Ε Θ Ν Ι Κ Ο Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

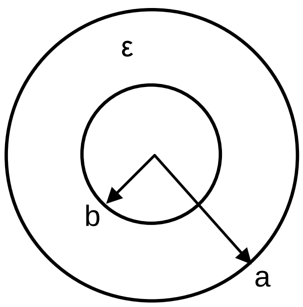
Καθ. Η. Ν. Γλύτσης, Τηλ.: 210-7722479 - *e-mail:* eglytsis@central.ntua.gr - *www:* http://users.ntua.gr/eglytsis/

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Β (Τμήμα Μ-Π, 2025-2026)
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ No. 2
Ασκήσεις για εξάσκηση: No. 1, 2, 3, 4, 5, 6

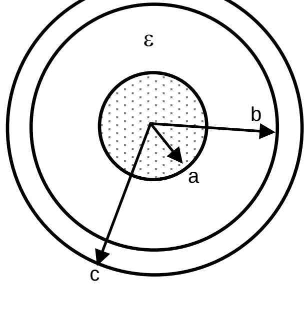
Άσκησεις για παράδοση: No. 7, 8, 9

Ημερομηνία Παράδοσης: 28 Νοεμβρίου 2025

Άσκηση 1:
Να υπολογισθούν η διηλεκτρική μετατόπιση ($\vec{D}$), η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ($\vec{E}$), η πόλωση ($\vec{P}$), οι επιφανειακές και οι χωρικές πυκνότητες των ελευθέρων, των δεσμευμένων και των συνολικών φορτίων καθώς και η χωρητικότητα ενός σφαιρικού πυκνωτή εξωτερικής ακτίνας a και εσωτερικής ακτίνας b, όταν η σχετική επιτρεπτότητα του μονωτικού μεταξύ των δύο σφαιρικών αγωγών είναι: (α) ε_r = γνωστή σταθερά και (β) $\varepsilon_r = k\, a^2/r^2$, όπου k είναι μια γνωστή σταθερά και r είναι η ακτινική απόσταση από το κέντρο των δύο αγωγών του πυκνωτή. Θεωρήστε ότι η εσωτερική σφαίρα ακτίνας b είναι σε δυναμικό U ενώ η εξωτερική ακτίνας a είναι γειωμένη.



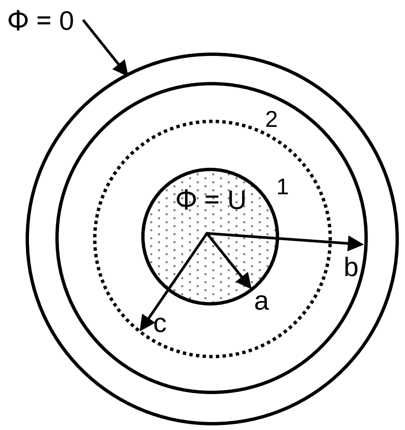
Άσκηση 2:
Η αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a είναι ομόκεντρη με το αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής ακτίνας c, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογισθούν οι **συντελεστές δυναμικού**, οι **συντελεστές χωρητικότητας**, και οι **μερικές χωρητικότητες** του συστήματος.



Άσκηση 3:

Για το ομοαξονικό καλώδιο (από τέλειους αγωγούς) απείρου μήκους του κάτωθι σχήματος να προσδιορισθούν τα εξής: (α) η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος, (β) η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, (γ) το δυναμικό, (δ) η διηλεκτρική μετατόπιση, (ε) οι πυκνότητες ηλεκτρικών φορτίων (τόσο οι χωρικές όσο και οι επιφανειακές πυκνότητες), καθώς και (στ) η χωρητικότητα και η αντίσταση μόνωσης ανά μονάδα μήκους για τις εξής δύο περιπτώσεις:

1. Όταν το μονωτικό υλικό αποτελείται από δύο στρώματα με επιτρεπτότητα και ειδική αγωγιμότητα ε_1, σ_1 όταν $a < r_T < c$ και ε_2, σ_2 όταν $c < r_T < b$.
2. Όταν το μονωτικό υλικό έχει παντού επιτρεπτότητα $\varepsilon = \varepsilon_0 (r_T / a)$ ενώ η ειδική αγωγιμότητα του είναι $\sigma = \sigma_0 (r_T / a)^2$ (όταν $a < r_T < b$). Σ' αυτή την περίπτωση να υπολογισθούν όλα τα μεγέθη πλην της χωρητικότητας.

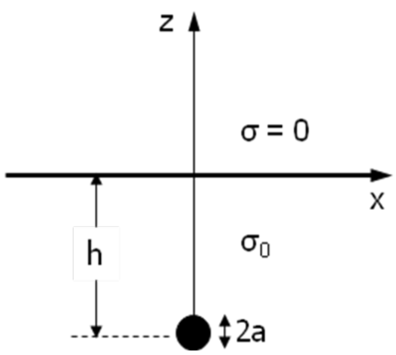


Άσκηση 4:

Αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a βρίσκεται σε βάθος h ($h >> a$) μέσα σε αγώγιμο υλικό με ειδική αγωγιμότητα σ_0. Ο χώρος για $z > 0$ δεν είναι αγώγιμος ($\sigma = 0$). Σταθερό ρεύμα I διαχέεται από την σφαίρα μέσα στο αγώγιμο υλικό. Συνίσταται η χρήση κάποιου είδους κατοπτρισμού σε αυτό το πρόβλημα ώστε να ισχύει η κατάλληλη οριακή συνθήκη στο $z = 0$. Να υποθέσετε ότι το ρεύμα τόσο από την σφαίρα όσο και από το τυχόν είδωλό της διαχέεται ομοιόμορφα στο χώρο.

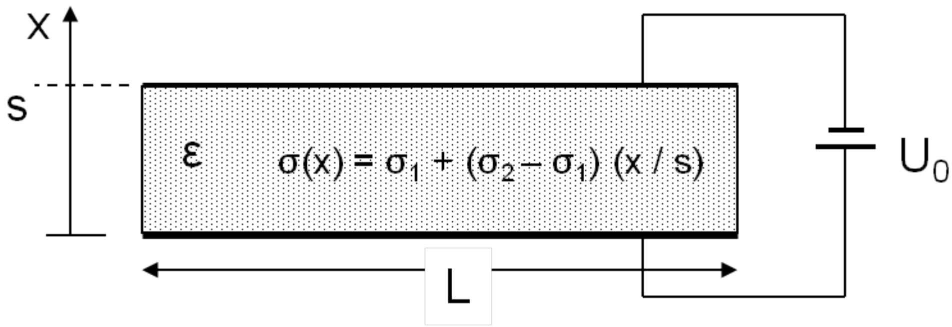
(α) Να βρεθεί η πυκνότητα ρεύματος μέσα στο αγώγιμο υλικό.

(β) Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό της σφαίρας με δυναμικό αναφοράς στο άπειρο. Ποιά είναι αντίσταση γείωσης της σφαίρας;



Άσκηση 5:

Ένα ζεύγος παραλλήλων ηλεκτροδίων είναι συνδεδεμένο σε πηγή σταθερής τάσης U. Τα ηλεκτρόδια απέχουν απόσταση s, έχουν πλάτος L, και βάθος d (κάθετα στο σχήμα). Ένα ωμικό υλικό με σταθερή επιτρεπτότητα ε και μεταβλητή ειδική αγωγιμότητα $\sigma(x) = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\,(x / s)$ γεμίζει το χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων. Τα φαινόμενα των άκρων θεωρούνται αμελητέα. (α) Να βρεθεί το δυναμικό στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων. Δυναμικό αναφοράς στο $x = s$. (β) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων. (γ) Να βρεθεί η πυκνότητα ρεύματος στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων. (δ) Να βρεθεί η ηλεκτρική αντίσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων. (ε) Να βρεθούν οι χωρικές και επιφανειακές πυκνότητες φορτίων καθώς και το ολικό χωρικό φορτίο και το ολικό επιφανειακό φορτίο σε κάθε ηλεκτρόδιο.



Άσκηση 6:

Μεταξύ δύο μεγάλων αγώγιμων παραλλήλων πλακών σε απόσταση ℓ (που βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού V_0 όπως φαίνεται στο σχήμα) βρίσκεται μια μεγάλη πλάκα ηλεκτρίτου με χωρικά μεταβαλλόμενη πόλωση $\vec{P} = P_0(\frac{z^2}{d^2})\,\hat{\imath}_z$, όπου P_0 γνωστή σταθερά. Οι διαστάσεις των μεγάλων πλακών και του ηλεκτρίτου στις διευθύνσεις x,y είναι L και w, αντίστοιχα, και είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ℓ και d ώστε το ηλεκτροστατικό πρόβλημα να μπορεί να θεωρηθεί σαν μονοδιάστατο ως προς την διεύθυνση z.

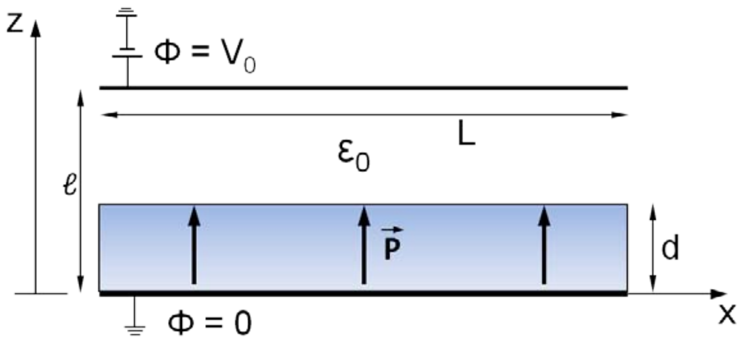
(α) Να βρεθεί το δυναμικό για το τυχαίο σημείο του χώρου μεταξύ των αγώγιμων πλακών.

(β) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο και η διηλεκτρική μετατόπιση για το τυχαίο σημείο του χώρου μεταξύ των αγώγιμων πλακών.

(γ) Να βρεθούν όλα τα επιφανειακά και χωρικά φορτία όπου υπάρχουν.

(δ) Να βρεθεί η χωρητικότητα μεταξύ των δύο αγώγιμων πλακών και να γίνει η γραφική της παράσταση. Για ποια τιμή του δυναμικού μηδενίζεται η χωρητικότητα?

(ε) Αν $P_0 = 10^{-4}$ C/m^2, ℓ =1mm, d = 100μm, V_0 = 10V, να γίνει η γραφική παράσταση του δυναμικού, και του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των δύο αγώγιμων παραλλήλων πλακών. Να γίνει και η γραφική παράσταση της χωρητικότητας αν η απόσταση ℓ μεταβάλλεται μεταξύ 0.85ℓ και 1.15ℓ με όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές.



Άσκηση 7: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [25%]

Μεταξύ δύο μεγάλων αγώγιμων παραλλήλων πλακών σε απόσταση h βρίσκεται μια μεγάλη πλάκα ηλεκτρίτου με πόλωση $\vec{P} = P_0\hat{\imath}_z$, όπου P_0 γνωστή σταθερά. Οι διαστάσεις των μεγάλων πλακών και του ηλεκτρίτου στις διευθύνσεις x,y είναι L και w, αντίστοιχα, και είναι πολύ μεγαλύτερες από τις h και d ώστε το ηλεκτροστατικό πρόβλημα να μπορεί να θεωρηθεί σαν μονοδιάστατο ως προς την διεύθυνση z. Το άνω ηλεκτρόδιο είναι γειωμένο όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δύο πλάκες συνδέονται ηλεκτρικά μέσω της αντίστασης R όπως φαίνεται και στο σχήμα. Αυτή η διάταξη είναι μια απλή περιγραφή του μικροφώνου ηλεκτρίτη όπου το πάνω ηλεκτρόδιο (πλάκα) είναι σε μια μεμβράνη που μπορεί να πάλλεται λόγω των μεταβολών της πίεσης του αέρα λόγω της ομιλίας κάποιου ανθρώπου.

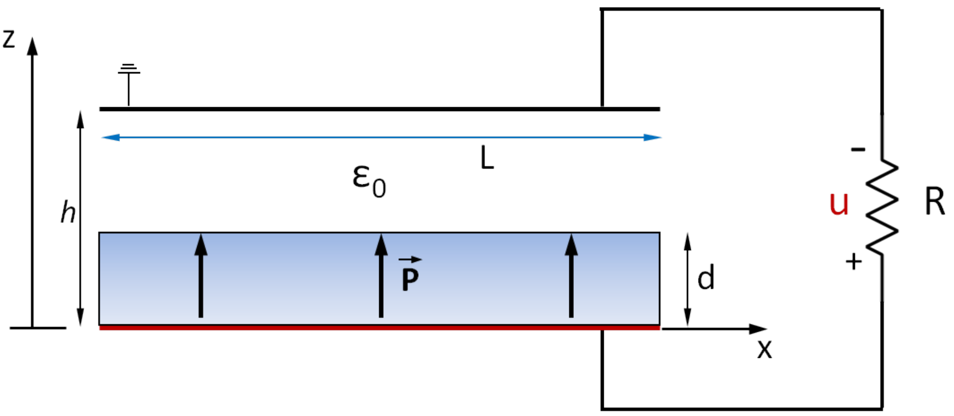
(α) [5%] Να βρεθεί το δυναμικό για το τυχαίο σημείο του χώρου μεταξύ των αγώγιμων πλακών. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο και η διηλεκτρική μετατόπιση για το τυχαίο σημείο του χώρου μεταξύ των αγώγιμων πλακών. Το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο να βρεθούν σαν συναρτήσεις των δεδομένων του προβλήματος και του δυναμικού της κάτω πλάκας u.

(β) [2%] Να βρεθούν όλα τα επιφανειακά και χωρικά φορτία όπου υπάρχουν.

(γ) [3%] Υποθέσετε ότι $h= h(t)$ δηλαδή ότι η απόσταση h μεταβάλλεται με τον χρόνο λόγω κάποιας μεταβολής της πίεσης του αέρα. Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το δυναμικό u(t) πάνω στην αντίσταση R.

(δ) [7%] Υποθέσετε ότι $h(t)=h_0+h_1\cos(\omega t)$, όπου $\omega = 2\pi\nu$, και ν η συχνότητα ταλάντωσης της μεμβράνης. Αν $P_0= 10^{-4}$ C/m^2, h_0 =1mm, h_1 = 0.1mm, d = 20μm, R = 5GΩ, S = Lw =100mm^2, και ν = 1000Hz, να γίνει η γραφική παράσταση του δυναμικού u(t) για τουλάχιστον 25 περιόδους. Η διαφορική εξίσωση έχει χρονομεταβλητούς συντελεστές και μπορεί να λυθεί με την μέθοδο *Runge-Kutta*. Συνίσταται η χρήση της ρουτίνας *ode45* της *matlab*. Η αρχική συνθήκη είναι u(0)=0. Επαναλάβετε για ν = 5000Hz και για τουλάχιστον 80 περιόδους.

(ε) [8%] Χρησιμοποιώντας τα ίδια αριθμητικά δεδομένα με του ερωτήματος (δ) πλην της συχνότητας να βρείτε την απόκριση |U(ν)| του δυναμικού u(t) σαν συνάρτηση της συχνότητας ν για συχνότητες μεταξύ 50Hz-20000Hz. Να χρησιμοποιήσετε λογαριθμική κλίμακα στην επιλογή των σημείων του άξονα των συχνοτήτων. Συνίσταται η χρήση της εντολής *semilogx* της *matlab*. Για κάθε συχνότητα το πλάτος |U(ν)| μπορεί να βρεθεί από την ημιτονοειδή απόκριση της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης στον χρόνο.



Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [35%]

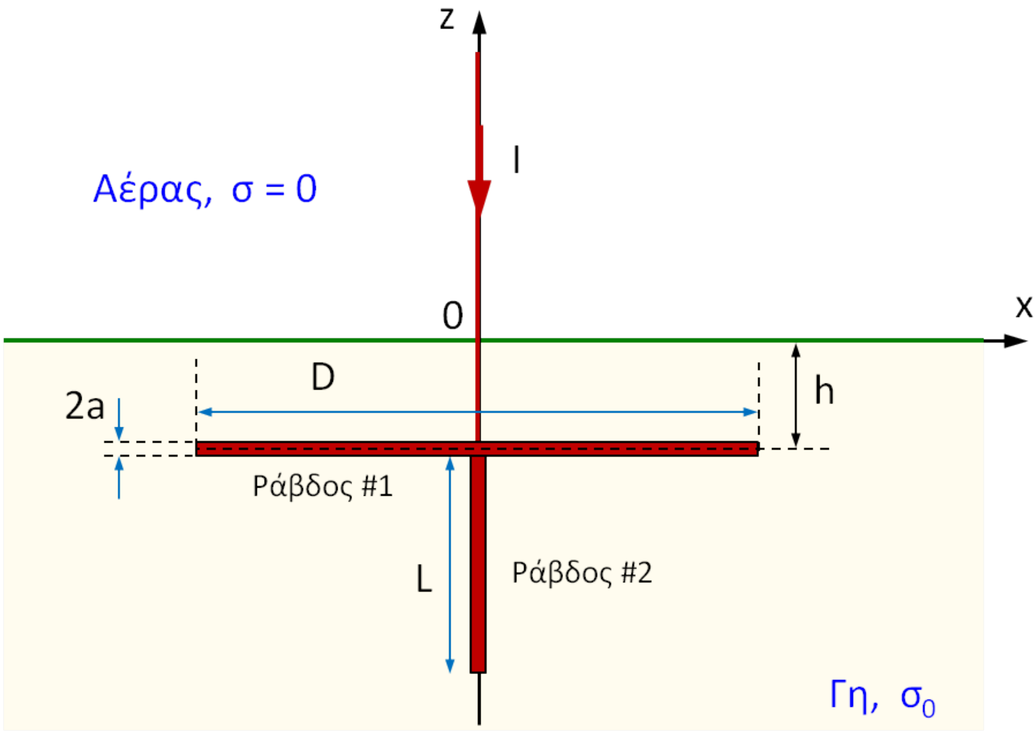
Δίδονται δύο τέλειοι αγώγιμοι κυλινδρικοί ράβδοι, 1 και 2, μήκους D και L αντίστοιχα, και ακτίνας a έκαστος. Οι αγωγοί βρίσκονται θαμμένοι στην γη η οποία θεωρείται σαν ομογενές υλικό με ειδική αγωγιμότητα σ_0. Το κέντρο της ράβδου 1 βρίσκεται σε αποστάση h από την επιφάνεια του εδάφους ($z = 0$). Οι ράβδοι είναι τοποθετημένες στο επίπεδο $y = 0$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο χώρος πάνω από το έδαφος ($z > 0$) είναι αέρας με μηδενική ειδική αγωγιμότητα ($\sigma = 0$). Οι ράβδοι είναι ηλεκτρικά συνδεδεμένοι στην επαφή τους και χρησιμοποιούνται σαν ένα σύστημα γείωσης μεταλλικών διατάξεων-συσκευών και μέσω αυτής συνεχές ρεύμα $\boldsymbol{I}$ διαχέεται μέσα στο έδαφος όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) [10%] Χωρίσετε την κάθε ράβδο σε N ίσα τμήματα (μήκους L_i/N έκαστο i = 1,2) υποθέτοντας ότι από κάθε τμήμα διαχέεται σταθερή πυκνότητα ρεύματος. Χρησιμοποιείστε την **μέθοδο των ροπών** για να βρείτε την κατανομή του ρεύματος που διαχέεται από τις δύο ράβδους στο έδαφος χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο. Να βρεθεί αρχικά ο πίνακας των αμοιβαίων αντιστάσεων (**VDF** παράγοντες) μεταξύ των τμημάτων των δύο ράβδων. Μετά βρείτε την κατανομή του ρεύματος. Χρησιμοποιήσετε αριθμητικές τιμές όπου $N = 3$, a = 0.004m, $D = L$ = 1.2m, h = 0.75m, σ_0 = 1/150 (1/Ωm), και I = 400A. Αριθμήστε τα τμήματα από τα αριστερά προς τα δεξιά αρχικά για την οριζόντια ράβδο και μετά από κάτω προς τα πάνω για την κατακόρυφη ράβδο. **Μην κάνετε τις πράξεις χωρίς την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή**.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):

(β) [10%] Να βρεθεί το δυναμικό των ράβδων όπως και η αντίσταση γείωσης της διάταξης για τις παραμέτρους του ερωτήματος (α). Επίσης να βρεθεί και το δυναμικό πάνω στο έδαφος στο σημείο Ο (αρχή των αξόνων, $x = 0, y = 0, z = 0$). Να γίνει γραφική παράσταση του δυναμικού του εδάφους (θεωρώντας $z = y = 0$) με x στο διάστημα [-40m, 40m].

(γ) [15%] Επαναλάβατε το ερώτημα (β) για αριθμό ίσων τμημάτων για κάθε ράβδο L_i/N, όπου N = 5-75 με διαστήματα 5 τμημάτων (5, 10, 15, …). Παρουσιάσετε τα αποτελέσματά σας σε ένα πίνακα και κάνετε και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.



Άσκηση 9: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [40%]

Δίδονται μια τέλεια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας $b \ll D,L,h,h_0$ και μια τέλεια αγώγιμη κυλινδρική ράβδος, μήκους L και ακτίνας a ($a \ll D,L,h,h_0$). Η σφαίρα και η ράβδος βρίσκονται πάνω από ένα άπειρο γειωμένο αγώγιμο επίπεδο. Τα κέντρα της σφαίρας και της ράβδου δίδονται από τις συντεταγμένες $(0, 0, h_0)$ και $(D, 0, h)$, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τόσο η σφαίρα όσο και η ράβδος βρίσκονται στο επίπεδο xz ($y = 0$). Η ράβδος είναι προσανατολισμένη κατακόρυφα. Η επιτρεπτότητα είναι παντού η επιτρεπτότητα του κενού $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ F/m. Οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων είναι οι εξής: $a = 0.005$m, $b = 0.01$m, $h_0 = h = 1$m, $L = 0.8$m και $D = 0.5$m.

(α) [10%] Να βρεθεί με την χρήση της μεθόδου των ροπών ο πίνακας **A** (με στοιχεία A_{ij}) χωρίζοντας την ράβδο σε ίσο αριθμό τμημάτων N. Να υπολογιστούν όλα τα στοιχεία του πίνακα **A** για $N = 2$ στην κανονικοποιημένη μορφή $\varepsilon_0 A_{ij}$.

(β) [25%] Να βρεθούν οι συντελεστές δυναμικού p_{11}, p_{12}, p_{21}, και p_{22}, για τυχαίο N. Για τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος να βρεθούν οι συντελεστές δυναμικού στην μορφή $\varepsilon_0 p_{11}$, $\varepsilon_0 p_{12}$, $\varepsilon_0 p_{21}$, και $\varepsilon_0 p_{22}$, για $N = 2, 10, 20, 30, 40, 50,$ και 100. Να δοθούν οι τιμές σε μορφή πίνακα:

N	$\varepsilon_0 p_{11}$	$\varepsilon_0 p_{12}$	$\varepsilon_0 p_{21}$	$\varepsilon_0 p_{22}$
2				
10				
20				
30				
40				
50				
100				

(γ) [5%] Αρχικά η ράβδος είναι αφόρτιστη και η σφαίρα φορτίζεται με φορτίο 10pC (1pC = 10^{-12} C). Κατόπιν η σφαίρα και η ράβδος συνδέονται με λεπτό αγώγιμο σύρμα έως ότου αποκτήσουν κοινό δυναμικό. Να βρεθεί το κοινό δυναμικό των δύο αγώγιμων σωμάτων σε volts.