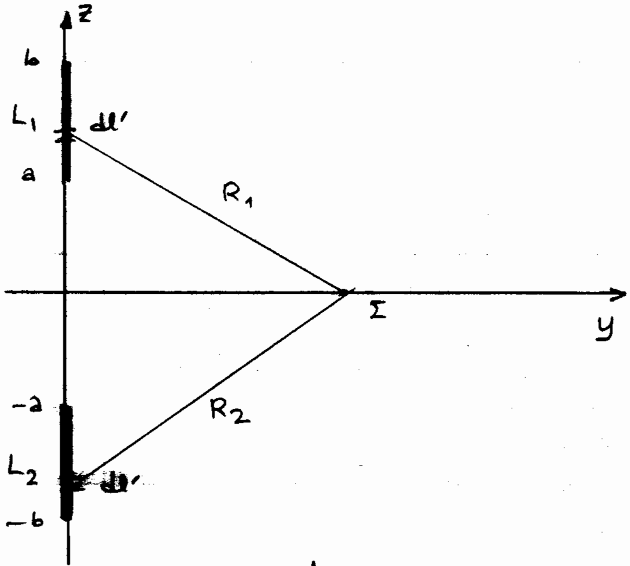
ΑΣΚΗΣΗ 1:



(a) Εστω σημείο Σ πάνω στόν άξονα των y. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας

$$\Phi = \int_{L_1} \frac{\lambda\, dl'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \int_{L_2} \frac{\lambda\, dl'}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$R_1 = \sqrt{y^2+z'^2} \qquad a \le z' \le b$$

$$R_2 = \sqrt{y^2+z'^2} \qquad -b \le z' \le -a$$

Οπότε
$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_a^b \frac{1}{(y^2+z'^2)^{1/2}}\,dz' + \int_{-b}^{-a} \frac{1}{(y^2+z'^2)^{1/2}}\,dz'\right]$$

$$\int \frac{1}{(y^2+z'^2)^{1/2}}\,dz' = \ln\left[z' + \sqrt{y^2+z'^2}\right]$$

Επομένως:

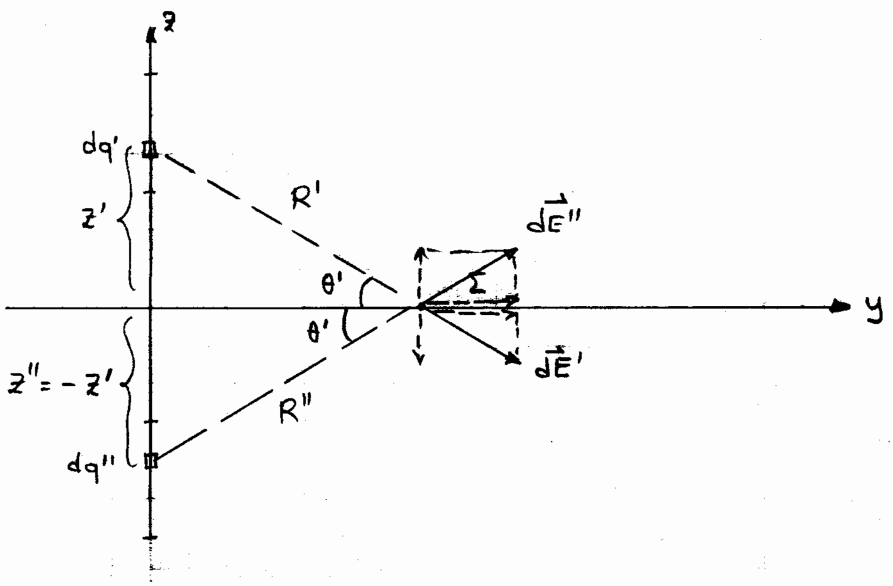
$$\Phi(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(\frac{b+(b^2+y^2)^{1/2}}{a+(a^2+y^2)^{1/2}}\right) + \ln\left(\frac{-a+(a^2+y^2)^{1/2}}{-b+(b^2+y^2)^{1/2}}\right)\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{(b+\sqrt{b^2+y^2})(\sqrt{y^2+a^2}-a)}{(\sqrt{b^2+y^2}-b)(\sqrt{a^2+y^2}+a)}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\cdot\ln\left\{\frac{y^2\cdot y^2}{(\sqrt{b^2+y^2}-b)^2(\sqrt{a^2+y^2}+a)^2}\right\} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left\{\frac{y^2}{(\sqrt{y^2+b^2}-b)(\sqrt{y^2+a^2}+a)}\right\}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί από την σχέση $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{i}_y$. Εν τούτοις η παραγώγιση δεν είναι ο ευκολότερος τρόπος. Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί άμεσα χρησιμοποιώντας και πάλι την αρχή της επαλληλίας και συμμετρία.



$$d\vec{E}' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(R')^2}\left(\hat{i}_y\cos\theta' - \hat{i}_z\sin\theta'\right) \qquad R' = \sqrt{y^2 + z'^2}$$

$$d\vec{E}'' = \frac{dq''}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(R'')^2}\left(\hat{i}_y\cos\theta' + \hat{i}_z\sin\theta'\right) \qquad R'' = R'$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}' + d\vec{E}'' = \frac{\lambda\, dz'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(R')^2}\,2\cos\theta' \qquad \cos\theta' = \frac{y}{\sqrt{y^2+z'^2}}$$

Οπότε $$d\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{y}{(y^2+z'^2)^{3/2}}\,dz' \Rightarrow$$

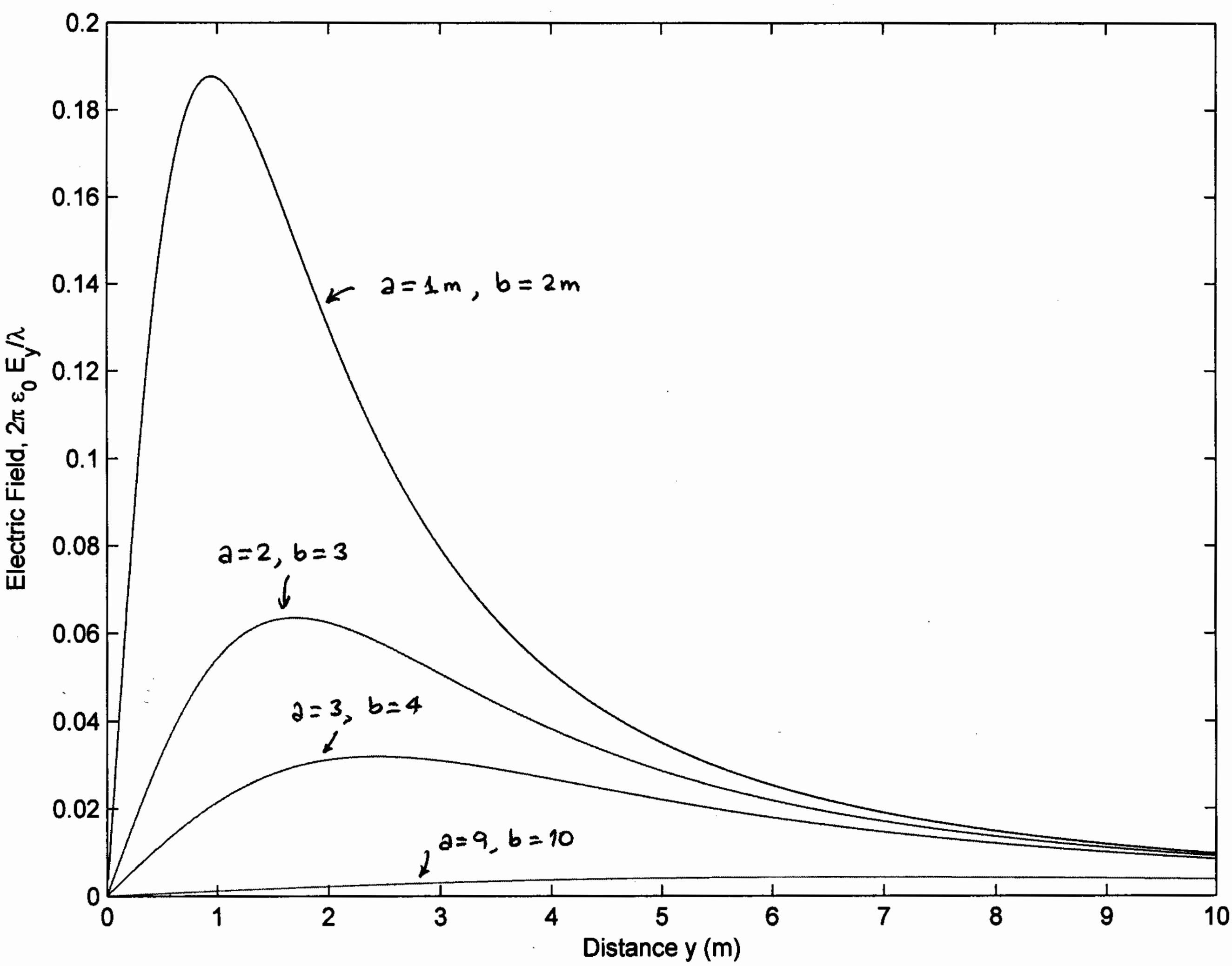
$$\vec{E} = \hat{i}_y\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,y\int_a^b \frac{1}{(y^2+z'^2)^{3/2}}\,dz' \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \hat{i}_y\,\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{y}\cdot\left[\frac{b}{\sqrt{y^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}\right]$$

(b) Στην περίπτωση των ετερόσημων λ η ίδια μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοσθεί. Η μόνη διαφορά είναι ότι για το τμήμα $(-b,-a)$ L_2 το λ θα αντικατασταθεί από το $-\lambda$. Τότε το δυναμικό Φ δίδεται από την σχέση

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_a^b \frac{1}{(y^2+z'^2)^{3/2}}\,dz' - \int_{-b}^{-a}\frac{1}{(y^2+z'^2)^{3/2}}\,dz'\right) =$$

σχήμα λ


Electric Field, $2\pi\varepsilon_0 E_y/\lambda$
Distance y (m)
a=1m, b=2m
a=2, b=3
a=3, b=4
a=9, b=10

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left\{ \frac{(\sqrt{y^2+b^2}+b)(\sqrt{y^2+b^2}-b)}{(\sqrt{y^2+a^2}+a)(\sqrt{y^2+a^2}-a)} \right\} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\ln\left\{\frac{y^2}{y^2}\right\} = 0$$

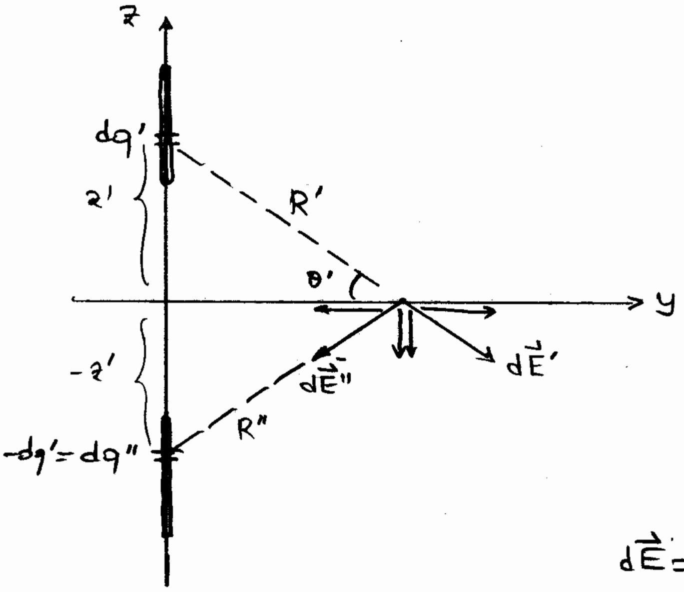
Αυτό αναμενόταν λόγω της συμμετρίας. Βέβαια σ' αυτή την περίπτωση το πεδίο για να βρεθεί με την σχέση $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ θα πρέπει να εκφράσουμε το Φ για τυχαίο z και αφού βρούμε τις παραγώγους να πάρουμε τα σημεία πάνω στον άξονα y $(z=0)$.

Δηλαδή $R_1 = [y^2+(z-z')^2]^{1/2}$, $a \le z' \le b$ και $R_2 = [y^2+(z-z')^2]^{1/2}$, $-b \le z' \le -a$

Τότε $$\Phi(y,z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_a^b \frac{dz'}{[y^2+(z-z')^2]^{1/2}} - \int_{-b}^{-a}\frac{dz'}{[y^2+(z-z')^2]^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\cdot \ln\left\{\frac{z-a+\sqrt{y^2+(z-a)^2}}{z-b+\sqrt{y^2+(z-b)^2}} \; \frac{z+a+\sqrt{y^2+(z+a)^2}}{z+b+\sqrt{y^2+(z+b)^2}}\right\}$$

Οπότε $\vec{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{i}_y - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{i}_z$ και για σημεία στον άξονα των y $z=0$. Εν τούτοις είναι και πάλι ευκολότερο να βρούμε απ' ευθείας το ηλεκτρικό πεδίο με την αρχή της επαλληλίας.



$$d\vec{E}' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(R')^2}(\hat{i}_y\cos\theta' - \hat{i}_z\sin\theta')$$

$$d\vec{E}'' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(R'')^2}(-\hat{i}_y\cos\theta' - \hat{i}_z\sin\theta')$$

Οπότε

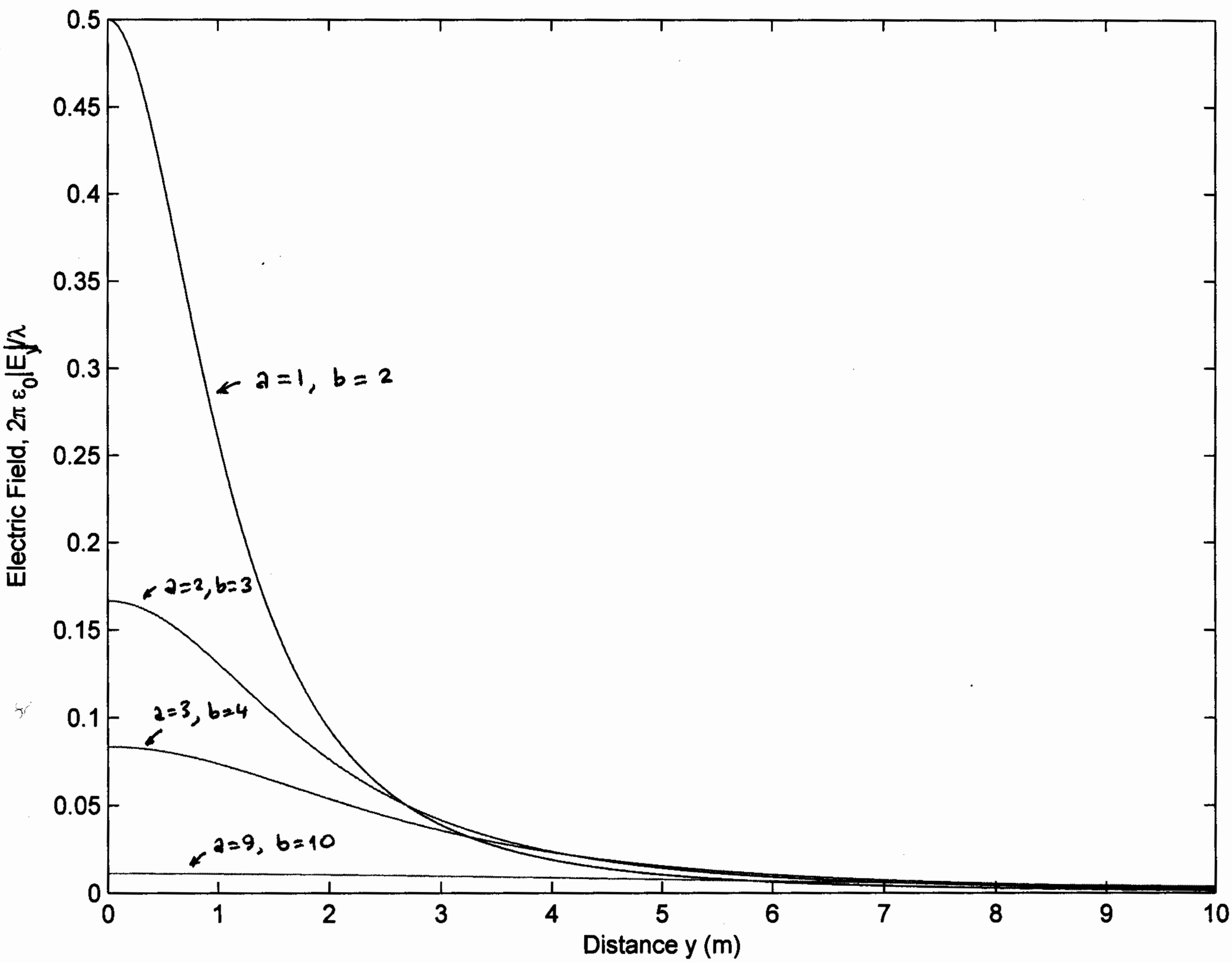
$$d\vec{E} = \frac{\lambda\, dz'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(y^2+z'^2)}(-2\sin\theta')\hat{i}_z$$

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^2+z'^2}\frac{z'}{(y^2+z'^2)^{1/2}}dz'(-\hat{i}_z)$$

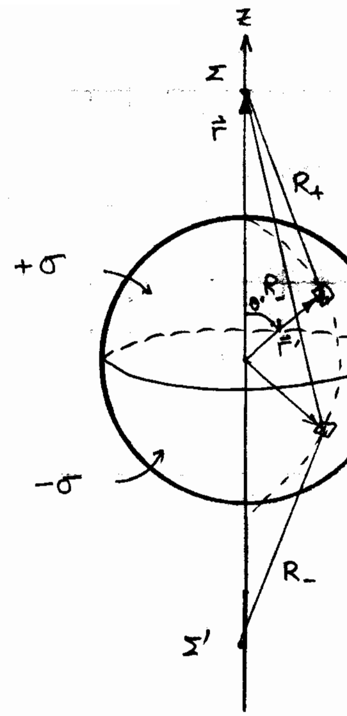
Οπότε $$\vec{E} = -\hat{i}_z \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{z'\,dz'}{(y^2+z'^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -\hat{i}_z \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+b^2}}\right]$$

Ετερόσημα λ



ΑΣΚΗΣΗ 2:



Το δυναμικό μπορεί να βρεθεί με την αρχή της επαλληλίας:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{\theta'=0}^{\pi/2}\int_{\phi'=0}^{2\pi}\frac{\sigma\, dS'}{R_+} - \int_{\theta'=\pi/2}^{\pi}\int_{\phi'=0}^{2\pi}\frac{\sigma\, dS'}{R_-}\right]$$

$$dS' = a^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'$$

$$R^2 = \left[r^2 + r'^2 - 2rr'\left(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\right)\right]$$

$r = z \quad (z \geq 0) \quad \theta = 0$

$r = -z \quad (z \leq 0) \quad \theta = 0$

$r' = a$

$$R_+ = (z^2 + a^2 - 2az\cos\theta')^{1/2} \quad (0 \leq \theta' \leq \pi/2 \quad z \geq 0)$$

$$R_- = (z^2 + a^2 - 2az\cos\theta')^{1/2} \quad (\pi/2 \leq \theta' \leq \pi \quad z \geq 0)$$

Για αρνητικά z

$$R_+ = \left[z^2 + a^2 - 2a|z|\cos(\pi-\theta')\right]^{1/2} = (z^2 + a^2 - 2az\cos\theta')^{1/2} \quad 0 \leq \theta' \leq \pi/2$$

όμοια και R_- αλλά με $\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \pi$

Επομένως

$$\Phi = \frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{\theta'=0}^{\pi/2}\frac{\sin\theta'\, d\theta'}{(z^2+a^2-2az\cos\theta')^{1/2}} - \frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{0}^{2\pi} d\phi' \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin\theta'\, d\theta'}{(z^2+a^2-2az\cos\theta')^{1/2}}$$

Αλλά

$$\int \frac{\sin\theta'\, d\theta'}{(z^2+a^2-2az\cos\theta')^{1/2}} = \frac{\sqrt{z^2+a^2-2az\cos\theta'}}{az}$$

Επομένως

$$\Phi = \frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \frac{1}{az}\left\{\sqrt{a^2+z^2} - |z-a|\right\} -$$

$$\frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \frac{1}{az}\left\{|z+a| - \sqrt{a^2+z^2}\right\} \Rightarrow$$

$$\Phi(z) = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0}\frac{1}{z}\left\{2\sqrt{a^2+z^2} - \left(|z-a|+|z+a|\right)\right\}$$

Επομένως διακρίνοντας περιπτώσεις έχουμε

$$\Phi(z) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}\begin{cases}\left(\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z}+1\right) & z \leq -a \\ \left(\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z}-\frac{a}{z}\right) & -a \leq z \leq a \\ \left(\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z}-1\right) & z \geq a\end{cases}$$

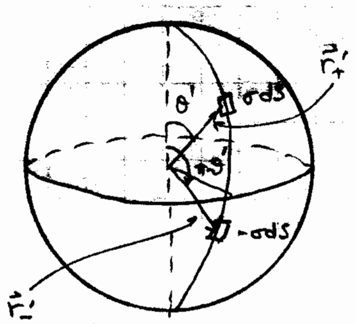
Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση $\vec{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{i}_z$

Επομένως

$$\vec{E} = \begin{cases}\frac{\sigma a^3}{\epsilon_0}\frac{1}{z^2\sqrt{z^2+a^2}}\hat{i}_z & z \leq -a \\ \frac{\sigma a^3}{\epsilon_0}\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)\hat{i}_z & -a \leq z \leq a \\ \frac{\sigma a^3}{\epsilon_0}\frac{1}{z^2\sqrt{z^2+a^2}}\hat{i}_z & z \geq a\end{cases}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $D_{1z}\big|_{z=a} - D_{2z}\big|_{z=a} = \sigma$

όπου $D_{1z} = \epsilon_0 E(z=a+)$ και $D_{2z} = \epsilon_0 E(z=a-)$



Η διπολική ροπή μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$\vec{p} = \int_{S'}\vec{r}'dq = \int \sigma dS'(\vec{r}_+' - \vec{r}_-')$$

$$\vec{r}_+' = a\left[\sin\theta'\cos\varphi'\,\hat{i}_x + \sin\theta'\sin\varphi'\,\hat{i}_y + \cos\theta'\,\hat{i}_z\right]$$

$$\vec{r}_-' = a\left[\sin(\pi+\theta')\cos\varphi'\,\hat{i}_x + \sin(\pi-\theta')\sin\varphi'\,\hat{i}_y + \cos(\pi-\theta')\hat{i}_z\right]$$

οπότε $\vec{r}_+' - \vec{r}_-' = 2a\cos\theta'\,\hat{i}_z$

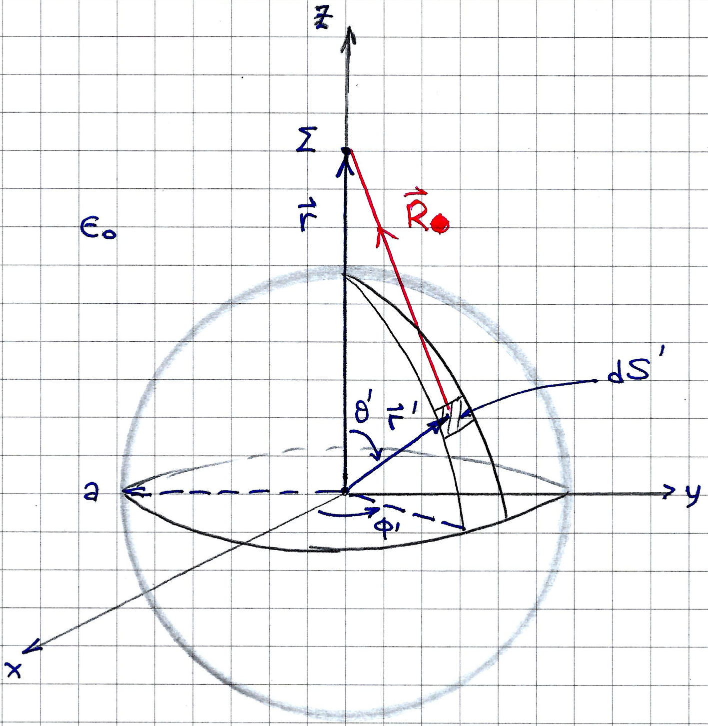
Επομένως $\vec{p} = \int_{\theta'=0}^{\pi/2} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \sigma\, a^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi' \,(2a\cos\theta')\, \hat{\imath}_z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{p} = \sigma a^3\, 2\pi \left(\int_{\theta'=0}^{\pi/2} 2\sin\theta' \cos\theta' \, d\theta' \right) \hat{\imath}_z = \sigma a^3\, 2\pi \left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta' \right)_0^{\pi/2} \hat{\imath}_z$$

$$= 2\pi\sigma a^3 \; \hat{\imath}_z$$

ΑΣΚΗΣΗ 2: (απλούστερη λύση για το δυναμικό)

$$\sigma(\theta') = \begin{cases} +\sigma & 0 \le \theta \le \pi/2 \\ -\sigma & \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$



$$\vec{r} = z\,\hat{i}_z$$

$$\vec{r}' = a\,\hat{i}_{r'} = a\,[\cos\phi'\sin\theta'\,\hat{i}_x + \sin\phi'\sin\theta'\,\hat{i}_y + \cos\theta'\,\hat{i}_z]$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = -a\cos\phi'\sin\theta'\,\hat{i}_x - a\sin\phi'\sin\theta'\,\hat{i}_y + (z - a\cos\theta')\,\hat{i}_z$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = [a^2 + z^2 - 2az\cos\theta']^{1/2}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\varphi\int_\theta \frac{\sigma(\theta')\,dS'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{+\sigma\, a^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'}{[z^2+a^2-2za\cos\theta']^{1/2}}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \frac{-\sigma\, a^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'}{[z^2+a^2-2za\cos\theta']^{1/2}} =$$

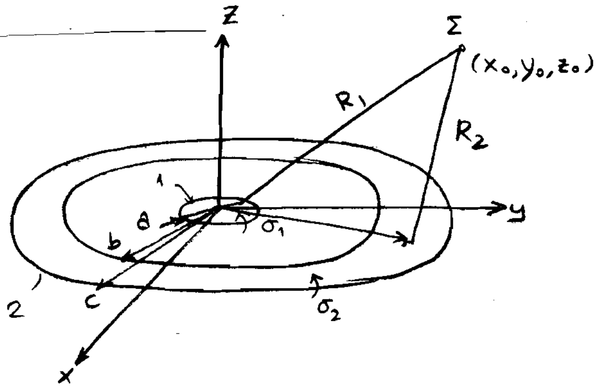
$$= \frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0}2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta'\,d\theta'}{[z^2+a^2-2za\cos\theta']^{1/2}} - \frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0}2\pi\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin\theta'\,d\theta'}{[z^2+a^2-2za\cos\theta']^{1/2}}$$

Όμως:
$$\int\frac{\sin\theta'\,d\theta'}{[z^2+a^2-2za\cos\theta']^{1/2}} = \frac{[z^2+a^2-2za\cos\theta']^{1/2}}{az}$$

Επομένως,
$$\Phi(z) = \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0}\left\{\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{az} - \frac{|z-a|}{az}\right\} - \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0}\left\{\frac{|z+a|}{az} - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{az}\right\}$$

$$= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0}\frac{1}{z}\left\{2\sqrt{z^2+a^2} - |z-a| - |z+a|\right\} \quad \forall z$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:



(α) $$\Phi(x_o,y_o,z_o) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\int_1 \frac{dq_1}{R_1} + \int_2 \frac{dq_2}{R_2}\right)$$

$R_1 = \left[(x'-x_o)^2 + (y'-y_o)^2 + z_o^2\right]^{1/2}$ (παρόμοιο και το R_2)

$dq_1 = \sigma_1 r_T' dr_T' d\varphi'$ $\quad dq_2 = \sigma_2 r_T' dr_T' d\varphi'$

$R_1 = \left[r_{To}^2 + r_T'^2 - 2r_{To}r_T'\cos(\phi_o - \phi') + z_o^2\right]^{1/2}$ $\quad r_{To} = \sqrt{x_o^2+y_o^2}$

Επομένως, $\quad \varphi_o = \tan^{-1}(y_o/x_o)$

$$\Phi(x_o,y_o,z_o) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left\{\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\sigma_1 r_T' dr_T' d\varphi'}{\left[r_{To}^2 + r_T'^2 - 2r_{To}r_T'\cos(\varphi'-\varphi_o) + z_o^2\right]^{1/2}} + \int_b^c\int_0^{2\pi} \frac{\sigma_2 r_T' dr_T' d\varphi'}{\left[r_{To}^2 + r_T'^2 - 2r_{To}r_T'\cos(\varphi'-\varphi_o) + z_o^2\right]^{1/2}}\right\}$$

(β) $\Phi(0,0,z_o) = \Phi_1 + \Phi_2$

$$\Phi_1(0,0,z_o) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} 2\pi \int_0^a \frac{\sigma_1 r_T' dr_T'}{\sqrt{r_T'^2 + z_o^2}} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_o}\left[\sqrt{z_o^2 + r_T'^2}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\sigma_1}{2\epsilon_o}\left[\sqrt{z_o^2 + a^2} - |z_o|\right]$$

$$\Phi_2(0,0,z_o) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} 2\pi \int_b^c \frac{\sigma_2 r_T' dr_T'}{\sqrt{z_o^2 + r_T'^2}} = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_o}\left[\sqrt{z_o^2 + c^2} - \sqrt{z_o^2 + b^2}\right]$$

(γ) $$\Phi(0,0,0) = \frac{\sigma_1}{\cancel{2\epsilon_o}} a + \frac{\sigma_2}{\cancel{2\epsilon_o}}\left[c - b\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_1 a = -\sigma_2(c-b)$$

Ολικά φορτία:

$$q_1 = \sigma_1 \pi a^2$$

$$q_2 = \sigma_2 \pi (c^2 - b^2)$$

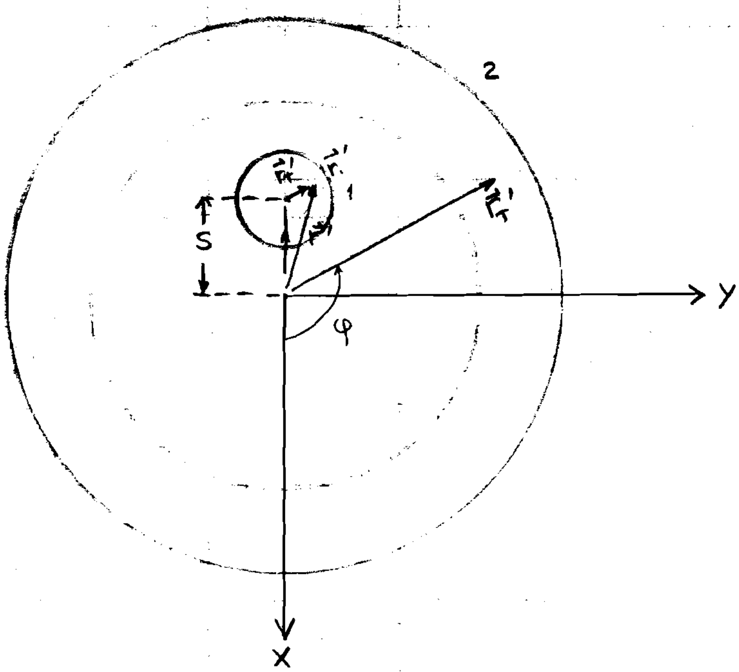
$$q_2 = \sigma_2 \pi (c^2-b^2) = \sigma_2 (c-b)\pi(c+b) = -\sigma_1 a \pi (c+b) =$$
$$= -\sigma_1 a^2 \pi \frac{c+b}{a} = -q_1\left(\frac{c+b}{a}\right)$$

$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{a}{c+b}$$

(δ)

$q_1 = -q_2 \Rightarrow$

$\underbrace{\sigma_1 \pi a^2}_{q} = \underbrace{-\sigma_2 \pi (c^2-b^2)}_{-q}$



$$\vec{p} = \int \vec{r}'\,dq = \int_1 \vec{r}'\,dq + \int_2 \vec{r}'\,dq$$

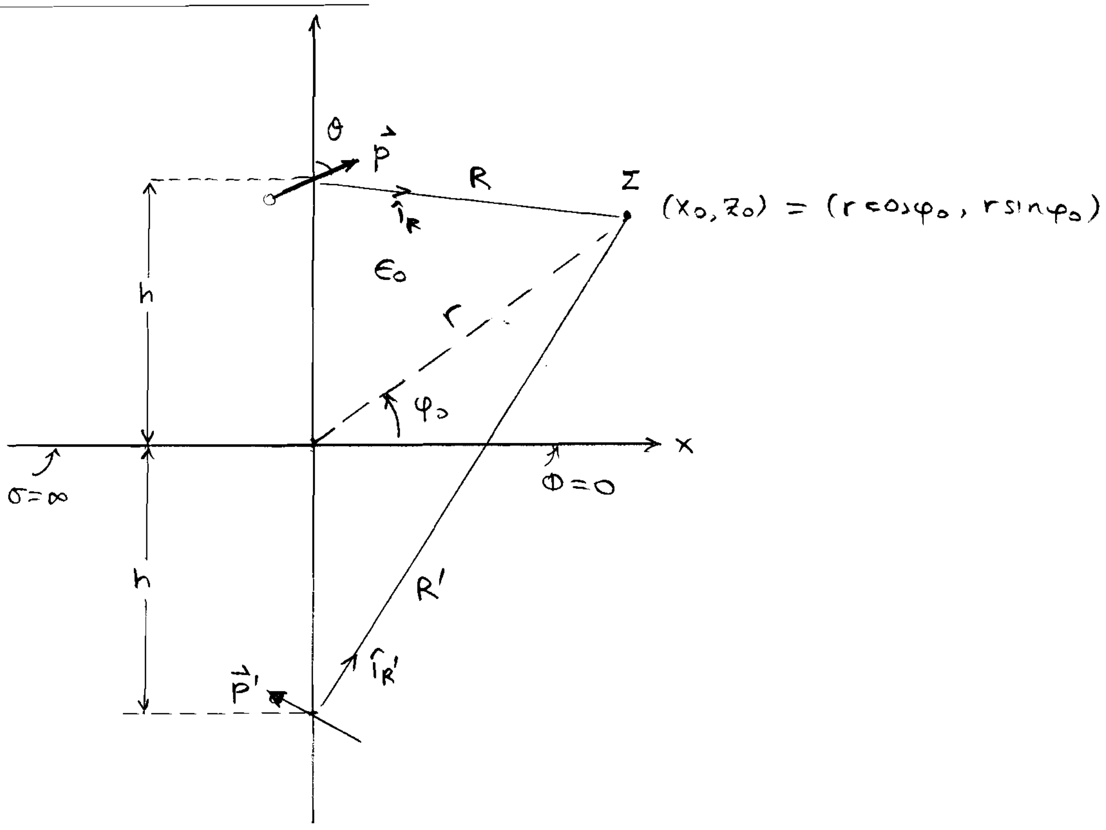
$$\int_2 \vec{r}_T'\,dq = \int_0^{2\pi}\int_b^c (\hat{i}_x \cos\varphi + \hat{i}_y \sin\varphi)\, r_T'\, \sigma_2\, r_T'\, dr_T'\, d\varphi' = 0$$

$$\int_1 \vec{r}'\,dq = \int_0^{2\pi}\int_0^a \underbrace{(-s\hat{i}_x + \vec{r}_T')}_{\vec{r}'}\, \sigma_1\, r_T'\, dr_T'\, d\varphi' = -s\hat{i}_x \iint \sigma_1 r_T'\, dr_T'\, d\varphi +$$

$$\iint \underbrace{\vec{r}_T'\, \sigma_1\, r_T'\, dr_T'\, d\varphi}_{0} = -s\hat{i}_x(\sigma_1 \pi a^2) = -(s\sigma_1 \pi a^2)\,\hat{i}_x = -sq\,\hat{i}_x$$

όπως για το (2).

ΑΣΚΗΣΗ 4:



(a) Χρησιμοποιώντας την θεωρία του κατοπτρισμού σχηματίζουμε το είδωλο του διπόλου όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διπολική ροπή του αρχικού διπόλου και του ειδώλου του δίδονται από τις σχέσεις:

$$\vec{p} = p\left[\sin\theta\,\hat{i}_x + \cos\theta\,\hat{i}_z\right]$$

$$\vec{p}\,' = p\left[-\sin\theta\,\hat{i}_x + \cos\theta\,\hat{i}_z\right]$$

Για το τυχαίο σημείο $\Sigma\ (x_0, z_0) = (r_{T_0}\cos\varphi_0\,,\ r_{T_0}\sin\varphi_0)$

$$\Phi_T = \Phi + \Phi' = \frac{\vec{p}\cdot\hat{i}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{\vec{p}\,'\cdot\hat{i}_{R}'}{4\pi\epsilon_0 R'^2}$$

$$\hat{i}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r} - h\hat{i}_z}{R} = \frac{x_0\hat{i}_x + (z_0-h)\hat{i}_z}{R}$$

$$R = \left[x_0^2 + (z_0-h)^2\right]^{1/2} = \left[r^2 + h^2 - 2rh\sin\varphi_0\right]^{1/2}$$

$$R' = \left[x_0^2 + (z_0+h)^2\right]^{1/2} = \left[r^2 + h^2 + 2rh\sin\varphi_0\right]^{1/2}$$

$$\hat{i}_{R'} = \frac{\vec{R}'}{R'} = \frac{\vec{r} + h\hat{i}_z}{R'} = \frac{x_0\hat{i}_x + (z_0+h)\hat{i}_z}{R'}$$

$$\vec{p}\cdot\hat{i}_R = \frac{p\sin\vartheta\, x_o}{R} + \frac{p\cos\vartheta\,(z_o-h)}{R} = \frac{p}{R}\left(x_o\sin\vartheta + (z_o-h)\cos\vartheta\right)$$

$$\vec{p}'\cdot\hat{i}_R' = \frac{-p\sin\vartheta\, x_o}{R'} + \frac{p\cos\vartheta\,(z_o+h)}{R'} = \frac{p}{R'}\left(-x_o\sin\vartheta + (z_o+h)\cos\vartheta\right)$$

Άρα $\Phi(x_o, z_o) = \dfrac{p}{4\pi\epsilon_o R^3}\left[x_o\sin\vartheta + (z_o-h)\cos\vartheta\right] + \dfrac{p}{4\pi\epsilon_o R'^3}\left[-x_o\sin\vartheta + (z_o+h)\cos\vartheta\right]$

όπου R, R' έχουν ορισθεί προηγουμένως.

(β) $\sigma = \hat{i}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{z=0} = \hat{i}_z \cdot \left(\epsilon_o \vec{E} - \emptyset\right)\Big|_{z=0} \Rightarrow$

$$\sigma = \epsilon_o\left(\hat{i}_z\cdot\vec{E}\right)\Big|_{z=0}$$

Όμως $\vec{E} = \dfrac{3(\vec{p}\cdot\hat{i}_R)\hat{i}_R - \vec{p}}{4\pi\epsilon_o R^3} + \dfrac{3(\vec{p}'\cdot\hat{i}_R')\hat{i}_R' - \vec{p}'}{4\pi\epsilon_o R'^3}$

Επομένως η z - συνιστώσα είναι:

$$\hat{i}_z\cdot\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{i}_R)\left(\frac{z_o-h}{R}\right) - p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_o R^3} + \frac{3(\vec{p}'\cdot\hat{i}_R')\left(\frac{z_o+h}{R'}\right) - p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_o R'^3}$$

Όταν $z_o = 0$ τότε: $R = R' = (x_o^2 + h^2)^{1/2} = R_o$

$$\hat{i}_z\cdot\vec{E}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o R_o^3}\left[3\frac{p}{R_o}(x_o\sin\vartheta - h\cos\vartheta)\left(-\frac{h}{R_o}\right) - p\cos\vartheta + 3\frac{p}{R_o}(-x_o\sin\vartheta + h\cos\vartheta)\left(\frac{h}{R_o}\right) - p\cos\vartheta\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_o R_o^3}\left[\frac{6ph}{R_o^2}(-x_o\sin\vartheta + h\cos\vartheta) - 2p\cos\vartheta\right]$$

Επομένως,

$$\sigma = \frac{3ph}{2\pi R_o^5}(-x_o\sin\vartheta + h\cos\vartheta) - \frac{p\cos\vartheta}{2\pi R_o^3}$$

$$\sigma(x) = \frac{3ph(-x_o\sin\vartheta + h\cos\vartheta)}{2\pi\left[x_o^2+h^2\right]^{5/2}} - \frac{p\cos\vartheta}{2\pi\left[x_o^2+h^2\right]^{3/2}}$$

(γ) $T_e = \vec{p}\times\vec{E}'$

$\vec{E}'$ το πεδίο που υπάρχει στο $\vec{p}$ λόγω του ειδώλου $\vec{p}'$.

$\hat{i}_R' = \dfrac{2h}{2h}\hat{i}_z = \hat{i}_z \quad R' = 2h$

$$\vec{E}' = \frac{3(\vec{p}'\cdot\hat{i}_R')\hat{i}_R' - \vec{p}'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}$$

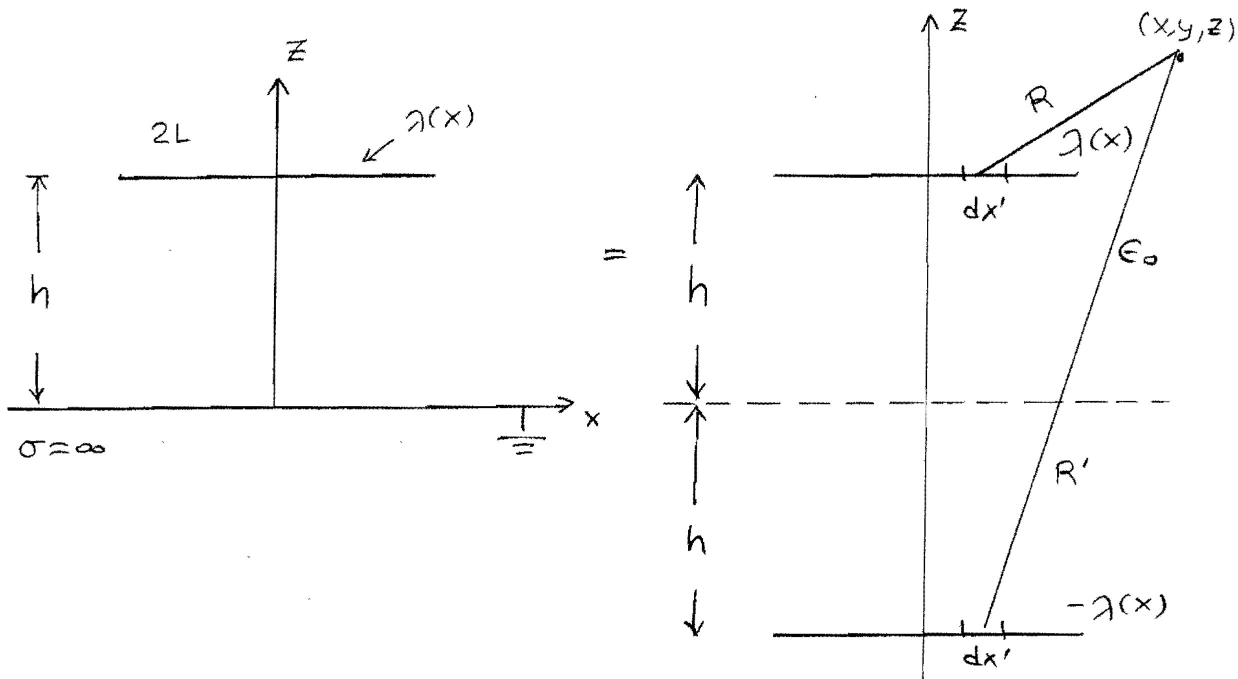
$$\vec{p}'\cdot\hat{i}_R' = p\cos\theta$$ και επομένως

$$\vec{E}' = \frac{3p\cos\theta\,\hat{i}_z - (p\sin\theta\,\hat{i}_x + p\cos\theta\,\hat{i}_z)}{4\pi\epsilon_0 (2h)^3} = \frac{p\sin\theta\,\hat{i}_x + 2p\cos\theta\,\hat{i}_z}{4\pi\epsilon_0 8h^3}$$

$$\vec{T}_e = (p\sin\theta\,\hat{i}_x + p\cos\theta\,\hat{i}_z) \times \left(\frac{p\sin\theta\,\hat{i}_x}{32\pi\epsilon_0 h^3} + \frac{2p\cos\theta\,\hat{i}_z}{32\pi\epsilon_0 h^3}\right)$$

$$= \hat{i}_y \frac{p^2\cos\theta\sin\theta}{32\pi\epsilon_0 h^3} - \hat{i}_y \frac{2p^2\sin\theta\cos\theta}{32\pi\epsilon_0 h^3} = -\hat{i}_y \frac{p^2\sin 2\theta}{64\pi\epsilon_0 h^3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5:



(α) Εφαρμόζουμε κατοπτρισμό. Αν $z<0 \sim \Phi(x,y,z)=0$.

Για $z>0$ εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας.

$$d\Phi = \frac{\lambda_0 dx'}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{-\lambda_0 dx'}{4\pi\epsilon_0 R'}$$

$$R = \left[(x-x')^2 + y^2 + (z-h)^2\right]^{1/2}$$

$$R' = \left[(x-x')^2 + y^2 + (z+h)^2\right]^{1/2}$$

Επομένως,

$$\Phi = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{-L}^{L}\left(\frac{dx'}{R} - \frac{dx'}{R'}\right)\right]$$

$$\int_{-L}^{L}\frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2+(z-h^2)\right]^{1/2}} = \left\{-\ln\left[(x-x') + \left[(x-x')^2+y^2+(z-h)^2\right]^{1/2}\right]\right\}_{-L}^{L}$$

$$= \ln\left\{\frac{x+L+\left[(x+L)^2+y^2+(z-h)^2\right]^{1/2}}{x-L+\left[(x-L)^2+y^2+(z-h)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

$$\int_{-L}^{L}\frac{dx'}{\left[(x-x')^2+y^2+(z+h)^2\right]^{1/2}} = \ln\left\{\frac{x+L+\left[(x+L)^2+y^2+(z+h)^2\right]^{1/2}}{x-L+\left[(x-L)^2+y^2+(z+h)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

Επομένως,

$$\Phi(x,y,z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{x+L+[(x+L)^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}}{x-L+[(x-L)^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}} \cdot \frac{x-L+[(x-L)^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}}{x+L+[(x+L)^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}} \right]$$

(β) $x=y=0$ για $z<0$ $\vec{E}=0$

$$z>0 \rightarrow \quad \Phi(z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{L+[L^2+(z-h)^2]^{1/2}}{-L+[L^2+(z-h)^2]^{1/2}} \cdot \frac{-L+[L^2+(z+h)^2]^{1/2}}{L+[L^2+(z+h)^2]^{1/2}} \right]$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \ln\left[\frac{L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}}{-L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}} \right] - \ln\left[\frac{L+(L^2+(z+h)^2)^{1/2}}{-L+(L^2+(z+h)^2)^{1/2}} \right] \right\}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{i}_z =$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{ \ln\left(\frac{L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}}{-L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}} \right) \right\} = \frac{-L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}}{L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}} \cdot$$

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{2(z-h)}{[L^2+(z-h)^2]^{1/2}}\left[-L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}\right] - \frac{1}{2}\frac{2(z-h)}{[L^2+(z-h)^2]^{1/2}}\left[L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}\right]}{\left[-L+(L^2+(z-h)^2)^{1/2}\right]^2}$$

$$= \frac{-2L}{[L^2+(z-h)^2]^{1/2}} \quad \frac{1}{[(L^2+(z-h)^2)^{1/2}+L]\,[(L^2+(z-h)^2)^{1/2}-L]} =$$

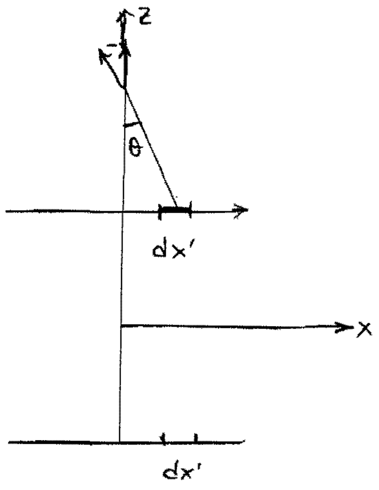
$$= \frac{-2L}{(z-h)\,[L^2+(z-h)^2]^{1/2}}$$

Επομένως,

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{2L}{(z-h)[L^2+(z-h)^2]^{1/2}} - \frac{2L}{(z+h)[L^2+(z+h)^2]^{1/2}} \right\}\hat{i}_z$$

$(z>0)$
$(z\neq h)$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί με την αρχή της επαλληλίας για ηλεκτρικό πεδίο.



Οι x-συνιστώσες του πεδίου αλληλοαναιρούνται.

Άρα $dE_z = \dfrac{\lambda_o dx'}{4\pi\epsilon_o} \dfrac{1}{(z-h)^2+x'^2} \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{z-h}{[x'^2+(z-h)^2]^{1/2}}$

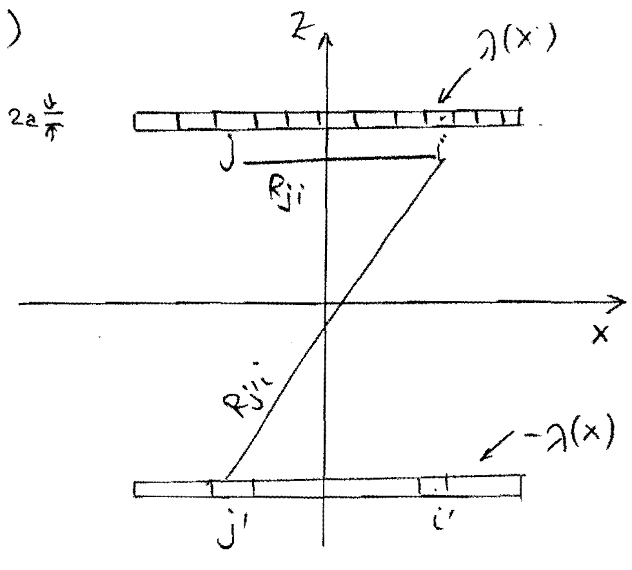
$$dE_z = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{(z-h)}{[x'^2+(z-h)^2]^{3/2}}$$

Επομένως $E_z = \displaystyle\int_{-L}^{L} \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{(z-h)}{[x'^2+(z-h)^2]^{3/2}} - \underbrace{\int_{-L}^{L} \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{z+h}{[x'^2+(z+h)^2]^{3/2}}}_{\text{είδωλο}}$

Άρα $E_z = \dfrac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} 2L \left[\dfrac{1}{(z-h)\,[L^2+(z-h)^2]^{1/2}} - \dfrac{1}{(z+h)\,[L^2+(z+h)^2]^{1/2}} \right]$

όπως και προηγουμένως.

(γ)



Σύμφωνα με την μέθοδο των ροπών χωρίζουμε τον αγωγό σε κομμάτια μήκους Δx (ίσα N). $\Delta x = \frac{2L}{N}$ Εφόσον έχουμε λεπτό αγωγό θα πρέπει να είναι ισοδυναμικός. Εστω i και j δύο τυχαία κομμάτια.

Λόγω κατοπτρισμού θα υπάρχουν και τα είδωλα έστω i' και j' με φορτίο $-\lambda(x_i)\Delta x$ και $-\lambda(x_j)\Delta x$. Το δυναμικό στο κέντρο του x_i είναι :

$$V_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j \Delta x}{4\pi\epsilon_0 R_{ji}} - \sum_{j'=1}^{N} \frac{\lambda_j \Delta x}{4\pi\epsilon_0 R_{j'i}}$$

$R_{ji} = |x_j' - x_i'|$ και $R_{j'i} = \left|(x_i - x_j)^2 + (2h)^2\right]^{1/2}$

όπου όταν $i=j$ χρειάζεται κάποια προσοχή για τον υπολογισμό του V_{ii}. Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση για όλα τα στοιχεία του αγωγού τότε

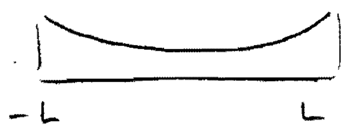
$$V \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & & \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} \sim V[\mathbb{1}] = [A][\lambda]$$

$[\lambda] = V[A]^{-1}[\mathbb{1}]$ αν $V = 1$ volt $\sim \hat{\lambda} = [A]^{-1}[\mathbb{1}]$

Το συνολικό φορτίο είναι Q, Άρα $\sum_j \lambda_j \Delta x = Q \Rightarrow$

$V\left(\sum_j \hat{\lambda}_j\right)\Delta x = Q \Rightarrow V = \dfrac{Q}{\left(\sum_j \hat{\lambda}_j\right)\Delta x}$ και επομένως

$$[\lambda] = \frac{Q}{\left(\sum_j \hat{\lambda}_j\right)\Delta x}[A]^{-1}[\mathbb{1}]$$



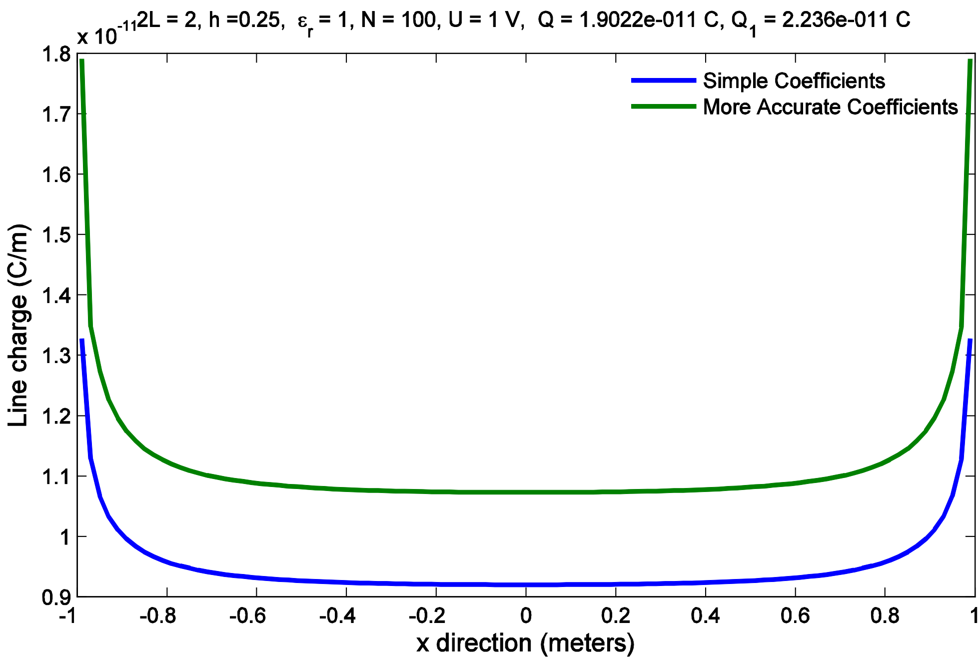
Αν βρεθεί η κατανομή $\lambda_j \sim \lambda(x)$ τότε για το τυχαίο σημείο ($z>0$) εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας (με κατοπτρισμό.)

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\lambda_j \Delta x}{4\pi\epsilon_0 R_j} - \frac{\lambda_j \Delta x}{4\pi\epsilon R_{j'}}\right)$$

$R_j = [(x-x_j)^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}$ και $R_{j'} = [(x-x_j)^2 + y^2 + (z+h)^2]^{1/2}$

Αγώγιμη Ράβδος Πάνω Από Αγώγιμο Επίπεδο

h= 0.25 meters



h= 2 meters