



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9 - ΖΩΓΡΑΦΟΥ, 157 73 ΑΘΗΝΑ

ΤΗΛ.: 210-7722479 - FAX: 210-7722281

e-mail: [eglysis@central.ntua.gr](mailto:eglysis@central.ntua.gr)

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Β (Τμήμα Μ-Π, 2025-2026)

### ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Νο. 3

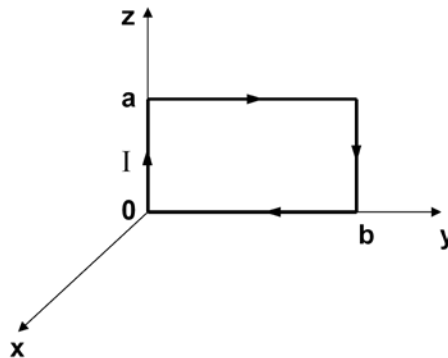
Ασκήσεις για εξάσκηση: Νο. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Ασκήσεις για παράδοση: Νο. 10, 11

Ημερομηνία Παράδοσης: **8 Ιανουαρίου 2026**

### Άσκηση 1:

Ένας νηματοειδής βρόχος σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου βρίσκεται τοποθετημένος στο επίπεδο  $yz$  όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Τα μήκη των πλευρών του βρόχου είναι  $a$  και  $b$  κατά μήκος των αξόνων  $z$  και  $y$  αντίστοιχα. Η μαγνητική διαπερατότητα είναι  $\mu_0$  παντού. (α) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό σε ένα τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  του χώρου. (β) Να βρεθεί η μαγνητική επαγωγή στο τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  του χώρου. (γ) Να βρεθεί η μαγνητική επαγωγή στο κέντρο του βρόχου.



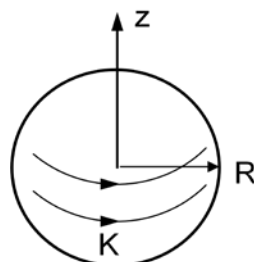
### Άσκηση 2:

Ένα σταθερό επιφανειακό ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K} = K_0 \hat{\phi}$  ρέει πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας  $R$ .

(α) Να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στα σημεία του άξονα των  $z$  υπό την μορφή ενός ορισμένου ολοκληρώματος (χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα).

(β) Να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο της σφαίρας.

(γ) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο σφαιρικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας  $R_1$  και εξωτερικής ακτίνας  $R_2$  μέσα στο οποίο ρέει ομοιόμορφα κατανεμημένο ρεύμα με χωρική πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J} = J_0 \hat{\phi}$ .



### Άσκηση 3:

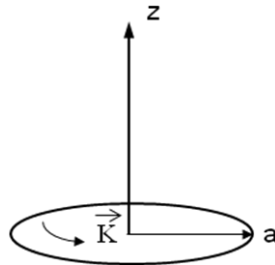
(α) Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός τετράγωνου βρόχου που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I$ . Η απόσταση του κέντρου του τετραγώνου από οποιαδήποτε πλευρά είναι  $R$ .

(β) Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός κανονικού πολυγώνου με  $N$  πλευρές που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I$ . Το  $R$  είναι πάλι η απόσταση του κέντρου του πολυγώνου από οποιαδήποτε πλευρά του. Ναδειχθεί ότι το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του πολυγώνου στο όριο  $N \rightarrow \infty$ , δίνει το πεδίο στο κέντρο ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας  $R$ .

### Άσκηση 4:

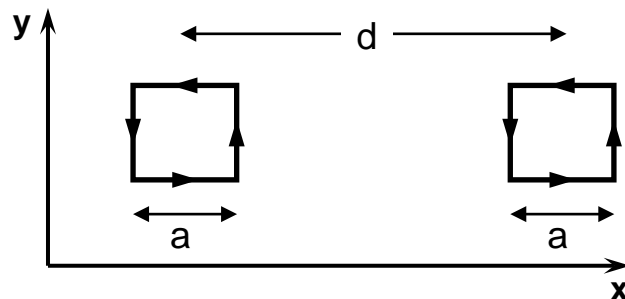
Κυκλικός δίσκος ακτίνας  $a$  φέρει ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει κυκλικά γύρω από τον άξονά του με επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος  $\vec{K} = K_0 r_T \hat{\phi}$  όπου  $K_0$  σταθερά.

(α) Χρησιμοποιώντας το νόμο του *Biot-Savart* να βρεθεί η μαγνητική επαγωγή στο τυχαίο σημείο πάνω στον άξονα  $z$ . (β) Να βρεθεί σε ποιο σημείο του άξονος των  $z$  υπάρχει η μέγιστη τιμή της μαγνητικής επαγωγής,  $B_{max}$ , και να γίνει η γραφική παράσταση του λόγου  $B(z)/B_{max}$  σαν συνάρτηση του  $z/a$ . (γ) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο του χώρου με σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ . Το δυναμικό να εκφραστεί σαν ολοκλήρωμα χωρίς να υπολογισθεί αλλά με όλους τους όρους του πλήρως προσδιορισμένους βάσει των δεδομένων του προβλήματος. Σημείο αναφοράς του διανυσματικού δυναμικού το άπειρο. (δ) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο πάνω στον άξονα  $z$ .



### Άσκηση 5:

Δύο τετράγωνοι βρόχοι πλευράς  $a$  βρίσκονται πάνω στο επίπεδο  $xy$  και σε απόσταση  $d$  μεταξύ τους (όπου  $d \gg a$ ) με τα κέντρα τους σε ίση απόσταση από τον άξονα των  $x$  όπως φαίνεται και στο κάτωθι σχήμα. Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η αλληλεπαγωγή τους. Υπόδειξη: Θεωρήσετε ότι η απόσταση των βρόχων είναι τόσο μεγάλη σχετικά με το μήκος των πλευρών τους ώστε το πεδίο εκάστου να μπορεί να προσεγγισθεί από το αντίστοιχο πεδίο ενός μαγνητικού δίπολου. Μη χρησιμοποιήσετε τον τύπο του Neumann.



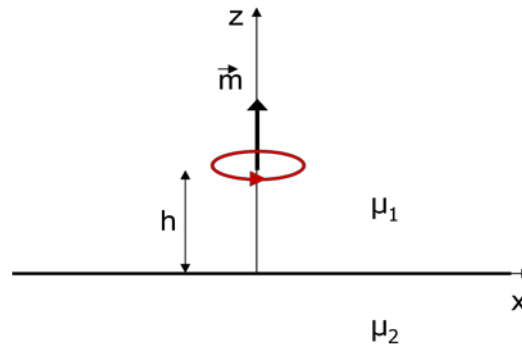
### Άσκηση 6:

Ένα μαγνητικό δίπολο (κυκλικός βρόχος με ακτίνα  $a$  και ρεύμα  $I$ ) με μαγνητική ροπή  $\vec{m} = m \hat{i}_z$ , βρίσκεται σε απόσταση  $h$  από την διαχωριστική επιφάνεια δύο μαγνητικών υλικών με διαπερατότητες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση  $h$  είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του μαγνητικού δίπολου έτσι ώστε να ισχύει η προσέγγιση του διπολικού πεδίου.

(α) Να αποδείξετε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατοπτρισμό με κατάλληλα επιλεγμένα μαγνητικά δίπολα.

(β) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο του χώρου  $(x, y, z)$  (θεωρώντας ότι για το τυχαίο σημείο ισχύει η προσέγγιση του πεδίου του δίπολου). Να εκφραστεί το διανυσματικό δυναμικό στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

(γ) Να γίνει γραφική παράσταση των ισοδυναμικών γραμμών του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο  $xz$  για  $a = 1\text{m}$ ,  $h = 1\text{m}$ ,  $\mu_1 = 1\mu_0$ ,  $\mu_2 = 100\mu_0$  έστω και αν για αυτά τα αριθμητικά δεδομένα η προσέγγιση του δίπολου να μην είναι απολύτως δικαιολογημένη. Επαναλάβετε αυτό το ερώτημα με την ακριβή λύση για το διανυσματικό δυναμικό.



### Άσκηση 7:

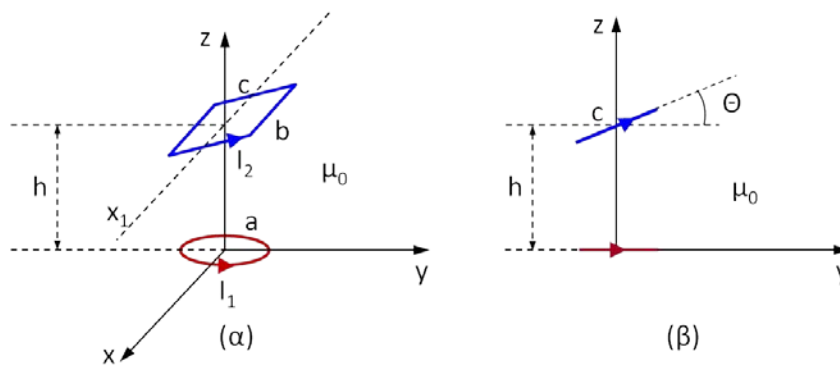
Κυκλικός βρόχος ακτίνας  $a$  διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I_1$ . Σε κατακόρυφη απόσταση  $h \gg a$  υπάρχει ένας δεύτερος ορθογώνιος βρόχος πλευρών  $b, c$  που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I_2$ . Ο ορθογώνιος βρόχος έχει το κέντρο του πάνω στον άξονα  $z$  και μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον άξονα  $x_1$  (που είναι παράλληλος του  $x$  όπως φαίνεται και στο σχήμα). Για κάποια δεδομένη κατάσταση ο ορθογώνιος βρόχος σχηματίζει γωνία  $\Theta$  με τον άξονα  $y$  όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Υποθέσετε ότι ο βρόχος ακτίνας  $a$  πληροί τις προσεγγίσεις του μαγνητικού δίπολου για όλους τους υπολογισμούς που ζητούνται. Ο χώρος έχει παντού διαπερατότητα  $\mu_0$ .

(α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής  $L_{12}(\Theta)$  μεταξύ των δύο βρόχων.

Τα υπόλοιπα ερωτήματα θα πρέπει να απαντηθούν αριθμητικά. Υποθέσετε ότι οι διαστάσεις του προβλήματος είναι  $a = 0.025\text{m}$ ,  $b = 0.25\text{m}$ ,  $c = 0.12\text{m}$ , και  $h = 0.10\text{m}$ .

(β) Να γίνει η γραφική παράσταση του συντελεστού αμοιβαίας επαγωγής  $L_{12}(\Theta)$  σαν συνάρτηση της γωνίας  $\Theta$  για  $0 \leq \Theta \leq 720 \text{ deg}$ . Επίσης να υπολογιστεί η παράγωγος  $dL_{12}(\Theta)/d\Theta$  και να γίνει η γραφική της παράσταση σαν συνάρτηση της γωνίας  $\Theta$  για το ίδιο διάστημα τιμών. Συνίσταται η αριθμητική εύρεση της παραγώγου.

(γ) Υποθέσετε ότι το ρεύμα που διαρρέει τον κυκλικό βρόχο είναι  $I_1 = 20\text{A}$ , και ότι ο ορθογώνιος βρόχος αποτελείται από  $N = 100$  σπείρες (μονωμένες, από λεπτό αγωγό ώστε να μην αλλάζει η γεωμετρία του σχήματος). Επιπλέον ο ορθογώνιος βρόχος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα με συχνότητα  $f = 30\text{Hz}$ . Να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη (emf),  $e(t)$ , στον ορθογώνιο βρόχο σαν συνάρτηση του χρόνου  $t$  και να γίνει η γραφική της παράσταση σε διάστημα 5 χρονικών περιόδων. Να βρεθεί (συνίσταται η χρήση *FFT της MatLab*) ο μετασχηματισμός Fourier  $E(f)$  της  $e(t)$  και να γίνει η γραφική παράσταση του  $|E(f)|^2$  σαν συνάρτηση της συχνότητας  $f$ . Τι παρατηρείται; Να βρεθεί προσεγγιστικά η σειρά Fourier που προσεγγίζει την επαγόμενη  $e(t)$  (εδώ προτείνεται η χρήση της συνάρτησης *fit* της MatLab αν και ίσως βρείτε καλύτερους τρόπους). Να επαναληφθούν τα (β) και (γ) όταν μεταβληθεί το ύψος  $h$  σε  $h = 0.20\text{m}$ .



$$\int \frac{dx}{[x^2 + (A+Bx)^2 + C^2]^{3/2}} = \frac{AB+x+B^2x}{[A^2+C^2+B^2C^2][A^2+C^2+2ABx+x^2+B^2x^2]^{1/2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+A^2)^{3/2}} = \frac{x}{A^2(x^2+A^2)^{1/2}}$$

### Άσκηση 8:

Κυκλικός βρόχος ακτίνας  $a$ , διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I$  όπως φαίνεται και στο κάτωθι σχήμα. Το κέντρο του βρόχου βρίσκεται πάνω στο επίπεδο  $xy$  σε αποστάσεις  $d$  και  $h$  από τέλειο αγωγό (απείρου ειδικής αγωγιμότητας) και σχήματος ορθής γωνίας όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διαπερατότητα του αέρα είναι  $\mu_0$ . Όλες οι αποστάσεις που μας ενδιαφέρουν είναι πολύ μεγαλύτερες από την ακτίνα του βρόχου ώστε να ισχύουν πάντα οι προϋποθέσεις της θεωρίας του μαγνητικού δίπολου.

(α) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο στον αέρα ( $x > 0, y > 0, z$ ) με σημείο αναφοράς του δυναμικού το κέντρο των αξόνων. Να γίνει χρήση του συστήματος συντεταγμένων  $x, y, z$ . Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο τυχαίο σημείο στον αέρα. Να γίνει χρήση του συστήματος συντεταγμένων  $x, y, z$ .

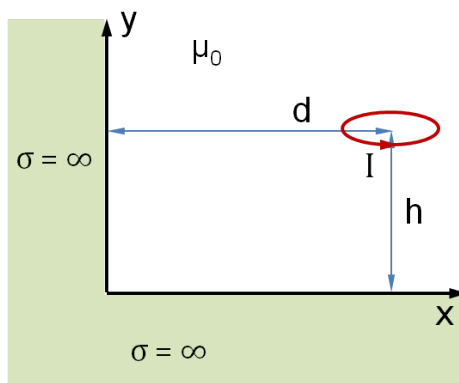
(β) Να βρεθούν οι επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος πάνω στις επιφάνειες  $x = 0$  και  $y = 0$  των τέλειων αγωγίμων επιπέδων.

Για τα επόμενα ερωτήματα θα χρειαστεί η χρήση υπολογιστή με **MatLab** ή κάποιου άλλου υπολογιστικού πακέτου. **Θεωρείστε ότι  $d = 2\text{m}, h = 1\text{m}, a = 0.1\text{m}, I = 1\text{A}$ .**

(γ) Να γίνει μια γραφική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο  $xz$  για  $y = 1\text{m}$ . Εάν κάνετε χρήση του λογισμικού **MatLab** προτείνω την χρήση της συνάρτησης **quiver**. Επίσης δείξτε την ροή του διανυσματικού δυναμικού πάνω στο επίπεδο. Και εδώ στην περίπτωση της **MatLab** προτείνω την συνάρτηση **streamslice**. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για την γραφική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο  $xy$  για  $z = 2\text{m}$ .

(δ) Να γίνει μια γραφική απεικόνιση του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο  $xy$  για  $z = 0$ . Και πάλι προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων. **Προαιρετικά** όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να υπολογίσουν τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο  $xy$  κάνοντας χρήση της συνάρτησης **streamline**. Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο **MatLab Exchange** (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines>.

(ε) Να γίνει μια γραφική απεικόνιση των επαγομένων επιφανειακών ρευματικών κατανομών στα επίπεδα  $x = 0$  και  $y = 0$ . Και πάλι προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων.



### Άσκηση 9:

Δίδεται μια γραμμή μεταφοράς αποτελούμενη από δύο παράλληλους κυλινδρικούς αγωγούς απείρου μήκους (κατά μήκος του άξονα  $z$ ) και ακτίνας  $a$  σε απόσταση  $d$  μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα. Σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα  $I$ , ομοιόμορφα κατανομημένο, κυκλοφορεί στον δεξιό αγωγό και επιστρέφει (πάλι ομοιόμορφα κατανομημένο) στον αριστερό αγωγό όπως φαίνεται στο σχήμα.

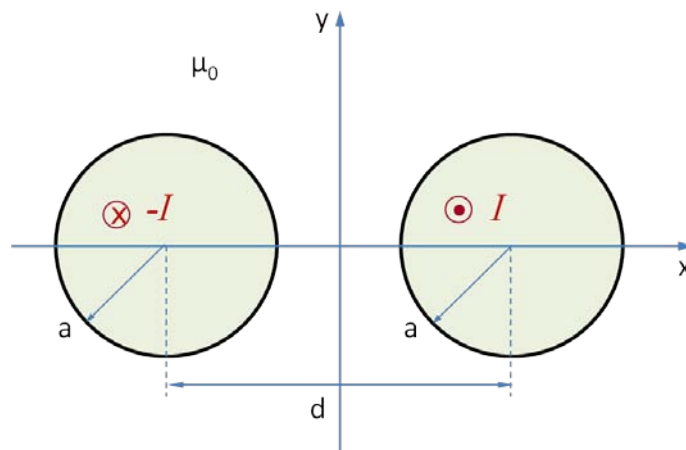
(α) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  του χώρου στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Το διανυσματικό δυναμικό μηδενίζεται πάνω στον άξονα  $y$  (ο μεσοκάθετος άξονας μεταξύ των κέντρων των δύο αγωγών είναι τα σημεία αναφοράς του δυναμικού). **Το διανυσματικό δυναμικό να βρεθεί με χρήση της αρχής της επαλληλίας και την επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης Poisson.**

(β) Να βρεθεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής,  $L$ , της γραμμής μεταφοράς ανά μονάδα μήκους κάνοντας χρήση της ενεργειακής μεθόδου.

**Για τα επόμενα ερωτήματα θα χρειαστεί η χρήση υπολογιστή με MatLab ή κάποιου άλλου υπολογιστικού πακέτου (Python, Mathematica,...).**

(γ) Να γίνει η γραφική παράσταση του διανυσματικού δυναμικού  $A$  σαν συνάρτηση των συντεταγμένων  $x, y$ . Θεωρήστε  $a = 1\text{cm}$ ,  $d = 4\text{cm}$ ,  $I = 1\text{A}$ . Να γίνει η γραφική παράσταση του κανονικοποιημένου διανυσματικού δυναμικού  $A_z(x,y)/(\mu_0 I/2\pi)$  (έχει μόνο  $z$ -συνιστώσα) στο επίπεδο  $xy$  στην περιοχή:  $-L_x \leq x \leq L_x$  και  $-L_y \leq y \leq L_y$ . Θεωρείστε  $L_x = L_y = 0.06\text{m}$ . Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση `surface(x,y,Az)`, `shading interp` (ή `isosurface`) για την χρωματική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο  $xy$ . Επίσης να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες (γραμμές) στο επίπεδο  $xy$  με την βοήθεια της συνάρτησης `contour`. Οι ισοδυναμικές γραμμές να βρεθούν για τα δυναμικά  $A_{\text{max}}[-0.95:0.05:0.95]$  (όπου  $A_{\text{max}}$  η μέγιστη τιμή του κανονικοποιημένου διανυσματικού δυναμικού στην περιοχή όπου απεικονίζεται).

(δ) Να γίνει η γραφική παράσταση των δυναμικών γραμμών της **μαγνητικής επαγωγής  $B$**  στο επίπεδο  $xy$  στην περιοχή:  $-L_x \leq x \leq L_x$  και  $-L_y \leq y \leq L_y$ . Θεωρείστε  $L_x = L_y = 0.06\text{m}$ . Θεωρείστε τις ίδιες αριθμητικές τιμές με του ερωτήματος (γ). Προτείνω την χρήση των `quiver` και `streamslice` ή `streamlines` (Matlab). Εναλλακτικά (και προαιρετικά), όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να υπολογίσουν τις δυναμικές γραμμές της μαγνητικής επαγωγής στο επίπεδο  $xy$  κάνοντας χρήση της συνάρτησης `streamline`.



Χρήσιμο Ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{2\pi} \ln(a + b \cos x) dx = 2\pi \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}\right)$$

### Άσκηση 10: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) (50%)

Μαγνήτης απείρου μήκους (ως προς  $z$ ) και διατομής ορθογωνίου τριγώνου έχει μόνιμη μαγνήτιση  $\vec{M} = M_0(\cos\psi \hat{i}_x + \sin\psi \hat{i}_y)$ , με  $M_0$  γνωστή σταθερά. Ο άξονας  $z$  διέρχεται από το σημείο A του μαγνήτη όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Ο χώρος εξωτερικά του μαγνήτη είναι αέρας με διαπερατότητα ίση με την διαπερατότητα του κενού  $\mu_0$ .

(α) [10%] Να βρεθεί το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο  $\Sigma(x, y, z)$  του χώρου. Να εκφραστεί το δυναμικό υπό την μορφή ενός (ή περισσοτέρων) ολοκληρώματος(ων) (μιας μεταβλητής, δηλαδή 1D ορισμένο/α ολοκλήρωμα/τα) με πλήρως ορισμένους όλους τους όρους. Εφόσον ο μαγνήτης είναι άπειρος στην διεύθυνση  $z$  η έκφραση του διανυσματικού δυναμικού θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη του  $z$ . Θεωρείστε ότι το δυναμικό αναφοράς είναι πάνω στον άξονα  $z$  του συστήματος συντεταγμένων. Το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό ζητείται να εκφραστεί στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $xyz$ .

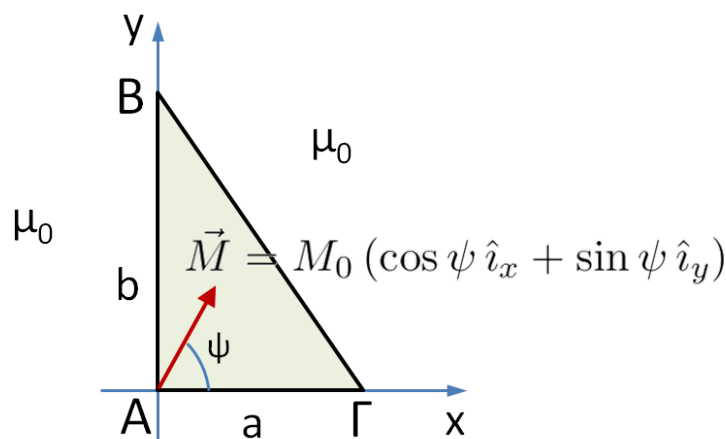
(β) [10%] Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο,  $\mathbf{H}$ , στο τυχαίο σημείο  $\Sigma(x, y, z)$  του χώρου. Να εκφραστεί το μαγνητικό πεδίο υπό την μορφή ενός (ή περισσοτέρων) ολοκληρώματος(ων) (μιας μεταβλητής, δηλαδή 1D ορισμένο/α ολοκλήρωμα/τα) με πλήρως ορισμένους όλους τους όρους. Το μαγνητικό πεδίο ζητείται να εκφραστεί στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $xyz$ .

Για τα επόμενα ερωτήματα θα χρειαστεί η χρήση υπολογιστή με MatLab ή κάποιου άλλου υπολογιστικού πακέτου (Python, Mathematica,...).

(γ) [15%] Να γίνει η γραφική παράσταση του διανυσματικού δυναμικού  $A_z(x,y,z)$  (έχει μόνο  $z$ -συνιστώσα) στο επίπεδο  $xy$  για  $-(a+b) \leq x \leq (a+b)$  και  $-(a+b) \leq y \leq (a+b)$ . Θεωρείστε ότι  $a = 1\text{m}$ ,  $b = 1.5\text{m}$ ,  $\psi = 45 \text{ deg}$ , και  $M_0 = 1\text{A/m}$ . Κανονικοποιήστε το διανυσματικό δυναμικό  $A_z(x,y,z)/(\mu_0 M_0/2\pi)$ .

Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση `surface(x,y,Az)`, `shading interp` (ή `isodunamh`) για την χρωματική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο  $xy$ . Επίσης να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες (γραμμές) στο επίπεδο  $xy$  με την βοήθεια της συνάρτησης `contour`. Οι ισοδυναμικές γραμμές να βρεθούν για τα δυναμικά  $A_z(x,y,z)/(\mu_0 M_0/2\pi)$  στο διάστημα τιμών  $[-2.0:0.1:2.0]$  (αρχίζοντας από  $-2.0$  και καταλήγοντας στο  $2.0$  με διαστήματα  $0.1$ ).

(δ) [15%] Να γίνει η γραφική παράσταση των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{H}$  και της μαγνητικής επαγωγής  $\mathbf{B}$  (σε ξεχωριστά διαγράμματα), στο επίπεδο  $xy$  για  $-(a+b) \leq x \leq (a+b)$  και  $-(a+b) \leq y \leq (a+b)$ . Κανονικοποιήστε τόσο την μαγνητική επαγωγή  $\mathbf{B}(x,y,z)/(\mu_0/2\pi)$  όσο και το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}(x,y,z)/(\mu_0/2\pi)$ . Θεωρείστε τις ίδιες αριθμητικές τιμές με του ερωτήματος (γ). Προτείνω την χρήση των `quiver` και `streamslice` ή `isodunamh` (Matlab). Εναλλακτικά (και προαιρετικά), όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να υπολογίσουν τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο  $xy$  κάνοντας χρήση της συνάρτησης `streamline`. Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της `stream2` (που χρησιμοποιεί η `streamline`) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα `mmstream2`) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines>.



### Άσκηση 11: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) (50%)

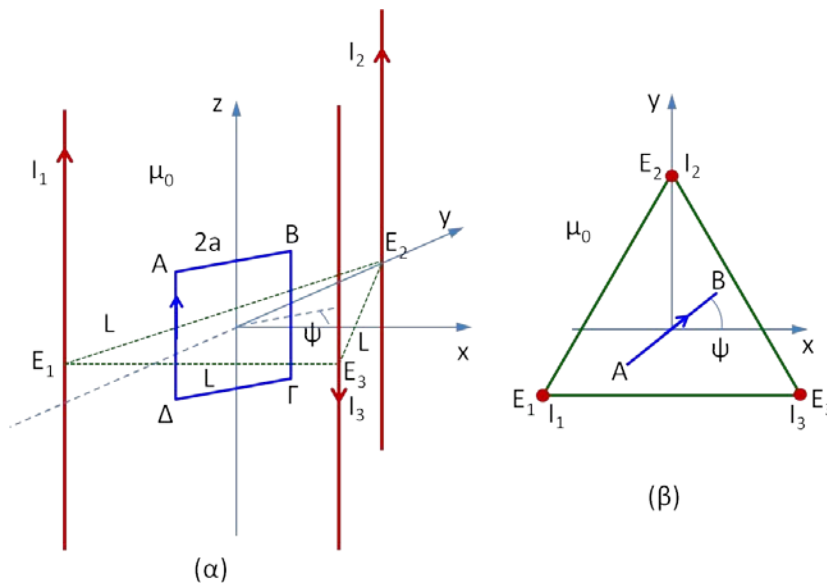
Τρεις ευθύγραμμοι αγωγοί απείρου μήκους μεταφέρουν σταθερά ηλεκτρικά ρεύματα  $I_1, I_2$ , και  $I_3 = -(I_1 + I_2)$ , κατά μήκος του άξονος  $z$  όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Οι τρεις ευθύγραμμοι αγωγοί βρίσκονται στις κορυφές  $E_1, E_2, E_3$  ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς  $L$ . Κλειστός βρόχος σχήματος τετραγώνου πλευράς  $2a$  με το επίπεδό του παράλληλο στον άξονα  $z$  είναι κεντραρισμένος στο κέντρο του ισόπλευρου τριγώνου. Το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς έχει το κέντρο στο κέντρο του ισόπλευρου τριγώνου που απέχει  $2h/3$  από την κορυφή  $E_2$  (με  $h$  το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου) όπως φαίνεται στο σχήμα. Το επίπεδο του βρόχου σχηματίζει γωνία  $\psi$  ως προς τον άξονα  $x$ . Η διαπερατότητα είναι παντού  $\mu_0$ .

(α) [15%] Να βρεθεί η μαγνητική ροή  $\Psi_{mK}$  που διέρχεται από τον τετράγωνο βρόχο λόγω του ρεύματος  $I_K$  μόνο, με χρήση του διανυσματικού δυναμικού (όπου  $K = 1,2,3$ ).

(β) [15%] Να βρεθεί η μαγνητική ροή  $\Psi_{mK}$  που διέρχεται από τον τετράγωνο βρόχο λόγω του ρεύματος  $I_K$  μόνο, με χρήση της μαγνητικής επαγωγής (όπου  $K = 1,2,3$ ). Η μαγνητική ροή  $\Psi_{mK}$  να γραφεί υπό την μορφή ενός ολοκληρώματος με όλους τους όρους προσδιορισμένους όσο το δυνατόν πληρέστερα.

**Για τα επόμενα ερωτήματα θα χρειαστεί η γρήση υπολογιστή με MatLab ή κάποιου άλλου υπολογιστικού πακέτου (Python, Mathematica,...).**

(γ) [25%] Να υπολογιστούν αριθμητικά οι συντελεστές αλληλεπαγωγής  $L_{sK} / \mu_0 2\pi$  (όπου  $K = 1,2,3$  και  $s$  το κύκλωμα του τετραγωνικού βρόχου) σαν συνάρτηση της γωνίας  $\psi$  (όπου  $0^\circ \leq \psi \leq 360^\circ$ ) και με τους δύο τρόπους των ερωτημάτων (α) και (β) και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις. Φυσικά οι αριθμητικές τιμές θα πρέπει να συμπίπτουν (εντός αριθμητικού σφάλματος). Επίσης να γίνει η γραφική παράσταση της συνολικής μαγνητικής ροής που διέρχεται από τον τετραγωνικό βρόχο σαν συνάρτηση της γωνίας  $\psi$  (όπου  $0^\circ \leq \psi \leq 360^\circ$ ). Οι παράμετροι του προβλήματος έχουν τις εξής τιμές:  $L = 2m, a = 0.5m, I_1 = I_2 = 1A$ .



**Σημείωση:** Σε όλες από τις ασκήσεις για παράδοση χρησιμοποιήσετε προγράμματα (σε matlab ή σε άλλα υπολογιστικά πακέτα) θα πρέπει **υποχρεωτικά** (για να πάρετε τον βαθμό του αντιστοίχου ερωτήματος της άσκησης) στις απαντήσεις σας να συμπεριλάβετε και ένα αντίγραφο (printout) του κώδικα που έχετε χρησιμοποιήσει.