβολή του \vec{k}_1 με το \vec{k}_2 , ένας

δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην συμβολή του \vec{k}_1 με το \vec{k}_3 , και ένας τρίτος όρος αντιστοιχεί στην συμβολή του \vec{k}_2 με το \vec{k}_3 . Να βρεθούν οι εξισώσεις για την μέγιστη συμβολή αυτών των τριών όρων. Δείξτε ότι η εξίσωση μέγιστης συμβολής των δύο όρων είναι αρκετή για να ικανοποιείται και η μέγιστη συμβολή του τρίτου όρου. Επομένως, η συνολική μέγιστη συμβολή των τριών κυμάτων αποτελείται από ευθείες γραμμές που είναι η τομή των εξισώσεων (επιπέδων) μέγιστης συμβολής των δύο όρων που συζητήθηκαν παραπάνω. Εάν οι ευθείες αυτές θέλουμε να είναι παράλληλες με τον άξονα z ποιά συνθήκη θα πρέπει να ικανοποιούν τα τρία κυματοδιανύσματα?

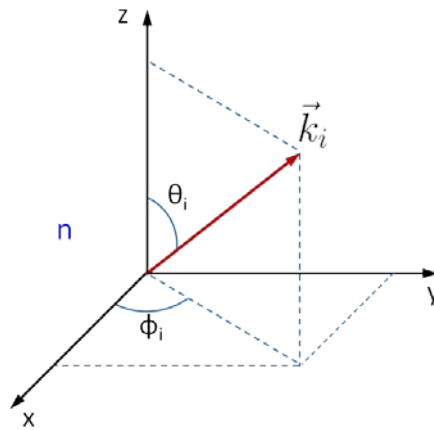
(γ) [9%] Τώρα υποθέσετε ότι τρία επίπεδα κύματα συμβάλουν στον αέρα ($n = 1$) και έχουν τα κάτωθι χαρακτηριστικά ($k_0 = 2\pi/\lambda_0$, και $\lambda_0 = 1\mu\text{m}$):

$$\vec{k}_1 = k_0 \left[-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3} \right], \quad \vec{k}_2 = k_0 \left[+\frac{2}{3}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{3} \right], \quad \vec{k}_3 = k_0 \left[-\frac{1}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3} \right],$$

$$\hat{e}_1 = \left[+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right], \quad \hat{e}_2 = [0.2821, -0.9256, 0.2523], \quad \hat{e}_3 = [0.9426, 0.2185, -0.2523],$$

$$E_1 = 1, \quad E_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad E_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_{03} = 0.$$

Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδύναμου υπολογιστικού πακέτου) γραφική απεικόνιση της έντασης I στο επίπεδο xy . Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,I)**, **shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση της έντασης I στο επίπεδο xy . Υπολογίστε αριθμητικά την ποιότητα των κροσσών συμβολής (visibility), $V = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ καθώς και τις γωνίες θ_i και ϕ_i των τριών επιπέδων κυμάτων και επιβεβαιώστε ότι οι πολώσεις τους είναι συμβατές με επίπεδα κύματα.



Σημείωση: Σε όλες από τις ασκήσεις χρησιμοποιήστε προγράμματα (σε matlab ή άλλα) θα πρέπει υποχρεωτικά (για να πάρετε τον βαθμό της άσκησης) στις απαντήσεις σας να συμπεριλάβετε και ένα αντίγραφο (printout) του κώδικα που έχετε χρησιμοποιήσει.