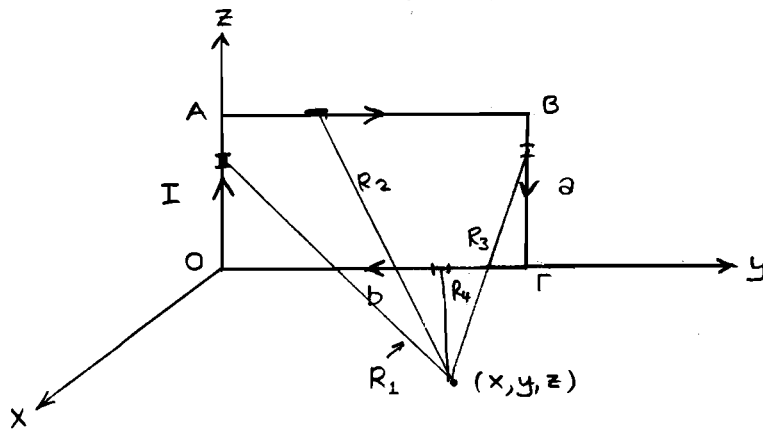


ΑΣΚΗΣΗ 1:



(α) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell}'}{R}$ και χρήση επαλληλίας

Τμήμα OA:
$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^a \frac{I \hat{z} dz'}{[x^2 + y^2 + (z-z')^2]^{1/2}} =$$

$$= \hat{z} \frac{I\mu_0}{4\pi} \left[-\ln \left[(z-z') + [x^2 + y^2 + (z-z')^2]^{1/2} \right] \right]_0^a$$

$$= \hat{z} \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \left[\frac{z + [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}{(z-a) + [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}} \right]$$

Τμήμα BΓ:
$$\vec{A}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^a \frac{I(-\hat{z}) dz'}{[x^2 + (y-b)^2 + (z-z')^2]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \left\{ -\ln \left[(z-z') + [x^2 + (y-b)^2 + (z-z')^2]^{1/2} \right] \right\}_0^a$$

$$= -\hat{z} \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \left[\frac{z + [x^2 + (y-b)^2 + z^2]^{1/2}}{(z-a) + [x^2 + (y-b)^2 + (z-a)^2]^{1/2}} \right]$$

Τμήμα AB:
$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^b \frac{I \hat{y} dy'}{[x^2 + (y-y')^2 + (z-a)^2]^{1/2}} =$$

$$= \hat{y} \frac{I\mu_0}{4\pi} \left[-\ln \left[(y-y') + [x^2 + (y-y')^2 + (z-a)^2]^{1/2} \right] \right]_0^b =$$

$$= \hat{y} \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \left[\frac{y + [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}}{(y-b) + [x^2 + (y-b)^2 + (z-a)^2]^{1/2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{Τμήμα ΓΟ: } \vec{A}_4 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^b \frac{I(-\hat{y}) dy'}{[x^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}} = \\
 &= -\hat{y} \frac{I\mu_0}{4\pi} \left[-\ln[(y-y') + [x^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2}] \right]_0^b = \\
 &= -\hat{y} \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \left[\frac{y + [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}{(y-b) + [x^2 + (y-b)^2 + z^2]^{1/2}} \right]
 \end{aligned}$$

Επομένως, $\vec{A} = A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ όπου

$$A_y = \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \left[\frac{y + [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}}{(y-b) + [x^2 + (y-b)^2 + (z-a)^2]^{1/2}} \frac{(y-b) + [x^2 + (y-b)^2 + z^2]^{1/2}}{y + [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right]$$

$$A_z = \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \left[\frac{z + [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}{(z-a) + [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}} \frac{(z-a) + [x^2 + (y-b)^2 + (z-a)^2]^{1/2}}{z + [x^2 + (y-b)^2 + z^2]^{1/2}} \right]$$

$$(\beta) \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i}_x \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] - \hat{i}_y \left[\frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + \hat{i}_z \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} \right]$$

$$A_y = \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \frac{N_y}{D_y} \sim \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \frac{D_y}{N_y} \frac{(\partial N_y / \partial x) D_y - (D_y / \partial x) N_y}{D_y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \frac{D_y}{N_y} \left[\frac{\partial N_y / \partial x}{D_y} - \frac{N_y}{D_y^2} \frac{\partial D_y}{\partial x} \right] \text{ όπου}$$

$$N_y(x, y, z) = [y + (x^2 + y^2 + (z-a)^2)]^{1/2} [(y-b) + (x^2 + (y-b)^2 + z^2)]^{1/2}$$

$$D_y(x, y, z) = [(y-b) + (x^2 + (y-b)^2 + (z-a)^2)]^{1/2} [y + (x^2 + y^2 + z^2)]^{1/2}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \frac{D_y}{N_y} \left[\frac{\partial N_y / \partial z}{D_y} - \frac{N_y}{D_y^2} \frac{\partial D_y}{\partial z} \right]$$

$$A_z = \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{N_z}{D_z} \right) \sim \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \frac{D_z}{N_z} \left[\frac{1}{D_z} \frac{\partial N_z}{\partial x} - \frac{N_z}{D_z^2} \frac{\partial D_z}{\partial x} \right]$$

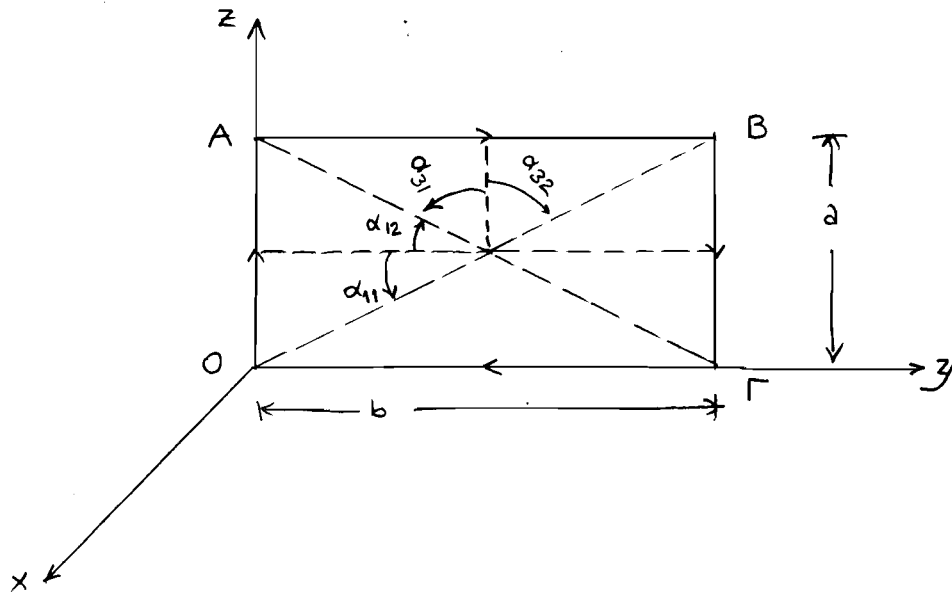
$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \frac{D_z}{N_z} \left[\frac{1}{D_z} \frac{\partial N_z}{\partial y} - \frac{N_z}{D_z^2} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right]$$

όπου

$$N_z(x, y, z) = [z + (x^2 + y^2 + z^2)]^{1/2} [(z-a) + [x^2 + (y-b)^2 + (z-a)^2]^{1/2}]$$

$$D_z(x, y, z) = [(z-a) + [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}] [z + [x^2 + (y-b)^2 + z^2]^{1/2}]$$

(8)



Τμήμα OA:
$$\vec{B}_1 = -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{b/2}\right) [\sin\alpha_{11} - \sin\alpha_{12}] =$$

$$= -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{b} [2 \sin\alpha_{11}] =$$

$$= -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{1}{b} \cdot \frac{a/2}{[(a/2)^2 + (b/2)^2]^{1/2}} = -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Τμήμα ΒΓ
$$\vec{B}_3 = -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Τμήμα AB
$$\vec{B}_2 = -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{a/2} [\sin\alpha_{31} - \sin\alpha_{32}] =$$

$$= -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{a} 2 \sin\alpha_{31} =$$

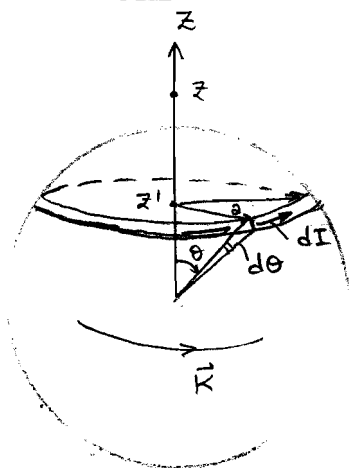
$$= -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{1}{a} \cdot \frac{b/2}{[(a/2)^2 + (b/2)^2]^{1/2}} = -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Τμήμα ΓΟ:
$$\vec{B}_4 = -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

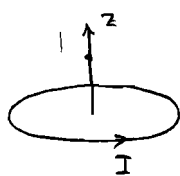
Επομένως στο κέντρο
$$\vec{B} = -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{\pi} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right] =$$

$$\vec{B} = -\hat{l}_x \frac{\mu_0 I}{\pi} 2 \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2:



(α) Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για κυκλικό βρόχο. Το μαγνητικό πεδίο στα σημεία του άξονα z από κυκλικό βρόχο ακτίνας a δίδεται από την σχέση:



$$\vec{H} = \hat{z} \frac{I}{2} \frac{a^2}{[z^2 + a^2]^{3/2}}$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του κυκλικού βρόχου για τον βρόχο ακτίνας a της σφαίρας έχουμε:

$$d\vec{H} = \frac{dI}{2} \frac{a^2}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{z} \quad a = R \sin \theta, \quad dI = K_0 R d\theta$$

Επομένως αθροίζοντας για όλους τους βρόχους στους οποίους μπορεί να αναλυθεί το επιφανειακό ρεύμα της σφαίρας έχουμε:

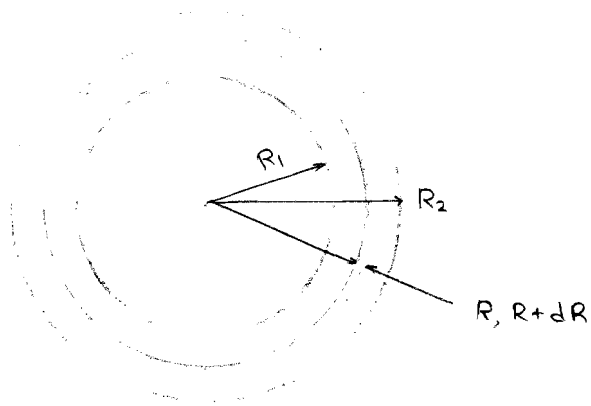
$$\vec{H}(z) = \int_{\theta=0}^{\pi} d\vec{H} = \hat{z} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{K_0 R d\theta}{2} \frac{R^2 \sin^2 \theta}{[[z - R \cos \theta]^2 + R^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} =$$

$$\vec{H}(z) = \hat{z} \frac{K_0 R^3}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{[z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta]^{3/2}} d\theta$$

(β) Για το κέντρο της σφαίρας $z=0 \rightarrow$

$$\vec{H}(z=0) = \hat{z} \frac{K_0 R^3}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{R^3} d\theta = \frac{K_0 \pi}{4} \hat{z}$$

(γ) Στην περίπτωση του σφαιρικού κελύφους μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα.



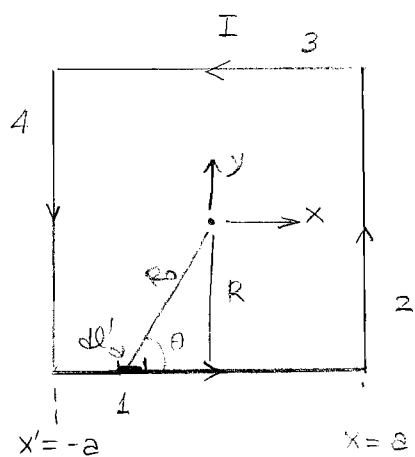
Το αντίστοιχο επιφανειακό ρεύμα στο στοιχειώδες πάχος υέλυπος από $R, R+dR$

είναι $\vec{K} = \vec{J} dR = J_0 dR \hat{\varphi}$ και το πεδίο $d\vec{H} = \hat{z} \frac{J_0 dR \pi}{4}$

Επομένως το πεδίο στο κέντρο του υέλυπος είναι:

$$\vec{H}(z=0) = \int_{R=R_1}^{R_2} \frac{J_0 dR \pi}{4} \hat{z} = \hat{z} \frac{J_0 \pi}{4} (R_2 - R_1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:



(α) Το μαγνητικό πεδίο του τμήματος

1 δίδεται από τον νόμο του Biot-

Savart: (έστω $2a$ η πλευρά του τετρ.)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x'=-a}^{x'=a} I \frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{R_0^2}$$

$$d\vec{l}' = \hat{i}_x dx', \quad R_0^2 = R^2 + x'^2$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}_0}{R_0} = \hat{i}_x \cos\theta + \hat{i}_y \sin\theta, \quad R = a$$

$$\hat{i}_x \times \hat{r} = \hat{i}_z \sin\theta, \quad \sin\theta = R/R_0 = R/(R^2+x'^2)^{1/2}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \hat{i}_z \cdot \frac{R dx'}{(R^2+x'^2)^{3/2}} = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{R dx'}{(R^2+x'^2)^{3/2}} =$$

$$= \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} R \left[\frac{x'}{R^2 [x^2+R^2]^{1/2}} \right]_{-a}^a = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \left[\frac{a}{(a^2+R^2)^{1/2}} + \frac{a}{(a^2+R^2)^{1/2}} \right]$$

$$= \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \sqrt{2}$$

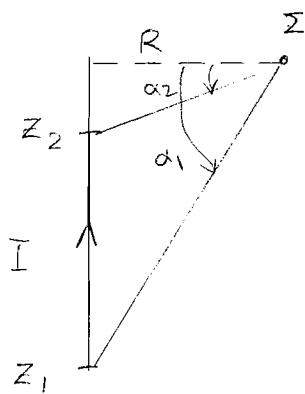
Επομένως η συμβολή των τεσσάρων πλευρών είναι:

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \sqrt{2} \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\vec{B}_{tot} = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{R} \sqrt{2} \quad \text{και} \quad \vec{H}_{tot} = \hat{i}_z \frac{I \sqrt{2}}{R} \quad \text{στο}$$

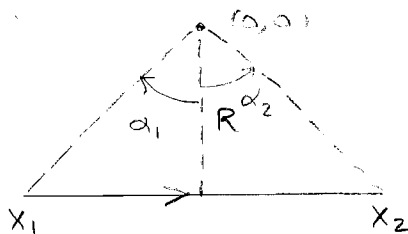
κέντρο του τετραγώνου.

Μπορούμε να φτιάξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τον νόμο πεπερασμένου κυκλικού τμήματος διαρροής από ρεύμα I .



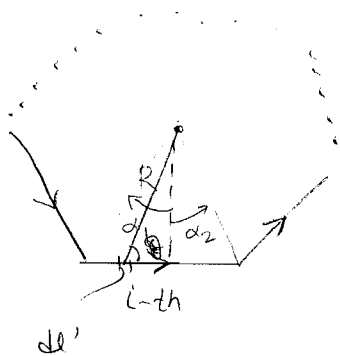
$$\vec{B}(\vec{z}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} [\sin \alpha_1, -\sin \alpha_2] \hat{y}$$

Για το τρίγωνο Δ του τετραγώνου:



$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} (\sin 45^\circ - \sin(-45^\circ)) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \sqrt{2} \quad \text{όπως και προηγουμένως.} \end{aligned}$$

(β) Κανονικό πολύγωνο:



$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

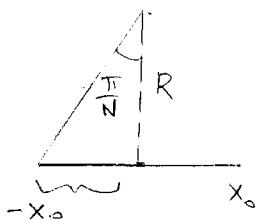
$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{N} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{N}$$

Για το τυχαίο τρίγωνο Δ :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{R dx'}{(x'^2 + R^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \left[\frac{x'}{R [x'^2 + R^2]^{1/2}} \right]_{-x_0}^{x_0} \Rightarrow$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \frac{1}{R} \left[\frac{2R \tan(\pi/N)}{[1 + \tan^2(\pi/N)]^{1/2}} \right]$$



$$x_0 = R \tan(\pi/N)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \frac{1}{R} 2 \sin(\pi/N) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \sin(\pi/N)$$

Το ολικό πεδίο είναι N φορές του \vec{B}_1 . Επομένως,

$$\vec{B}_{\text{ολ}} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} N \sin(\pi/N) \Rightarrow \vec{H}_{\text{ολ}} = \hat{z} \frac{I}{2\pi R} N \sin(\pi/N)$$

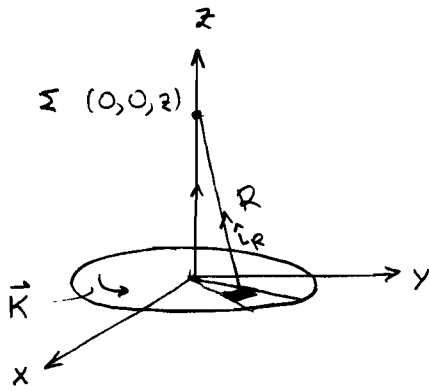
Στο όριο όταν $N \rightarrow \infty$ τότε

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\text{tot}} &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \lim_{N \rightarrow \infty} (N \sin(\pi/N)) = \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \pi \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N} \right) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \pi \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right) \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2R} \sim \vec{H}_{\text{tot}} = \hat{z} \frac{I}{2R}\end{aligned}$$

\downarrow
1

που αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός κυκλικού βρόχου.

ΑΣΚΗΣΗ 4:



$$(\alpha) \vec{K} = K_0 r_T \hat{i}_\varphi$$

Έστω σημείο $\Sigma (0, 0, z)$

Εφαρμογή Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{K} \times \hat{i}_R}{R^2} dS'$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad \vec{r} = z \hat{i}_z, \quad \vec{r}' = r_T \cos \phi' \hat{i}_x + r_T \sin \phi' \hat{i}_y$$

$$R = |\vec{R}| = [(r_T \cos \phi')^2 + (r_T \sin \phi')^2 + z^2]^{1/2} = (r_T^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\hat{i}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{-r_T \cos \phi' \hat{i}_x + r_T \sin \phi' \hat{i}_y + z \hat{i}_z}{(r_T^2 + z^2)^{1/2}}, \quad dS' = r_T' d\phi' dr_T'$$

$$\vec{K} = K_0 r_T' \hat{i}_\varphi = K_0 r_T' [-\sin \phi' \hat{i}_x + \cos \phi' \hat{i}_y]$$

$$\vec{K} \times \hat{i}_R = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ -K_0 r_T' \sin \phi' & K_0 r_T' \cos \phi' & 0 \\ -\frac{r_T' \cos \phi'}{R} & -\frac{r_T' \sin \phi'}{R} & \frac{z}{R} \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}_x \left[K_0 r_T' \cos \phi' \frac{z}{R} \right] - \hat{i}_y \left[-K_0 r_T' \sin \phi' \frac{z}{R} \right] + \hat{i}_z \left[\frac{K_0 r_T'^2 \sin^2 \phi'}{R} + \frac{K_0 r_T'^2 \cos^2 \phi'}{R} \right]$$

Επομένως,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r_T'=0}^a \int_{\phi'=0}^{2\pi} \left\{ \left(K_0 r_T' \cos \phi' \frac{z}{R^3} \right) \hat{i}_x + \left(K_0 r_T' \sin \phi' \frac{z}{R^3} \right) \hat{i}_y + \left(\frac{K_0 r_T'^2}{R^3} \right) \hat{i}_z \right\} r_T' d\phi' dr_T'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{i}_z \int_{r_T'=0}^a K_0 \frac{r_T'^2}{(r_T'^2 + z^2)^{3/2}} r_T' dr_T' d\phi = \hat{i}_z \frac{\mu_0}{2} K_0 \int_0^a \frac{r_T'^3}{[r_T'^2 + z^2]^{3/2}} dr_T'$$

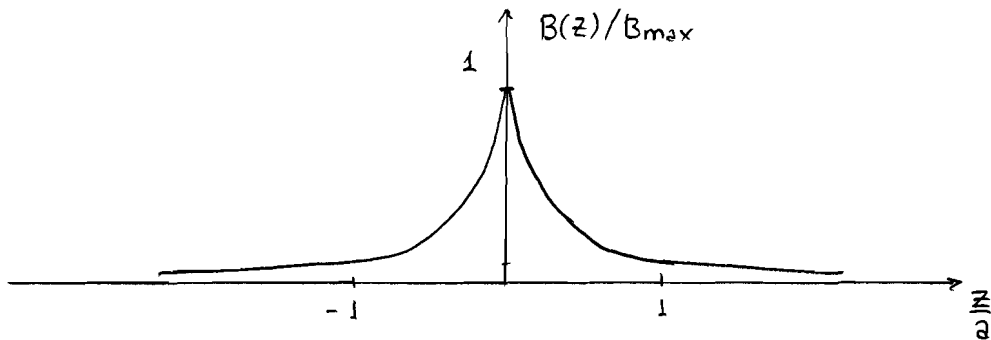
$$= \hat{i}_z \frac{\mu_0 K_0}{2} \left[\frac{r_T'^2 + 2z^2}{(r_T'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^a = \hat{i}_z \frac{\mu_0 K_0}{2} \left[\frac{a^2 + 2z^2}{[a^2 + z^2]^{1/2}} - 2|z| \right]$$

(β) Μέγιστη τιμή στα $z=0 \sim$

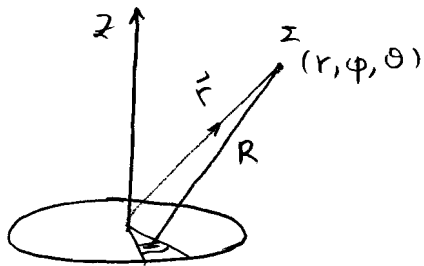
$$\vec{B}_{\max} = \hat{i}_z \frac{\mu_0 K_0}{2} \left[\frac{a^2}{a} \right] = \hat{i}_z \left(\frac{\mu_0 K_0 a}{2} \right)$$

$$\frac{B(z)}{B_{\max}} = \frac{\frac{\mu_0 K_0}{2} \left[\frac{a^2 + 2z^2}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - 2|z| \right]}{\frac{\mu_0 K_0}{2} a} = \left[\frac{a^2 + 2z^2}{a^2 [1 + (z/a)^2]^{1/2}} - 2 \left| \frac{z}{a} \right| \right]$$

$$= \frac{1 + 2(z/a)^2}{[1 + (z/a)^2]^{1/2}} - 2 \left| \frac{z}{a} \right|$$



(γ)



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} ds'}{R}$$

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'))]^{1/2}$$

$$\theta' = \pi/2 \quad r' = r'_T$$

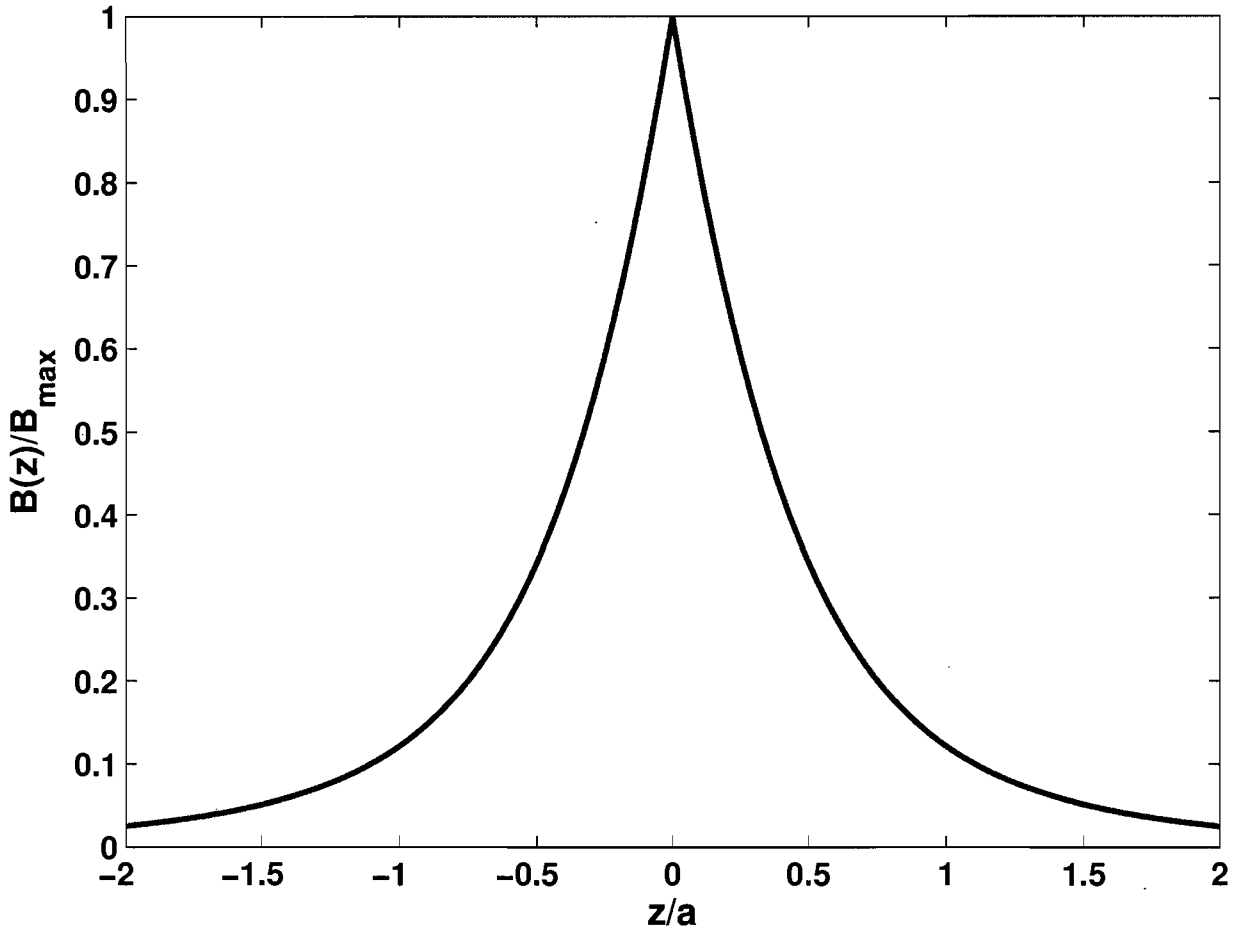
$$R = [r^2 + r_T'^2 - 2rr_T'(\sin\theta\cos(\phi-\phi'))]^{1/2}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r'_T=0}^a \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{K_0 r_T' [-\sin\phi' \hat{i}_x + \cos\phi' \hat{i}_y] r_T' dr_T' d\phi'}{[r^2 + r_T'^2 - 2rr_T' \sin\theta \cos(\phi-\phi')]^{1/2}}$$

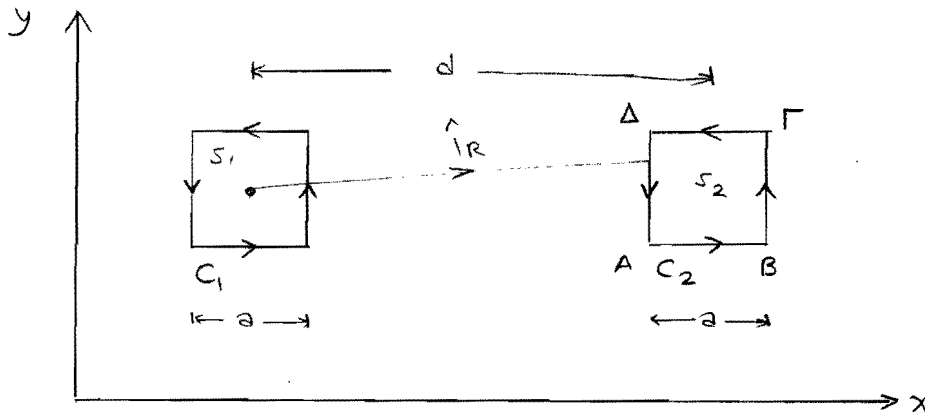
(δ) Πάνω στον άξονα των z.

$$\theta = 0 \text{ ή } \pi \quad \sim \sin\theta = 0 \quad \sim \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{K_0 r_T'^2 dr_T' (-\sin\phi' \hat{i}_x + \cos\phi' \hat{i}_y) d\phi'}{(r^2 + r_T'^2)^{1/2}}$$

$$= 0$$



ΑΣΚΗΣΗ 5:

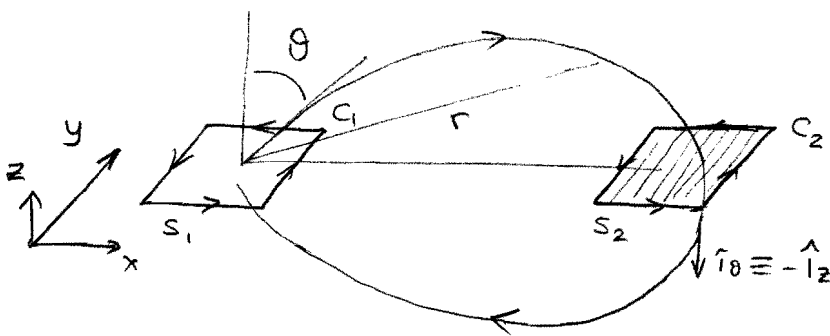


$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} = L_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2}$$

$$\psi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \times \hat{r}}{R^2} \quad \vec{m}_1 = I_1 a^2 \hat{i}_z$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (2\cos\theta \hat{i}_r + \sin\theta \hat{i}_\theta)$$



Για τον βρόχο C_2 $\theta = \pi/2$ και επομένως

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (\sin \frac{\pi}{2} \hat{i}_\theta (\theta = \pi/2)) = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (-\hat{i}_z)$$

Εφόσον $r \gg a$

$$\begin{aligned} \psi_{21} &= \iint \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (-\hat{i}_z) \cdot dy dx (\hat{i}_z) = (-1) \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \int_{d-a/2}^{d+a/2} dy \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= (-1) \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} a \left(+ \frac{x^{-2}}{-2} \right) \Big|_{d-a/2}^{d+a/2} = - \frac{\mu_0 I_1 a^2 a}{4\pi} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\left(d+\frac{a}{2}\right)^{-2} - \left(d-\frac{a}{2}\right)^{-2} \right) \right] \\ &= - \frac{\mu_0 I_1 a^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } L_{21} = L_{12} = - \frac{\mu_0 a^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right]$$

Χρησιμοποιώντας το διανυσματικό δυναμικό:

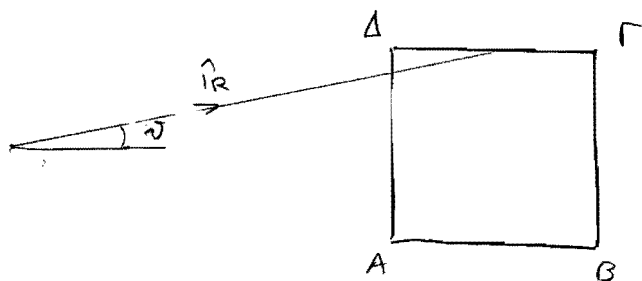
$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \frac{\hat{L}_z \times \hat{L}_R}{R^2} \quad \text{Ομως } \hat{L}_R \approx \hat{L}_x \quad \frac{1}{R^2} \approx \frac{1}{x^2} \quad \text{οπότε}$$

$$\oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B + \int_B^{\Gamma} + \int_{\Gamma}^{\Delta} + \int_{\Delta}^A \quad \vec{A}_1 \approx \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{x^2} \hat{L}_y$$

$$\int_A^B (\quad) \hat{L}_y \cdot \hat{L}_x dx = \int_{\Delta}^A (\quad) \hat{L}_y \cdot (-\hat{L}_x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell} &= \int_B^{\Gamma} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_{\Delta}^A \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell} = \\ &= \int_B^{\Gamma} \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{x^2} \hat{L}_y \cdot \hat{L}_y dy \Big|_{x=d+a/2} + \int_{\Delta}^A \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{x^2} \hat{L}_y \cdot (-\hat{L}_y) dy \Big|_{x=d-a/2} \\ &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{(d+a/2)^2} a - \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{(d-a/2)^2} a = \\ &= - \frac{\mu_0 I_1 a^3}{4\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα διαφέρει 100% από την προηγούμενη προσέγγιση με το πεδίο. Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τα τμήματα AB και BΓ



$$\sin \vartheta \approx \tan \vartheta = \frac{a/2}{x}$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_R &= \hat{L}_x \cos \vartheta + \hat{L}_y \sin \vartheta \quad \sim \quad \hat{L}_z \times \hat{L}_R = \hat{L}_y \cos \vartheta - \hat{L}_x \sin \vartheta \\ \int_{\Gamma} \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{x^2} (-\hat{L}_x \sin \vartheta) \cdot (-\hat{L}_x) dx &= \frac{\mu_0 m_1}{8\pi} a \left(\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_{d-a/2}^{d+a/2} \\ &= + \frac{\mu_0 I_1 a^3}{16} \left(\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{x^2} (-\hat{l}_x \sin\vartheta) \cdot \hat{l}_x dx$$

$$\sin\vartheta \approx \frac{-a/2}{x}$$

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} (a/2) \left[-\frac{1}{2x^3} \right]_{d-a/2}^{d+a/2} = + \frac{\mu_0 I_1 a^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right]$$

Επομένως

$$\oint_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = - \frac{\mu_0 I_1 a^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right]$$

οποια με την περίπτωση της $\int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$.

$$\text{Αρα } L_{12} = L_{21} \approx - \frac{\mu_0 a^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right]$$

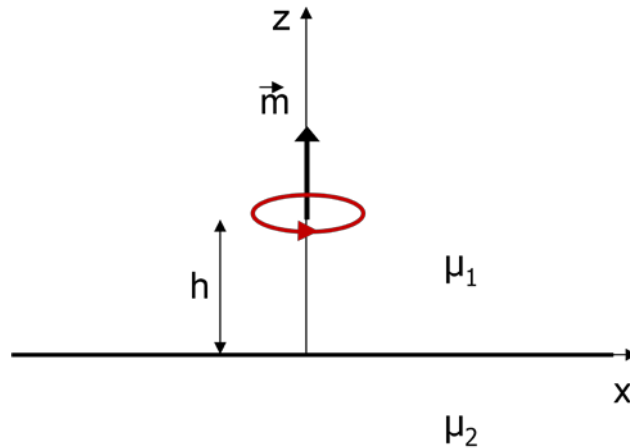
ΑΣΚΗΣΗ 6:

Ένα μαγνητικό δίπολο (κυκλικός βρόχος με ακτίνα a και ρεύμα I) με μαγνητική ροπή $\vec{m} = m \hat{i}_z$, βρίσκεται σε απόσταση h από την διαχωριστική επιφάνεια δύο μαγνητικών υλικών με διαπερατότητες μ_1 και μ_2 αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση h είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του μαγνητικού δίπολου έτσι ώστε να ισχύει η προσέγγιση του διπολικού πεδίου.

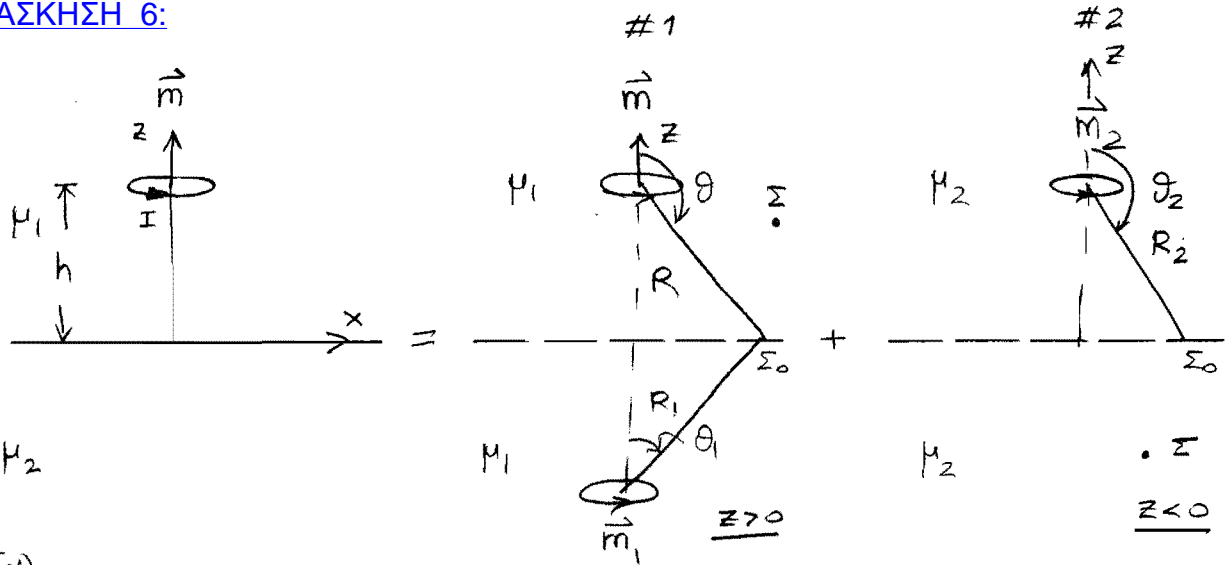
(α) [5%] Να αποδείξετε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατοπτρισμό με κατάλληλα επιλεγμένα μαγνητικά δίπολα.

(β) [10%] Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο του χώρου (x, y, z) (θεωρώντας ότι για το τυχαίο σημείο ισχύει η προσέγγιση του πεδίου του δίπολου). Να εκφραστεί το διανυσματικό δυναμικό στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

(γ) [15%] Να γίνει γραφική παράσταση των ισοδυναμικών γραμμών του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο xz για $a = 1\text{m}$, $h = 1\text{m}$, $\mu_1 = 1\mu_0$, $\mu_2 = 100\mu_0$ έστω και αν για αυτά τα αριθμητικά δεδομένα η προσέγγιση του δίπολου να μην είναι απολύτως δικαιολογημένη. Επαναλάβετε αυτό το ερώτημα με την ακριβή λύση για το διανυσματικό δυναμικό.



ΑΣΚΗΣΗ 6:



(α)

Εφαρμογή κατοπτρισμού. Για το τυχαιο σημείο πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια: $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$ και $B_{1z} = B_{2z}$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{l}_R}{R^2} + \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \times \hat{l}_{R_1}}{R_1} \quad R = R_1 = R_2 \text{ πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια.}$$

$$\vec{m} = m \hat{l}_z, \vec{m}_1 = m_1 \hat{l}_z, \vec{m}_2 = m_2 \hat{l}_z \text{ (υπόθεση).}$$

$$\hat{l}_R = \frac{x \hat{l}_x + y \hat{l}_y - h \hat{l}_z}{R} \quad R = (x^2 + y^2 + h^2)^{1/2}$$

$$\hat{l}_{R_1} = \frac{x \hat{l}_x + y \hat{l}_y + h \hat{l}_z}{R_1} \quad R_1 = (x^2 + y^2 + h^2)^{1/2}$$

$$\hat{l}_{R_2} = \hat{l}_R$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{m \hat{l}_z \times (x \hat{l}_x + y \hat{l}_y - h \hat{l}_z)}{R^3} + \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{m_1 \hat{l}_z \times (x \hat{l}_x + y \hat{l}_y + h \hat{l}_z)}{R^3}$$

$$= \frac{\mu_1}{4\pi} (m(x \hat{l}_y - y \hat{l}_x) \frac{1}{R^3}) + \frac{\mu_1}{4\pi} m_1 (x \hat{l}_y - y \hat{l}_x) \frac{1}{R^3}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_2}{4\pi} m_2 (x \hat{l}_y - y \hat{l}_x) \frac{1}{R^3} \quad \gamma \quad \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \sim \mu_1(m + m_1) = \mu_2 m_2 \quad (1)$$

$$\vec{H}_1 = \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \hat{l}_R) \hat{l}_R - \vec{m}}{4\pi R^3} + \frac{3(\vec{m}_1 \cdot \hat{l}_{R_1}) \hat{l}_{R_1} - \vec{m}_1}{4\pi R_1^3} \right) =$$

$$\vec{H}_1 \Big|_{\Sigma_0} = \frac{1}{4\pi R^3} \left[\left\{ 3m \left(\frac{-h}{R} \right) \frac{x \hat{l}_x + y \hat{l}_y - h \hat{l}_z}{R} - m \hat{l}_z \right\} + 3m_1 \left(\frac{h}{R} \right) \frac{x \hat{l}_x + y \hat{l}_y + h \hat{l}_z}{R} - m_1 \hat{l}_z \right]$$

$$\vec{m} \cdot \hat{l}_R = m \frac{-h}{R} \quad \vec{m}_1 \cdot \hat{l}_{R_1} = m_1 \frac{h}{R}$$

$$\vec{H}_2 \Big|_{\Sigma_0} = \frac{1}{4\pi R^3} \left[3m_2 \left(\frac{-h}{R} \right) \frac{x \hat{l}_x + y \hat{l}_y - h \hat{l}_z}{R} - m_2 \hat{l}_z \right]$$

$$\vec{H}_{t_1} = \vec{H}_{t_2} \Rightarrow \cancel{3m} \left(-\frac{h}{R}\right) \frac{\cancel{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y}}{R} + \cancel{3m_1} \left(\frac{h}{R}\right) \frac{\cancel{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y}}{R} =$$

$$= \cancel{3m_2} \left(-\frac{h}{R}\right) \frac{\cancel{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y}}{R}$$

$$-m + m_1 = -m_2 \quad (2)$$

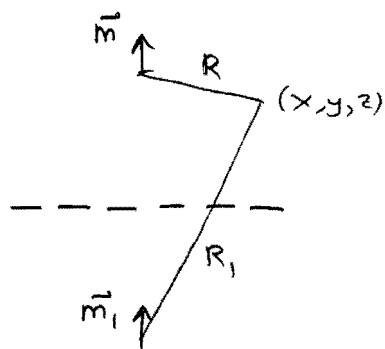
$$\left. \begin{array}{l} \mu_1(m+m_1) = \mu_2 m_2 \\ -m + m_1 = -m_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} m \\ m_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} m \end{array}$$

Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατοπτρισμό με

$$\vec{m}_1 = \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\right) \vec{m}, \quad \vec{m}_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \vec{m}$$

Το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο $\Sigma(x, y, z > 0)$:

$$(B) \quad \vec{A} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{m} \times \hat{i}_R}{R^2} + \frac{\vec{m}_1 \times \hat{i}_{R_1}}{R_1^2} \right\}$$



$$R = [x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}$$

$$R_1 = [x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{1/2}$$

$$\hat{i}_R = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z-h)\hat{i}_z}{R}$$

$$\hat{i}_{R_1} = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z+h)\hat{i}_z}{R_1}$$

$$m \hat{i}_z \times \hat{i}_R = m \hat{i}_z \times \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z-h)\hat{i}_z}{R} =$$

$$= m \frac{\hat{i}_y \times -\hat{i}_x}{R}$$

$$m_1 \hat{i}_z \times \hat{i}_{R_1} = m_1 \frac{\hat{i}_y \times -\hat{i}_x}{R_1}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{m(-y\hat{i}_x + x\hat{i}_y)}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_1}{4\pi} \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\right) \frac{m[-y\hat{i}_x + x\hat{i}_y]}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}}$$

($z > 0$)

$z < 0$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_2}{4\pi} \frac{\vec{m}_2 \times \hat{r}_2}{R_2^2} = \frac{\mu_2}{4\pi} m_2 \frac{-\hat{l}_x y + x \hat{l}_y}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}}$$

$$m_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} m$$

(γ) Για την γραφική παράσταση έχουμε το δυναμικό στο επίπεδο xz ($y=0$).

$$A_{\varphi 1} = \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{m \times \hat{i}_y}{R} + \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{m_1 \times \hat{i}_y}{R_1}$$

$$R = [x^2 + (z-h)^2]^{1/2}, \quad R_1 = [x^2 + (z+h)^2]^{1/2}$$

$$m_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} m, \quad m = I(\pi a^2) \quad x \hat{i}_y = |x| \hat{i}_\varphi$$

$$A_{\varphi 1} = \frac{\mu_1}{4\pi} m |x| \hat{i}_\varphi \left\{ \frac{1}{R} + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \right) \frac{1}{R_1} \right\} \quad (z \geq 0)$$

Όμοια

$$A_{\varphi 2} = \frac{\mu_2}{4\pi} m |x| \hat{i}_\varphi \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{1}{R} \quad (z \leq 0)$$

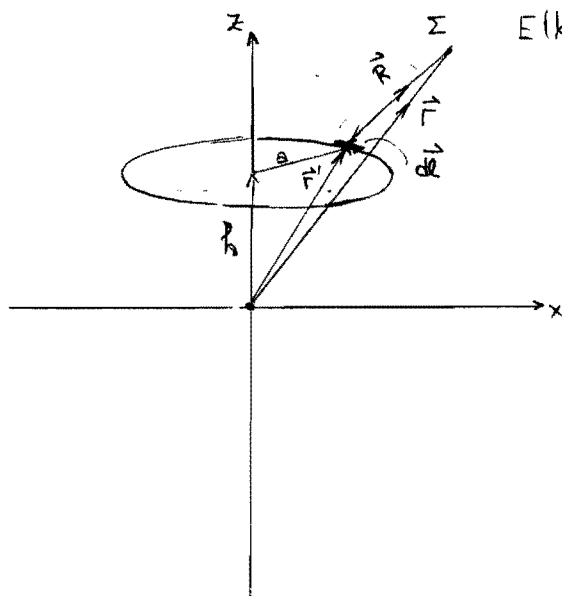
Για την ακριβή λύση θα χρειαστούμε να εφαρμόσουμε τον γενικό τύπο:

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{1}{[r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right\}$$

$$k^2 = \frac{4ar \sin \theta}{[r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta]}$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 w}} dw$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 w} dw$$



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$d\vec{A} = \hat{i}_\varphi \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \frac{1}{R} a d\varphi' \cos \phi'$$

$$\vec{r} = r \sin \theta \hat{i}_x + r \cos \theta \hat{i}_z$$

(x, z plane)

$$\vec{r}' = a \cos \phi' \hat{i}_x + a \sin \phi' \hat{i}_y + h \hat{i}_z$$

$$\vec{R} = (r \sin \theta - a \cos \phi') \hat{i}_x - a \sin \phi' \hat{i}_y + (r \cos \theta - h) \hat{i}_z \Rightarrow$$

$$R = (r^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \phi' - 2ra \sin \theta \cos \phi' + a^2 \sin^2 \phi' + r^2 \cos^2 \theta + h^2 - 2rh \cos \theta)^{1/2}$$

$$\sim R = (r^2 + a^2 + h^2 - 2rh \cos \theta - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{1/2}$$

Επομένως

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{1}{[r^2 + a^2 + h^2 - 2rh \cos \theta + 2ra \sin \theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right\}$$

$$k^2 = \frac{4ra \sin \theta}{[r^2 + a^2 + h^2 - 2rh \cos \theta + 2ra \sin \theta]}$$

$$\frac{\mu_0 I a}{\pi} = \frac{\mu_0 (I \pi a^2)}{\pi^2 a} = \frac{\mu_0 m}{\pi^2 a}$$

Εφαρμόζοντας τον καταρτισμό για τον βρόχο και το είδαλό του έχουμε:

$$A_{\varphi_1} = \frac{\mu_1 m}{\pi a^2} \frac{1}{[r^2 + a^2 + h^2 - 2rh \cos \theta + 2ra \sin \theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right\}$$

$$+ \frac{\mu_1 \tilde{m}_1}{\pi a^2} \frac{1}{[r^2 + a^2 + h^2 + 2rh \cos \theta + 2ra \sin \theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k_1^2}{k_1^2} K(k_1) - \frac{2}{k_1^2} E(k_1) \right\}$$

$$k_1^2 = \frac{4ra \sin \theta}{[r^2 + a^2 + h^2 + 2rh \cos \theta + 2ra \sin \theta]} \quad (z \geq 0)$$

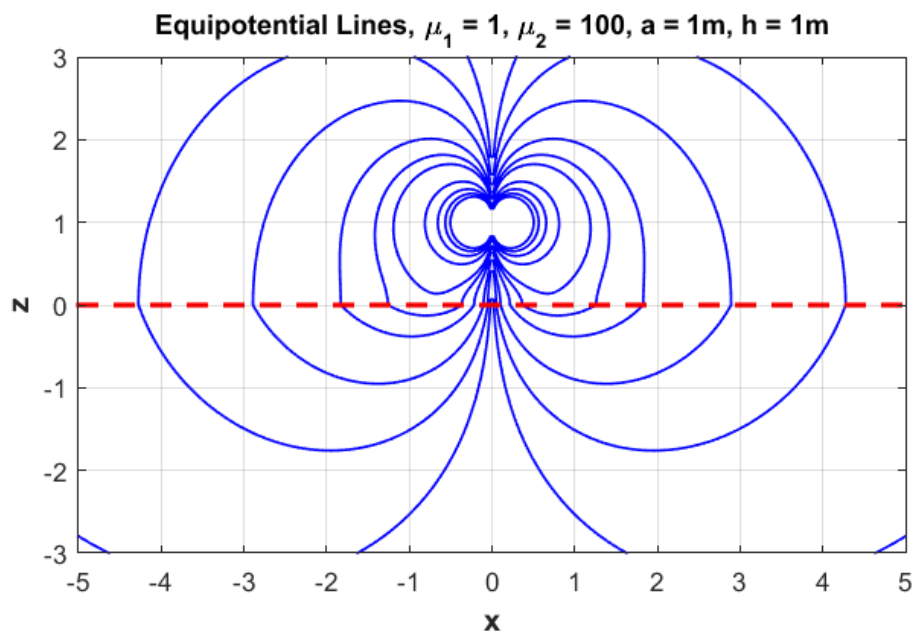
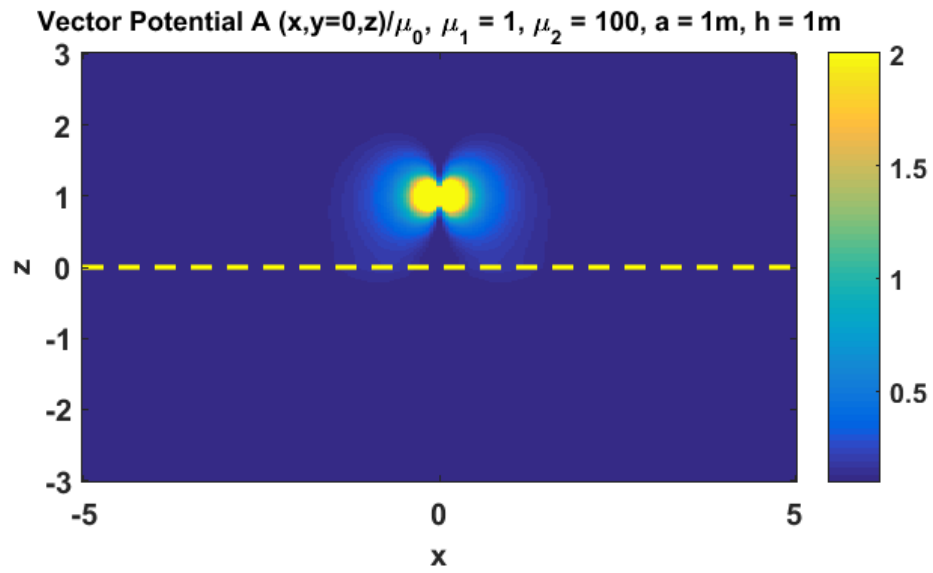
$$A_{\varphi_2} = \frac{\mu_2 m_2}{\pi a^2} \frac{1}{[r^2 + a^2 + h^2 - 2rh \cos \theta + 2ra \sin \theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right\}$$

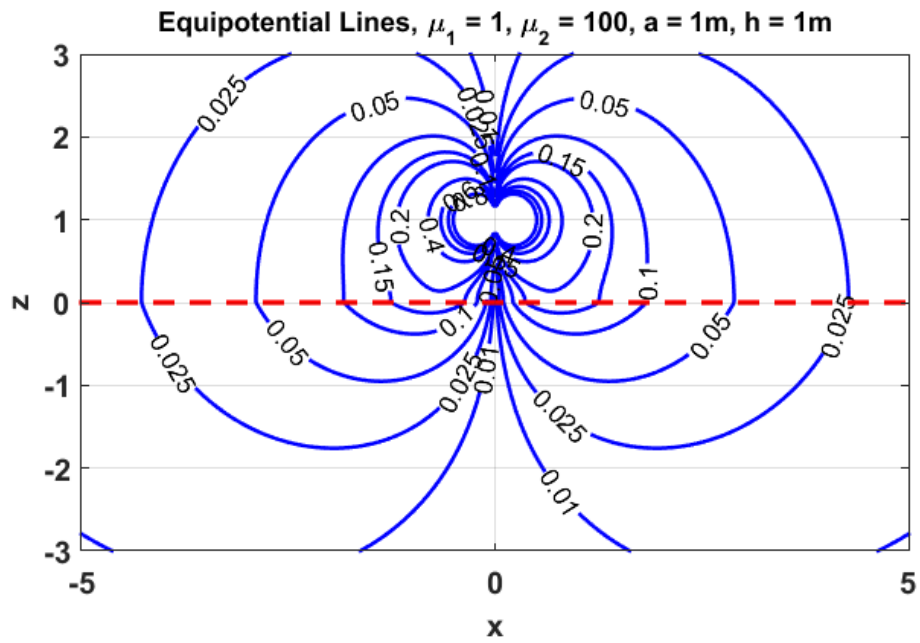
$z \leq 0$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \sin \theta = \frac{|x|}{r}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}$$

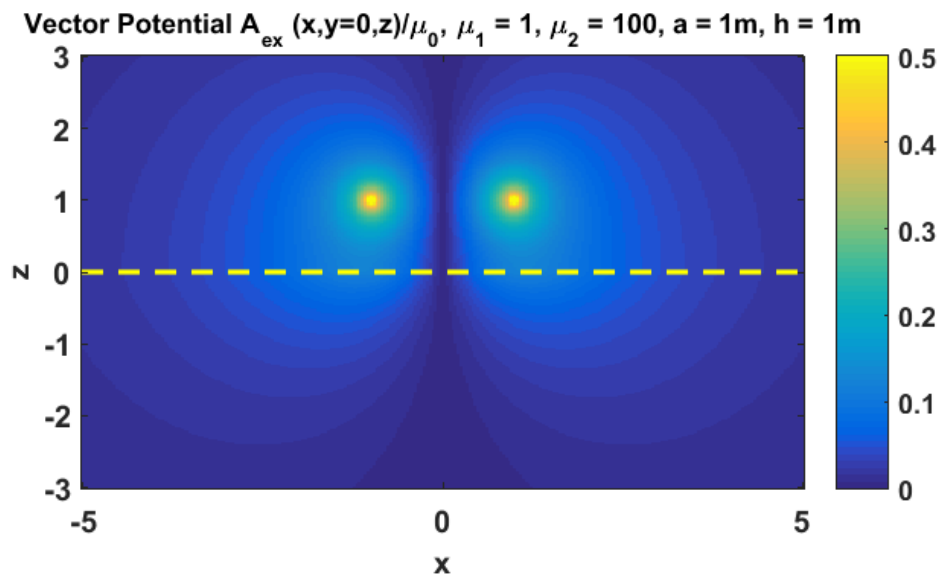
ΑΣΚΗΣΗ 6: (γ)

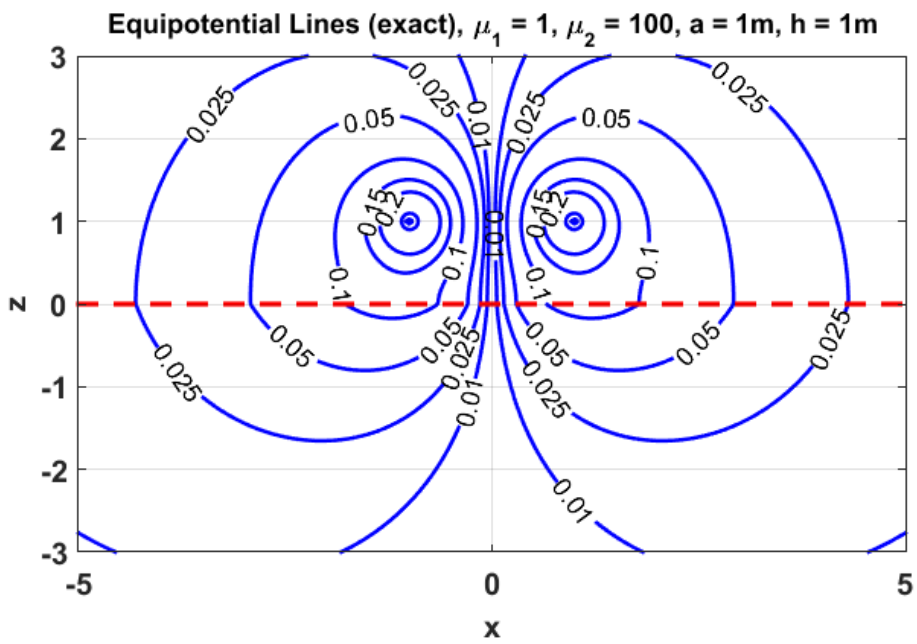
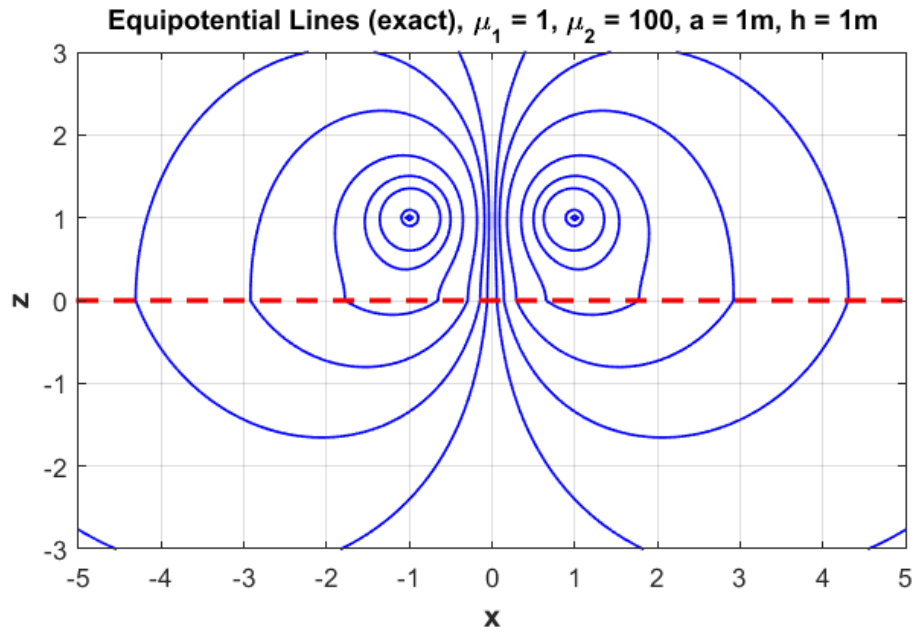
Προσέγγιση Μαγνητικού Δίπολου





Ακριβής Λύση





Άσκηση 7:

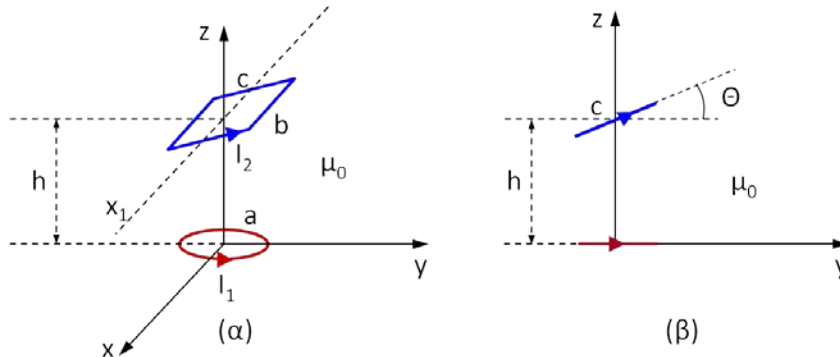
Κυκλικός βρόχος ακτίνας a διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_1 . Σε κατακόρυφη απόσταση $h \gg a$ υπάρχει ένας δεύτερος ορθογώνιος βρόχος πλευρών b, c που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_2 . Ο ορθογώνιος βρόχος έχει το κέντρο του πάνω στον άξονα z και μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον άξονα x_1 (που είναι παράλληλος του x όπως φαίνεται και στο σχήμα). Για κάποια δεδομένη κατάσταση ο ορθογώνιος βρόχος σχηματίζει γωνία Θ με τον άξονα y όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Υποθέσετε ότι ο βρόχος ακτίνας a πληροί τις προσεγγίσεις του μαγνητικού δίπολου για όλους τους υπολογισμούς που ζητούνται. Ο χώρος έχει παντού διαπερατότητα μ_0 .

(α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής $L_{12}(\Theta)$ μεταξύ των δύο βρόχων.

Τα υπόλοιπα ερωτήματα θα πρέπει να απαντηθούν αριθμητικά. Υποθέσετε ότι οι διαστάσεις του προβλήματος είναι $a = 0.025\text{m}$, $b = 0.25\text{m}$, $c = 0.12\text{m}$, και $h = 0.10\text{m}$.

(β) Να γίνει η γραφική παράσταση του συντελεστού αμοιβαίας επαγωγής $L_{12}(\Theta)$ σαν συνάρτηση της γωνίας Θ για $0 \leq \Theta \leq 720 \text{ deg}$. Επίσης να υπολογιστεί η παράγωγος $dL_{12}(\Theta)/d\Theta$ και να γίνει η γραφική της παράσταση σαν συνάρτηση της γωνίας Θ για το ίδιο διάστημα τιμών. Συνίσταται η αριθμητική εύρεση της παραγώγου.

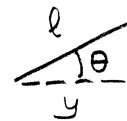
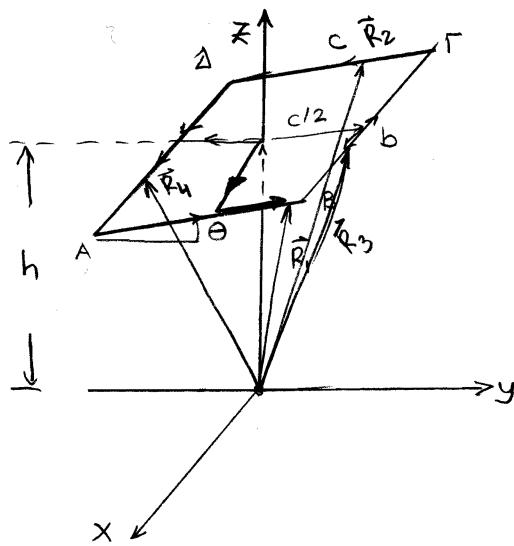
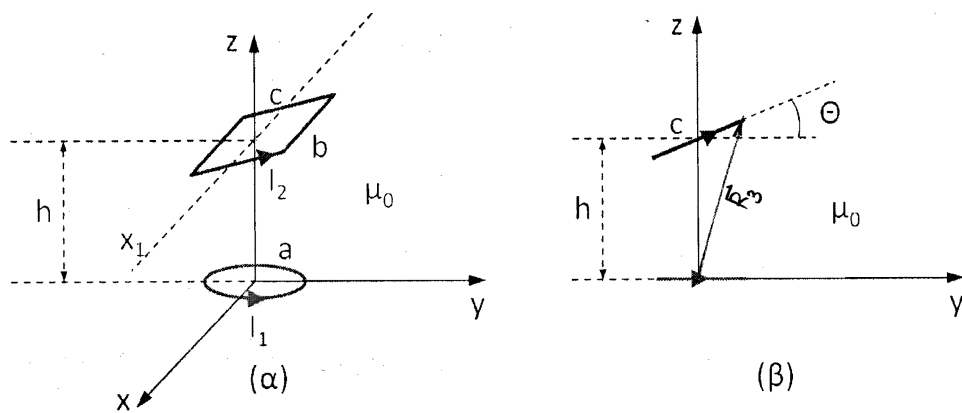
(γ) Υποθέσετε ότι το ρεύμα που διαρρέει τον κυκλικό βρόχο είναι $I_1 = 20\text{A}$, και ότι ο ορθογώνιος βρόχος αποτελείται από $N = 100$ σπείρες (μονωμένες, από λεπτό αγωγό ώστε να μην αλλάζει η γεωμετρία του σχήματος). Επιπλέον ο ορθογώνιος βρόχος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα με συχνότητα $f = 30\text{Hz}$. Να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη (emf), $e(t)$, στον ορθογώνιο βρόχο σαν συνάρτηση του χρόνου t και να γίνει η γραφική της παράσταση σε διάστημα 5 χρονικών περιόδων. Να βρεθεί (συνίσταται η χρήση FFT της MatLab) ο μετασχηματισμός Fourier $E(f)$ της $e(t)$ και να γίνει η γραφική παράσταση του $|E(f)|^2$ σαν συνάρτηση της συχνότητας f . Τι παρατηρείται; Να βρεθεί προσεγγιστικά η σειρά Fourier που προσεγγίζει την επαγόμενη $e(t)$ (εδώ προτείνεται η χρήση της συνάρτησης *fit* της MatLab αν και ίσως βρείτε καλύτερους τρόπους). Να επαναληφθούν τα (β) και (γ) όταν μεταβληθεί το ύψος h σε $h = 0.20\text{m}$.



$$\int \frac{dx}{[x^2 + (A+Bx)^2 + C^2]^{3/2}} = \frac{AB + x + B^2x}{[A^2 + C^2 + B^2C^2][A^2 + C^2 + 2ABx + x^2 + B^2x^2]^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A^2)^{3/2}} = \frac{x}{A^2(x^2 + A^2)^{1/2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7:



$$y = l \cos \theta$$

$$l = \frac{y}{\cos \theta}$$

$$\Psi_{21} = \oint_C \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \right)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 \vec{m}_1 \times \hat{r}}{4\pi R^2}$$

$$\vec{m}_1 = m_1 \hat{z} \quad m_1 = n a^2 I_1$$

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = ?$$

$$\vec{R}_1 = h \hat{z} + \frac{b}{2} \hat{x} + l(y) [\hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta]$$

$$= h \hat{z} + \frac{b}{2} \hat{x} + y [\hat{y} + \tan \theta \hat{z}]$$

$$= (h + y \tan \theta) \hat{z} + \frac{b}{2} \hat{x} + y \hat{y}$$

$$d\vec{l}_2 = dl [\cos \theta \hat{y} + \sin \theta \hat{z}] = dy [\hat{y} + \tan \theta \hat{z}]$$

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{R}_1}{R_1}, \quad R_1 = \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + y^2 + (h + y \tan \theta)^2 \right]^{1/2}$$

$$\hat{z} \times \hat{r}_1 = \hat{z} \times \left[(h + y \tan \theta) \hat{z} + \frac{b}{2} \hat{x} + y \hat{y} \right] \frac{1}{R_1} = \left(\hat{y} \frac{b}{2} - \hat{x} y \right) \frac{1}{R_1}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 \int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \int_{-\frac{c}{2} \cos \theta}^{\frac{c}{2} \cos \theta} \frac{1}{R_1^3} [\hat{i}_y \frac{b}{2} - \hat{i}_x y] \cdot dy [\hat{i}_y + \tan \theta \hat{i}_z] = \\
 &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{b}{2} \int_{-\frac{c}{2} \cos \theta}^{\frac{c}{2} \cos \theta} \frac{dy}{[y^2 + (h + y \tan \theta)^2 + (\frac{b}{2})^2]^{3/2}} \\
 &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{b}{2} \left[\frac{h \tan \theta + y(1 + \tan^2 \theta)}{[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + \tan^2 \theta (\frac{b}{2})^2] [h^2 + (\frac{b}{2})^2 + 2h \tan \theta y + (1 + \tan^2 \theta) y^2]} \right]_{-\frac{c}{2} \cos \theta}^{\frac{c}{2} \cos \theta} \\
 &= \frac{\mu_0 \pi a^2 I_1}{4\pi} \frac{b}{2} \left\{ \frac{1}{[h^2 + (\frac{b}{2})^2 (1 + \tan^2 \theta)]} \right\} \left\{ \frac{h \tan \theta + \frac{c}{2} \cos \theta (1 + \tan^2 \theta)}{[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (1 + \tan^2 \theta) (\frac{c}{2})^2 \cos^2 \theta + 2h \sin \theta \frac{c}{2}]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{h \tan \theta - \frac{c}{2} \cos \theta (1 + \tan^2 \theta)}{[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 - h c \sin \theta]} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\int_A^B = \frac{\mu_0 \pi a^2 I_1}{4\pi} \frac{b}{2} \frac{1}{h^2 + (\frac{b}{2})^2 (1 + \tan^2 \theta)} \left\{ \frac{h \tan \theta + \frac{c}{2} \cos \theta (1 + \tan^2 \theta)}{[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 + h c \sin \theta]} \right. \\
 \left. - \frac{h \tan \theta - \frac{c}{2} \cos \theta (1 + \tan^2 \theta)}{[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 - h c \sin \theta]} \right\}$$

$$\int_{\Gamma}^{\Delta} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \int_{\frac{c}{2} \cos \theta}^{-\frac{c}{2} \cos \theta} \frac{\hat{i}_z \times \hat{i}_{R2}}{R_2^2} \cdot dy [\hat{i}_y + \tan \theta \hat{i}_z]$$

$$\vec{R}_2 = h \hat{i}_z - \frac{b}{2} \hat{i}_x + y (\hat{i}_y + \tan \theta \hat{i}_z)$$

και επομένως καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με την

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \int_{\Gamma}^{\Delta} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

$$\int_B^{\Gamma} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \int \frac{\hat{l}_2 \times \hat{l}_{R3}}{R_3^2} \cdot (dx \hat{l}_x)$$

$$\vec{R}_3 = h \hat{l}_z + \frac{c}{2} (\hat{l}_y \cos \theta + \hat{l}_z \sin \theta) + x \hat{l}_x$$

$$\hat{l}_{R3} = \left[(h + \frac{c}{2} \sin \theta) \hat{l}_z + \frac{c}{2} \cos \theta \hat{l}_y + x \hat{l}_x \right] \frac{1}{R_3}$$

$$R_3 = \left[(h + \frac{c}{2} \sin \theta)^2 + (\frac{c}{2})^2 \sin^2 \theta + x^2 \right]^{1/2} = \left[x^2 + (\frac{c}{2})^2 + h^2 + hc \sin \theta \right]^{1/2}$$

$$\hat{l}_2 \times \hat{l}_{R3} = \left(-\frac{c}{2} \cos \theta \hat{l}_x + x \hat{l}_y \right)$$

$$\int_B^{\Gamma} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \int_{-b/2}^{+b/2} \left(-\frac{c}{2} \right) dx \frac{\cos \theta}{\left[x^2 + h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc \sin \theta \right]^{3/2}}$$

$$= \cos \theta \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \left(-\frac{c}{2} \right) \left[\frac{x}{\left[h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc \sin \theta \right] \sqrt{x^2 + h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc \sin \theta}} \right]_{-b/2}^{+b/2}$$

$$= \cos \theta \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{c}{2} \cdot 2 \cdot \frac{b}{2} \frac{1}{h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc \sin \theta} \frac{1}{\left[(\frac{b}{2})^2 + h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc \sin \theta \right]^{1/2}}$$

Opowia

$$\int_{\Delta}^A \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 =$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \geq 0 \quad L_{12}(\theta=0) > 0, \quad L_{12}(\theta=90^\circ) = 0.$$

'Ομοια για το $\int_{\Delta}^A \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$

$$\vec{R}_4 = h\hat{i}_z + \frac{c}{2} [-\hat{i}_y \cos\theta - \hat{i}_z \sin\theta] + x\hat{i}_x$$

$$= x\hat{i}_x - \frac{c}{2} \cos\theta \hat{i}_y + (h - \frac{c}{2} \sin\theta) \hat{i}_z$$

$$R_4 = |\vec{R}_4| = \left[x^2 + \left(\frac{c}{2} \cos\theta\right)^2 + \left(h - \frac{c}{2} \sin\theta\right)^2 \right]^{1/2} = \left[x^2 + h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right]^{1/2}$$

$$\hat{R}_4 = \frac{\vec{R}_4}{R_4}$$

$$\hat{i}_z \times \hat{R}_4 = x\hat{i}_y + \frac{c}{2} \cos\theta \hat{i}_x$$

$$\int_{\Delta}^A \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{c}{2} \cos\theta dx \frac{1}{\left[x^2 + h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{c}{2} \cos\theta \left[\frac{x}{\left[h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right] \left[x^2 + h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right]^{1/2}} \right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \cos\theta \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{c}{2} \cdot 2 \frac{b}{2} \frac{1}{\left[h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right] \left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right]^{1/2}}$$

'Αρα

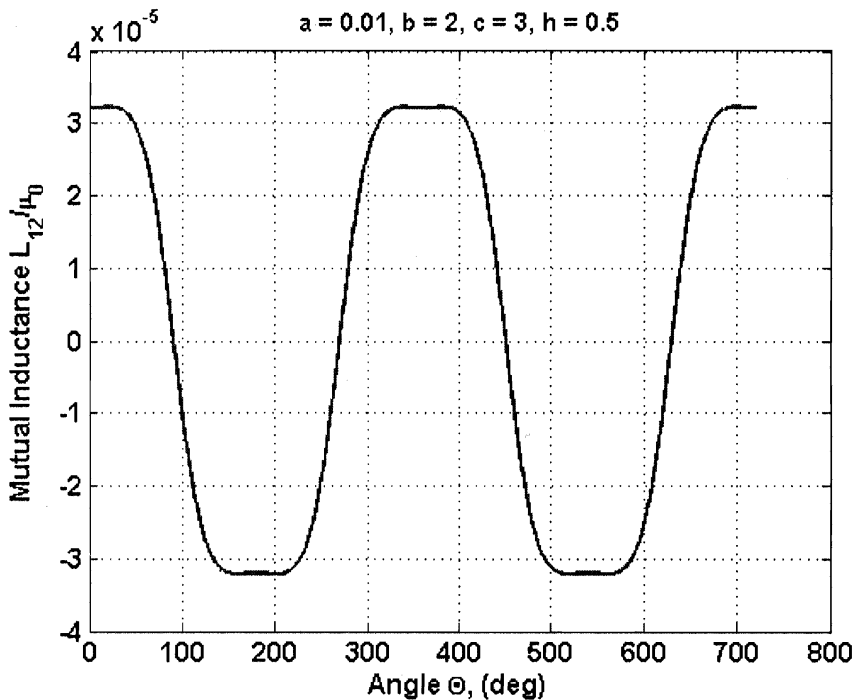
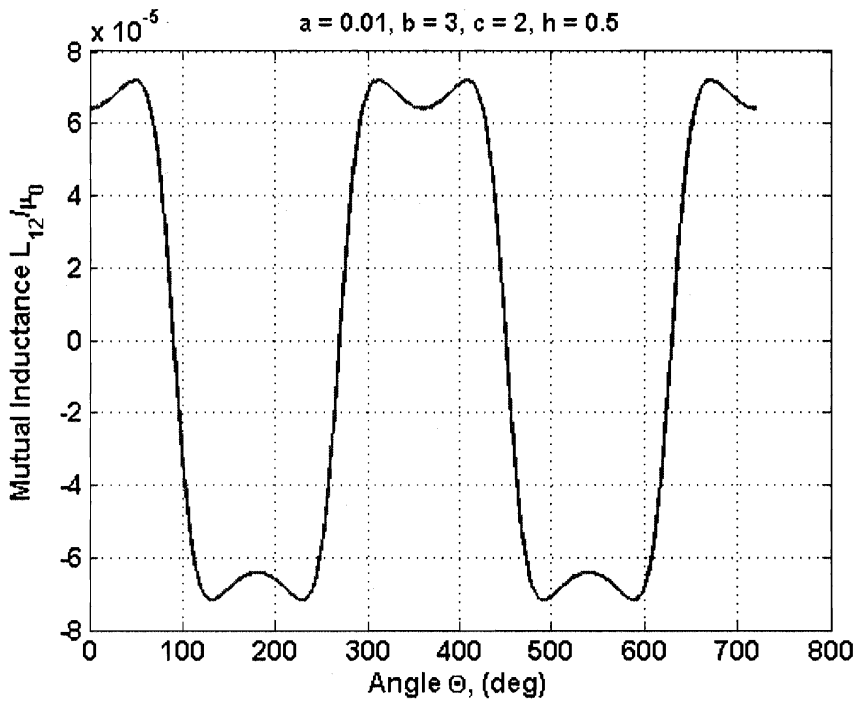
$$\psi_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 I_1}{4\pi} \left\{ \frac{b}{h^2 + (b/2)^2 [1 + \tan^2\theta]} \frac{h \tan\theta + \frac{c}{2} \cos\theta (1 + \tan^2\theta)}{\left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + hc \sin\theta \right]^{1/2}} \right.$$

$$\left. - \frac{h \tan\theta - \frac{c}{2} \cos\theta (1 + \tan^2\theta)}{\left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right]^{1/2}} \right\} +$$

$$\frac{cb}{2} \frac{\cos\theta}{\left[h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + hc \sin\theta \right] \left[h^2 + (b/2)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + hc \sin\theta \right]^{1/2}} +$$

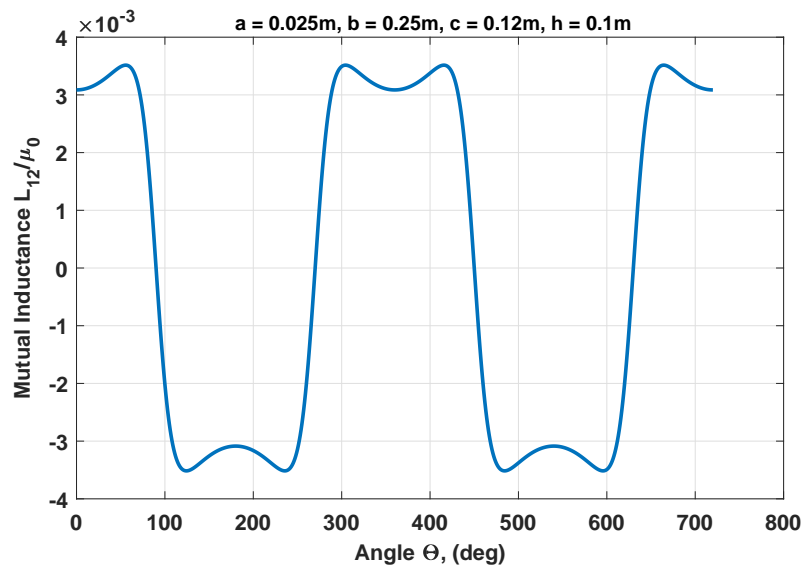
$$\frac{cb}{2} \frac{\cos\theta}{\left[h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right] \left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc \sin\theta \right]^{1/2}} \left. \right\}$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 a^2}{4} \left\{ \frac{bc \cos \theta}{h^2 \cos^2 \theta + (b/2)^2} \left[\frac{h \sin \theta + c/2}{[h^2 + (b/2)^2 + (c/2)^2 + hc \sin \theta]^{1/2}} - \frac{h \sin \theta - c/2}{[h^2 + (b/2)^2 + (c/2)^2 - hc \sin \theta]^{1/2}} \right] \right. \\ \left. + \frac{c/6}{2} \cos \theta \left[\frac{1}{h^2 + (c/2)^2 + hc \sin \theta} \frac{1}{[h^2 + (b/2)^2 + (c/2)^2 + hc \sin \theta]^{1/2}} + \frac{1}{[h^2 + (c/2)^2 - hc \sin \theta]^{1/2}} \frac{1}{[h^2 + (b/2)^2 + (c/2)^2 - hc \sin \theta]^{1/2}} \right] \right\}$$

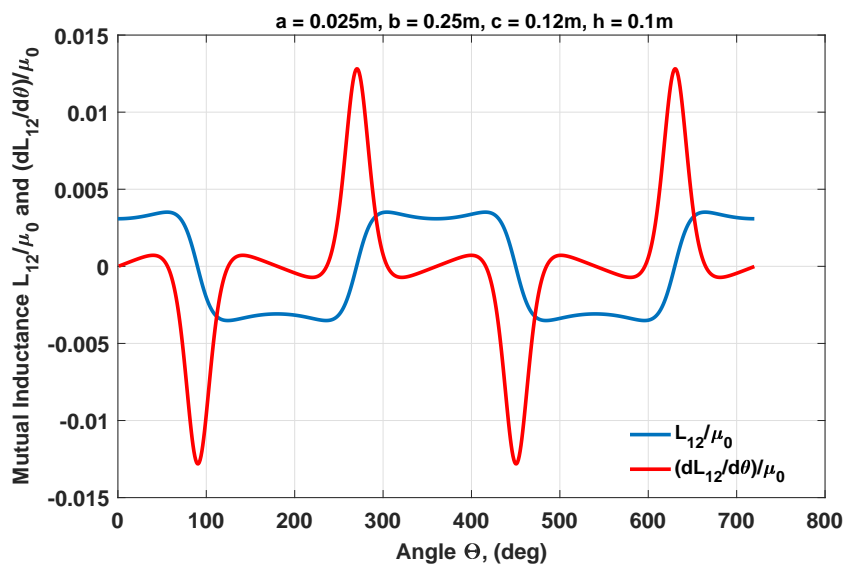


Αμοιβαία Επαγωγή των Δύο Βρόχων - Άσκηση 6(β)

$$a = 0.025 \text{ m}, b = 0.25 \text{ m}, c = 0.12 \text{ m}, h = 0.10 \text{ m}$$



(α)

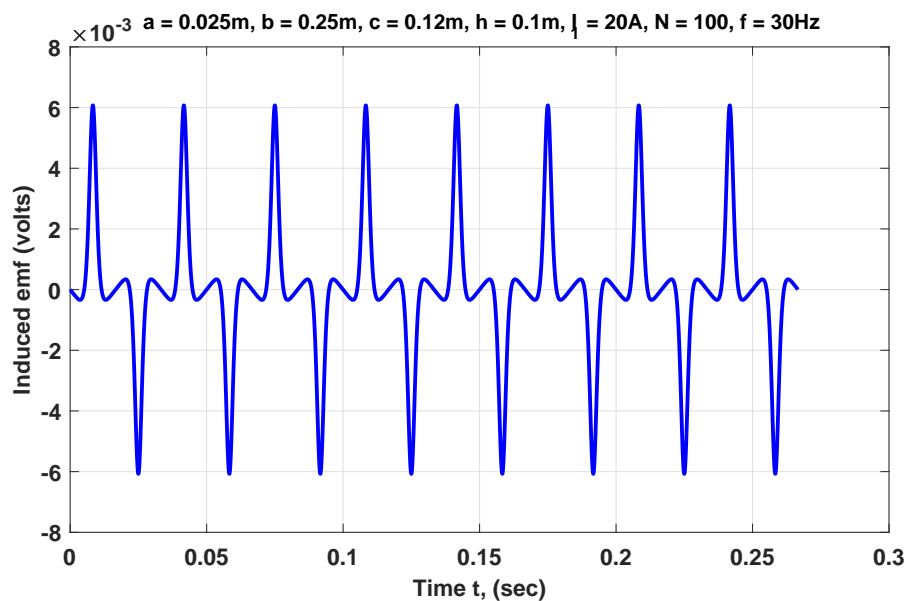


(β)

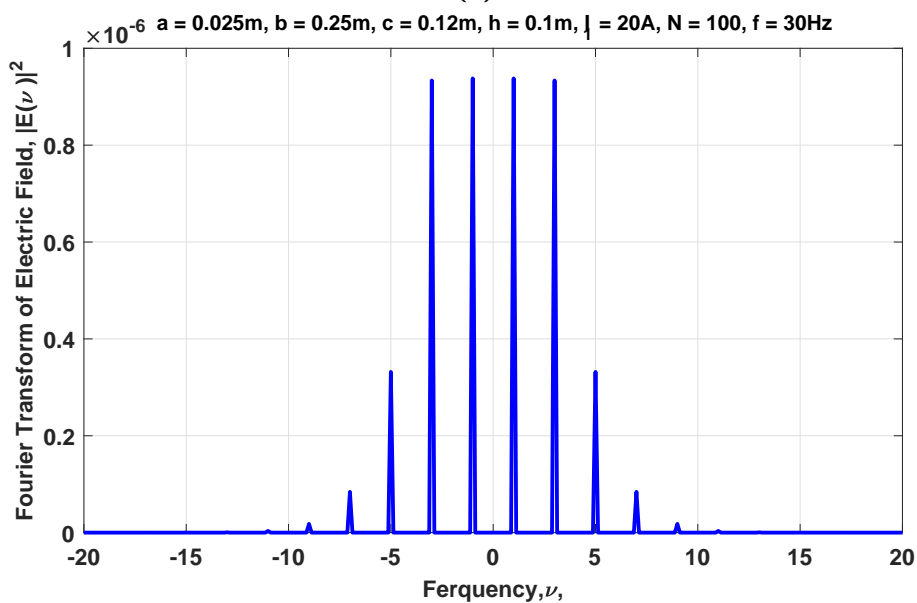
Σχήμα 1: (α) Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής κανονικοποιημένος με το μ_0 , $L_{12}(\theta)/\mu_0$. (β) Παράγωγος ως προς θ του συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής $[dL_{12}(\theta)/d\theta]/\mu_0$. ($a = 0.025 \text{ m}, b = 0.25 \text{ m}, c = 0.12 \text{ m}, h = 0.10 \text{ m}$)

Επαγόμενη Ηλεκτρεγερτική Δύναμη - Άσκηση 6(γ)

$$a = 0.025 \mu, b = 0.25 \mu, c = 0.12 \mu, h = 0.10 \mu$$



(α)



(β)

Σχήμα 2: (α) Επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη, $e(t)$ σαν συνάρτηση του χρόνου για 5 χρονικές περιόδους. (β) Μετασχηματισμός *Fourier* της $e(t)$. Το $|E(f)|^2$ παρουσιάζεται σαν συνάρτηση της συχνότητας. Παρατηρούμε μόνο τις περιπτώσεις αρμονικές όπως και αναμένεται από την περιττή συμμετρία του $e(t)$ που φαίνεται στο (α) ($a = 0.025 \text{ m}$, $b = 0.25 \text{ m}$, $c = 0.12 \text{ m}$, $h = 0.10 \text{ m}$)

Η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη, $emf = e(t)$ δίνεται από τον νόμο του Lenz

$$\begin{aligned}
 emf = e(t) &= -\frac{d\Lambda_{12}}{dt} = -N \frac{d\Psi_{12}}{dt} = -NI_1 \frac{dL_{12}}{dt} \\
 &= -NI_1 \frac{dL_{12}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -NI_1 2\pi f \frac{dL_{12}}{d\theta}.
 \end{aligned}$$

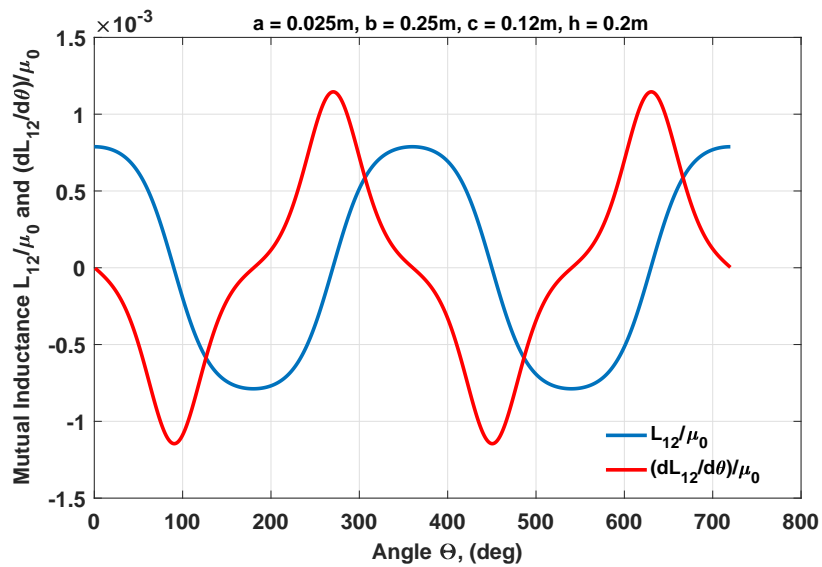
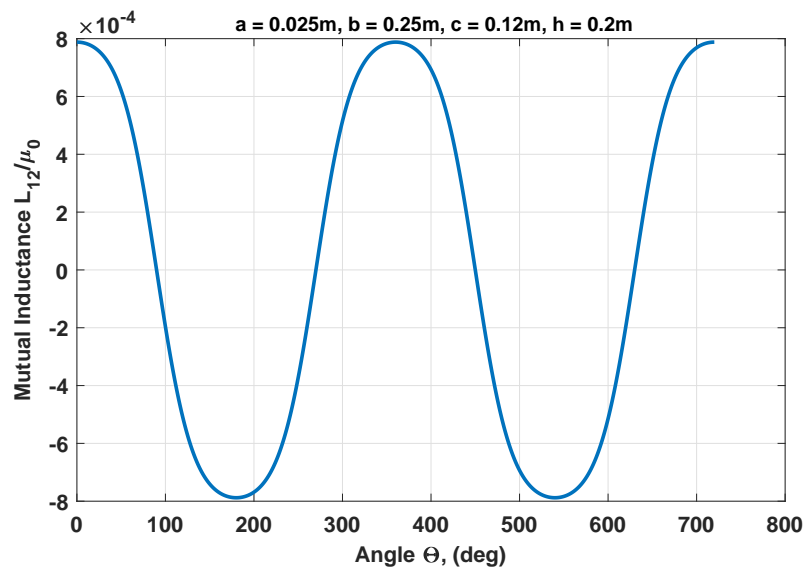
Από το Σχήμα 2α φαίνεται ότι η επαγόμενη emf είναι μικρή (σε mV) και είναι περιττή περιοδική συνάρτηση. Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier $E(f)$ αναμένεται να έχει μόνο περιττές αρμονικές όπως και είναι εμφανές στο Σχήμα 2β. Οι αρμονικές αυτές θα τείνουν σε διακριτές συναρτήσεις $\delta(f)$ όσο το χρονικό παράθυρο μεγαλώνει. Εδώ χρησιμοποιήθηκαν 5 χρονικές περίοδοι $t_{total} = 5T = 5/f$. Η αντίστοιχη σειρά Fourier δίδεται κατωτέρω και ευρέθηκε με την χρήση της συνάρτησης *fit* της MatLab.

Συντελεστές FOURIER

$$\begin{aligned}
 e(t) \simeq & 0.001937 \sin(\omega_0 t) - 0.001932 \sin(3\omega_0 t) + \\
 & 0.001152 \sin(5\omega_0 t) - 0.0005802 \sin(7\omega_0 t),
 \end{aligned}$$

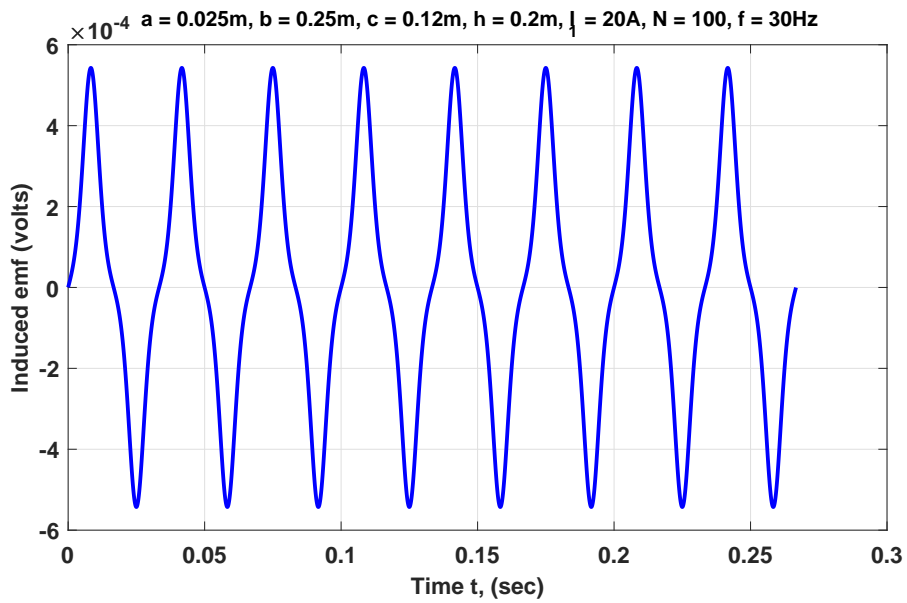
όπου $e(t)$ (*Volts*), και $\omega_0 = 2\pi f$ με $f = 30 \text{ Hz}$, $N = 100$ σπείρες, $I_1 = 20 \text{ A}$, και $a = 0.025 \text{ m}$, $b = 0.25 \text{ m}$, $c = 0.12 \text{ m}$, $h = 0.10 \text{ m}$.

$$a = 0.025 \text{ m}, b = 0.25 \text{ m}, c = 0.12 \text{ m}, h = 0.20 \text{ m}$$

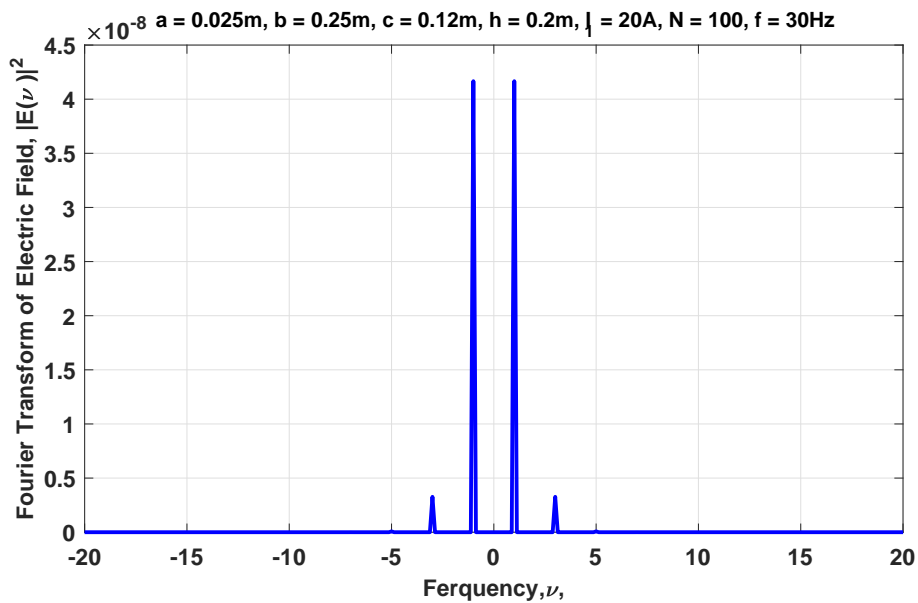


Σχήμα 3: (α) Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής κανονικοποιημένος με το μ_0 , $L_{12}(\Theta)/\mu_0$. (β) Παράγωγος ως προς Θ του συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής $[dL_{12}(\Theta)/d\Theta]/\mu_0$. ($a = 0.025 \text{ m}$, $b = 0.25 \text{ m}$, $c = 0.12 \text{ m}$, $h = 0.20 \text{ m}$)

$$a = 0.025 \text{ m}, b = 0.25 \text{ m}, c = 0.12 \text{ m}, h = 0.20 \text{ m}$$



(α)



(β)

Σχήμα 4: (α) Επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη, $e(t)$ σαν συνάρτηση του χρόνου για 5 χρονικές περιόδους. (β) Μετασχηματισμός *Fourier* της $e(t)$. Το $|E(f)|^2$ παρουσιάζεται σαν συνάρτηση της συχνότητας. Παρατηρούμε μόνο τις περιτιές αρμονικές όπως και αναμένεται από την περιτιτή συμμετρία του $e(t)$ που φαίνεται στο (α) ($a = 0.025 \text{ m}$, $b = 0.25 \text{ m}$, $c = 0.12 \text{ m}$, $h = 0.20 \text{ m}$)

Συντελεστές FOURIER

$$e(t) \simeq 0.0004082 \sin(\omega_0 t) - 0.0001143 \sin(3\omega_0 t) + \\ 1.759 \times 10^{-5} \sin(5\omega_0 t) - 2.241 \times 10^{-6} \sin(7\omega_0 t),$$

όπου $e(t)$ (Volts), και $\omega_0 = 2\pi f$ με $f = 30 \text{ Hz}$, $N = 100$ σπείρες, $I_1 = 20 \text{ A}$, και $a = 0.025 \text{ m}$,
 $b = 0.25 \text{ m}$, $c = 0.12 \text{ m}$, $h = 0.20 \text{ m}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8:

Κυκλικός βρόχος ακτίνας a , διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I όπως φαίνεται και στο κάτωθι σχήμα. Το κέντρο του βρόχου βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xy σε αποστάσεις d και h από τέλειο αγωγό (απείρου ειδικής αγωγιμότητας) και σχήματος ορθής γωνίας όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διαπερατότητα του αέρα είναι μ_0 . Όλες οι αποστάσεις που μας ενδιαφέρουν είναι πολύ μεγαλύτερες από την ακτίνα του βρόχου ώστε να ισχύουν πάντα οι προϋποθέσεις της θεωρίας του μαγνητικού δίπολου.

(α) [5%] Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο στον αέρα ($x > 0$, $y > 0$, z) με σημείο αναφοράς του δυναμικού το κέντρο των αξόνων. Να γίνει χρήση του συστήματος συντεταγμένων x, y, z . Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο τυχαίο σημείο στον αέρα. Να γίνει χρήση του συστήματος συντεταγμένων x, y, z .

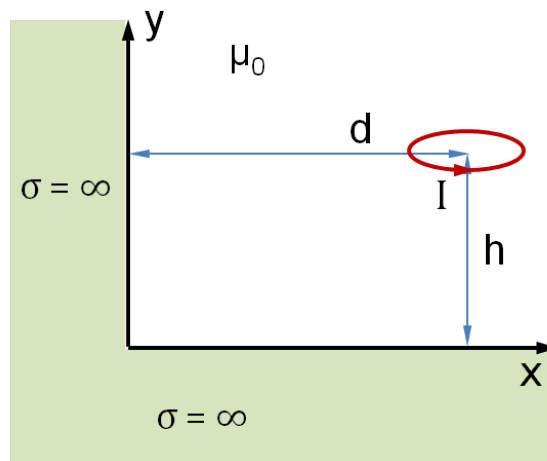
(β) [5%] Να βρεθούν οι επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος πάνω στις επιφάνειες $x = 0$ και $y = 0$ των τέλειων αγωγίμων επιπέδων.

Για τα επόμενα ερωτήματα θα χρειαστεί η χρήση υπολογιστή με **MatLab** ή κάποιου άλλου υπολογιστικού πακέτου. **Θεωρείστε ότι $d = 2\text{m}$, $h = 1\text{m}$, $a = 0.1\text{m}$, $I = 1\text{A}$.**

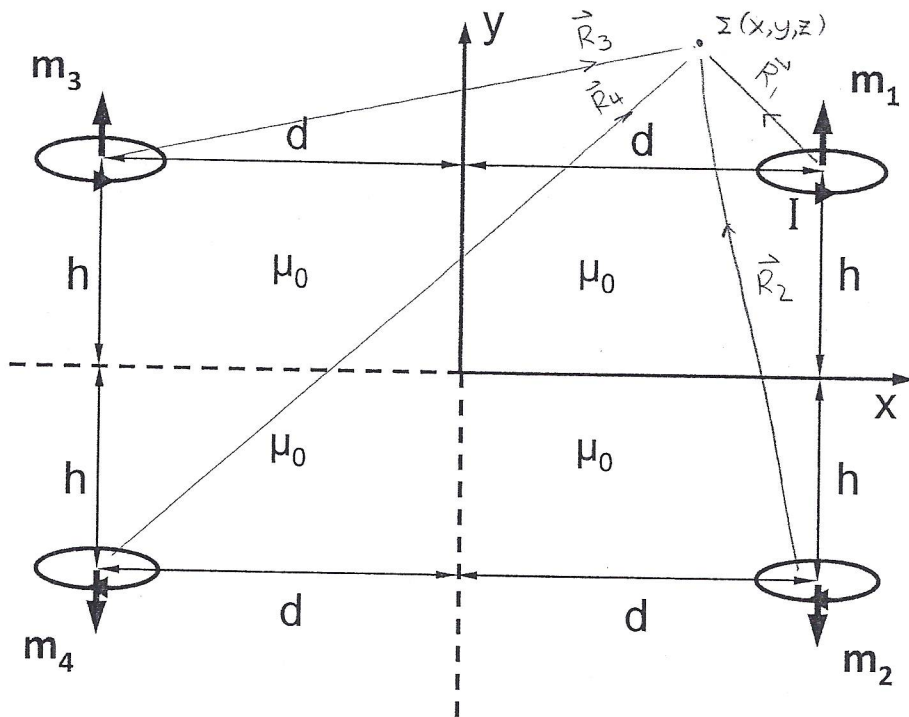
(γ) [5%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο xz για $y = 1\text{m}$. Εάν κάνετε χρήση του λογισμικού *MatLab* προτείνω την χρήση της συνάρτησης **quiver**. Επίσης δείξτε την ροή του διανυσματικού δυναμικού πάνω στο επίπεδο. Και εδώ στην περίπτωση της *MatLab* προτείνω την συνάρτηση **streamslice**. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για την γραφική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο xy για $z = 2\text{m}$.

(δ) [5%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο xy για $z = 0$. Και πάλι προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων. **Προαιρετικά** όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να υπολογίσουν τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο xy κάνοντας χρήση της συνάρτησης **streamline**. Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines>.

(ε) [5%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση των επαγομένων επιφανειακών ρευματικών κατανομών στα επίπεδα $x = 0$ και $y = 0$. Και πάλι προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων.



ΑΣΚΗΣΗ 8:



(α) Θα χρησιμοποιήσουμε την θεωρία του κατοπτρισμού. Θα χρειαστούμε 3 είδωλα μαγνητικά δίπολα όπως φαίνεται στο σχήμα.

Έστω $z(x, y, z)$ το τυχαίο σημείο στο χώρο ($x, y > 0$). Το μαγνητικό πεδίο κάθε μαγνητικού δίπολου δίδεται από:

$$\vec{H}_i = \frac{1}{4\pi R_i^3} [3(\vec{m}_i \cdot \hat{r}_{R_i}) \hat{r}_{R_i} - \vec{m}_i] \quad i=1,2,3,4$$

$$\vec{m}_1 = m_0 \hat{z} = [(\pi a^2) I] \hat{y}, \quad m_2 = -m_0 \hat{y}, \quad \vec{m}_3 = +m_0 \hat{y}, \quad \vec{m}_4 = -m_0 \hat{y}$$

$$\vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}'_1 = (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) - (d\hat{x} + h\hat{y}) = (x-d)\hat{x} + (y-h)\hat{y} + z\hat{z}$$

$$R_1 = [(x-d)^2 + (y-h)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$\vec{R}_2 = \vec{r} - \vec{r}'_2 = (x-d)\hat{x} + (y+h)\hat{y} + z\hat{z}$$

$$R_2 = [(x-d)^2 + (y+h)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$\vec{R}_3 = \vec{r} - \vec{r}'_3 = (x+d)\hat{i}_x + (y-h)\hat{i}_y + z\hat{i}_z$$

$$R_3 = [(x+d)^2 + (y-h)^2 + z^2]^{1/2}$$

$$\vec{R}_4 = \vec{r} - \vec{r}'_4 = (x+d)\hat{i}_x + (y+h)\hat{i}_y + z\hat{i}_z$$

$$R_4 = [(x+d)^2 + (y+h)^2 + z^2]^{1/2}$$

Θα πρέπει η επιλογή των εδωλών να μη δειξεί την κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου πάνω στον τύλινο αγωγό.

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{4\pi R_1^3} \left[3 \left(\frac{m_0(y-h)}{R_1} \right) \left[\frac{x-d}{R_1} \hat{i}_x + \frac{y-h}{R_1} \hat{i}_y + \frac{z}{R_1} \hat{i}_z \right] - m_0 \hat{i}_y \right]$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi R_2^3} \left[3 \left(\frac{-m_0(y+h)}{R_2} \right) \left[\frac{x-d}{R_2} \hat{i}_x + \frac{y+h}{R_2} \hat{i}_y + \frac{z}{R_2} \hat{i}_z \right] + m_0 \hat{i}_y \right]$$

$$\vec{H}_3 = \frac{I}{4\pi R_3^3} \left[3 \left(\frac{m_0(y-h)}{R_3} \right) \left[\frac{x+d}{R_3} \hat{i}_x + \frac{y-h}{R_3} \hat{i}_y + \frac{z}{R_3} \hat{i}_z \right] - m_0 \hat{i}_y \right]$$

$$\vec{H}_4 = \frac{I}{4\pi R_4^3} \left[3 \left(\frac{-m_0(y+h)}{R_4} \right) \left[\frac{x+d}{R_4} \hat{i}_x + \frac{y+h}{R_4} \hat{i}_y + \frac{z}{R_4} \hat{i}_z \right] + m_0 \hat{i}_y \right]$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο $\Sigma(x, y, z)$ δίδεται από την επαράλληλων διπόλων.

$$\vec{H}_\Sigma = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 + \vec{H}_4$$

Για να εξακριβώσουμε ότι $H_y(x, y=0, z) = 0$ φέρνουμε το Σ πάνω στο επίπεδο $y=0$: ($R_1 = R_2 = [(x-d)^2 + h^2 + z^2]^{1/2} = R_{12}$

$$R_3 = R_4 = [(x+d)^2 + h^2 + z^2]^{1/2} = R_{34})$$

$$H_y(x, y=0, z) =$$

$$= \frac{I}{4\pi R_{12}^3} \left\{ 3 \left(\frac{m_0(-h)}{R_{12}} \right) \left(\frac{-h}{R_{12}} \right) \right\} +$$

$$\frac{I}{4\pi R_{12}^3} \left\{ 3 \left(\frac{-m_0 h}{R_{12}} \right) \frac{h}{R_{12}} \right\} + \frac{I}{4\pi R_{34}^3} \left\{ 3 \left(\frac{m_0(-h)}{R_{34}} \right) \frac{-h}{R_{34}} \right\} +$$

$$\frac{I}{4\pi R_{34}^3} \left\{ 3 \left(\frac{-m_0 h}{R_{34}} \right) \left(\frac{h}{R_{34}} \right) \right\} = 0 \quad \checkmark$$

Όμοια, $R_1 = R_3 = [d^2 + (y-h)^2 + z^2]^{1/2} = R_{12}$, $R_2 = R_4 = [d^2 + (y+h)^2 + z^2]^{1/2} = R_{24}$

$$H_x(x=0, y, z) = \frac{1}{4\pi R_{13}^3} \left\{ 3 \left(\frac{m_0(y-h)}{R_{13}} \right) \left(\frac{-d}{R_{13}} \right) \right\} + \frac{1}{4\pi R_{24}^3} \left\{ 3 \left(\frac{-m_0(y+h)}{R_{24}} \right) \left(\frac{-d}{R_{24}} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi R_{13}^3} \left\{ 3 \left(\frac{m_0(y-h)}{R_{13}} \right) \left(\frac{d}{R_{13}} \right) \right\} + \frac{1}{4\pi R_{24}^3} \left\{ 3 \left(\frac{-m_0(y+h)}{R_{24}} \right) \left(\frac{d}{R_{24}} \right) \right\}$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

Επομένως το διανυσματικό δυναμικό

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \times \hat{r}_1}{R_1^2}$$

$$\vec{m}_1 \times \hat{r}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & m_0 & 0 \\ \frac{x-d}{R_1} & \frac{y-h}{R_1} & \frac{z}{R_1} \end{vmatrix} = \hat{i}_x \left(\frac{m_0 z}{R_1} \right) - \hat{i}_y \cdot 0 + \hat{i}_z \left(-\frac{m_0(x-d)}{R_1} \right)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0}{R_1^3} \left[z \hat{i}_x - (x-d) \hat{i}_z \right]$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_2 \times \hat{r}_2}{R_2^2}$$

$$\vec{m}_2 \times \hat{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & -m_0 & 0 \\ \frac{x-d}{R_2} & \frac{y+h}{R_2} & \frac{z}{R_2} \end{vmatrix} = \hat{i}_x \left(-m_0 \frac{z}{R_2} \right) + \hat{i}_z m_0 \frac{(x-d)}{R_2}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0}{R_2^3} \left[-z \hat{i}_x + (x-d) \hat{i}_z \right]$$

Όμοια $\vec{A}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0}{R_3^3} \left[z \hat{i}_x - (x+d) \hat{i}_z \right]$

$$\vec{A}_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0}{R_4^3} \left[-z \hat{i}_x + (x+d) \hat{i}_z \right]$$

Το δυναμικό στην αρχή των αξόνων είναι

$$\vec{A}(x=y=z=0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0}{[d^2+h^2]^{3/2}} \left\{ 0 \hat{i}_x + (d-d-d+d) \hat{i}_z \right\} = \vec{0}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} m_0 \left[\left\{ \frac{z}{R_1^3} - \frac{z}{R_2^3} + \frac{z}{R_3^3} - \frac{z}{R_4^3} \right\} \hat{i}_x + \left\{ \frac{-(x-d)}{R_1^3} + \frac{(x-d)}{R_2^3} + \frac{-(x+d)}{R_3^3} + \frac{x+d}{R_4^3} \right\} \hat{i}_z \right]$$

(β) $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 + \vec{H}_4$ όπως ορίσθηκαν προηγουμένως.

(γ) $\vec{K}(x=0, y) = (\hat{i}_n = \hat{i}_x) \times [\vec{H}(x=0, y, z) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(μέσα στον τέλει αγωγό)}}}{0}]$

$$= \hat{i}_x \times \left\{ H_x \hat{i}_x + H_y \hat{i}_y + H_z \hat{i}_z \right\} \Big|_{x=0} =$$

$$= (H_y \hat{i}_z - H_z \hat{i}_y) \Big|_{x=0} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{4\pi R_{13}^3} \left[3 \left(\frac{m_0 (y-h)^2}{R_{13}^2} \right) - m_0 \right] + \frac{1}{4\pi R_{24}^3} \left[3 \left(\frac{-m_0 (y+h)^2}{R_{24}^2} \right) + m_0 \right] \right.$$

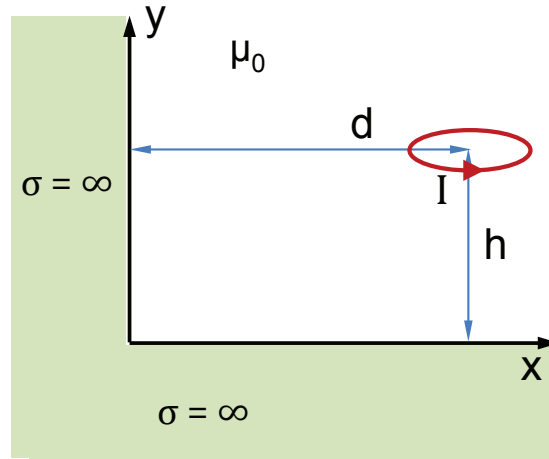
$$\left. \frac{1}{4\pi R_{13}^3} \left[3 \frac{m_0 (y-h)^2}{R_{13}^2} - m_0 \right] + \frac{1}{4\pi R_{24}^3} \left[3 \left(\frac{-m_0 (y+h)^2}{R_{24}^2} \right) + m_0 \right] \right\} \hat{i}_z$$

$$- \left\{ \frac{1}{4\pi R_{13}^3} \left[3 \left(\frac{m_0 (y-h)z}{R_{13}^2} \right) \right] + \frac{1}{4\pi R_{24}^3} \left[-3 \frac{m_0 (y+h)z}{R_{24}^2} \right] \right.$$

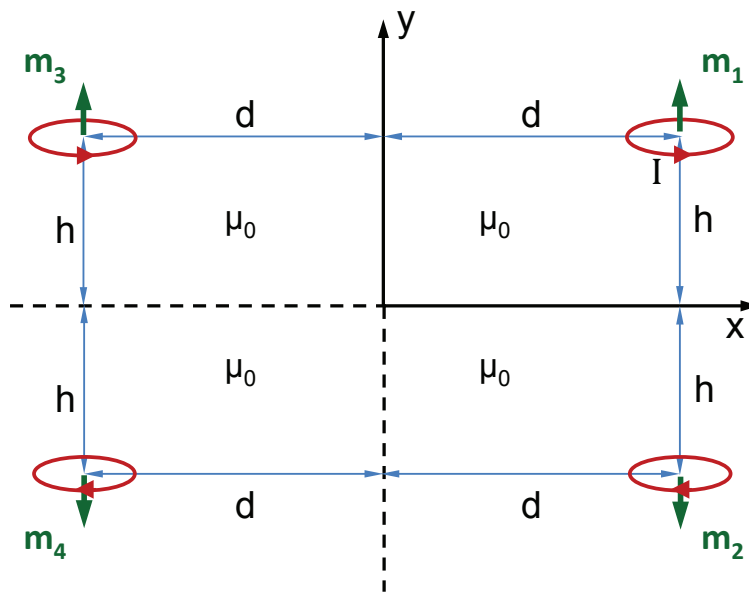
$$\left. \frac{1}{4\pi R_{13}^3} \left[3 \frac{m_0 (y-h)z}{R_{13}^2} \right] + \frac{1}{4\pi R_{24}^3} \left[-3 \frac{m_0 (y+h)z}{R_{24}^2} \right] \right\} \hat{i}_y$$

$$= \left\{ \frac{2}{4\pi R_{13}^3} \left[3 \left(\frac{m_0 (y-h)^2}{R_{13}^2} \right) - m_0 \right] + \frac{2}{4\pi R_{24}^3} \left[-3 \left(\frac{m_0 (y+h)^2}{R_{24}^2} \right) + m_0 \right] \right\} \hat{i}_z$$

$$- \left\{ \frac{6 m_0 (y-h)z}{4\pi R_{13}^5} - \frac{6 m_0 (y+h)z}{4\pi R_{24}^5} \right\} \hat{i}_y$$



(a)



(b)

Figure 1: (a) Magnetic dipole (circular current loop) at distance d and h from perfectly conducting right-angle corner. (b) The equivalent problem using the image theory.

Solution

(a)

$$\vec{A}(x > 0, y > 0, z) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left[\left(\frac{z}{R_1^3} - \frac{z}{R_2^3} + \frac{z}{R_3^3} - \frac{z}{R_4^3} \right) \hat{i}_x + \left(-\frac{x-d}{R_1^3} + \frac{x-d}{R_2^3} - \frac{x+d}{R_3^3} + \frac{x+d}{R_4^3} \right) \hat{i}_z \right], \quad (1)$$

$$m_0 = (\pi a^2) I, \quad (2)$$

$$R_1 = \sqrt{(x-d)^2 + (y-h)^2 + z^2}, \quad (3)$$

$$R_2 = \sqrt{(x-d)^2 + (y+h)^2 + z^2}, \quad (4)$$

$$R_3 = \sqrt{(x+d)^2 + (y-h)^2 + z^2}, \quad (5)$$

$$R_4 = \sqrt{(x+d)^2 + (y+h)^2 + z^2}. \quad (6)$$

(b)

$$\vec{H}(x > 0, y > 0, z) = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 + \vec{H}_4, \quad (7)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{4\pi R_1^3} \left\{ 3 \left(\frac{m_0(y-h)}{R_1} \right) \left[\frac{x-d}{R_1} \hat{i}_x + \frac{y-h}{R_1} \hat{i}_y + \frac{z}{R_1} \hat{i}_z \right] - m_0 \hat{i}_y \right\}, \quad (8)$$

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{4\pi R_2^3} \left\{ 3 \left(-\frac{m_0(y+h)}{R_2} \right) \left[\frac{x-d}{R_2} \hat{i}_x + \frac{y+h}{R_2} \hat{i}_y + \frac{z}{R_2} \hat{i}_z \right] + m_0 \hat{i}_y \right\}, \quad (9)$$

$$\vec{H}_3 = \frac{1}{4\pi R_3^3} \left\{ 3 \left(\frac{m_0(y-h)}{R_3} \right) \left[\frac{x+d}{R_3} \hat{i}_x + \frac{y-h}{R_3} \hat{i}_y + \frac{z}{R_3} \hat{i}_z \right] - m_0 \hat{i}_y \right\}, \quad (10)$$

$$\vec{H}_4 = \frac{1}{4\pi R_4^3} \left\{ 3 \left(-\frac{m_0(y+h)}{R_4} \right) \left[\frac{x+d}{R_4} \hat{i}_x + \frac{y+h}{R_4} \hat{i}_y + \frac{z}{R_4} \hat{i}_z \right] + m_0 \hat{i}_y \right\}, \quad (11)$$

(c)

$$\vec{K}(x=0, y, z) = \left\{ \frac{2}{4\pi R_{13}^3} \left[3 \left(\frac{m_0(y-h)^2}{R_{13}^2} \right) - m_0 \right] + \frac{2}{4\pi R_{24}^3} \left[-3 \left(\frac{m_0(y+h)^2}{R_{24}^2} \right) + m_0 \right] \right\} \hat{i}_z + \left\{ \frac{6m_0(y-h)z}{4\pi R_{13}^5} - \frac{6m_0(y+h)z}{4\pi R_{24}^5} \right\} \hat{i}_y, \quad (12)$$

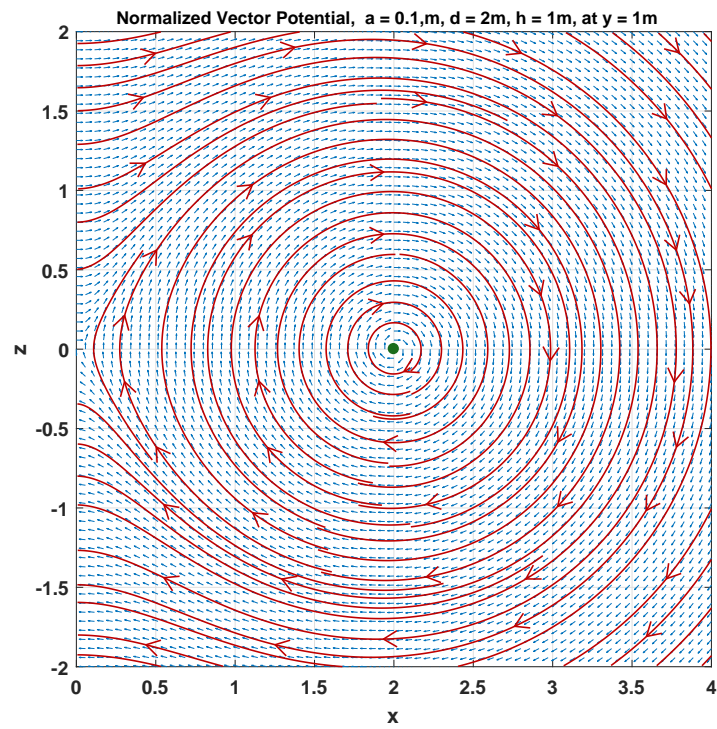
$$R_{13} = \sqrt{d^2 + (y-h)^2 + z^2}, \quad (14)$$

$$R_{24} = \sqrt{d^2 + (y+h)^2 + z^2}. \quad (15)$$

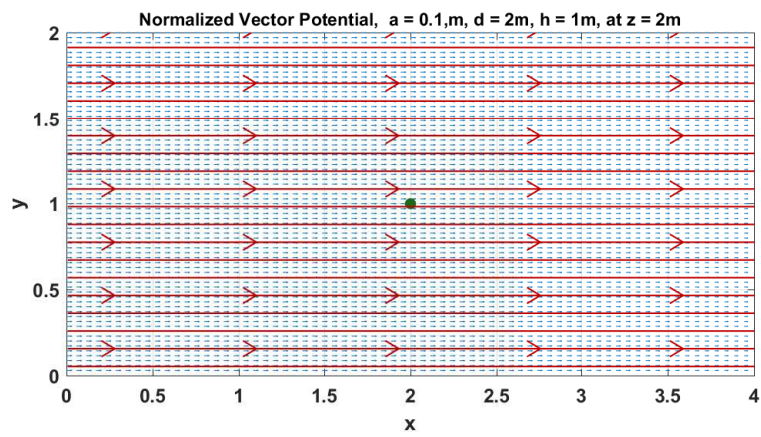
(d)

(e)

(f)

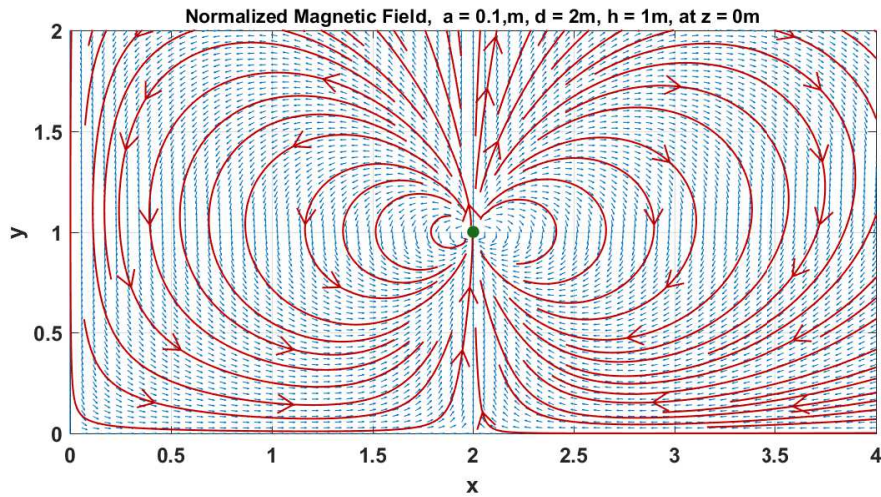


(a)

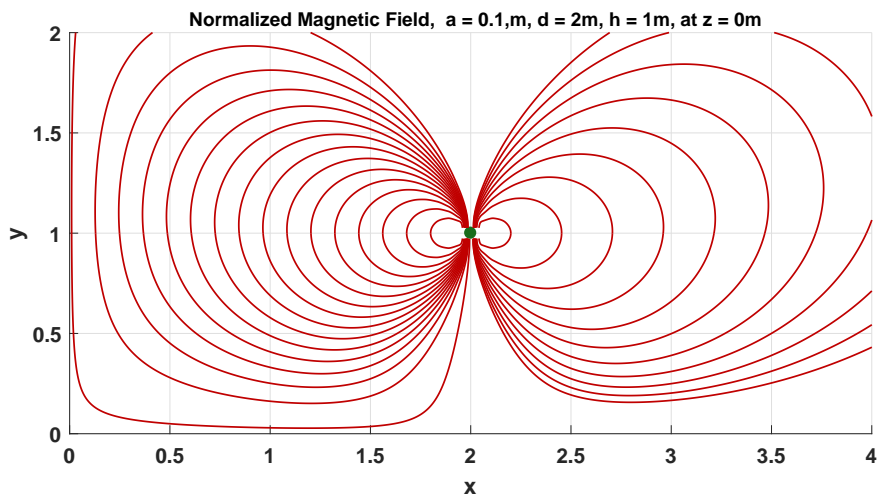


(b)

Figure 2: (a) Vector magnetic potential in the xz plane for $y = 1\text{m}$. (b) Vector magnetic potential in the xy plane for $z = 2\text{m}$. In both cases the green dot specifies the projected position of the magnetic dipole.



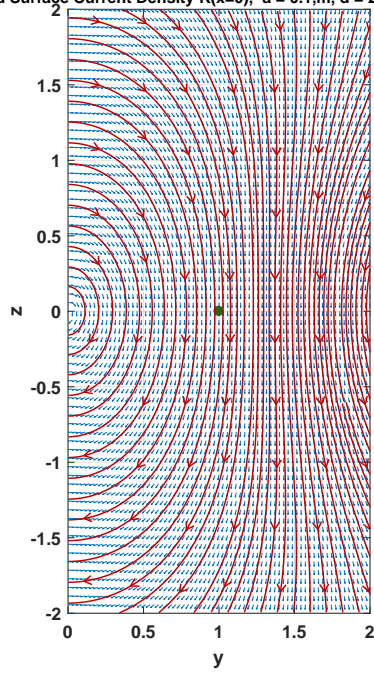
(a)



(b)

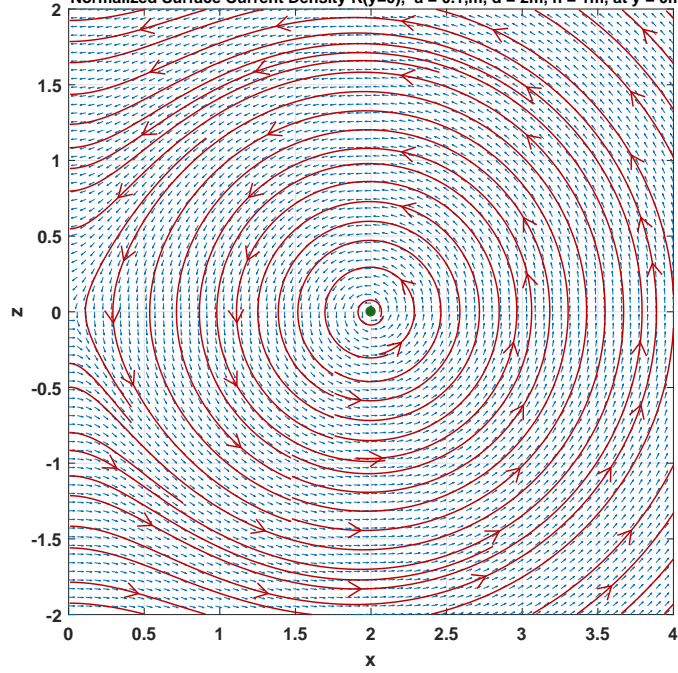
Figure 3: (a) Magnetic field lines in xy plane for $z = 0$ using the function “`streamslice`” and “`quiver`”. (b) Magnetic field lines in xy plane for $z = 0$ using the function “`mmstream2`”. In both cases the green dot specifies the projected position of the magnetic dipole.

Normalized Surface Current Density $K(x=0)$, $a = 0.1\text{m}$, $d = 2\text{m}$, $h = 1\text{m}$, at $x = 0\text{m}$



(a)

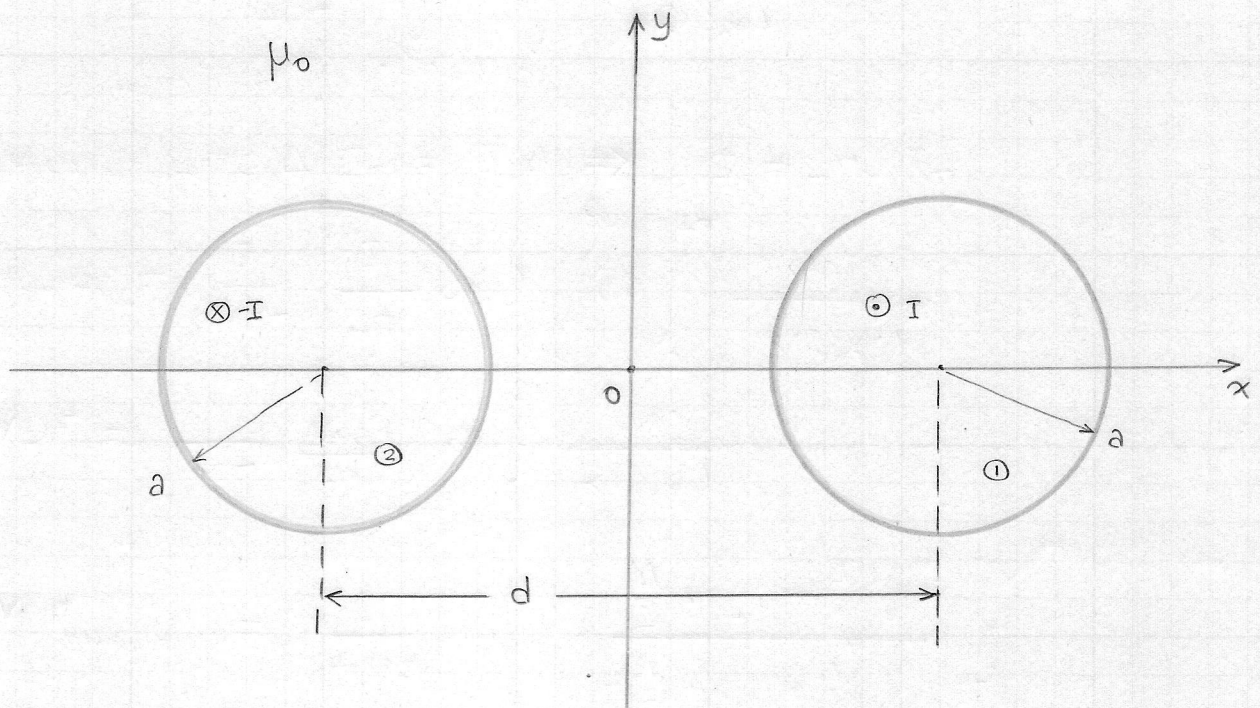
Normalized Surface Current Density $K(y=0)$, $a = 0.1\text{m}$, $d = 2\text{m}$, $h = 1\text{m}$, at $y = 0\text{m}$



(b)

Figure 4: (a) Induced surface current density on the $x = 0$ plane. (b) Induced surface current density on the $y = 0$ plane. In both cases the green dot specifies the projected position of the magnetic dipole.

ΑΣΚΗΣΗ 9:



(α) θα γίνει χρήση της επαλληλίας:

Δεξιάς αγωγός: $\vec{J}_1 = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$. Αφού το ρεύμα είναι μόνον

\vec{z} -διεύθυνσης του διανυσματικό δυναμικό θα είναι και αυτό μόνο κατά την \vec{z} -διεύθυνση.

$$\nabla^2 A_1 = -\mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \Rightarrow \frac{1}{r_{T1}} \frac{\partial}{\partial r_{T1}} \left(r_{T1} \frac{\partial A_1}{\partial r_{T1}} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}$$

$$\frac{d}{dr_{T1}} \left[r_{T1} \frac{dA_1}{dr_{T1}} \right] = -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} r_{T1} \Rightarrow$$

$$r_{T1} \frac{dA_1}{dr_{T1}} = -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T1}^2}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dA_1}{dr_{T1}} = -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T1}}{2} + \frac{C_1}{r_{T1}} \Rightarrow$$

$$A_1 = -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T1}^2}{4} + C_1 \ln r_{T1} + D_1 \quad (r_{T1} \leq a)$$

$$|A_1| < \infty \quad r_T \rightarrow 0 \sim C_1 = 0.$$

$$A_1 = C_2 \ln r_{T1} + D_2 \quad r_{T1} \geq a$$

Από την συνέχεια του δυναμικού στο $r_{T1} = a$:

$$A_1(a^-) = A_1(a^+) \Rightarrow$$

$$-\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{a^2}{4} + D_1 = C_2 \ln a + D_2 \Rightarrow D_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} + D_1 - C_2 \ln a$$

Η μαγνητική επαγωγή $\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = -\frac{dA_1}{dr_{T1}} \hat{\varphi}_1 \Rightarrow$

$$\vec{B}_1 = \hat{\varphi}_1 \begin{cases} + \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T1}}{2} & r_{T1} \leq a \\ - C_2 / r_{T1} & r_{T1} \geq a \end{cases}$$

$$\text{Αφού } \hat{e}_n \times (\vec{B}_1^+ - \vec{B}_1^-) \Big|_{r_{T1}=a} = 0 \rightarrow \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{a}{2} = -\frac{C_2}{a} \Rightarrow$$

$$C_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\text{Άρα το } \vec{A}_1 = \hat{z} \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T1}^2}{4} + D_1 & (r_{T1} \leq a) \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_{T1} + D_1 - \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a & (r_{T1} \geq a) \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{A}_1 = \hat{z} \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T1}^2}{4} + D_1 & (r_{T1} \leq a) \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{T1}}{a}\right) + D_1 - \frac{\mu_0 I}{4\pi} & (r_{T1} \geq a) \end{cases}$$

Με ακριβώς όμοιο τρόπο βρίσκουμε A_2 : ($I \rightarrow -I$, $r_{T1} \rightarrow r_{T2}$)

$$\vec{A}_2 = \hat{z} \begin{cases} +\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T2}^2}{4} + D_2' & r_{T2} \leq a \\ +\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{T2}}{a}\right) + D_2' + \frac{\mu_0 I}{4\pi} & r_{T2} \geq a \end{cases}$$

Το συνολικό $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Θα πρέπει \vec{A} πάνω στον y να είναι μηδενικό, πάνω στον άξονα y $r_{T1} = r_{T2} = r$ και επομένως:

$$\vec{A} = \hat{i}_z \left\{ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) + D_1 - \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) + D_2' + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right\} = (D_1 + D_2') \hat{i}_z = 0$$

$$\Rightarrow D_1 = -D_2'$$

Επομένως το συνολικό \vec{A} δίδεται ως εξής:

$$\vec{A} = \hat{i}_z \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T1}^2}{4} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{T2}}{a}\right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi} & r_{T1} \leq a, r_{T2} \geq a \\ +\frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T2}^2}{4} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{T1}}{a}\right) - \frac{\mu_0 I}{4\pi} & r_{T2} \leq a, r_{T1} \geq a \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{T1}}{a}\right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{T2}}{a}\right) & r_{T1} \geq a, r_{T2} \geq a \end{cases}$$

(εντός δεξιού αγωγού)
(εντός αριστερού αγωγού)
(εκτός αγωγών)

ως προς το σύστημα (x, y, z)

$$r_{T1} = [(x - d/2)^2 + y^2]^{1/2}, \quad r_{T2} = [(x + d/2)^2 + y^2]^{1/2}$$

για το σημείο του χώρου (x, y, z) (δεν εξαρτάται ως προς z λόγω της άπειρης διάστασης ως προς z).

(β) $W_m = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow$ πρέπει να βρεθεί η μαγνητική ενέργεια του συστήματος ανά μονάδα μήκους.

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV = \frac{1}{2} \int_S \vec{J} \cdot \vec{A} dS L_z \Rightarrow$$

$$\frac{W_m}{L_z} = \frac{1}{2} \int_S \vec{J} \cdot \vec{A} dS$$

$$\frac{W_m}{L_z} = \frac{1}{2} \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) dS_1 + \frac{1}{2} \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) dS_2$$

Ο υπολογισμός των 2 ολοκληρωμάτων είναι ταυτόσημος.

Έστω του \int_{S_1} ολοκλήρωμα.

$$\int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) (r_{T1} d\phi_1 dr_{T1}) =$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(+ \frac{I}{\pi a^2} \right) \left[- \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \frac{r_{T1}^2}{4} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_{T2}}{a} \right) + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right] r_{T1} d\phi_1 dr_{T1}$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{- \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4} r_{T1}^2}_{I_1} + \underbrace{\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2}}_{I_2} + \underbrace{\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a} \ln \left(\frac{r_{T2}}{a} \right)}_{I_3} \right] r_{T1} d\phi_1 dr_{T1}$$

$$r_{T2} = \left[d^2 + r_{T1}^2 + 2 r_{T1} d \cos \phi_1 \right]^{1/2} \quad (\text{r. συνημιτόνων}).$$

Τα επί μέρους ολοκληρώματα είναι:

$$I_1 = - \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4} \frac{a^4}{4} 2\pi = - \frac{\mu_0 I^2}{8\pi}$$

$$I_2 = + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2} \frac{a^2}{2} 2\pi = + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}$$

$$I_3 = + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln \left[\frac{r_{T1}^2 + d^2 + 2r_{T1}d \cos \phi_1}{a^2} \right] d\phi_1 r_{T1} dr_{T1}$$

$$= + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\ln(r_{T1}^2 + d^2 + 2r_{T1}d \cos \phi_1) - \ln(a^2) \right] r_{T1} dr_{T1} d\phi_1$$

$$= + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2} \left[\int_0^a \underbrace{\frac{1}{2} 2\pi \ln \left[\frac{d^2 + r_{T1}^2 + [(d^2 + r_{T1}^2)^2 - 4r_{T1}^2 d^2]^{1/2}}{2} \right]}_{\text{see integral needed}} r_{T1} dr_{T1} - \ln a^2 \cdot 2\pi a^2 \frac{1}{2} \right]$$

$$= + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2} \left[\int_0^a \frac{2\pi}{2} \ln \left[\frac{d^2 + r_{T1}^2 + d^2 - r_{T1}^2}{2} \right] a dr_{T1} - \frac{2\pi a^2 \ln a^2}{2} \right]$$

$$= + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2} \left[\frac{2\pi a^2 \ln(d^2)}{2} - \frac{2\pi a^2 \ln a^2}{2} \right] =$$

$$= + \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{2}{2} \ln\left(\frac{d}{a}\right) = + \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right)$$

Άρα $\frac{1}{2} \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) dS_1 =$

$$\frac{1}{2} \left[+ \frac{\mu_0 I^2}{8\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right) \right]$$

Όμοια $\frac{1}{2} \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) dS_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_0 I^2}{8\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right) \right]$

Επομένως

$$L = 2 \frac{\mu_0}{8\pi} + 2 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 + 4 \ln\left(\frac{d}{a}\right) \right]$$

Integrate[Log[a + b * Cos[x]], {x, 0, 2 * Pi},
Assumptions -> a > b]

ConditionalExpression[

$$-2 \pi \text{Log}\left[\frac{2}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}\right], b \geq 0 \parallel a + b > 0]$$

Check Gradshteyn & Ryzhik pg 560

$$\int_0^{\pi} \log(a + b \cos x) dx = \pi \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}\right) \quad (a \geq |b| > 0)$$

$$\int_0^{2\pi} \log(a + b \cos \varphi) d\varphi = 2\pi \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}\right)$$

$$a = a^2 + d^2 \quad b = 2ad \quad \underline{d > a}$$

$$a^2 - b^2 = (a^2 + d^2)^2 - 4a^2d^2 = (a^2 - d^2)^2 = (d^2 - a^2)^2$$

Evaluation of $I = \int_0^{2\pi} \ln[a + b \cos x] dx$ $a > b > 0$

Let $I(a) = \int_0^{2\pi} \ln[a + b \cos x] dx$

$\frac{dI}{da} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos x)} dx$ (Leibnitz)

$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos x)} dx = \oint \frac{1}{\frac{2\alpha z + bz^2 + b}{2z}} \frac{dz}{jz}$

$z = e^{jx} \Rightarrow dz = j e^{jx} dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{jz}$

$I_1 = \frac{2}{j} \oint \frac{dz}{b[z^2 + 2(\frac{a}{b})z + 1]} = \frac{2}{jb} \oint \frac{dz}{z^2 + 2(\frac{a}{b})z + 1}$

Roots of $z^2 + 2(\frac{a}{b})z + 1 = 0$ $f(z) = 1/z^2 + 2(\frac{a}{b})z + 1$

$p_{1,2} = \left(-\frac{2a}{b} \pm \left[\frac{4a^2}{b^2} - 4 \right]^{1/2} \right) \frac{1}{2}$

$p_1 = -\frac{a}{b} + \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right]^{1/2}$ \wedge $p_2 = -\frac{a}{b} - \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right]^{1/2}$

$\frac{a}{b} > 1 \rightarrow$ only p_1 inside unit circle.

$I_1 = \frac{2}{jb} 2\pi j \left[\text{Res}\{f, p_1\} \right] = \frac{4\pi}{b} \left[\frac{1}{p_1 - p_2} \right]$

$p_1 - p_2 = 2 \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}$

Therefore $I_1 = \frac{4\pi}{b} \frac{b}{2[a^2 - b^2]^{1/2}} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

Then $\frac{dI}{da} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{b} \frac{1}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1\right]^{1/2}}$

$\frac{dI}{da} = \frac{2\pi}{b} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}} da = 2\pi \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$
 $x = a/b > 1$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad \text{for } x > 1 \quad \left(x = \frac{a}{b} > 1\right)$$

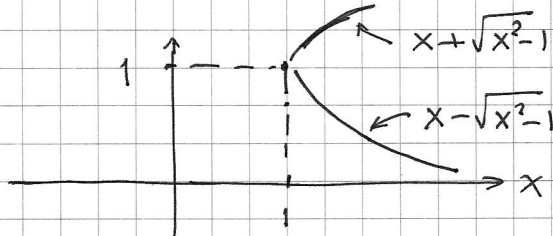
$$\text{Set } x = \cosh \psi \Rightarrow dx = \sinh \psi d\psi$$

$$x^2 - 1 = \cosh^2 \psi - 1 = \sinh^2 \psi$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 \psi}} \sinh \psi d\psi = \pm \psi$$

$$\frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2} = x \Rightarrow e^{2\psi} - 2xe^\psi + 1 = 0 \Rightarrow e^\psi = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

$$\text{But } x > 1 \Rightarrow e^\psi = x + \sqrt{x^2-1}$$



Therefore $\psi = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Consequently,

$$dI = 2\pi \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \Rightarrow$$

$$I = 2\pi \left[\ln(x + \sqrt{x^2-1}) \right] + C$$

$$I(a) = 2\pi \left[\ln\left(\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}\right) \right] + C$$

$$I(a \rightarrow \infty) = \int_0^{2\pi} \ln[a + b \cos x] dx \rightarrow 2\pi \ln a$$

$$I(a \rightarrow \infty) = 2\pi \left[\ln\left(2 \frac{a}{b}\right) \right] + C = 2\pi \ln a \Rightarrow$$

$$C = 2\pi \left(-\ln\left(2 \frac{a}{b}\right) + \ln a \right) = 2\pi \ln\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$\text{Then } I = 2\pi \left[\ln\left(\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}\right) + \ln\left(\frac{b}{2}\right) \right]$$

$$= 2\pi \ln \left[\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} \right) \right] = 2\pi \ln \left[\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right] \quad \checkmark$$

For the magnetic induction:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{i}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \hat{i}_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

Region 1: $r_{T1} \leq a, r_{T2} \geq a$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} y + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r_{T2}^2}$$

$$r_{T1} = \left[\left(x - \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2}$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \left(x - \frac{d}{2} \right) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x + d/2}{r_{T2}^2} = B_y$$

$$r_{T2} = \left[\left(x + \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2}$$

Region 2: $r_{T1} \geq a, r_{T2} \leq a$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} y - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r_{T1}^2}$$

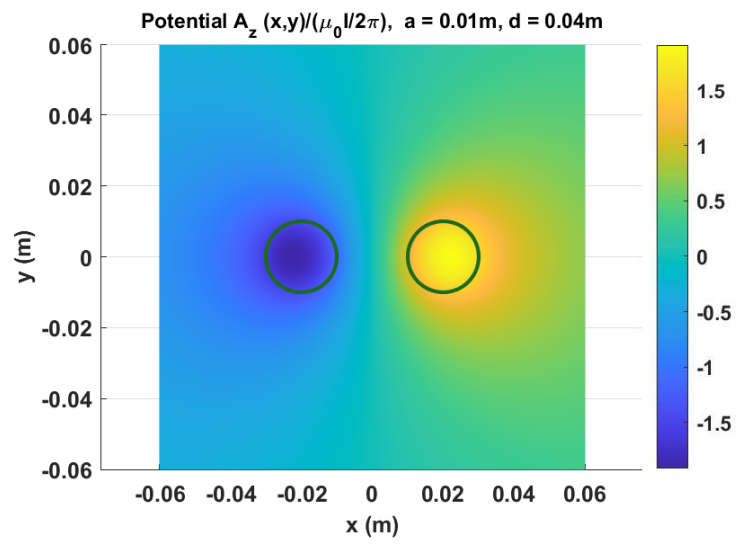
$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \left(x + \frac{d}{2} \right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x - d/2}{r_{T1}^2}$$

Region 3: $r_{T1} \geq a, r_{T2} \geq a$

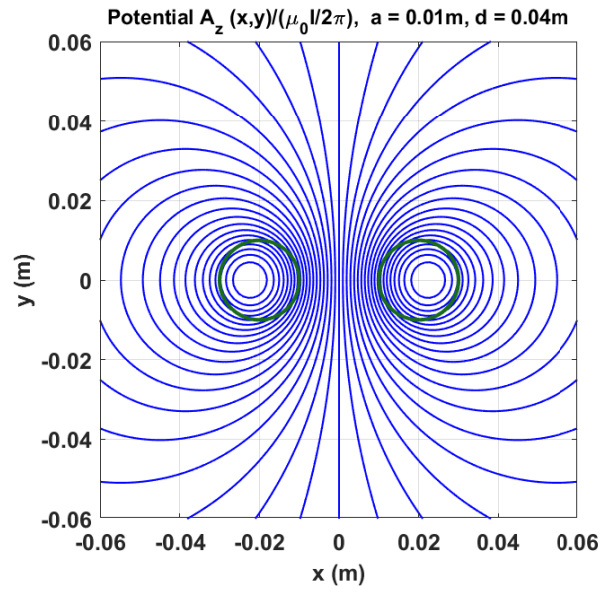
$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{y}{r_{T2}^2} - \frac{y}{r_{T1}^2} \right]$$

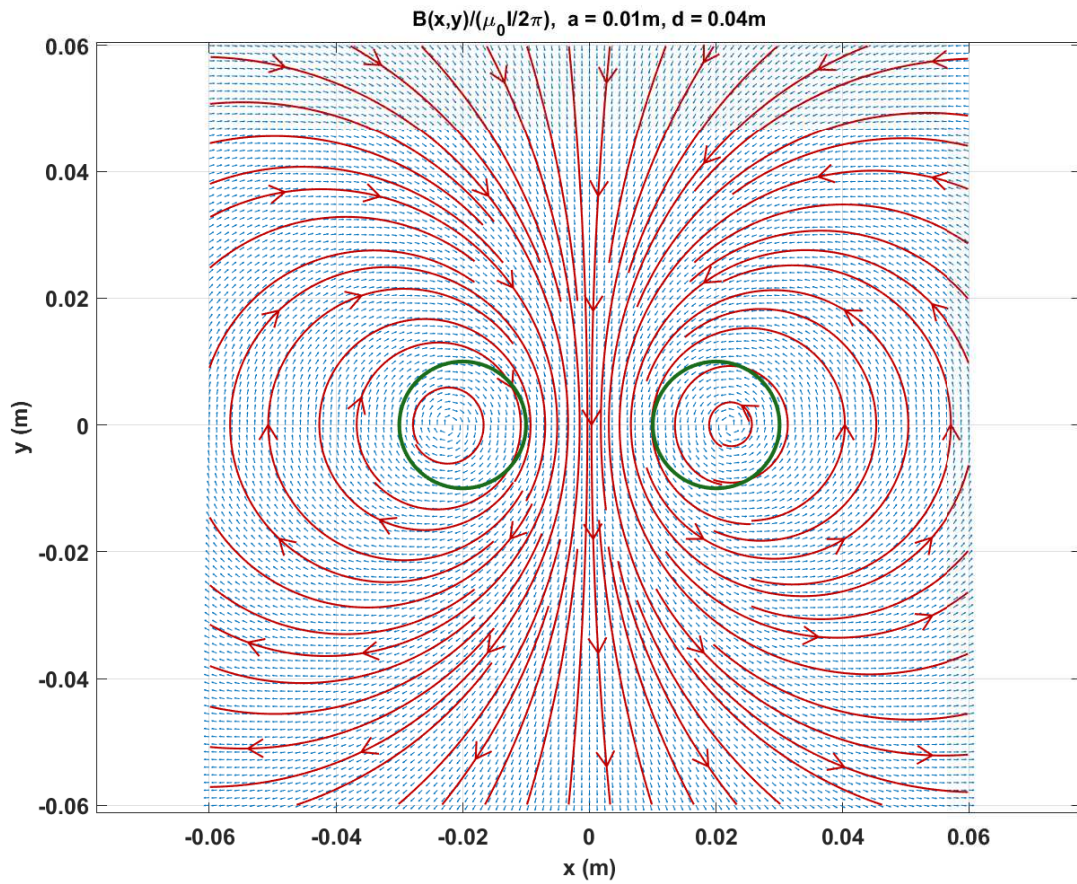
$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{x - d/2}{r_{T1}^2} - \frac{x + d/2}{r_{T2}^2} \right]$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (γ) ερώτημα (γραφικές παραστάσεις):



Σχήμα 1: Το διανυσματικό δυναμικό $A(x, y)$. Οι παράμετροι αναγράφονται στις γραφικές παραστάσεις ($a = 0.01\text{ m}$, $d = 0.04\text{ m}$).





Σχήμα 3: Η μαγνητική επαγωγή $B(x, y)$.