# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

***ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ***

Καθ. Η. Ν. Γλύτσης, Τηλ.: 210-7722479 - *e-mail:* eglytsis@central.ntua.gr - *www:* http://users.ntua.gr/eglytsis/

# ΟΠΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

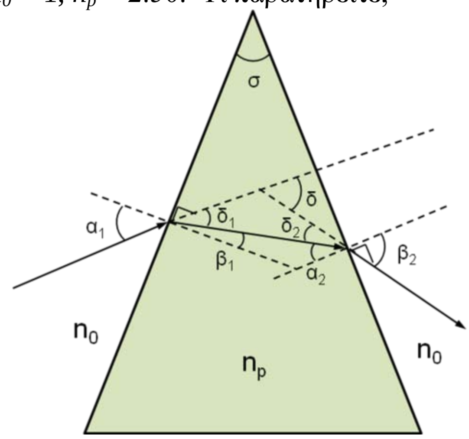
## *ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ No. 2*

## Ημερομηνία Παράδοσης: 9 Απριλίου, 2024

***(Οι προς παράδοση ασκήσεις έχουν μη μηδενικό συντελεστή βαρύτητας)***

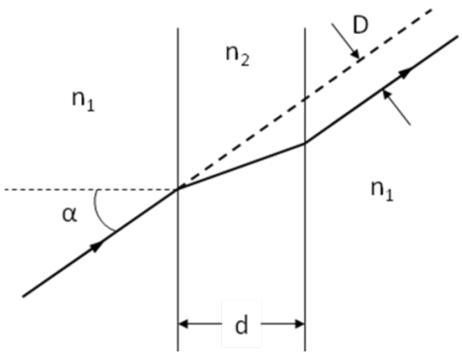
## Άσκηση 1 (Deviation by a Prism): [0%]

Μια ακτίνα φωτός προσπίπτει υπό γωνία $\alpha_1$ πάνω σε πρίσμα με δείκτη διάθλασης $n_p$ και γωνίας κορυφής $\sigma$ (όπως παρουσιάστηκε στην τάξη). Το μέσο που περιβάλλει το πρίσμα έχει δείκτη διάθλασης $n_0$. Υπολογίσατε, δίδοντας όλες τις λεπτομέρειες, την γωνία απόκλισης δ της ακτίνας (όπως ορίστηκε στο μάθημα). Να υπολογιστεί επίσης η ελάχιστη απόκλιση $\delta_{min}$ καθώς και για ποια γωνία $\alpha_1$ συμβαίνει. Εάν $\sigma = 20$ deg και $n_0 = 1$, $n_p = 2$, να γίνει η γραφική παράσταση της γωνίας απόκλισης σαν συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης $\alpha_1$ (μεταξύ 0 και 89.9 deg) και να βρεθεί η $\delta_{min}$ καθώς και για ποια γωνία $\alpha_1$ συμβαίνει. Επαναλάβετε την γραφική παράσταση όταν $\sigma = 25$ deg και $n_0 = 1$, $n_p = 2.50$. Τι παρατηρείτε;



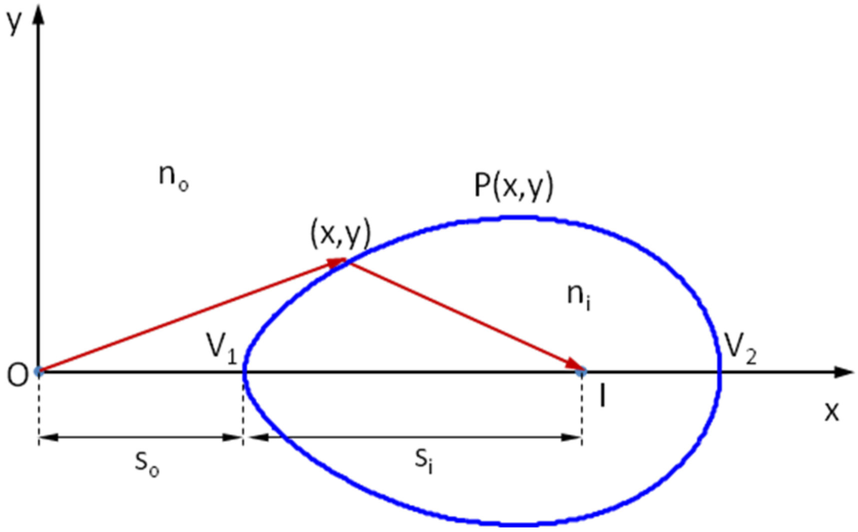

## Άσκηση 2 (Plane Parallel Plate): [0%]

Μια ακτίνα φωτός προσπίπτει σε μια επίπεδη πλάκα με παράλληλες επιφάνειες υπό γωνία $\alpha$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο δείκτης διάθλασης της πλάκας είναι $n_2$ ενώ ο αντίστοιχος δείκτης διάθλασης του περιβάλλοντος μέσου είναι $n_1$. Το πάχος της πλάκας είναι $d$. Να υπολογιστεί η μετατόπιση της ακτίνας D όταν περνά δια μέσου της πλάκας (βλέπε σχήμα) σαν συνάρτηση των $d$, $n_1$, $n_2$, και $\alpha$. Εάν η πλάκα είναι φτιαγμένη από fused quartz με $n_2 = 1.46$, και το περιβάλλον μέσον είναι αέρας ($n_1 = 1.0$) να βρεθεί η μετατόπιση (σε mm) αν η γωνία πρόσπτωσης είναι 67.5 deg και το πάχος της πλάκας είναι $d = 0.525$ inches (1 inch = 2.54cm).



## Άσκηση 3 (Cartesian Ovoid): [0%]

Όπως συζητήθηκε στην τάξη η διαχωριστική διαθλαστική επιφάνεια μεταξύ δύο υλικών με δείκτες διάθλασης $n_o$ και $n_i$ για να σχηματίζεται η εικόνα I του σημειακού αντικειμένου O ονομάζεται Καρτεσιανό ωοειδές. Εδώ δείχνεται ενδεικτικά ολόκληρο το ωοειδές όταν το αντικείμενο O βρίσκεται σε απόσταση $s_o$ από το σημείο $V_1$ και το σημειακό είδωλο I σε απόσταση $s_i$ από το σημείο $V_1$. Στο πρόβλημα δίδονται τα $s_o$, $s_i$, $n_o$ και $n_i$. (α) Να υπολογιστεί που βρίσκεται το σημείο $V_2$. (β) Να υπολογιστεί αριθμητικά η καμπύλη $P(x,y)$ για $n_o = 1.0$, $n_i = 1.5$, $s_o$ = 5cm, $s_i$,= 10cm, 15cm, και 20cm. Να γίνει η γραφική παράσταση των ωοειδών σε ένα κοινό σύστημα αξόνων (θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε κάποιο software όπως η MatLab). (γ) Αν υποθέσουμε, όπως είναι λογικό, ότι η ακτίνα με την μεγαλύτερη κλίση που πηγάζει από το O και καταλήγει στο I είναι η εφαπτομενική στο ωοειδές να βρεθούν οι μέγιστες κλίσεις για τις περιπτώσεις των αποστάσεων $s_i$ που δίδονται στο (β). Εδώ θα χρειαστεί και πάλι αριθμητική προσέγγιση.




## Άσκηση 4 (Thin Lenses System): [0%]

Ένα αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση 12cm στα αριστερά αποκλίνοντος λεπτού φακού εστιακής απόστασης -20cm. Ένας άλλος συγκλίνων λεπτός φακός εστιακής απόστασης +4cm βρίσκεται σε απόσταση 2cm στα δεξιά του αποκλίνοντος φακού. Να υπολογιστεί η απόσταση της εικόνας που δημιουργείται μετρημένη από την θέση του συγκλίνοντος φακού. Να γίνει ένα διάγραμμα ακτινών του συστήματος, να βρεθεί η εγκάρσια μεγέθυνση, καθώς και αν η εικόνα είναι πραγματική ή φανταστική.

## Άσκηση 5 (Thin Lenses System): [0%]

Ένα μικρό αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση 20cm στα αριστερά ενός συστήματος τριών λεπτών φακών εστιακών αποστάσεων -10cm, +15cm, και -20cm αντίστοιχα. Οι πρώτοι δύο φακοί απέχουν μεταξύ τους 30cm ενώ οι δύο τελευταίοι απέχουν 20cm. Να υπολογιστεί η απόσταση της εικόνας που δημιουργείται μετρημένη από την θέση του τελευταίου φακού (με f = -20cm). Να γίνει ένα διάγραμμα ακτινών του συστήματος, να βρεθεί η εγκάρσια μεγέθυνση, καθώς και αν η εικόνα είναι πραγματική ή φανταστική.

## Άσκηση 6 (Cartesian Ovoid): [15%]

(α) [5%] Να βρεθεί το Καρτεσιανό ωοειδές για τον τέλειο σχηματισμό ειδώλου σε μια διαθλαστική επιφάνεια όταν το σημειακό αντικείμενο O βρίσκεται σε απόσταση (στον αέρα με $n_o$ = 1.0) $s_o$ = 5cm αριστερά από το σημείο $V_1$ και το σημειακό είδωλο I σε απόσταση $s_i$ = 7.5cm δεξιά από το σημείο $V_1$ (μέσα στο διαθλαστικό υλικό, $n_i$ = 1.35). Τόσο το αντικείμενο όσο και το είδωλό του βρίσκονται πάνω στον άξονα x. Να βρεθεί η εξίσωση της τομής του ωοειδούς με το επίπεδο xy όπου το σημείο (x=0,y=0) αντιστοιχεί στην θέση του αντικειμένου. Να βρεθεί η θέση του σημείου V2 και να γίνει η γραφική παράσταση του ωοειδούς στο επίπεδο xy. (β) [10%] Να επαναληφθεί το (α) όταν το είδωλο είναι μη πραγματικό (virtual) δηλαδή $s_i$ = -7.5cm αριστερά από το σημείο $V_1$.

## Άσκηση 7 (Dispersing Prism): [10%]

Ο τύπος του *Sellmeier* μας δίνει την εξάρτηση του δείκτη διάθλασης ενός υλικού, *n(λ)* από το μήκος κύματος (προσεγγιστικά). Προς διευκόλυνσή σας ο τύπος του *Sellmeier* δίδεται παρακάτω μαζί με ένα πίνακα των σχετικών σταθερών, $B_i$ και $C_i$, για 2 υλικά:

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_i \frac{B_i \lambda^2}{\lambda^2 - C_i},$$

| Table of coefficients of *Sellmeier* equation | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Material** | **$B_1$** | **$B_2$** | **$B_3$** | **$C_1$** | **$C_2$** | **$C_3$** |
| Schott (multiple purpose glass) | 1.3182408 | 0.0244 | 1.08915181 | $8.79\times10^{-3}\mu m^2$ | $6.09\times10^{-2}\mu m^2$ | $110\ \mu m^2$ |

Ένα ισόπλευρο πρίσμα από **γυαλί Schott (multiple purpose)** χρησιμοποιείται σε ένα φασματοσκόπιο.
(α) [3%] Να υπολογιστεί η ελάχιστη γωνιακή απόκλιση σαν συνάρτηση του μήκους κύματος στο ορατό φάσμα (δηλαδή μεταξύ 400nm – 700nm) και να γίνει η γραφική της παράσταση.
(β) [3%] Να υπολογιστεί η φασματική δύναμη (dispersive power) του πρίσματος (προσεγγιστική και ακριβής τιμή).
(γ) [4%] Να υπολογιστεί η διασπορά $d\delta_{min}/d\lambda$ (σε deg/μm) σαν συνάρτηση του μήκους κύματος και να γίνει η γραφική της παράσταση.

## Άσκηση 8 (Thin Lenses System): [15%]

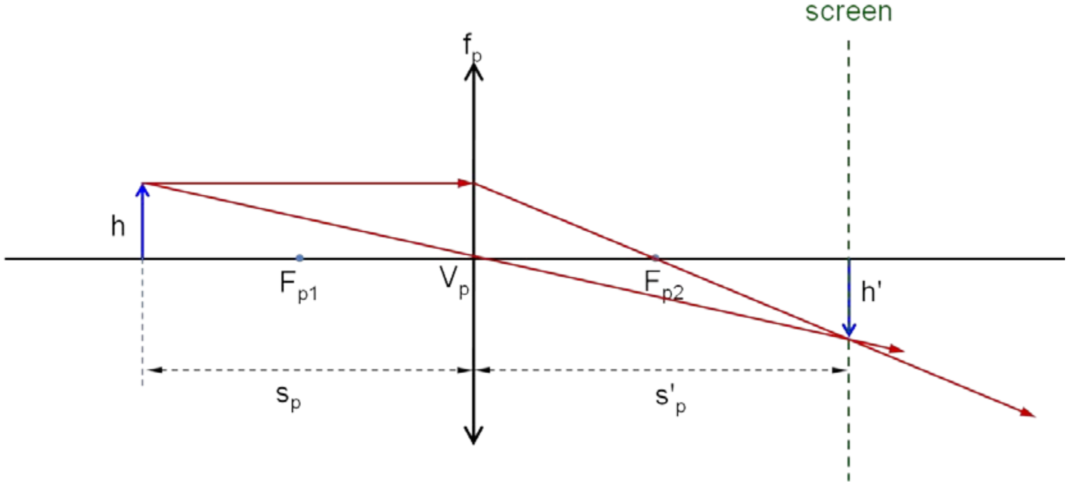
(α) [5%] Ένα λεπτό αντικείμενο ύψους 10mm βρίσκεται σε απόσταση 150mm στα αριστερά συγκλίνοντος λεπτού φακού εστιακής απόστασης 100mm. Ένας άλλος αποκλίνων λεπτός φακός εστιακής απόστασης -75mm βρίσκεται σε απόσταση L = 250mm στα δεξιά του συγκλίνοντος φακού. Να υπολογιστεί η απόσταση του ειδώλου που δημιουργείται μετρημένη από την θέση του τελευταίου αποκλίνοντος φακού. Να γίνει ένα διάγραμμα ακτινών του συστήματος, να βρεθεί η εγκάρσια μεγέθυνση, καθώς και αν το είδωλο είναι πραγματικό ή φανταστικό. (β) [10%] Τώρα υποθέσετε ότι η απόσταση L μεταξύ των δύο φακών μεταβάλλεται με κίνηση μόνον του δεξιού φακού και με σταθερή την θέση το αριστερού φακού. Έστω ότι $0 < L < 400$mm. Να γίνει η γραφική παράσταση της θέσης του ειδώλου όπως αυτή μετριέται από το κέντρο του δεξιού φακού. Να βρεθεί για ποιες τιμές της απόστασης L το είδωλο είναι πραγματικό ή φανταστικό.

## Άσκηση 9 (Focal Length Measurement for a Positive Thin Lens): [10%]

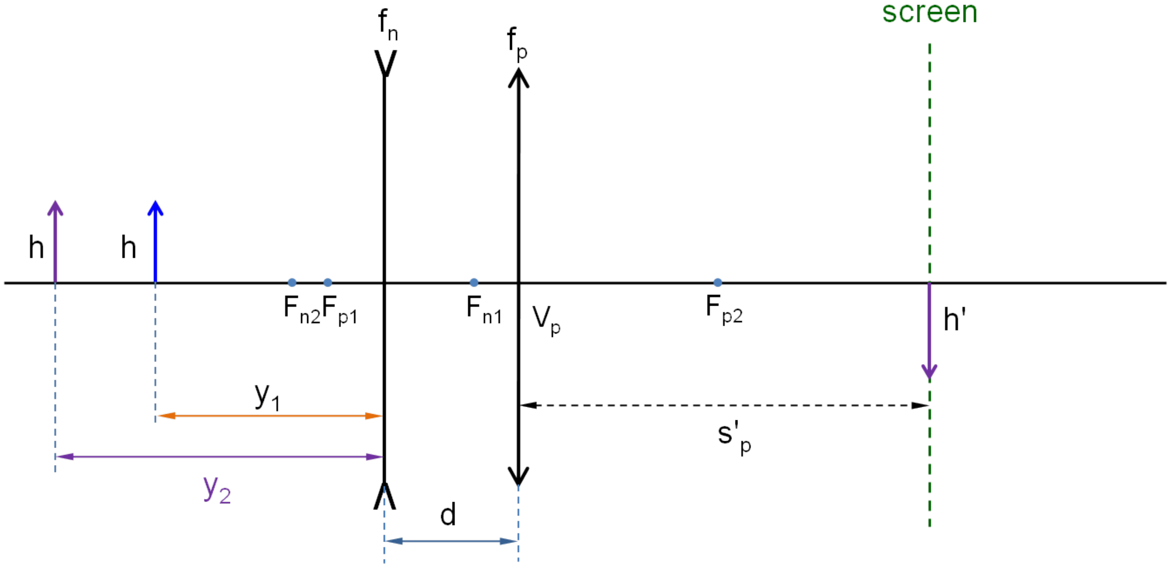
Ένας απλός τρόπος για την μέτρηση της εστιακής απόστασης ενός συγκλίνοντος λεπτού φακού κάνει χρήση του εξής απλού γεγονότος. Εάν ένα ζεύγος αντικειμένου και πραγματικού ειδώλου (Ο και Ι) βρίσκονται σε απόσταση μεταξύ τους $L > 4f$, τότε θα υπάρχουν δύο θέσεις του φακού, σε απόσταση d μεταξύ τους, όπου το ίδιο ζεύγος Ο και Ι θα παίζουν το ρόλο αντικειμένου και πραγματικού ειδώλου. Να βρεθεί η εστιακή απόσταση του φακού σαν συνάρτηση του $L$ και του $d$.

## Άσκηση 10 (Focal Length Measurement for a Negative Thin Lens): [10%]

Ένας τρόπος για την μέτρηση της εστιακής απόστασης ενός αποκλίνοντος λεπτού φακού είναι ο ακόλουθος.
Χρησιμοποιείται ένας συγκλίνων φακός (εστιακής απόστασης $f_p$) σε απόσταση $s_p$ από κάποιο αντικείμενο ύψους $h$ και σχηματίζεται το είδωλο ύψους $h'$ σε απόσταση $s'_p$ πάνω σε μια οθόνη όπως φαίνεται στο σχήμα.




Κρατώντας τις θέσεις του συγκλίνοντος φακού και της οθόνης σταθερές παρεμβάλλεται ο αποκλίνων φακός (της άγνωστης εστιακής απόστασης $f_n$) μεταξύ του αντικειμένου και του συγκλίνοντος φακού (σε απόσταση *d*) όπως φαίνεται στο κατωτέρω σχήμα.



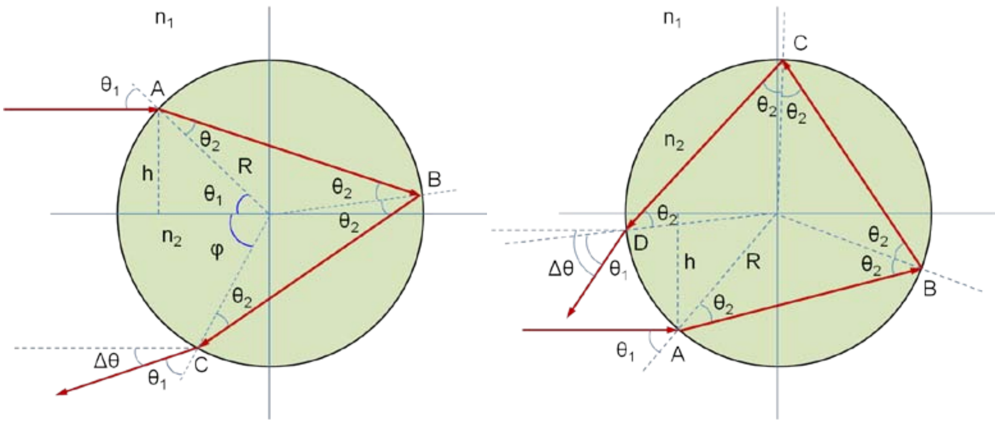

Το αντικείμενο είναι αρχικά σε απόσταση $y_1$ από τον αποκλίνοντα φακό. Όμως με την παρεμβολή του αποκλίνοντος φακού το είδωλο παύει να σχηματίζεται πάνω στην οθόνη. Για να ξανασχηματιστεί πάνω στην οθόνη απαιτείται η μετακίνηση του αντικειμένου σε απόσταση $y_2$ από τον αποκλίνοντα φακό. Να βρεθεί η εστιακή απόσταση του αποκλίνοντος φακού με χρήση των αποστάσεων $y_1$ και $y_2$ (οι οποίες μπορούν εύκολα να μετρηθούν). Επίσης να γίνει και ένα τυπικό διάγραμμα ακτινών για τον σχηματισμό του ειδώλου με την παρουσία του συστήματος των δύο λεπτών φακών.

## Άσκηση 11 (Rainbow Formation): [20%]

Αυτό το πρόβλημα είναι μια προσπάθεια για την κατανόηση των βασικών αρχών σχηματισμού των ουρανίων τόξων στην ατμόσφαιρα. Ένα παράδειγμα ουρανίου τόξου φαίνεται στο κάτωθι σχήμα όπου φαίνεται τόσο το

Η φωτογραφία ενός ουρανίου τόξου (http://atgbcentral.com/data/out/98/4799387-rainbow-pics.jpg)

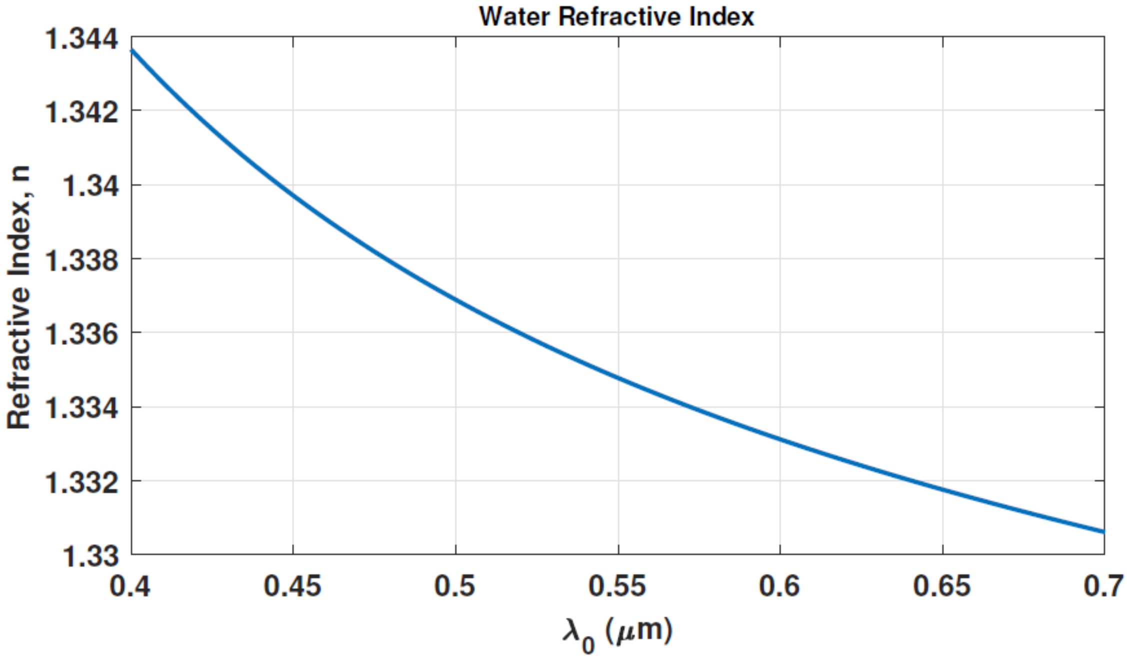
πρωτεύον (χαμηλότερα στον ορίζοντα με εντονότερα χρώματα) όσο και το δευτερεύον (ψηλότερα στον ορίζοντα με ασθενέστερα χρώματα) ουράνιο τόξο. Παρατηρείστε ότι ο διαχωρισμός των χρωμάτων είναι αντίθετος στα δύο ουράνια τόξα. Το πρωτεύον ουράνιο τόξο σχηματίζεται από ακτίνες φωτός που υφίστανται δύο διαθλάσεις και μια ανάκλαση στο εσωτερικό μια σταγόνας νερού (αριστερό σχήμα) ενώ το δευτερεύον ουράνιο τόξο σχηματίζεται από δύο διαθλάσεις και δύο ανακλάσεις στο εσωτερικό μια σταγόνας νερού (δεξί σχήμα).




Για τους υπολογισμούς που απαιτούνται είναι απαραίτητη η γνώση της εξάρτησης του δείκτου διάθλασης του νερού με το μήκος κύματος. Ο δείκτης διάθλασης του νερού $n(\lambda_0)$ σαν συνάρτηση του μήκους κύματος δίδεται από την κάτωθι εξίσωση *Sellmeier* που δίδει και την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

$$n^2(\lambda_0) \;=\; 1 + \frac{5.672526103 \times 10^{-1}\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 5.085550461 \times 10^{-3}} + \frac{1.736581125 \times 10^{-1}\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 1.814938654 \times 10^{-2}} +$$

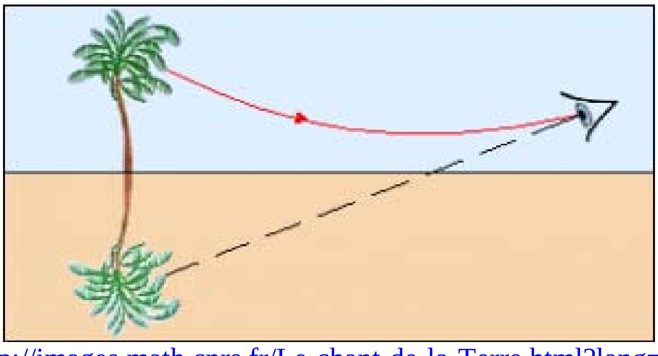
$$\frac{2.121531502 \times 10^{-2}\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 2.617260739 \times 10^{-2}} + \frac{1.138493213 \times 10^{-1}\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 1.073888649 \times 10^{+1}}$$




(α) Υπολογίστε την γωνιακή απόκλιση $\Delta\theta$ που ορίζεται στα σχήματα διάθλασης σε μια σταγόνα νερού σαν συνάρτηση του λόγου $h/R$ (ο οποίος σχετίζεται με την γωνία $\theta_1$) όπου $R$ είναι η ακτίνα μια σφαιρικής σταγόνας νερού. Για απλούστευση θεωρείστε μόνο ακτίνες που ανήκουν στον ίδιο μεσημβρινό της σφαιρικής σταγόνας ώστε να αποφευχθεί η τρισδιάστατη πρόσπτωση. Ο λόγος $h/R$ μεταβάλλεται μεταξύ 0 και 1 και για της δύο περιπτώσεις (2-διαθλάσεις/1-ανάκλαση και 2-διαθλάσεις/2-ανακλάσεις). Να γίνει η γραφική παράσταση της γωνιακής απόκλισης $\Delta\theta$ για διάφορα μήκη κύματος του ορατού φάσματος μεταξύ 0.38μm και 0.72μm. Τι παρατηρείτε? Θεωρήστε ότι ο δείκτης διάθλασης του αέρα είναι μονάδα, $n_1$=1.
(β) Υπολογίστε την εξίσωση που ορίζει τα ακρότατα της $\Delta\theta$ και της αντίστοιχης γωνίας πρόσπτωσης $\theta_1$ τόσο για το πρωτεύον όσο και για το δευτερεύον ουράνιο τόξο. Να γίνει η γραφική παράσταση της γωνιάς $\Delta\theta_{ext}$ και της αντίστοιχης γωνίας $\theta_{1,ext}$ σαν συνάρτηση του μήκους κύματος για το διάστημα τιμών του ερωτήματος (α).

## Άσκηση 12 (Mirage simulation): [20%]

Υποθέσετε ότι σε μια πολύ ζεστή ημέρα ο αέρας κοντά στο έδαφος, λόγω της υψηλότερης θερμοκρασίας είναι αραιότερος και πυκνώνει με την απόσταση από το έδαφος καθότι η θερμοκρασία μειώνεται. Ο δείκτης διάθλασης του αέρα (αμελώντας την διασπορά) σε αυτές τις συνθήκες μπορεί να προσεγγιστεί από την εξίσωση $n(r) = n_0[1 + kr]$ (όπου $k > 0$). Φυσικά η απόσταση $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι η ακτινική απόσταση από το έδαφος. Ο άξονας $z$ βρίσκεται πάνω στο έδαφος όπως φαίνεται και στο τελευταίο σχήμα.



http://images.math.cnrs.fr/Le-chant-de-la-Terre.html?lang=es

Για την αριθμητική εφαρμογή $n_0 = 1.00022$ και $k = 1.3333 \times 10^{-5} m^{-1}$.

(α) Υποθέσετε ότι μια ακτίνα ξεκινά από το ύψος $h$ όπως φαίνεται στο σχήμα με γωνία $\theta$. Η $\theta$ είναι θετική προς τα κάτω (όπως φαίνεται στο σχήμα), δηλαδή όταν η ακτίνα οδεύει προς τα αρνητικά $x$, και αρνητική όταν η ακτίνα οδεύει προς τα θετικά $x$. Έστω $\theta$ μεταβάλλεται μεταξύ -3/60deg – 30/60deg με βήμα 3/60deg. Επίσης υποθέσετε ότι $h$ = 2m. Βρεθούν οι δρόμοι που ακολουθεί η κάθε ακτίνα μέχρι την απόσταση ενός χιλιομέτρου στην *z* διεύθυνση.

(β) Επαναλάβετε το (α) όταν $h$ = 3m.

***Υποδείξεις:*** Εάν κάποια διαδρομή φτάσει στο έδαφος διακόπτεται, δηλαδή θεωρούμε ότι απορροφάται από το έδαφος. Για την επίλυση της eikonal equation θα χρειαστούν και οι οριακές συνθήκες $(\frac{dr}{dt})(t=0) = n(r)\left(\frac{dr}{ds}\right)(t=0)$. Η eikonal equation επιλύεται μόνον αριθμητικά (στις 3 διαστάσεις) με χρήση των μεθόδων Runge-Kutta. Για παράδειγμα μπορεί να γίνει χρήση της Matlab's ``ode45" function που επιλύει ένα μη γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Οι ακόλουθες πηγές είναι χρήσιμες για την επίλυση της eikonal equation:

A. Sharam et al., “Tracing rays through graded-index media: a new method,” Appl. Opt., vol. 21, No. 6, pp. 984-987, Mar. 15, 1982.

A. Sharam, “Computing optical path length in gradient-index media: a fast and accurate method,” Appl. Opt., vol. 24, No. 24, pp. 4367-4370, Dec. 15, 1985.

Στην περίπτωση που γίνει χρήση της σχέσης $n(r) = n_0[1+kx]$ (δηλαδή που ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται μόνον από την απόσταση από το έδαφος *x*) τότε είναι δυνατή η αναλυτική επίλυση της eikonal equation. Προσδιορίσετε (κάνοντας την αντίστοιχη γραφική παράσταση) σε αυτήν την περίπτωση την διαφορά μεταξύ της αναλυτικής και της αριθμητικής λύσης της εξίσωσης σαν συνάρτηση της απόστασης *z* για διαφορετικά *h* και *θ*.