



## ΟΠΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

### ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ No. 1

Ημερομηνία Παράδοσης: **12 Μαρτίου 2024**

(Οι προς παράδοση ασκήσεις έχουν μη μηδενικό συντελεστή βαρύτητας)

### Άσκηση 0 (deBroglie wavelength): (0%)

Να βρεθεί η κινητική ενέργεια (σε Joule και eV), η ορμή, και το deBroglie μήκος κύματος ενός ηλεκτρονίου όταν: (α) η ταχύτητά του είναι  $1 \times 10^5 \text{ m/s}$  και (β) η ταχύτητά του είναι  $0.99c$  όπου  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$  η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Δίδονται η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου  $m_0 = 9.10938291 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , η σταθερά του Planck,  $h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J s}$ , και  $1 \text{ eV} = 1.602176565 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

### Άσκηση 1 (Blackbody Radiation): (0%)

Η ακτινοβολία που εκπέμπει ο ήλιος προσομοιάζει την ακτινοβολία μέλανος σώματος με μέγιστη ενέργεια ανά μονάδα όγκου ανά μήκος κύματος στο  $\lambda_m = 501.4 \text{ nm}$ . (α) Να βρεθεί η ηλεκτρομαγνητική ισχύς ανά μονάδα επιφανείας (σε  $\text{W/m}^2$ ) που φθάνει στην Γη από τον ήλιο. (β) Αν θεωρήσουμε ότι η Γη παραμένει σε σταθερή θερμοκρασία (thermodynamic equilibrium) και εκπέμπει ακτινοβολία σαν μέλαν σώμα ποια είναι η ισοδύναμη θερμοκρασία της Γης σε βαθμούς Kelvin; (γ) Αν θέλουμε να έχουμε καλύτερη προσέγγιση στο προηγούμενο ερώτημα θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι μέρος της ακτινοβολίας που προσπίπτει στην Γη από τον Ήλιο ανακλάται. Ο μέσος συντελεστής ανάκλασης της Γης στην προσπίπτουσα ακτινοβολία του Ηλίου (γνωστή ως albedo) είναι περίπου 30%. Αν λοιπόν λάβουμε υπόψη μας το albedo της Γης ποια θα πρέπει να είναι η ισοδύναμη θερμοκρασία της αν η ακτινοβολία της θεωρηθεί και πάλι ότι προσομοιάζει την ακτινοβολία μέλανος σώματος;

Δίδονται η μέση ακτίνα του ηλίου ( $R_s = 696000 \text{ km}$ ), η μέση ακτίνα της Γης ( $R_e = 6371 \text{ km}$ ), και η μέση απόσταση Ηλίου-Γης ( $D = 149600000 \text{ km}$ ).

### Άσκηση 2 (Coherence): (0%)

(α) Μια πηγή λευκού φωτός έχει σχεδόν ομοιόμορφη ενεργειακή κατανομή στο φάσμα μεταξύ 400nm και 700nm. (β) Μια πηγή φωτός λέιζερ έχει σχεδόν ομοιόμορφη ενεργειακή κατανομή στο φάσμα μεταξύ  $693.4 \text{ nm} \pm 10^{-5} \text{ nm}$ . Για τις πηγές (α) και (β) να υπολογιστούν οι χρόνοι συμφωνίας (coherence times) καθώς και τα μήκη συμφωνίας (coherence lengths).

### Άσκηση 3 (Laser Modes): (0%)

Υποθέστε ότι το κεντρικό μήκος κύματος ενός λέιζερ He-Ne είναι ακριβώς 632.8nm. Ποιά είναι η αντίστοιχη συχνότητα της ακτινοβολίας του λέιζερ; Αν η απόσταση μεταξύ των επιπέδων κατόπτρων της κοιλότητας συντονισμού του λέιζερ είναι 50cm, βρεθεί η τιμή του ακεραίου  $q$  για τον ρυθμό του λέιζερ που είναι πλησιέστερη στην κεντρική συχνότητα. Αν το φασματικό εύρος της καμπύλης κέρδους του λέιζερ είναι 1GHz, να βρεθεί ο αριθμός των αξονικών ρυθμών (longitudinal modes) της κοιλότητας που «χωρούν» μέσα στην καμπύλη κέρδους του λέιζερ.

### Άσκηση 4 (Photometry-Brightness Comparison): (0%)

Σε ένα οπτικό εργαστήριο η έξοδος από δύο λέιζερ εξετάζεται με το ανθρώπινο μάτι σε πανομοιότυπες συνθήκες (για παράδειγμα οι δέσμες των λέιζερ σκεδάζονται πάνω σε κάποια επιφάνεια). Το πρώτο λέιζερ είναι ένα He-Cd λέιζερ ( $\lambda_0 = 441.6 \text{ nm}$ ) ισχύος 10mW και το δεύτερο είναι ένα λέιζερ He-Ne ( $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$ ) ισχύος 1.5mW. Ποιό λέιζερ φαίνεται λαμπρότερο και γιατί.

### Άσκηση 5 (Lighted Panel Switch): (0%)

Ένα φωτιζόμενο πάνελ από διακόπτη έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς 5mm. Φιλτράροντας το φως από μια λάμπα πυράκτωσης, εκπέμπει κόκκινο φως μήκους κύματος  $\lambda_0 = 630\text{nm}$ . Υποτίθεται ότι η εκπομπή ακολουθεί τον νόμο του Lambert (Lambertian light distribution). Η ηλεκτρομαγνητική φωτεινή ισχύς που εκπέμπεται είναι  $10^{-6}\text{Watts}$ . Υπολογίστε, (α) την φωτεινή ισχύ (luminous power), (β) την φωτεινή ένταση (luminous intensity) κάθετα στην επιφάνεια του διακόπτη, και (γ) την λαμπρότητα (luminance).

### Άσκηση 6 (Photometric Quantities): (0%)

Ένα λέιζερ ιόντων Αργού εκπέμπει 2.8 Watts ηλεκτρομαγνητικής ισχύος σε μήκος κύματος  $\lambda_0 = 514.5\text{nm}$ . Η διάμετρος της δέσμης του λέιζερ είναι 1.4mm. Η δέσμη αποκλίνει και προσπίπτει πάνω σε ένα παραπέτασμα που βρίσκεται 10 m μακριά. Ο άξονας της δέσμης είναι κάθετος στο παραπέτασμα. (α) Υπολογίστε την φωτεινή ισχύ (luminous power) που προσπίπτει στο παραπέτασμα. (β) Υπολογίστε την λαμπρότητα (illuminance) που προσπίπτει στο παραπέτασμα σε footcandles και lux (για το φωτιζόμενο τμήμα του παραπετάσματος). Υποθέστε ομοιόμορφη κατανομή της έντασης της δέσμης κατά μήκος της διατομής της αντί για το ορθότερο γκαουσιανό προφίλ για απλούστευση των υπολογισμών.

### Άσκηση 7 (Blackbody Radiation): (0%)

Η ακτινοβολία που εκπέμπει ο ήλιος προσομοιάζει την ακτινοβολία μέλανος σώματος με μέση θερμοκρασία της επιφάνειάς του  $5505^\circ\text{C}$ . Αν θεωρήσουμε ότι κάθε πλανήτης του ηλιακού συστήματος παραμένει σε σταθερή θερμοκρασία (thermodynamic equilibrium) και εκπέμπει ακτινοβολία σαν μέλαν σώμα ποια είναι η ισοδύναμη θερμοκρασία του σε βαθμούς Kelvin; Να ληφθεί υπόψη ο μέσος συντελεστής ανάκλασης ενός πλανήτη στην προσπίπτουσα ακτινοβολία του Ηλίου (γνωστός ως *albedo*). Αμελούνται τα φαινόμενα θερμοκηπίου, η ατμοσφαιρική πίεση του κάθε πλανήτη, και άλλα φαινόμενα που μπορεί να συμβάλουν στην διαφοροποίηση της μέσης πλανητικής θερμοκρασίας. Τα στοιχεία που θα χρειαστούν παρέχονται στον κάτωθι πίνακα:

	Average Radius (Μέση Ακτίνα) (km)	Average Distance from the Sun (Μέση απόσταση από τον Ήλιο) ( $\times 10^6$ km)	Average Albedo (Μέση Ανακλαστικότητα)
Sun (Ήλιος)	695700	-	-
Mercury (Ερμής)	2439.5	57.9	0.12
Venus (Αφροδίτη)	6052	108.2	0.75
Earth (Γη)	6378	149.6	0.30
Mars (Αρης)	3396	227.9	0.16
Jupiter (Δίας)	71492	778.6	0.34
Saturn (Κρόνος)	60268	1433.5	0.34
Uranus (Ουρανός)	25559	2872.5	0.30
Neptune (Ποσειδών)	24764	4495.1	0.29
Pluto (Πλούτων)	1185	5906.4	0.40

### Άσκηση 8 (Blackbody Radiation): (20%)

Η Σελήνη δεν έχει ατμόσφαιρα και επομένως δεν εμφανίζει το φαινόμενο του θερμοκηπίου. Η σκοτεινή πλευρά της είναι πολύ κρύα ενώ η φωτεινή της πλευρά είναι πολύ θερμότερη. Θεωρήστε τα κάτωθι δύο μοντέλα για τον προσδιορισμό της επιφανειακής θερμοκρασίας της φωτεινής πλευράς της Σελήνης. Η ακτίνα της Σελήνης είναι 1737 km ενώ η απόστασή της από τον Ήλιο είναι περίπου  $149.6 \times 10^6$  km (όσο δηλαδή η μέση απόσταση Γης-Ηλίου). Η ακτινοβολία που εκπέμπει ο ήλιος προσομοιάζει την ακτινοβολία μέλανος σώματος με μέση θερμοκρασία της επιφάνειάς του  $5505^\circ\text{C}$ . Η ακτίνα του Ηλίου είναι 695700 km.

(α) Υποθέστε ότι όλη η ηλεκτρομαγνητική ισχύς του Ήλιου που προσπίπτει στην Σελήνη ακτινοβολείται σαν θερμική ακτινοβολία από την μισή επιφάνεια της Σελήνης (την φωτεινή). Υπολογίστε την επιφανειακή θερμοκρασία της φωτεινής πλευράς της Σελήνης με αυτό το μοντέλο. Λάβετε υπόψη ότι το *albedo* της Σελήνης είναι 0.120.

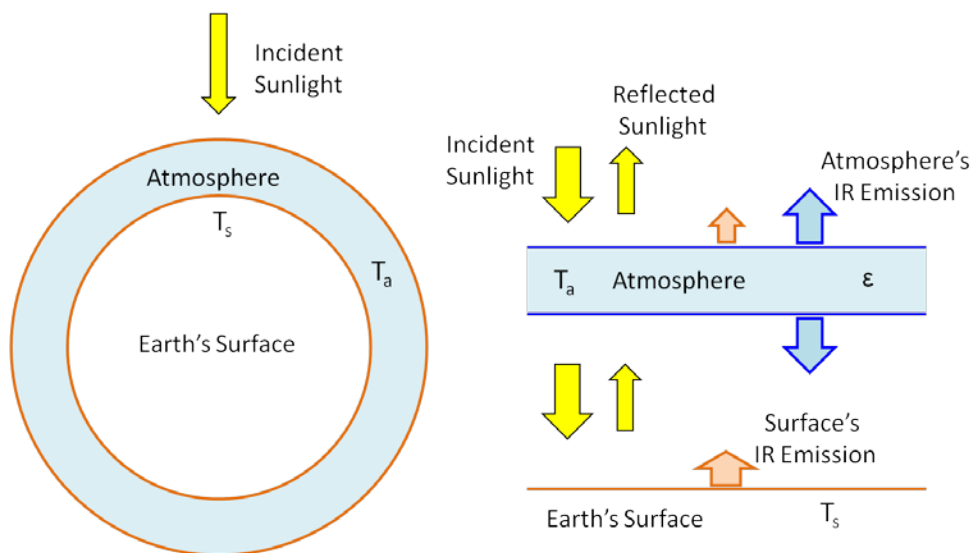
(β) Το μοντέλο (α) δεν είναι πολύ ρεαλιστικό. Δεν είναι δυνατό όλη η φωτεινή πλευρά της Σελήνης να βρίσκεται σε σταθερή θερμοκρασία. Ένα απλούστερο μοντέλο είναι να θεωρηθεί ένα συγκεκριμένο σημείο της φωτεινής πλευράς της Σελήνης το οποίο δέχεται την ακτινοβολία του Ηλίου και την εκπέμπει υπό μορφή θερμικής ακτινοβολίας (λαμβάνομένου υπόψη και του *albedo* 0.12). Για τον σκοπό αυτό θεωρήστε ένα τετραγωνικό μέτρο της φωτεινής πλευράς της Σελήνης που δέχεται σχεδόν κάθετα την ακτινοβολία του Ηλίου και μετά την ακτινοβολεί υπό μορφή θερμικής ακτινοβολίας. Ποιά είναι η επιφανειακή θερμοκρασία αυτής της περιοχής ενός τετραγωνικού μέτρου της Σελήνης;

### Άσκηση 9 (Simple Model for Greenhouse Effect): (20%)

Η μονοστρωματική θεώρηση της ατμόσφαιρας ενός πλανήτη όπως η Γη επιδεικνύει τα βασικά του φαινομένου του θερμοκηπίου. Η ατμόσφαιρα αποτελεί μια αόρατη κουβέρτα ενός πλανήτη. Σε αυτό το απλό μοντέλο το ορατό φως του ήλιου υποτίθεται ότι περνά μέσα από την ατμόσφαιρα χωρίς οποιαδήποτε σκέδαση ή απορρόφηση (φυσικά αυτή είναι μια χονδρική προσέγγιση). Το πλανητικό *albedo* παραμένει το ίδιο (υποθέτοντας ότι είναι 0.30 για τη Γη, όπως φαίνεται από τον προηγούμενο πίνακα) και η επιφανειακή ηλεκτρομαγνητική ροή από τον Ήλιο είναι η ίδια με την αυτήν που υπάρχει στην κορυφή της ατμόσφαιρας. Η ατμόσφαιρα επηρεάζει μόνο την υπέρυθρη (IR) ροή ακτινοβολίας που εκπέμπεται από την επιφάνεια της Γης σε κατάσταση ισορροπίας. Ένα μέρος της υπέρυθρης ακτινοβολίας απορροφάται και θερμαίνει την ατμόσφαιρα και ένα άλλο μέρος διαδίδεται μέσω της ατμόσφαιρας και διαφεύγει στο διάστημα. Υποθέτουμε επίσης ότι η ατμόσφαιρα συμπεριφέρεται σαν ένα "γκρίζο σώμα" (grey body) με σταθερό συντελεστή εκπομπής (και απορροφητικότητας)  $\epsilon$  (που θεωρείται ανεξάρτητος από το μήκος κύματος και  $0 < \epsilon < 1$ ). Σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία της επιφάνειας της Γης είναι  $T_s$  και ότι η ατμοσφαιρική θερμοκρασία είναι  $T_a$  (και οι δύο θεωρούνται σταθερές σε αυτό το απλό μοντέλο). Μια απλή εικόνα της ατμόσφαιρας ενός στρώματος και των αντίστοιχων ροών ακτινοβολίας παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνεται ότι η ακτινοβολία του ήλιου που φθάνει στη Γη, όπως μετράται από τους δορυφόρους εκτός της Γης, είναι περίπου  $1360\text{W/m}^2$ .

(α) Υπολογίστε την θερμοκρασία στην επιφάνεια της Γης  $T_s$  καθώς και την ατμοσφαιρική θερμοκρασία  $T_a$  ως συναρτήσεις του συντελεστού εκπομπής (και απορροφητικότητας)  $\epsilon$ .

(β) Εάν είναι γνωστό ότι η μέση θερμοκρασία της επιφάνειας της Γης είναι  $15^\circ\text{C}$ , ποιος είναι ο συντελεστής εκπομπής (και απορροφητικότητας)  $\epsilon$  της ατμόσφαιρας;



### Άσκηση 10 (Photometric Quantities): (10%)

Ένα προβολικό υγρών κρυστάλλων (Liquid Crystal Projector) έχει ονομαστική φωτεινή ισχύ 1800 lumens. Η οθόνη παράγει ίση φωτεινή ισχύ σε καθένα από τα τρία βασικά χρώματα. Τα μήκη κύματος των τριών βασικών χρωμάτων είναι  $\lambda_R = 670\text{nm}$  (για το κόκκινο χρώμα),  $\lambda_G = 550\text{nm}$  (για το πράσινο χρώμα), και  $\lambda_B = 440\text{nm}$  (για το μπλε χρώμα). Να υπολογιστεί η ακτινοβολός ισχύ για κάθε χρώμα σε Watts και η συνολική φωτεινή ισχύ σε Watts που παράγει η οθόνη. Το προβολικό προβάλλει σε πλήρως ανακλαστικό παραπέτασμα διαστάσεων  $1.80\text{m} \times 1.20\text{m}$ . Το ανακλαστικό παραπέτασμα μπορεί να θεωρηθεί σαν Lambertian πηγή. Να βρεθεί η λαμπρότητα (luminance) του παραπετάσματος σε  $\text{cd/m}^2$ .

### Άσκηση 11 (Blackbody Color and Photometry): (30%)

Να υπολογιστούν οι χρωματικές συντεταγμένες (chromaticity coordinates) ενός ιδανικού μέλανος σώματος σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας του. Υποθέσετε ότι το θερμοκρασιακό εύρος είναι μεταξύ 1000 °K και 12000 °K σε βήματα των 100 °K. Για αυτό το πρόβλημα απαιτούνται οι χρωματικές συναρτήσεις ταύτισης (color matching functions)  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$ , and  $\bar{z}(\lambda)$ . Οι τιμές αυτών των συναρτήσεων μπορούν να βρεθούν στον σύνδεσμο: <http://www.cvrl.org>. Για την δική σας ευκολία τα ίδια δεδομένα είναι και στον σύνδεσμο του μαθήματος [http://users.ntua.gr/eglytsis/OptEng/Color\\_matching\\_functions\\_2deg\\_CIE\\_1931.pdf](http://users.ntua.gr/eglytsis/OptEng/Color_matching_functions_2deg_CIE_1931.pdf).

(α) Να γίνει η γραφική παράσταση των χρωματικών συντεταγμένων του μέλανος σώματος μέσα στο διάγραμμα χρωματικότητας CIE σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας του μέλανος σώματος.

(β) Να καθοριστούν με την μορφή μιας λίστας οι χρωματικές συντεταγμένες του μέλανος σώματος για θερμοκρασίες  $T = 1000-10000$  °K σε βήματα των 1000 °K.

(γ) Τώρα θέλουμε να παραστήσουμε το χρώμα του μέλανος σώματος (όπως το αντιλαμβάνεται το ανθρώπινο μάτι) σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας του. Για αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιηθούν οι συντεταγμένες RGB. Σε αυτό το χρωματικό standard ο πίνακας  $\tilde{M}$  που μετατρέπει τις X, Y, Z τιμές στις R, G, B τιμές δίδεται ως εξής:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 3.2404542 & -1.5371385 & -0.4985314 \\ -0.9692660 & 1.8760108 & 0.0415560 \\ 0.0556434 & -0.2040259 & 1.0572252 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον οι τιμές R, G, B πρέπει να κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1 κανονικοποιήστε τις τιμές R, G, B διαιρώντας τις με την μέγιστη τιμή τους. Για καλύτερη αντίληψη χρώματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια μη-γραμμική διόρθωση (gamma correction) των κανονικοποιημένων τιμών R, G, B που εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$W' = \begin{cases} 12.92W & \text{for } W < 0.0031308, \\ 1.055W^{1/2.4} - 0.055 & \text{for } W \geq 0.0031308, \end{cases}$$

όπου W είναι ένα από τα R, G, B. Οι τελικές τιμές των R, G, B θα πρέπει να περιοριστούν στο μηδέν (0) αν γίνουν αρνητικές και στην μονάδα (1) αν υπερβούν την μονάδα. Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες προσπαθήστε να αναπαραστήσετε το αντιλαμβανόμενο χρώμα ενός ιδανικού μέλανος σώματος σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας με ή χωρίς την μη-γραμμική διόρθωση.

### Άσκηση 12 (Blackbody Radiation – Human Body): (20%)

Υποθέσετε ότι το μέσο ανθρώπινο σώμα μπορεί να θεωρηθεί σαν εκπομπός μέλανος σώματος με θερμοκρασία 36.6 βαθμών Κελσίου και προσεγγιστική επιφάνεια ενός τετραγωνικού μέτρου. (α) Να γίνει η γραφική παράσταση της αφετικής ικανότητας ακτινοβολίας  $M_\lambda(\lambda)$  (radiant exittance) σαν συνάρτηση του μήκους κύματος σε μικρόμετρα. Εκφράσετε την  $M_\lambda(\lambda)$  σε  $W/m^2/\mu m$ . Σε ποιο μήκος κύματος η  $M_\lambda(\lambda)$  είναι μέγιστη? (β) Να βρεθεί η συνολική ισχύς που εκπέμπει το ανθρώπινο σώμα μεταξύ 10 $\mu m$  -10.1 $\mu m$ . Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος που εκπέμπει το ανθρώπινο σώμα αντιπροσωπεύει αυτή η ισχύς? Πόσα φωτόνια αν δευτερόλεπτο εκπέμπει το ανθρώπινο σώμα σε μήκος κύματος μεταξύ 10 $\mu m$  -10.1 $\mu m$ ? (γ) Να βρεθεί η συνολική ισχύς που εκπέμπει το ανθρώπινο σώμα στο ορατό φάσμα μεταξύ 0.38 $\mu m$  -0.78  $\mu m$ . Τι ποσοστό της συνολικής ισχύος που εκπέμπει το ανθρώπινο σώμα αντιπροσωπεύει αυτή η ισχύς? Ποιος είναι ο αριθμός των φωτονίων που εκπέμπει το ανθρώπινο σώμα (κατά μέσο όρο) στο ορατό φάσμα?