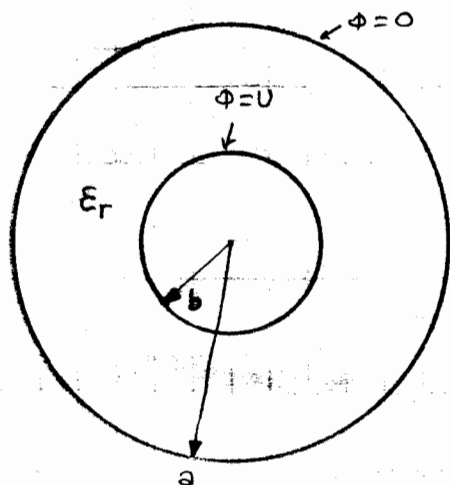


**ΑΣΚΗΣΗ 1:**



(1)  $\epsilon_r = \text{σταθερά}$

As επιλύσουμε την εξίσωση Laplace στην περιοχή μεταξύ των 2 σφαιρών.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r (-\vec{\nabla} \Phi)) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας  $\Phi = \Phi(r)$ ,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = A \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} \Rightarrow \Phi(r) = -\frac{A}{r} + B$$

As υποθέσουμε ότι  $\Phi(r=b) = U$  και  $\Phi(r=a) = 0$ . οπότε

$$\Phi(r=a) = 0 = -\frac{A}{a} + B = B = A/a \Rightarrow B = -\frac{U b}{a-b}$$

$$\Phi(r=b) = U = -\frac{A}{b} + B = -\frac{A}{b} + \frac{A}{a} \Rightarrow A = -U \left( \frac{ab}{a-b} \right)$$

Άρα  $\Phi = U \frac{ab}{a-b} \frac{1}{r} - U \frac{b}{a-b} \quad (b \leq r \leq a)$

Το ηλεκτρικό πεδίο δίδεται από την σχέση  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r}$

$$\vec{E} = U \frac{ab}{a-b} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad b \leq r \leq a$$

Το διάνυσμα διανερτικής μετατόπισης είναι  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \Rightarrow$

$$\vec{D} = U \frac{ab}{a-b} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad b \leq r \leq a$$

Η πόλωση  $\vec{P}$  μπορεί να βρεθεί από την σχέση:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U \frac{ab}{a-b} \frac{1}{r^2} \quad b \leq r \leq a$$

Τα ελεύθερα επιφανειακά φορτία μπορούν να βρεθούν από τις συνοριακές συνθήκες:

$$\sigma(r=b) = \hat{r} \cdot (\vec{D}(r=b) - 0) = U \frac{ab}{a-b} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{b^2} = U \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{a-b} \left( \frac{a}{b} \right)$$

$$\sigma(r=a) = (-\hat{r}) \cdot (\vec{D}(r=a) - 0) = -U \frac{ab}{a-b} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{a^2} = -U \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{a-b} \left( \frac{b}{a} \right)$$

Τα συνολικά ελεύθερα επιφανειακά φορτία δίδονται από τις σχέσεις:

$$Q(r=b) = 4\pi b^2 \sigma(r=b) = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \left( \frac{ab}{a-b} \right) U$$

$$Q(r=a) = 4\pi a^2 \sigma(r=a) = -4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \left( \frac{ab}{a-b} \right) U$$

Η χωρητικότητα του πυκνωτού δίδεται από την σχέση:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \left( \frac{ab}{a-b} \right) U}{U} = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \left( \frac{ab}{a-b} \right)$$

Τα δέσμια φορτία πόλωσης μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \cancel{\epsilon_0} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U \frac{ab}{a-b} \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

Τα δέσμια επιφανειακά φορτία δίδονται από την σχέση

$$\begin{aligned} \sigma_b(r=b) &= \hat{n} \cdot \vec{P}(r=b) = (-\hat{r}) \cdot \left( \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U \frac{ab}{a-b} \frac{1}{b^2} \hat{r} \right) \\ &= -\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U \frac{1}{a-b} \left( \frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_b(r=a) &= \hat{n} \cdot \vec{P}(r=a) = \hat{r} \cdot \left( \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U \frac{ab}{a-b} \frac{1}{a^2} \hat{r} \right) = \\ &= +\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U \frac{1}{a-b} \left( \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

Το συνολικό δέσμιο φορτίο είναι

$$\sigma_b(r=b) 4\pi b^2 + \sigma_b(r=a) 4\pi a^2 = 0$$

(b)  $\epsilon_r = k \frac{a^2}{r^2}$  όπου  $k$  σταθερά

Πάλι θα επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r(r) \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r(r) (-\vec{\nabla} \Phi)) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left[ \epsilon_r(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \epsilon_r(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \cancel{\epsilon_0} k \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow k a^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0 \Rightarrow \Phi(r) = Ar + B$$

As υποθέσουμε πάλι ότι  $\Phi(r=b) = U$ ,  $\Phi(r=a) = 0 \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= Aa + B \\ U &= Ab + B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -\frac{U}{a-b} \\ B &= \frac{Ua}{a-b} \end{aligned}$$

Επομένως  $\Phi(r) = -\frac{U}{a-b}(r-a) \quad b \leq r \leq a$

Το ηλεκτρικό πεδίο δίδεται από την σχέση:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{r}$

$$\vec{E} = \frac{U}{a-b} \hat{r}$$

και το διάνυσμα διηλεκτρικής μετατόπισης:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r(r) \vec{E} = \epsilon_0 \left(k \frac{a^2}{r^2}\right) \left(\frac{U}{a-b}\right) \hat{r} \quad b \leq r \leq a$$

Η πόλωση  $\vec{P}$  δίδεται από την σχέση:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \left(k \frac{a^2}{r^2} - 1\right) \frac{U}{a-b} \hat{r} \quad b \leq r \leq a$$

Τα ελεύθερα επιφανειακά φορτία είναι:

$$\sigma(r=b) = \hat{r} \cdot (\vec{D}(r=b) - 0) = \epsilon_0 k \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{U}{a-b}$$

$$\sigma(r=a) = (-\hat{r}) \cdot (\vec{D}(r=a) - 0) = -\epsilon_0 k \frac{U}{a-b}$$

Τα συνολικά ελεύθερα επιφανειακά φορτία είναι:

$$Q_b = 4\pi b^2 \sigma(r=b) = 4\pi \epsilon_0 k a^2 \frac{U}{a-b}$$

$$Q_a = 4\pi a^2 \sigma(r=a) = -4\pi \epsilon_0 k a^2 \frac{U}{a-b}$$

Η χωρητικότητα του πυκνωτού δίδεται από την σχέση:

$$C = \frac{Q_b}{U} = 4\pi \epsilon_0 k a^2 \left(\frac{1}{a-b}\right)$$

Τα δεσμία φορτία πόλωσης (χωριδιά) είναι:

$$\begin{aligned} \rho_b &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \epsilon_0 \left(k \frac{a^2}{r^2} - 1\right) \frac{U}{a-b} \right) = \\ &= \frac{2}{r} \epsilon_0 \frac{U}{a-b} \end{aligned}$$

Τα επιφανειακά δεσμία φορτία δίδονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_b(r=b) = (-\hat{r}) \cdot \vec{P}(r=b) = -\epsilon_0 \left(k \frac{a^2}{b^2} - 1\right) \frac{U}{a-b}$$

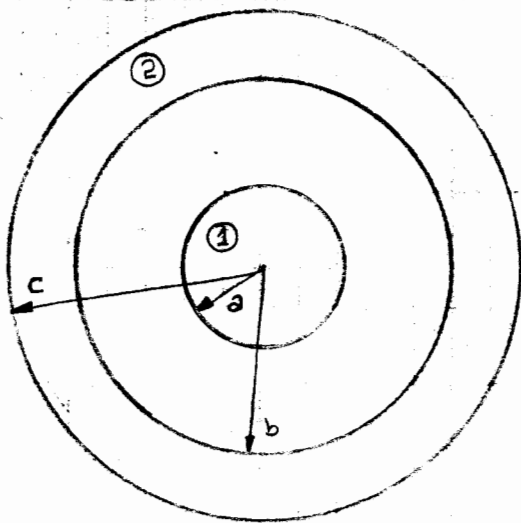
$$\sigma_b(r=a) = (+\hat{r}) \cdot \vec{P}(r=a) = \epsilon_0 (k-1) \frac{U}{a-b}$$

Το συνολικό δεσμευμένο φορτίο είναι:

$$\int_V \rho_b dV + \left[ \sigma_b(r=b) 4\pi b^2 + \sigma_b(r=a) 4\pi a^2 \right] =$$

$$\frac{U}{a-b} \epsilon_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_b^a \frac{2}{r} r^2 dr - 4\pi \epsilon_0 U (a+b) = \frac{U}{a-b} \epsilon_0 4\pi (a^2 - b^2) - 4\pi \epsilon_0 U (a+b) = 0$$

## ΑΣΚΗΣΗ 2:



Οι συντελεστές δυναμικού ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\Phi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2$$

$$\Phi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2$$

όπου 1 αντιστοιχεί στον αγωγό ακτίνας  $a$  και 2 στον αγωγό εσωτερικής ακτίνας  $b$  και εξωτερικής  $c$ .

Ας υποθέσουμε ότι  $Q_1 = 0$  και  $Q_2 \neq 0$ . Τότε

$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{c}$  διότι το φορτίο  $Q_2$  θα κατανεμηθεί ομοιόμορφα στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού 2. Επομένως

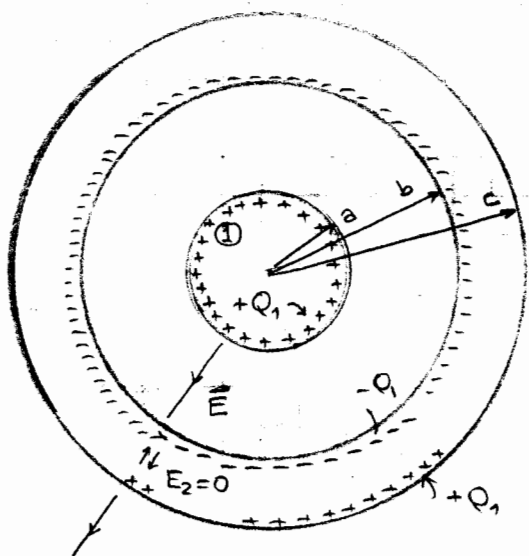
$$P_{22} = \left. \frac{\Phi_2}{Q_2} \right|_{Q_1=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} Q_2 = P_{12} Q_2 \Rightarrow P_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}$$

διότι το εσωτερικό του αγωγού 2 δεν είναι φορτισμένο και επομένως είναι ισοδυναμική επιφάνεια.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι  $Q_1 \neq 0$  και  $Q_2 = 0$ . Το φορτίο  $Q_1$  επάγει φορτίο  $-Q_1$  στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού 2 και  $+Q_1$  στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού 2. Τα φορτία κατανομούνται

ομοιόμορφα λόγω της σφαιρικής συμμετρίας.



Τα φορτία  $+Q_1$  και  $-Q_1$  πάνω στις επιφάνειες του αγωγού 2 προκαλούν μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον αγωγό 2. Επομένως το δυναμικό στον αγωγό 1 μπορεί να βρεθεί με χρήση της επαλληλίας:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q_1}{b} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+Q_1}{c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) Q_1$$

$$\rightarrow p_{11} = \left. \frac{\Phi_1}{Q_1} \right|_{Q_2=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Το  $p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c}$  λόγω της συμμετρίας των συνεδρικών δυναμικών. Αυτό μπορεί να επαληθευτεί και ανεξάρτητα της συμμετρίας ιδιότητας ως εξής:

$$\begin{aligned} \Phi_1 - \Phi_2 &= - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_b^a \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ \Rightarrow \Phi_2 &= \Phi_1 - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = Q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{c} \Rightarrow p_{21} = \left. \frac{\Phi_2}{Q_1} \right|_{Q_2=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} = p_{12} \end{aligned}$$

Αναμεταδοιώνοντας έχουμε:

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c}$$

$$p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c}$$

$$p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c}$$

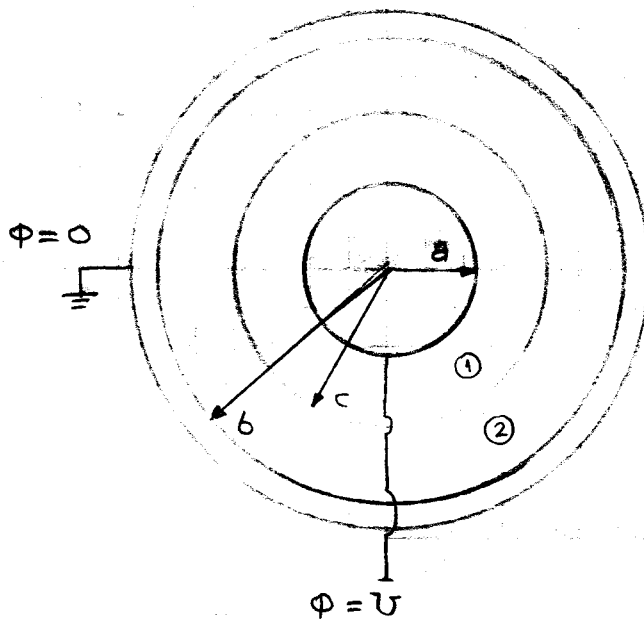
Η χωρητικότητα τώπα του πυκνωτή είναι εύκολο να υπολογιστεί.

Αν  $Q_1 = Q$  και  $Q_2 = -Q$  τότε

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= p_{11}Q - p_{12}Q \\ \Phi_2 &= p_{21}Q - p_{22}Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = (p_{11} - 2p_{12} + p_{22})Q \Rightarrow$$

$$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{1}{p_{11} - 2p_{12} + p_{22}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{c} + \frac{1}{c} \right)} =$$
$$= 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

### ΑΣΚΗΣΗ 3:



(α) Ας επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace ανά περιοχή.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi = 0$$

$$\text{Ομοίως } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon (-\vec{\nabla} \Phi)) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi = 0$$

Λόγω της συμμετρίας  $\Phi$  εξαρτάται μόνο από  $r_T$ ,  $\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left( r_T \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) = 0 \Rightarrow r_T \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} = A \Rightarrow \Phi(r_T) = A \ln(r_T) + B$$

Για την περιοχή ①  $a \leq r_T \leq c$ :

$$\Phi_1(r_T) = A_1 \ln r_T + B_1 \quad \sim \quad \vec{E}_1 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \hat{r} = -\frac{A_1}{r_T} \hat{r}$$

Για την περιοχή ②  $c \leq r_T \leq b$ :

$$\Phi_2(r_T) = A_2 \ln r_T + B_2 \quad \sim \quad \vec{E}_2 = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \hat{r} = -\frac{A_2}{r_T} \hat{r}$$

Συνοριακές Συνθήκες:

$$\Phi_1(r_T = a) = U \Rightarrow A_1 \ln a + B_1 = U \quad (1)$$

$$\Phi_2(r_T = b) = 0 \Rightarrow A_2 \ln b + B_2 = 0 \quad (2)$$

$$\Phi_1(r_T = c) = \Phi_2(r_T = c) \Rightarrow A_1 \ln c + B_1 = A_2 \ln c + B_2 \quad (3)$$

$$J_{1r}|_c = J_{2r}|_c \Rightarrow \sigma_1 \frac{A_1}{c} = \sigma_2 \frac{A_2}{c} \quad (4)$$

Η επίλυση των εξισώσεων (1)-(4) δίδει :

$$A_1 = \frac{-U}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

$$A_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{-U}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

$$B_1 = U - A_1 \ln a$$

$$B_2 = -A_2 \ln b$$

Επομένως το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο δίδονται από: ( $A_1 < 0$ )

$$\Phi_1 = \frac{-U}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) + U \quad a \leq r \leq c$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{A_1}{r} \hat{r}, \quad \vec{J}_1 = -\sigma_1 \frac{A_1}{r} \hat{r} \quad a \leq r \leq c$$

$$\Phi_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{-U}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \quad c \leq r \leq b$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{A_1}{r} \hat{r}, \quad \vec{J}_2 = \sigma_2 \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \frac{A_1}{r} \hat{r} = -\sigma_1 \frac{A_1}{r} \hat{r} \quad c \leq r \leq b$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 = -\epsilon_1 \frac{A_1}{r} \hat{r} \quad a \leq r \leq c$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 = -\epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{A_1}{r} \hat{r} \quad c \leq r \leq b$$

Χωριστές πυκνότητες φορτίων:

$$\rho_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cancel{r} (-\epsilon_1) \frac{A_1}{\cancel{r}} \right) = 0 \quad a < r < c$$

$$\rho_2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cancel{r} (-\epsilon_2) \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{A_1}{\cancel{r}} \right) = 0 \quad c < r < b$$

Επιφανειακές πυκνότητες φορτίων:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{0}) \Big|_{r=a} = \sigma(r=a) \Rightarrow \sigma(r=a) = -\epsilon_1 \frac{A_1}{a} > 0$$

$$-\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{0}) \Big|_{r=b} = \sigma(r=b) \Rightarrow \sigma(r=b) = +\epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{A_1}{b} < 0$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{r=c} = \sigma(r=c) \Rightarrow \sigma(r=c) = -\frac{A_1}{c} \left( \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \epsilon_1 \right)$$

Το συνολικό επιφανειακό φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι  $\sigma(r=a)2\pi a +$

$$\sigma(r=r=c) 2\pi c + \sigma(r=r=b) 2\pi b =$$

$$= -2\pi \frac{\sigma_1}{r} \frac{A_1}{r} - 2\pi \frac{\sigma_2}{r} \frac{A_1}{r} (\epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \epsilon_1) + 2\pi \frac{\sigma_1}{r} \frac{A_1}{r} = 0$$

Επομένως υπάρχει συνδιασμός δυο πυκνωτών σε σειρά.

$$C_1 = \frac{Q_1}{U - \Phi_1(c)} = \frac{(-\epsilon_1 \frac{A_1}{a}) 2\pi a}{U - A_1 \ln(\frac{c}{a}) - U} = 2\pi \epsilon_1 \frac{1}{\ln(c/a)}$$

όπου  $C_1$  είναι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του συστήματος.

Στην δεύτερη περιοχή εξηρατίζετα η χωρητικότητα (ανά μονάδα μήκους)

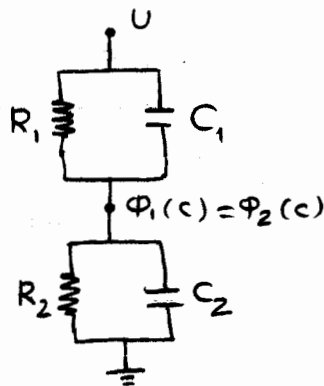
$$C_2 = \frac{Q_2}{\underbrace{\Phi_2(c)}_{\Phi_1(c)}} = \frac{-2\pi c \frac{A_1}{c} \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{A_2 \ln(\frac{c}{b})} = \frac{-2\pi \epsilon_2}{\ln(c/b)} = \frac{2\pi \epsilon_2}{\ln(b/c)}$$

Τέλος η αντίσταση μπορεί να βρεθεί σαν άθροισμα δύο όρων:

$$R_1 = \frac{U - \Phi_1(c)}{I} = \frac{-A_1 \ln(c/a)}{-\sigma_1 \frac{A_1}{r} 2\pi r} = \frac{\ln(c/a)}{2\pi \sigma_1}$$

$$R_2 = \frac{\Phi_2(c) - 0}{I} = \frac{A_2 \ln(c/b)}{-\sigma_1 \frac{A_1}{r} 2\pi r} = \frac{-\sigma_1 A_1 \ln(b/c) / \sigma_2}{-\sigma_1 A_1 2\pi} = \frac{\ln(b/c)}{2\pi \sigma_2}$$

Επομένως ανά μονάδα μήκους το σύστημα φαίνεται σαν:



$R, C, I$  είναι ανά μονάδα μήκους

$$(2) \quad \epsilon = \epsilon_0 (r_T/a), \quad \sigma = \sigma_0 (r_T/a)^2$$

Πάλι θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left( \sigma_0 \frac{r_T^2}{a^2} (-\vec{\nabla} \Phi) \right) = 0 \Rightarrow$$

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας  $\Phi = \Phi(r_T)$  και επομένως η παραπάνω

εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left( r_T \sigma_0 \frac{r_T^2}{a^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_T} \left( r_T^3 \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_T} r_T^3 = A \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} = \frac{A}{r_T^3} \Rightarrow \Phi(r_T) = -\frac{1}{2} \frac{A}{r_T^2} + B$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r_T = a) = U &\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{A}{a^2} + B = U \\ \Phi(r_T = b) = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{A}{b^2} + B = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{-2U}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)} \\ B &= -U \frac{(1/b^2)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Phi(r_T) = \frac{U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^2} - U \frac{1/b^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \left( \frac{1}{r_T^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \hat{r}_T \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^3} \hat{r}_T \quad a < r_T < b$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \frac{r_T}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^{3/2}} \hat{r}_T \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \frac{1}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^2} \hat{r}_T$$

χωρική πυκνότητα φορτίου:

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left( r_T \epsilon_0 \frac{1}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^2} \right) = -\frac{1}{r_T^3} \epsilon_0 \frac{1}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

Επιφανειακά φορτία:

$$\hat{r}_n \cdot (\vec{D} - 0) \Big|_{r_T=a} = \sigma(r_T=a) \Rightarrow \sigma(r_T=a) = \epsilon_0 \frac{1}{a^3} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

$$\hat{r}_n \cdot (\vec{D} - 0) \Big|_{r_T=b} = \sigma(r_T=b) \Rightarrow \sigma(r_T=b) = -\epsilon_0 \frac{1}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{b^2}$$

Λόγω της ύπαρξης του χωρικού φορτίου το συνολικό επιφανειακό φορτίο ανά μονάδα μήκους του ομοαξονικού καλωδίου δεν είναι μηδενικό.

Συγκεκριμένα το συνολικό επιφανειακό φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι

$$\sigma(r_T=a) 2\pi a + \sigma(r_T=b) 2\pi b = 4\pi\epsilon_0 V \left( \frac{1/a}{1/a+1/b} \right) = \xi$$

Το συνολικό χωρικό φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_a^b \rho r_T d\phi dr_T = -4\pi\epsilon_0 V \left( \frac{1/a}{1/a+1/b} \right)$$

Οπότε παρατηρούμε ότι ανά μονάδα μήκους το συνολικό χωρικό και επιφανειακό φορτίο είναι  $Q + \xi = 0$ .

Για να βρούμε την αριστερά πρέπει να βρούμε το συνολικό ρεύμα  $I$

ανά μονάδα μήκους.

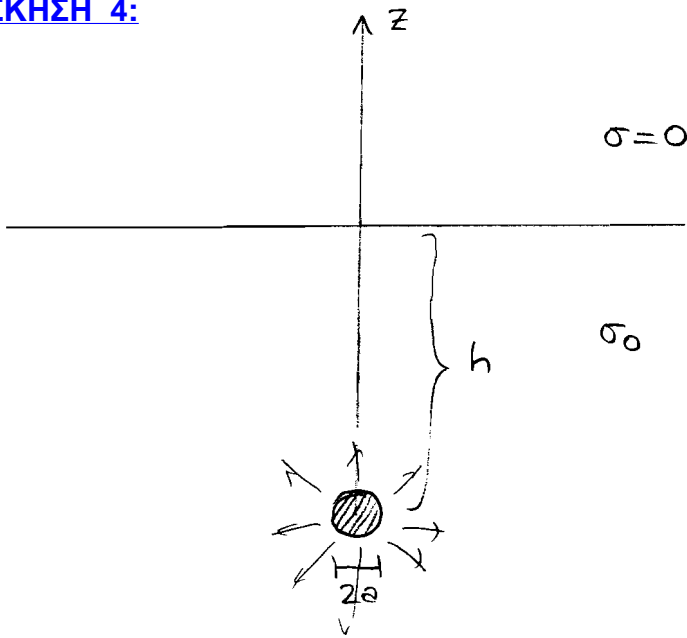
$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \sigma \left( -\frac{\partial\phi}{\partial r_T} \right) \hat{l}_{r_T} \cdot \hat{l}_{r_T} r_T d\phi dz \Rightarrow$$

$$I = 2\pi \sigma_0 \frac{r_T^2}{a^2} \left( -\frac{V}{r_T^3} \right) r_T = 2\pi\sigma_0 \frac{1}{a^2} \frac{2V}{1/a^2 - 1/b^2}$$

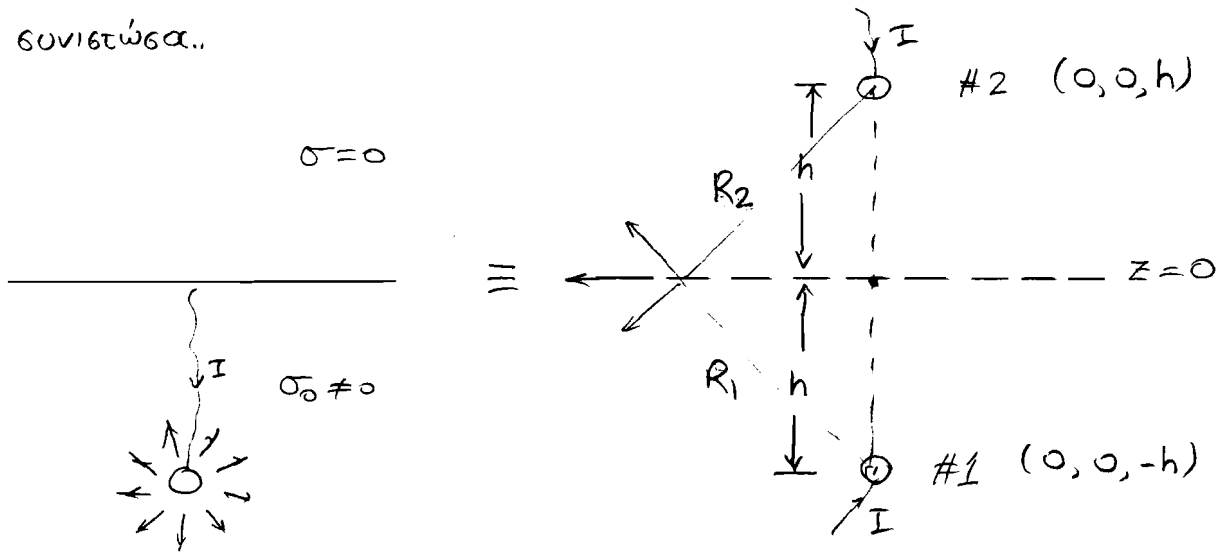
Επομένως η αριστερά ανά μονάδα μήκους είναι:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\cancel{V}}{4\pi\sigma_0 \frac{1}{a^2} \frac{\cancel{V}}{1/a^2 - 1/b^2}} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \left( \frac{1/a^2 - 1/b^2}{1/a^2} \right) = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 4:**



(α) Η πυκνότητα ρεύματος στο επίπεδο  $z=0$  δεν πρέπει να έχει  $z$  συνιστώσα..



$$\vec{J}_1 = \frac{I}{4\pi R_1^2} \hat{r}_1$$

$$\vec{J}_2 = \frac{I}{4\pi R_2^2} \hat{r}_2$$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \text{ και στο } z=0 \quad \vec{J} = \frac{I}{4\pi R^2} (\hat{r}_1 + \hat{r}_2)$$

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z-h)\hat{i}_z}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}}$$

$$\hat{r}_2 = \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z+h)\hat{i}_z}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{1/2}}$$

$$z=0 \quad R_1 = R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} = R, \quad \hat{r}_1 = \frac{1}{R} [x\hat{i}_x + y\hat{i}_y - h\hat{i}_z]$$

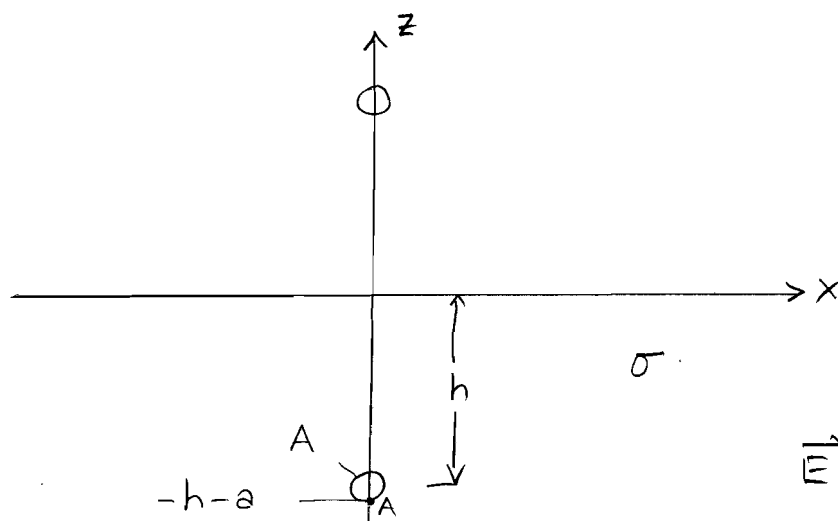
$$\hat{r}_2 = \frac{1}{r} [x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + h\hat{i}_z]. \text{ Επομένως } \hat{r}_1 + \hat{r}_2 = 2 \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y}{r}$$

Επομένως για  $z < 0$ :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \frac{I}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{R_2^2} \hat{r}_2 \right) = \\ &= \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z-h)\hat{i}_z}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z+h)\hat{i}_z}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Για  $z > 0$ ,  $J = 0$ .

(β)



$$\vec{E} = \frac{I}{b}$$

$$V_A - V_{-\infty} = - \int_A^{-\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$\underset{0}{V_A} - \underset{0}{V_{-\infty}}$

(οποιοδήποτε διασπομή λόγω του αστεροβιάνου είναι ανόθετη).

διαλέγουμε την διασπομή  $A \rightarrow -\infty$ .

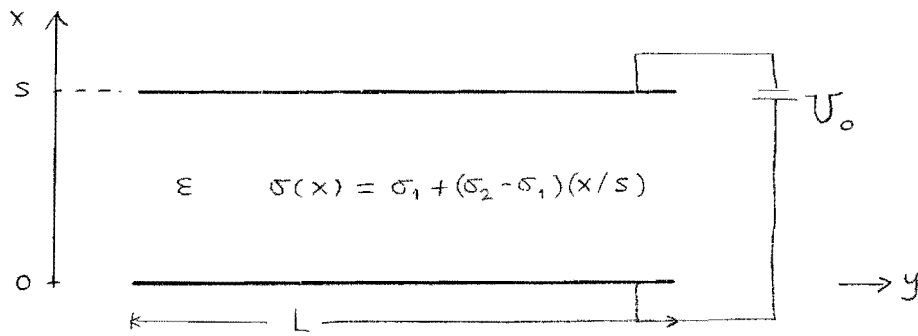
$$V_A - 0 = - \int_{z=-h-a}^{-\infty} \vec{E} \cdot \hat{i}_z dz = - \int_{-h-a}^{-\infty} E_z(z) dz$$

$$E_z(z) = \frac{I}{4\pi\sigma} \left[ \frac{1}{(z-h)^2} + \frac{1}{(z+h)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
V_A &= -\frac{I}{4\pi\sigma} \int_{-\infty}^{-\infty} \left( \frac{1}{(z-h)^2} + \frac{1}{(z+h)^2} \right) dz = \\
&= \frac{I}{4\pi\sigma} \int_{-\infty}^{-\infty} \left[ \frac{1}{(z-h)^2} + \frac{1}{(z+h)^2} \right] dz = \\
&= \frac{I}{4\pi\sigma} \left[ \left( -\frac{1}{z-h} \right)_{-\infty}^{-(h+a)} + \left( -\frac{1}{z+h} \right)_{-\infty}^{-(h+a)} \right] \\
&= \frac{I}{4\pi\sigma} \left[ \frac{1}{2h+a} + \frac{1}{a} \right]
\end{aligned}$$

$$R = \frac{V_A}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[ \frac{1}{2h+a} + \frac{1}{a} \right]$$

## ΑΣΚΗΣΗ 5:



$$(\alpha) \quad \left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 &\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\sigma(x) \vec{E}) = 0 \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi \end{aligned} \right\} \vec{\nabla} \cdot (\sigma(x) (-\vec{\nabla} \Phi)) = 0$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \left[ \sigma(x) \frac{d\Phi}{dx} \hat{i}_x \right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ \sigma(x) \frac{d\Phi}{dx} \right] = 0$$

$$\sigma(x) \frac{d\Phi}{dx} = A \Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{A}{\sigma(x)} = \frac{A}{\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s}} \Rightarrow$$

$$\Phi(x) = \frac{s}{\sigma_2 - \sigma_1} A \ln \left[ \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s} \right] + B$$

$$\Phi(0) - \Phi(s) = U = \frac{s}{\sigma_2 - \sigma_1} A \ln[\sigma_1] + B - \frac{s}{\sigma_2 - \sigma_1} A \ln(\sigma_2) - B$$

$$A \frac{s}{\sigma_2 - \sigma_1} \ln(\sigma_1/\sigma_2) = U \Rightarrow A = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s} \frac{U}{\ln(\sigma_1/\sigma_2)}$$

Επομένως  $\Phi(x) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s} \frac{s}{\sigma_2 - \sigma_1} \frac{U}{\ln(\sigma_1/\sigma_2)} \ln \left[ \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s} \right] + B$

$$\rightarrow \Phi(x) = - \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \ln \left[ \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s} \right] + B, \text{ Αλλά } \Phi(s) = 0 \rightarrow$$

$$B = \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \ln \sigma_2 \rightarrow \Phi(x) = - \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \ln \left[ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \left(\frac{x}{s}\right) \right]$$

$$(\beta) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi = - \frac{d\Phi}{dx} \hat{i}_x = \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \frac{1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \frac{x}{s}} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \frac{1}{s} \hat{i}_x =$$

$$= \hat{i}_x \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \frac{1}{\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)(x/s)} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s}$$

$$(\gamma) \quad \vec{J} = \sigma(x) \vec{E} = \hat{i}_x \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s} \right)$$

$$(\delta) \quad R = \frac{U}{I} \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint \hat{i}_x J_0 \cdot \hat{i}_x dy dz = J_0 L d$$

Επομένως  $R = \frac{\sigma}{\frac{\sigma}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s}\right) Ld} = \frac{s \ln(\sigma_2/\sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1) Ld}$

$$(\epsilon) \quad \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \frac{dE}{dx} = \epsilon \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s} \cdot \frac{-1}{\left(\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s}\right)^2} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \rho(x) = - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s}\right)^2 \frac{\epsilon U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \cdot \frac{1}{\left[\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s}\right]^2} = \frac{-\rho_0}{\left(\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s}\right)^2}$$

$$q = \int \rho(x) dV = \iiint \rho(x) dx dy dz =$$

$$= Ld \int_0^s \rho(x) dx = Ld \int_0^s \frac{-\rho_0}{\left(\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s}\right)^2} dx$$

$$= -\rho_0 Ld \frac{s}{\sigma_2 - \sigma_1} \left[ -\frac{1}{\left(\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{x}{s}\right)} \right]_0^s =$$

$$= \rho_0 Ld \frac{s}{\sigma_2 - \sigma_1} \left[ \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right] = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s}\right) \frac{U\epsilon}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} Ld \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}\right)$$

$$\sigma(x=0) = \hat{i}_x \cdot (\vec{D} - 0) = \hat{i}_x \cdot \epsilon \hat{i}_x E(0) =$$

$$= \epsilon \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s} = \frac{\epsilon}{\sigma_1} \frac{U(\sigma_2 - \sigma_1)}{s \ln(\sigma_2/\sigma_1)}$$

$$\sigma(x=s) = -\hat{i}_x \cdot (\vec{D} - 0) = -\hat{i}_x \cdot \epsilon \hat{i}_x E(s) =$$

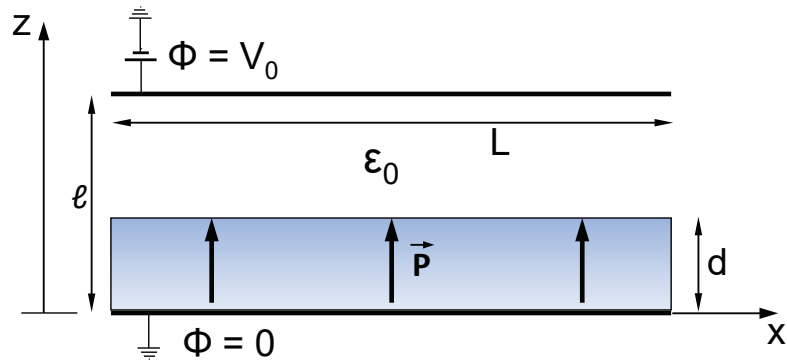
$$= -\epsilon \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \frac{1}{\sigma_2} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{s} = -\frac{\epsilon}{\sigma_2} \frac{U(\sigma_2 - \sigma_1)}{s \ln(\sigma_2/\sigma_1)}$$

Ολικό επιφανειακό φορτίο:

$$\sigma_{ολ} = [\sigma(x=0) + \sigma(x=s)] Ld =$$

$$= \frac{U(\sigma_2 - \sigma_1)}{s \ln(\sigma_2/\sigma_1)} \epsilon \left[ \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} \right] Ld = -q$$

## ΑΣΚΗΣΗ 6:



**Σχήμα 1:** Πυκνωτής παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη μεταβλητής πόλωσης.

(α) Εφόσον δεν υπάρχουν ελεύθερα χωρικά φορτία στην πλάκα του ηλεκτρίτη ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \implies \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \implies \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \implies \\ \nabla^2 \Phi_1 &= \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2P_0 z}{d^2} \implies \\ \Phi_1(z) &= \frac{P_0}{\epsilon_0 d^2} \frac{z^3}{3} + C_1 z + C_2,\end{aligned}$$

όπου  $\Phi_1(z)$  είναι το δυναμικό στην περιοχή του ηλεκτρίτου ( $0 \leq z \leq d$ ). Το δυναμικό στον αέρα,  $\Phi_2(z)$ , ( $d \leq z \leq l$ ) δίδεται από την εξίσωση:

$$\Phi_2(z) = C_3 z + C_4.$$

Για να βρεθούν οι άγνωστοι συντελεστές πρέπει να ικανοποιούνται όλες οι οριακές συνθήκες. Αυτές είναι οι ακόλουθες:

$$\Phi_1(z=0) = 0 \implies C_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(z = \ell) &= V_0 \implies C_3\ell + C_4 = V_0, \\ \Phi_1(z = d) &= \Phi_2(z = d) \implies \frac{P_0 d^2}{\epsilon_0 3} + C_1 d = C_3 d + C_4, \\ D_{2z} - D_{1z} &= 0 \implies \epsilon_0(-C_3) - [\epsilon_0(-\frac{P_0}{\epsilon_0} - C_1) + P_0].\end{aligned}$$

Επιλύοντας το σύστημα των ανωτέρω εξισώσεων βρίσκουμε τις ακόλουθες τιμές των αγνώστων συντελεστών:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1}{\ell} \left( V_0 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3} \right), \\ C_2 &= 0, \\ C_3 &= \frac{1}{\ell} \left( V_0 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3} \right), \\ C_4 &= \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3}.\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας το ηλεκτρικό δυναμικό δίδεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \frac{P_0 z^3}{\epsilon_0 3d^2} + \frac{1}{\ell} \left( V_0 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3} \right) z, \\ \Phi_2(z) &= \frac{1}{\ell} \left( V_0 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3} \right) z + \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3}.\end{aligned}$$

(β) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι της μορφής  $\vec{E} = -(d\Phi/dz)\hat{i}_z$  και επομένως στις περιοχές 1 (ηλεκτρίτης) και 2 (αέρας) δίδεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(z) &= - \left[ \frac{P_0 z^2}{\epsilon_0 d^2} + \frac{1}{\ell} \left( V_0 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3} \right) \right] \hat{i}_z, \\ \vec{E}_2(z) &= - \left[ \frac{1}{\ell} \left( V_0 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3} \right) \right] \hat{i}_z.\end{aligned}$$

(γ) Τα δέσμια φορτία δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\rho_b(z) &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -P_0 \frac{2z}{d^2}, \\ \sigma_b(z = 0^+) &= (-\vec{i}_z) \cdot \vec{P}(z = 0^+) = 0, \\ \sigma_b(z = d^-) &= (+\vec{i}_z) \cdot \vec{P}(z = d^-) = P_0.\end{aligned}$$

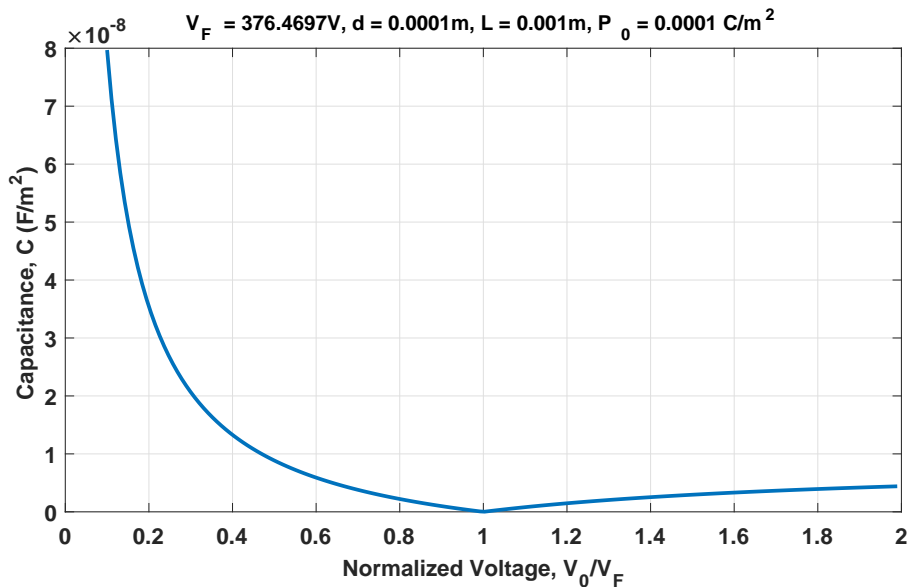
Τα ελεύθερα φορτία δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\sigma(z=0) &= (+\vec{i}_z) \cdot \vec{D}_1(z=0) = -\epsilon_0 \frac{1}{\ell} \left( V_0 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3} \right), \\ \sigma(z=\ell) &= (-\vec{i}_z) \cdot \vec{D}_2(z=\ell) = \epsilon_0 \frac{1}{\ell} \left( V_0 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3} \right).\end{aligned}$$

(δ) Η χωρητικότητα  $C$  (ανά μονάδα επιφάνειας) δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

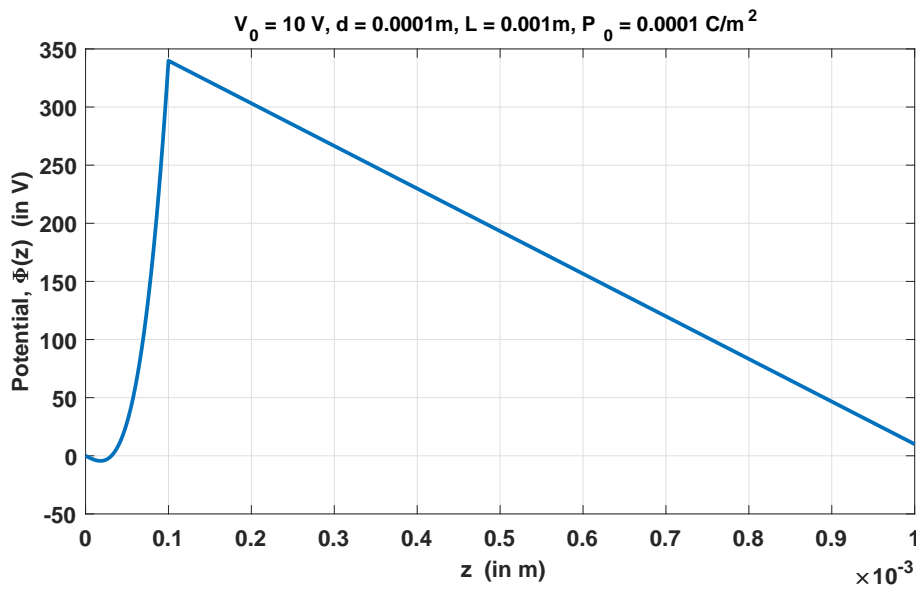
$$C = \frac{|\sigma(z=\ell)|LW}{V_0} = \epsilon_0 \frac{LW}{\ell} \left| 1 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3 V_0} \right|.$$

Παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα είναι μη γραμμική και μηδενίζεται για  $V_0 = V_F = P_0 d / 3\epsilon_0$ .

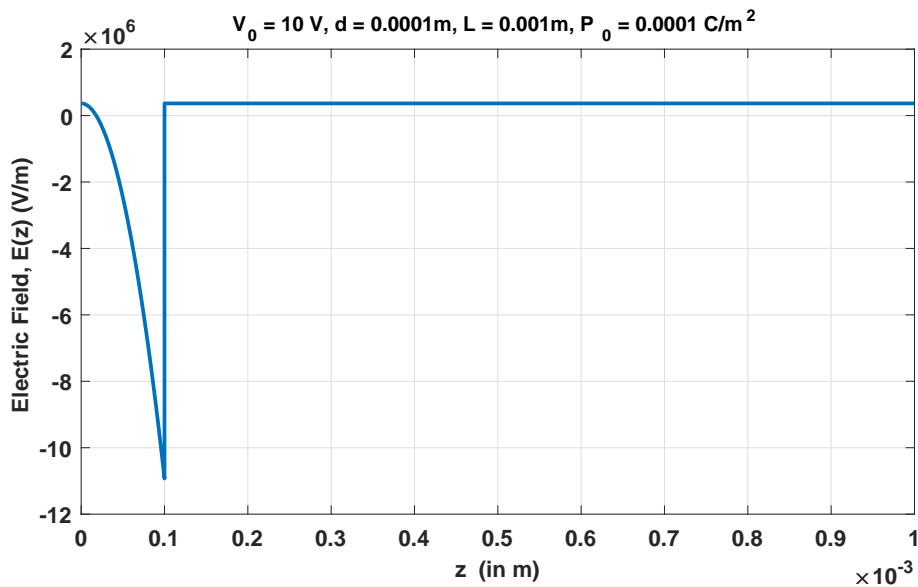


**Σχήμα 2:** Η χωρητικότητα  $C$  (ανά μονάδα επιφάνειας) του πυκνωτή παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη (μεταβλητής πόλωσης) σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης διαφοράς δυναμικού  $V_0/V_F$ . Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $P_0 = 10^{-4} C/m^2$ ,  $d = 100 \mu m$ , και  $\ell = 1 mm$ .

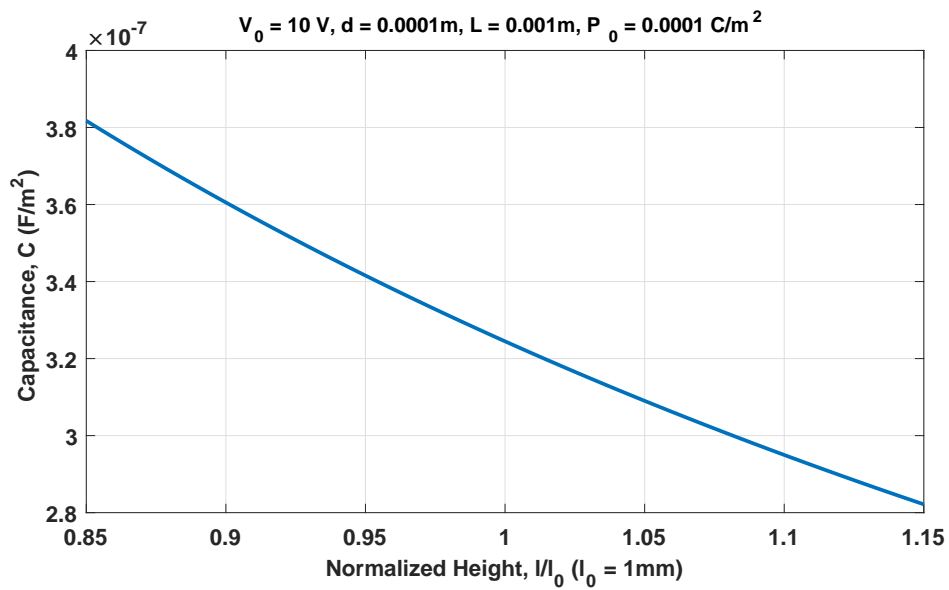
(ε) Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτό το ερώτημα είναι  $P_0 = 10^{-4} C/m^2$ ,  $d = 100 \mu m$ ,  $\ell = 1 mm$ , και  $V_0 = 10 V$ .



**Σχήμα 3:** Το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi(z)$  του πυκνωτή παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη (μεταβλητής πόλωσης) σαν συνάρτηση της απόστασης  $z$ . Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $P_0 = 10^{-4} \text{ C/m}^2$ ,  $d = 100 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 1 \text{ mm}$ , και  $V_0 = 10 \text{ V}$ .



**Σχήμα 4:** Το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}(z)$  του πυκνωτή παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη (μεταβλητής πόλωσης) σαν συνάρτηση της απόστασης  $z$ . Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $P_0 = 10^{-4} \text{ C/m}^2$ ,  $d = 100 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 1 \text{ mm}$ , και  $V_0 = 10 \text{ V}$ .



**Σχήμα 5:** Η χωρητικότητα  $C$  (ανά μονάδα επιφάνειας) του πυκνωτή παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη (μεταβλητής πόλωσης) σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης απόστασης  $l/l_0$ . Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι  $P_0 = 10^{-4} \text{ C/m}^2$ ,  $d = 100 \mu\text{m}$ ,  $l_0 = 1 \text{ mm}$ , και  $V_0 = 10 \text{ V}$ .