ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LAPLACE ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ:

Η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών χρησιμοποιείται για την επίλυση διαφοριών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Μιά τέτοια εξίσωση είναι και η εξίσωση του Laplace $\nabla^2\Phi = 0$. Αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης Laplace της μορφής $\Phi_j(s_1, s_2, s_3) = S_{1j}(s_1)\, S_{2j}(s_2)\, S_{3j}(s_3)$ όπου $(s_1, s_2, s_3) = \{(x,y,z),$ ή (r_T, φ, z), ή $(r,\theta,\varphi)\}$. Ετσι η γενική μορφή της λύσης μπορεί να γραφεί σαν $\Phi = \sum_j A_j \Phi_j = \sum_j A_j S_{1j}(s_1) S_{2j}(s_2) S_{3j}(s_3)$. Οι συντελεστές A_j επιλέγονται ώστε το δυναμικό Φ να ικανοποιεί όλες τις οριακές συνθήκες. Η άθροιση μπορεί νά εχει είτε άπειρο είτε πεπερασμένο πλήθος όρων.

Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Διδιάστατα προβλήματα: Ας υποθέσουμε μόνο εξάρτηση του Φ από τις συντεταγμένες x,y και ανεξαρτησία ως προς z. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση του Laplace παίρνει την μορφή:

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

Έστω ότι $\Phi(x,y) = X(x)\,Y(y)$ η μορφή της λύσης που αναζητούμε. Τότε

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

Για να ικανοποιείται η προηγούμενη εξίσωση πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \pm k^2 = k_x \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \mp k^2 = k_y$$ με k^2 μιά σταθερά $(k \geq 0)$.

Επομένως η λύση των διαφοριών εξισώσεων είναι η ακόλουθη:

$$\frac{d^2X}{dx^2} \mp k^2 X = 0$$

(α) $k^2 = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 x + A_2$

(β) $k_x = -k^2 < 0 \rightsquigarrow \frac{d^2X}{dx^2} + k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 e^{jkx} + A_2 e^{-jkx}$ ή

$$X(x) = A_1' \sin(kx) + A_2' \cos(kx)$$

(γ) $k_x = k^2 > 0 \rightarrow \frac{d^2X}{dx^2} - k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}$ ή

$$X(x) = A_1' \sinh(kx) + A_2' \cosh(kx)$$

Αντίστοιχες λύσεις μπορούν να βρεθούν και για την $Y(y)$. Επειδή όμως $k_x + k_y = 0$ η αντιστοιχία με τις ανωτέρω περιπτώσεις είναι η ακόλουθη:

(α) $k = 0 \Rightarrow k_y = 0 \Rightarrow Y(y) = B_1 y + B_2$

(β) $k_x = -k^2 < 0 \rightarrow k_y = -k_x = +k^2 > 0 \Rightarrow \frac{d^2Y}{dy^2} - k^2 Y = 0 \Rightarrow$

$$Y(y) = B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky} \quad \text{ή} \quad Y(y) = B_1' \sinh(ky) + B_2' \cosh(ky)$$

(γ) $k_x = +k^2 > 0 \sim k_y = -k_x = -k^2 < 0 \Rightarrow \frac{d^2Y}{dy^2} + k^2 Y = 0 \Rightarrow$

$$Y(y) = B_1 e^{jky} + B_2 e^{-jky} \quad \text{ή} \quad Y(y) = B_1' \sin(ky) + B_2' \cos(ky)$$

Συνεπώς το δυναμικό $\Phi(x,y)$ μπορεί να εκφρασθεί ως γινόμενο $\Phi(x,y) = X(x)\,Y(y)$ με μόνες αποδεκτές μορφές:

$$\Phi(x,y) = (A_1 x + A_2)(B_1 y + B_2) \qquad \text{αν} \quad k = 0$$

$$\Phi(x,y) = (A_1 e^{jkx} + A_2 e^{-jkx})(B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}) \qquad \text{αν} \quad k_x = -k^2 = -k_y$$

$$\Phi(x,y) = (A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx})(B_1 e^{jky} + B_2 e^{-jky}) \qquad \text{αν} \quad k_x = +k^2 = -k_y$$

όπου αντί των $\{e^{jkx}, e^{-jkx}\}$ και $\{e^{kx}, e^{-kx}\}$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι βάσεις $\{\sin(kx), \cos(kx)\}$ καί $\{\sinh(kx), \cosh(kx)\}$ και αντίστοιχα ως προς y.

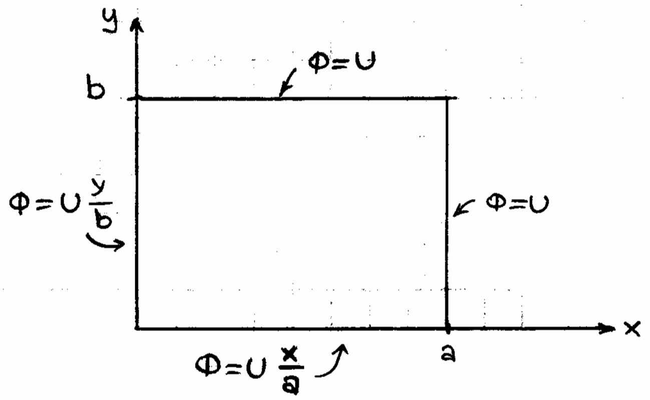
Η λύση της εξίσωσης του Laplace σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα θα είναι της μορφής $\Phi(x,y) = \sum_j X_j(x)\, Y_j(y)$

Για να έχουμε λύσεις με "λίγους" όρους θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες:

- Οι οριακές συνθήκες να είναι συνεχείς
- Να εμφανίζονται αποδεκτές συναρτήσεις (συναρτήσεις βάσης) στις οριακές συνθήκες

Διαφορετικά το ανωτέρω άθροισμα θα περιέχει ένα άπειρο πλήθος όρων.

<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του ορθογωνίου του σχήματος το οποίο έχει άπειρο μήκος στην κατεύθυνση z.



Λόγω της απείρου διάστασης κατά μήκος του z το δυναμικό θα είναι συνάρτηση μόνο των x, y. Επομένως $\Phi(x,y) = X(x)\,Y(y)$

Ας εξετάσουμε την συνέχεια των οριακών συνθηκών:

$$\Phi(0,b) = U = \Phi(0, y\to b) = U\frac{b}{b} = U$$

$$\Phi(a,0) = U = \Phi(x\to a, 0) = U\frac{a}{a} = U$$

$$\Phi(0, y\to 0) = 0 = \Phi(x\to 0, 0)$$

Οπότε οι οριακές συνθήκες είναι συνεχείς. Επιπλέον οι συνοριακές συνθήκες περιέχουν τις συναρτήσεις βάσης $\{x, 1\}$ και $\{y, 1\}$. Επομένως αναμένεται το Φ να έχει "λίγους" όρους.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η λύση μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο των βάσεων $\{x, 1\}$ και $\{y, 1\}$. Άρα

$$\Phi(x,y) = (A_1 x + A_2)(B_1 y + B_2) = A xy + B x + \Gamma y + \Delta$$

Οι συντελεστές θα βρεθούν από τις οριακές συνθήκες.

$$\Phi(x,0) = U\frac{x}{a} = Bx + \Delta \Rightarrow B = \frac{U}{a}, \ \Delta = 0$$

$$\Phi(0,y) = U\frac{y}{b} = \Gamma y + \Delta \Rightarrow \Gamma = \frac{U}{b}, \ \Delta = 0$$

$$\Phi(x,b) = U = A x b + B x + \Gamma b = (Ab + B)x + \Gamma b$$

$Ab + B = 0 \Rightarrow A = -B/b = -U/ab$

$\Gamma b = U \Rightarrow \Gamma = U/b$ όπως και πριν.

Τέλος $\Phi(a,y) = U = Aay + Ba + \Gamma y \Rightarrow$

$Aa + \Gamma = 0 \Rightarrow -\frac{U}{ab}a + \frac{U}{b} = 0$ (ικανοποιείται)

$Ba = U \Rightarrow B = U/a$ όπως και πρίν.

Επομένως όλες οι οριακές συνθήκες είναι συμβατές και η μοναδική λύση είναι η

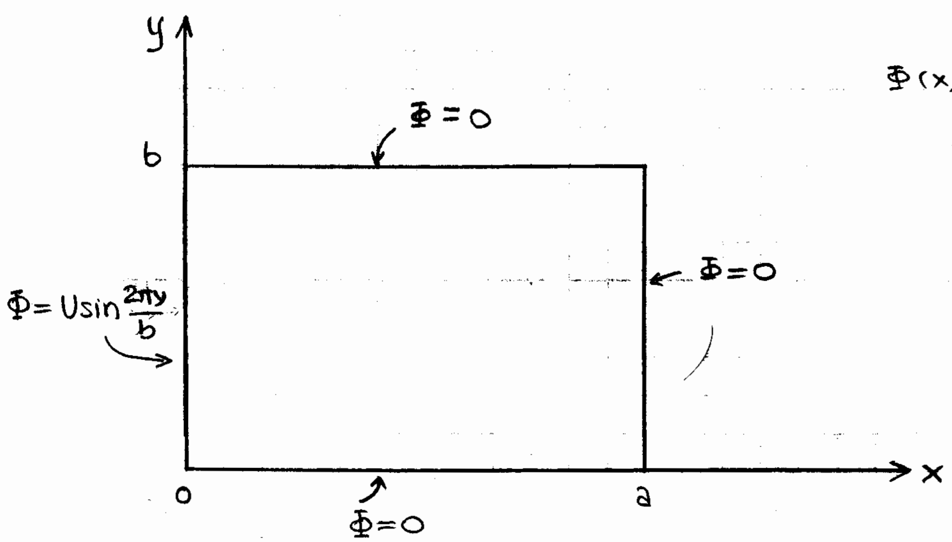
$$\Phi(x,y) = -\frac{U}{ab}xy + \frac{U}{a}x + \frac{U}{b}y \qquad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

Αν κάποια από τις συνθήκες δεν ικανοποιείται τότε το Φ θα πρέπει να έχει περισσότερους όρους.

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i}_x - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{i}_y =$

$$= \frac{U}{a}\left(\frac{y}{b}-1\right)\hat{i}_x + \frac{U}{b}\left(\frac{x}{a}-1\right)\hat{i}_y$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του ορθογωνίου απείρου μήκους με τις συνθήκες του σχήματος.



$\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$

Ας εξετάσουμε πρώτα την συνέχεια των οριακών συνθηκών.

$$\Phi(0, y\to b) = U \sin\left(\frac{2\pi b}{b}\right) = 0 = \Phi(0,b)$$

$$\Phi(0, y\to 0) = U \sin\left(\frac{2\pi 0}{b}\right) = 0 = \Phi(0,0)$$

Επομένως το δυναμικό θα πρέπει να έχει "λίγους" όρους. Άρα είναι λογικό να θεωρήσουμε σαν $Y(y) = B_1 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)$ οπου $k = 2\pi/b$ και $k_y = -k^2 < 0$ και άρα $k_x = -k_y = k^2 > 0$ και η λύση της $X(x)$ είναι η $X(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}$. Επομένως η λύση για το δυναμικό είναι $\Phi(x,y) = (A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}) B_1 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \Rightarrow$

$$\Phi(x,y) = \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\left(A e^{kx} + B e^{-kx}\right) \qquad k = 2\pi/b$$

$$\Phi(x,0) = 0 = \sin\left(\frac{2\pi 0}{b}\right)\left(Ae^{kx} + Be^{-kx}\right) = 0$$

$$\Phi(x,b) = 0 = \sin\left(\frac{2\pi b}{b}\right)\left(Ae^{kx} + Be^{-kx}\right) = 0$$

$$\Phi(x=a, y) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\left(Ae^{ka} + Be^{-ka}\right) = 0 \Rightarrow Ae^{ka} + Be^{-ka} = 0$$

$$\Phi(x=0, y) = U\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) = \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)(A+B) \Rightarrow A + B = U$$

Επιλύοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις ως προς A και B έχουμε

$$A = \frac{U}{\mathcal{D}} e^{-ka}, \quad B = -\frac{U}{\mathcal{D}} e^{+ka}, \quad \mathcal{D} = -2\sinh(ka), \quad k = 2\pi/b$$

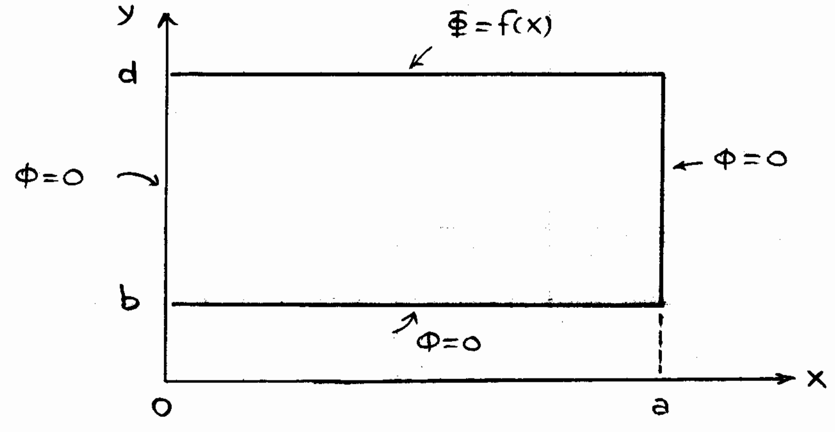
Επομένως το δυναμικό $\Phi(x,y)$ δίδεται από την σχέση:

$$\Phi(x,y) = -\frac{U}{\sinh(2\pi a/b)} \sinh\left(\frac{2\pi}{b}(x-a)\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b} y\right) \qquad 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$$

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{2\pi U}{b\sinh\left(\frac{2\pi a}{b}\right)} \left\{ \cosh\left(\frac{2\pi}{b}(x-a)\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\hat{i}_x + \sinh\left(\frac{2\pi}{b}(x-a)\right)\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\hat{i}_y \right\}$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του ορθογωνίου απείρου μήκους με τις συνθήκες του σχήματος.



Στην περίπτωση αυτή οι συνοριακές συνθήκες είναι δυνατόν να παρουσιάζουν ασυνέχειες ή η f(x) να μην έχει την μορφή των αποδεκτών συναρτήσεων (βάσεων).

Εφόσον $X(x=0) = X(x=a) = 0$. Αν $X(x) = A_1 \sin(kx) + A_2 \cos(kx)$ τότε $A_2 = 0$. Επομένως $X(x) = A_1 \sin(kx)$. Εφόσον $X(a) = 0 \Rightarrow$ $\sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ Εφόσον $-k^2 = k_x < 0$ $k_y = k^2 > 0$ και η λύση $Y(y)$ είναι της μορφής

$$Y(y) = B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}$$

Όμως $Y(b) = 0 \Rightarrow B_1 e^{kb} + B_2 e^{-kb} = 0 \Rightarrow B_2 = -B_1 e^{+2kb}$.

Άρα $Y(y) = B_1 e^{kb} \left[e^{k(y-b)} - e^{-k(y-b)} \right] = 2B_1 e^{kb} \sinh(k(y-b))$

$$= B_1' \sinh(k(y-b)).$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης Laplace που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες για $x = 0, a$, και $y = b$ είναι της μορφής.

$$\Phi_n = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right) \qquad C_n = A_1 B_1', \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Κάθε μιά από τις λύσεις αυτές έχει ημιτονική μορφή και δεν ικανοποιεί την συνθήκη για $y = d$. Όμως οι συναρτήσεις $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ είναι ορθογώνιες συναρτήσεις στο $(0, a)$ [δηλαδή $\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right)dx = 0$ όταν $n \neq n'$] και επιπλέον αποτελούν πλήρη βάση για κάθε συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $(0, a)$. Επομένως η λύση της εξίσωσης Laplace θα αναζητηθεί σαν υπέρθεση των λύσεων Φ_n. Η υπέρθεση θα ικανοποιεί και πάλι τόσο την εξίσωση του Laplace όσο και τις συνοριακές συνθήκες στα $x=0, a$ και $y=b$. Επομένως δοκιμάζουμε σαν λύση την ακόλουθη μορφή του Φ:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

Για να ικανοποιηθεί η συνθήκη $\Phi(x, y=d) = f(x)$ θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(d-b)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

στο διάστημα $(0, a)$. Επομένως οι συντελεστές D_n είναι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $(0, a)$. Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ στο $(0, a)$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τούς D_n.

$$\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \sum_n D_n \delta_{nm} \frac{a}{2} =$$
$$= D_m \frac{a}{2}$$

Επομένως $D_m = \dfrac{2}{a} \displaystyle\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx$ και

$$C_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(d-b)\right)} \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{i}_x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{i}_y \Rightarrow$

$$\vec{E} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} C_n \left\{ \left[\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)\right] \hat{i}_x + \left[\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right) \hat{i}_y\right] \right\}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $f(x) = U$ $(0 < x < a)$

$$D_m = \frac{2U}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \begin{cases} \dfrac{4U}{m\pi} & m = 2\ell+1 \\ 0 & m = 2\ell \end{cases} \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

και $$\Phi = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left(\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(d-b)\right)} \right)$$

Τώρα ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι συνοριακές συνθήκες για $x=0, a$ είναι της μορφής $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x=0)=0$ και $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x=a)=0$. (Συνθήκες Neumann).

Έστω $X(x)=A_1\cos(kx)+A_2\sin(kx) \Rightarrow$

$$\frac{dX}{dx}=-kA_1\sin(kx)+kA_2\cos(kx)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_0=0 \Rightarrow \left.\frac{dX}{dx}\right|_0=0 \Rightarrow A_2=0$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_a=0 \Rightarrow \left.\frac{dX}{dx}\right|_a=0 \Rightarrow -kA_1\sin(ka)=0 \Rightarrow ka=n\pi \Rightarrow k=\frac{n\pi}{a} \Rightarrow$$

$$X(x)=A_1\cos(kx)=A_1\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad n=0,1,2,\dots$$

Επομένως $k_x=-k^2<0$ και $k_y=k^2>0 \Rightarrow Y(y)=B_1e^{ky}+B_2e^{-ky}$

Αφού $Y(y=b)=0 \Rightarrow Y(y)=B\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$ όπως και πριν.

Επομένως για να ικανοποιήσουμε και την συνθήκη $\Phi(x,y=d)=f(x)$ δουλεύουμε και πάλι την λύση του άπειρου αθροίσματος.

$$\Phi=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

όπου αμελούμε την $n=0$ λύση αν $\int_0^a f(x)\,dx=0$ δηλαδή αν ο μέσος όρος της $f(x)$ στο διάστημα $(0,a)$ είναι μηδενικός. Οι συντελεστές μπορούν να βρεθούν από την συνοριακή συνθήκη:

$$\Phi(x,y=d)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(d-b)\right) \Rightarrow$$

$$D_m=C_m\sinh\left(\frac{m\pi}{a}(d-b)\right)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx \qquad m=1,2,\dots$$

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}C_n\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)\hat{i}_x-\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)\hat{i}_y\right\}$$

Αν για παράδειγμα $f(x)=U\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)$, $0<x<a$. Τότε $\int_0^a f(x)\,dx=0$.

$$D_m=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx=\begin{cases}-4U/m^2\pi^2 & m=2\ell+1,\ \ell=0,1,2,\dots\\ 0 & m=2\ell,\ \ell=0,1,2,\dots\end{cases}$$

και $$\Phi=-\frac{4U}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\dots}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)}{n^2\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(d-b)\right)}$$

Τώρα ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου $\int_0^a f(x)\,dx = U' \neq 0$. Ας θεωρήσουμε ότι το δυναμικό $\Phi(x, y=d) = U'$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να θεωρήσουμε την λύση για $n=0 \Rightarrow k=0 \Rightarrow k_x = k_y = 0$. Σε αυτή την περίπτωση $X(x) = A_1 x + A_2$ και $Y(y) = B_1 y + B_2$.

Όμως $\left.\frac{dX}{dx}\right|_0 = A_1 = 0$ και $\left.\frac{dX}{dx}\right|_a = A_1 = 0$ οπότε η λύση είναι της μορφής

$$\Phi(x,y) = A_2(B_1 y + B_2) = C_1 y + C_2$$

Όμως

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,y=b) = 0 &\Rightarrow C_1 b + C_2 = 0 \\ \Phi(x,y=d) = U' &\Rightarrow C_1 d + C_2 = U' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= U'/d-b \\ C_2 &= -U'b/d-b \end{aligned}$$

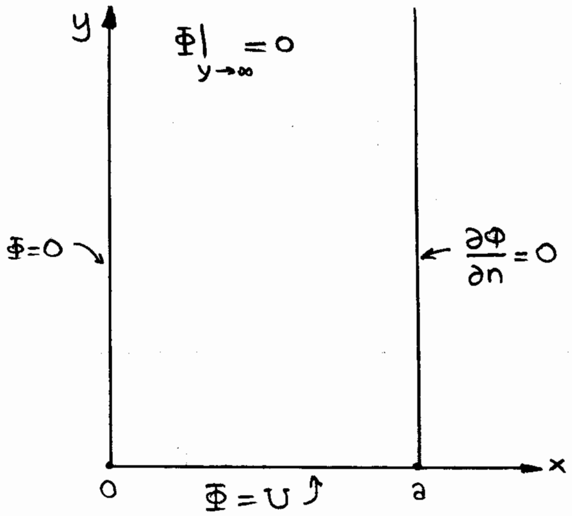
οπότε $\Phi(x,y) = \frac{U'}{d-b}(y-b)$ και $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{U'}{d-b}\hat{i}_y$

Αυτή η λύση πρέπει να προστεθεί στην γενική λύση:

$$\Phi(x,y) = \frac{U'}{d-b}(y-b) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$ όπου

οι συντελεστές C_n υπολογίζονται όπως και προηγουμένως.

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της διάταξης του κάτωθι σχήματος.



Στα σημεία $x=y=0$ και $x=a, y=0$ έχουμε ασυνέχεια δυναμικού διότι

$\Phi(x=0, y\to 0)=0 \neq \Phi(x\to 0, y=0)=U$

$\Phi(x=a, y\to 0)=0 \neq \Phi(x\to a, y=0)=U$

Συνεπώς θα αναζητηθεί λύση με την μορφή σειράς.

Για $x=0$ και $x=a$ έχουμε ομογενείς συνθήκες. Έστω $X(x)=A_1\cos(kx)+A_2\sin(kx)$

$X(0)=0=A_1$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_a=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_a=0 \Rightarrow \left.\frac{dX}{dx}\right|_a=0 \Rightarrow A_2 k\cos(ka)=0 \Rightarrow ka=(n-\tfrac{1}{2})\pi \Rightarrow$$
$$k=(n-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{a}, \quad n=1,2,..$$

Άρα $k_x=-k^2<0$ και $k_y=k^2>0 \Rightarrow Y(y)=B_1e^{ky}+B_2e^{-ky}$

Όμως $Y(y\to\infty)\to 0 \Rightarrow B_1=0$. Επομένως για να ικανοποιήσουμε και την τελευταία συνοριακή συνθήκη θα θεωρήσουμε την σειρά

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left((n-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{a}x\right)e^{-(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}y}$$

Η συνοριακή συνθήκη $\Phi(x,y=0)=U=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left[(n-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{a}x\right]=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \qquad k_n=(n-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{a}$$

$$\int_0^a \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,dx=\begin{cases}\frac{a}{2} & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

Επομένως $C_m\frac{a}{2}=\int_0^a U\sin(k_m x)\,dx=U\frac{1}{k_m}(1-\cos(k_m a))=\frac{U}{k_m}$

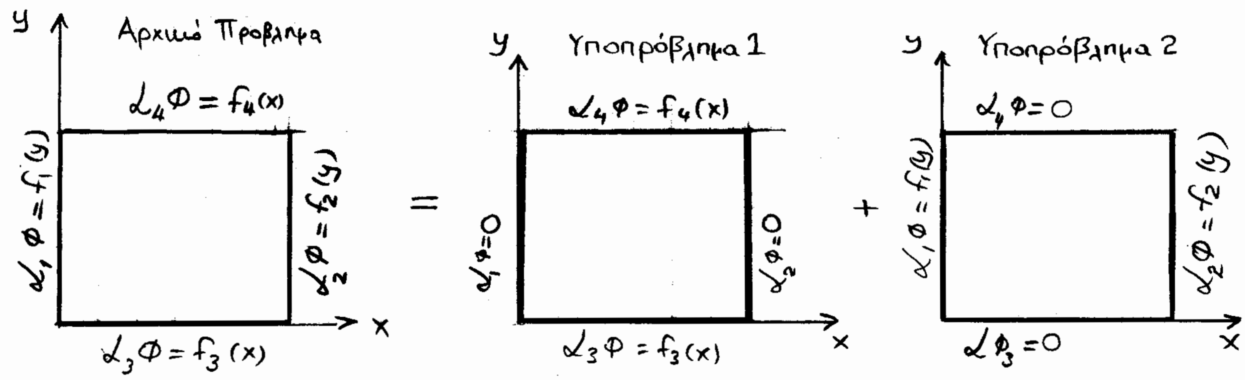
$$\rightarrow C_m=\frac{2U}{k_m a}=\frac{2U}{(m-\frac{1}{2})\pi}=\frac{4U}{(2m-1)\pi} \qquad m=1,2,..$$

Επομένως $\Phi(x,y)=\frac{4U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(n-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{a}x\right]e^{-[(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}y]}$

Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί από την σχέση $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi$.

Διδιάστατες Λύσεις με μορφή σειράς:

Όταν εμφανίζονται ασυνέχειες στις οριακές συνθήκες (ή δεν εμφανίζονται αποδεκτές συναρτήσεις) τότε η λύση του προβλήματος οριακών τιμών σε απλές διατάξεις μπορεί να εκφρασθεί ως σειρά. Οι οριακές συνθήκες στο ορθογώνιο $0<x<a$, $0<y<b$ θα πρέπει να είναι είτε συνθήκες Dirichlet ($\Phi|_S = f$), είτε συνθήκες Neumann ($\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_S = f$) είτε μικτές (συνδιασμός Dirichlet και Neumann). Το αρχικό πρόβλημα χωρίζεται σε δύο υποπροβλήματα όπου οι αντιμέτωπες έδρες έχουν ομογενείς οριακές συνθήκες.



Οι ομογενείς συνθήκες του κάθε υποπροβλήματος χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν τους γραμμικούς συνδιασμούς $\{\sin(k_n w), \cos(k_n w)\}$ $(w=x,y)$ και τις αντίστοιχες τιμές k_n. Οι μη ομογενείς οριακές συνθήκες χρησιμοποιούνται για την εύρεση των λοιπών αγνώστων συντελεστών της σειράς.

Διδιάστατες (πολικές) Συντεταγμένες:

Όταν οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται σε κυλινδρικές επιφάνειες, ή σε επίπεδα με σταθερή γωνία φ τότε είναι προτιμότερο να αναζητηθεί η λύση της εξίσωσης του Laplace σε πολικές συντεταγμένες. (χωρίς εξάρτηση από το z, $\frac{\partial}{\partial z}=0$). Η Λαπλασιανή σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \quad \frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}\left(r_T\frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\right) + \frac{1}{r_T^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Ας δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $\Phi = R_T(r_T)\,F(\varphi)$. Τότε η Λαπλασιανή γράφεται στην μορφή:

$$r_T^2\,\frac{\nabla^2\Phi}{\Phi} = \frac{r_T}{R}\frac{d}{dr_T}\left(r_T\frac{dR}{dr_T}\right) + \frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\varphi^2} = 0,$$

οπότε

$$\frac{r_T}{R}\frac{d}{dr_T}\left(r_T\frac{dR}{dr_T}\right) = K_T \quad \text{και} \quad \frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\varphi^2} = K_\varphi \quad \text{με} \quad K_T + K_\varphi = 0.$$

Ας κοιτάξουμε πρώτα τις συναρτήσεις F:

$K_\varphi = 0$: $\;\rightsquigarrow\;$ $F(\varphi) = A_1\varphi + A_2$ και επομένως οι βασικές συναρτήσεις είναι $\{\varphi, 1\}$.

$K_\varphi = -m^2 < 0$ $\;\rightsquigarrow\;$ $F(\varphi) = A_1\sin(m\varphi) + A_2\cos(m\varphi)$ ή
$A_1' e^{jm\varphi} + A_2' e^{-jm\varphi}$ και οι βασικές συναρτήσεις είναι $\{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\}$ ή $\{e^{jm\varphi}, e^{-jm\varphi}\}$.

Αν υπάρχουν συνθήκες περιοδικότητας $F(\varphi+2\pi) = F(\varphi)$ τότε m είναι ακέραιος.

$K_\varphi = m^2 > 0$ $\;\rightsquigarrow\;$ $F(\varphi) = A_1\sinh(m\varphi) + A_2\cosh(m\varphi)$ ή
$A_1' e^{m\varphi} + A_2' e^{-m\varphi}$ με βασικές συναρτήσεις τις $\{\sinh(m\varphi), \cosh(m\varphi)\}$ ή $\{e^{m\varphi}, e^{-m\varphi}\}$. Όταν $K_\varphi > 0$ δεν μπορεί να υπάρχουν συνθήκες περιοδικότητας ως προς φ.

Εύχρηστοι συνδυασμοί για $F(\varphi_0)=0$ είναι:

$K_\varphi = 0 \rightsquigarrow F(\varphi) = \varphi - \varphi_0$

$K_\varphi = -m^2 \rightsquigarrow F(\varphi) = \sin(m(\varphi-\varphi_0))$

$K_\varphi = m^2 \rightsquigarrow F(\varphi) = \sinh(m(\varphi-\varphi_0))$

και για $\frac{d}{d\varphi}F\Big|_{\varphi_0} = 0$

$K_\varphi = 0 \rightsquigarrow F(\varphi) = 1$

$K_\varphi = -m^2 \rightsquigarrow F(\varphi) = \cos(m(\varphi-\varphi_0))$

$K_\varphi = m^2 \rightsquigarrow F(\varphi) = \cosh(m(\varphi-\varphi_0))$

Συναρτήσεις R_T :

Εφόσον $K_T = -K_\varphi$ έχουμε τις ακόλουθες λύσεις:

$K_T = -K_\varphi = 0 \rightsquigarrow R_T(r_T) = B_1 \ln r_T + B_2$ και οι βασικές συναρτήσεις είναι $\{1, \ln r_T\}$

$K_T = -K_\varphi = m^2 > 0 \rightarrow R_T(r_T) = B_1 r_T^{m} + B_2 r_T^{-m}$ και οι βασικές συναρτήσεις είναι $\{r^m, r^{-m}\}$

$K_T = -K_\varphi = -m^2 < 0 \rightsquigarrow R_T(r_T) = B_1 e^{jm\ln r_T} + B_2 e^{-jm\ln r_T}$ ή

$= B_1' \sin(m\ln r_T) + B_2' \cos(m \ln r_T)$ και οι βασικές συναρτήσεις είναι : $\{\sin(m\ln r_T), \cos(m\ln r_T)\}$

ή $\{e^{jm\ln r_T}, e^{-jm\ln r_T}\}$

Εύχρηστοι συνδυασμοί για $R_T(r_{T0}) = 0$ είναι:

$K_T = 0 \rightsquigarrow R_T(r_T) = \ln(r_T/r_{T0})$

$K_T = m^2 \rightsquigarrow R_T(r_T) = \left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)^m - \left(\frac{r_{T0}}{r_T}\right)^m$

$K_T = -m^2 \rightsquigarrow R_T(r_T) = \sin(m\ln(r_T/r_{T0}))$

ενώ για $\frac{d}{dr_T} R_T\Big|_{r_{T0}} = 0$ είναι:

$K_T = 0 \rightsquigarrow R_T(r_T) = 1$

$K_T = +m^2 \rightsquigarrow R_T(r_T) = \left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)^m + \left(\frac{r_{T0}}{r_T}\right)^m$

$K_T = -m^2 \sim R_T(r_T) = \cos\left(m \ln\left(r_T/r_{T0}\right)\right)$

Ανακεφαλαιώνοντας οι αποδεκτές λύσεις για το δυναμικό $\Phi(r_T,\varphi) = R_T(r_T)\,F(\varphi)$ είναι :

$$\Phi(r_T,\varphi) = (A_1\varphi + A_2)\,(B_1 \ln r_T + B_2) \qquad \text{όταν} \quad K_\varphi = K_T = 0$$

$$\Phi(r_T,\varphi) = \left[A_1 \sin(m\varphi) + A_2 \cos(m\varphi)\right]\left[B_1 r_T^{\,m} + B_2 r_T^{-m}\right] \qquad K_\varphi = -m^2 = -K_T$$

$$\Phi(r_T,\varphi) = \left[A_1 \sinh(m\varphi) + A_2 \cosh(m\varphi)\right]\left[B_1 \sin(m \ln r_T) + B_2 \cos(m \ln r_T)\right]$$

$$\text{όταν} \quad K_\varphi = m^2 = -K_T$$

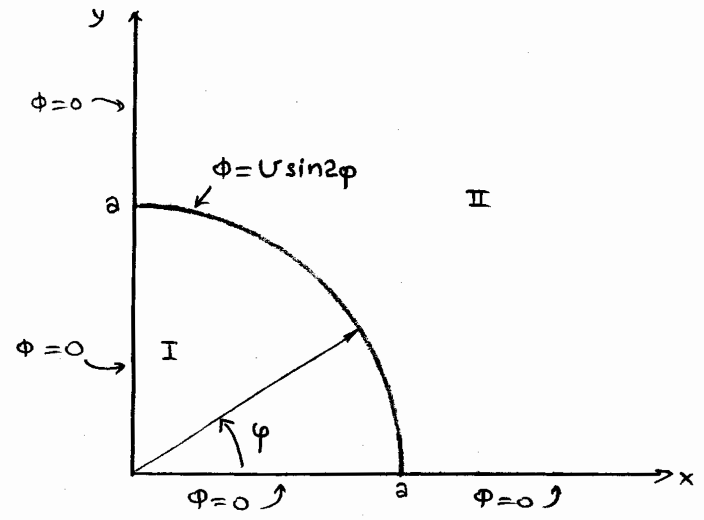
Η λύση της εξίσωσης Laplace σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα θα είναι της μορφής $\Phi(r_T,\varphi) = \sum_j R_{Tj}(r_T)\,F_j(\varphi)$.

Για να έχουμε λύσεις με "λίγους" όρους θα πρέπει να ισχύουν και πάλι οι ίδιες συνθήκες που ίσχυαν και για τις καρτεσιανές συντεταγμένες:

- οι οριακές συνθήκες να είναι συνεχείς
- Να εμφανίζονται αποδεκτές συναρτήσεις (συναρτήσεις βάσης) στις οριακές συνθήκες.

Διαφορετικά το άθροισμα θα περιέχει άπειρους όρους.

<u>Παράδειγμα</u> Να βρεθεί το δυναμικό Φ στην περιοχή $0<\varphi<\pi/2$ με τις οριακές συνθήκες που δίδονται στο σχήμα.



Επειδή $U\sin 2\varphi \to 0$ όταν $\varphi \to 0$ ή $\varphi \to \pi/2$ οι οριακές συνθήκες παρουσιάζουν συνέχεια. Επίσης $\sin 2\varphi$ είναι μια από τις βασικές συναρτήσεις που εμφανίζεται σαν οριακή συνθήκη. Επομένως η λύση Φ θα περιέχει "λίγους" όρους.

Για την λύση του προβλήματος θεωρούμε δύο περιοχές I και II.

Περιοχή I: $r_T < a$, $0<\varphi<\pi/2$. Εφόσον $\Phi(r_T=a) = U\sin 2\varphi$ είναι λογικό να θεωρήσουμε $F(\varphi) = \sin 2\varphi \sim m=2$ και $K_\varphi = -m^2 = -4 < 0$

Επομένως $R(r_T) = B_1 r_T^2 + B_2 r_T^{-2}$. Αφού όμως $\Phi(r_T=0)=0 \leadsto B_2 = 0$.

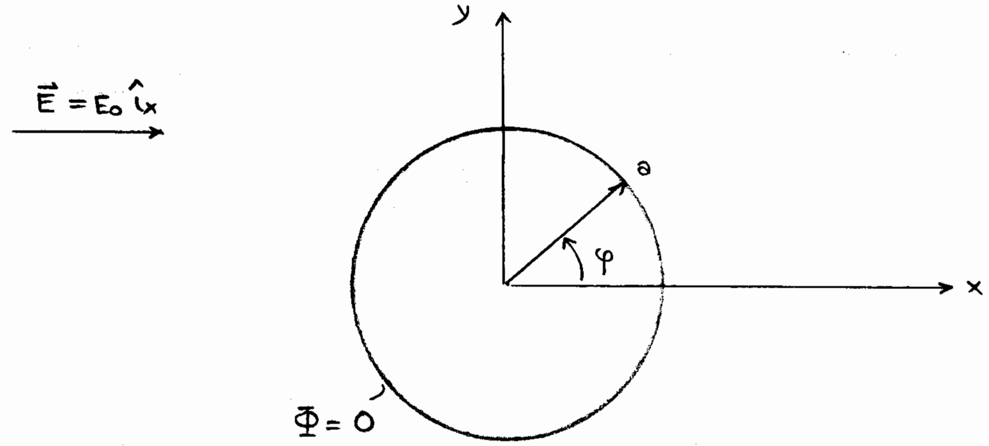
Άρα η λύση του δυναμικού $\Phi_I = B_1 r_T^2 \sin 2\varphi$. Ο συντελεστής B_1 μπορεί να βρεθεί από την συνθήκη: $\Phi(r_T=a) = U\sin 2\varphi = B_1 a^2 \sin 2\varphi \Rightarrow B_1 = \frac{U}{a^2}$.

Άρα $\Phi_I(r_T,\varphi) = U\left(\frac{r_T}{a}\right)^2 \sin 2\varphi$ $\quad 0<r_T<a$ και $0<\varphi<\pi/2$.

Περιοχή II: $r_T>a$, $0<\varphi<\pi/2$. Και πάλι $F(\varphi)=\sin 2\varphi$ και $m=2$. Τώρα πάλι $R_T(r_T) = B_1 r_T^2 + B_2 r_T^{-2}$. Όμως το δυναμικό στο άπειρο δεν πρέπει να απειρίζεται. Άρα $B_1 = 0$ και η λύση είναι της μορφής $\Phi_{II} = B_2 r_T^{-2} \sin 2\varphi$.

Το B_2 βρίσκεται και πάλι από την συνοριακή συνθήκη, $\Phi_{II}(r_T=a) = U\sin 2\varphi \Rightarrow B_2 a^{-2} = U \Rightarrow B_2 = U a^2$ και $\Phi_{II} = U\left(\frac{a}{r_T}\right)^2 \sin 2\varphi$. Το πεδίο μπορεί να βρεθεί από $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\hat{i}_r - \frac{1}{r_T}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\hat{i}_\varphi$.

Παράδειγμα: Ισοδυναμικός κύλινδρος μέσα σε ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο. ($\vec{E} = E_0 \hat{i}_x$).



Επειδή η συνοριακή συνθήκη είναι πάνω σε κυλινδρική επιφάνεια είναι λογικό να χρησιμοποιηθούν οι πολικές συντεταγμένες. Το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι σταθερό αφού ο κύλινδρος είναι ισοδυναμική επιφάνεια. Επομένως αναζητούμε το δυναμικό για $r_T > a$. Αφού το πεδίο είναι σταθερό σε μεγάλη απόσταση από τον κύλινδρο θα πρέπει $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\hat{i}_{r_T} - \frac{1}{r_T}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\hat{i}_\varphi$

και $\vec{E}_{r_T} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\Big|_{r_T\to\infty}\hat{i}_{r_T} = E_0 \hat{i}_x \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\Big|_{r_T\to\infty} = -E_0(\hat{i}_x \cdot \hat{i}_{r_T})$

Όμως $\hat{i}_{r_T} = \cos\varphi \, \hat{i}_x + \sin\varphi \, \hat{i}_y$. Επομένως $\frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\Big|_{r_T\to\infty} = -E_0 \cos\varphi \Rightarrow$

$\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_{r_T\to\infty} = E_0 \cos\varphi$ που είναι μια συνθήκη Neumann για το δυναμικό στο άπειρο. Άρα $F(\varphi) = \cos\varphi$ είναι αποδεκτή λύση. Επομένως $m=1$ και $K_T = -K_\varphi = -(-1^2) = 1 > 0 \to R(r_T) = B_1 r_T + B_2 r_T^{-1}$. Άρα το δυναμικό Φ θα έχει την μορφή:

$$\Phi = (B_1 r_T + B_2 r_T^{-1})\cos\varphi \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} = \left(B_1 - B_2 \frac{1}{r_T^2}\right)\cos\varphi$$

και $\frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\Big|_{r_T\to\infty} = -E_0 \cos\varphi = B_1 \cos\varphi \Rightarrow B_1 = -E_0$

Ο συντελεστής B_2 μπορεί να βρεθεί από την άλλη συνθήκη. $\Phi(r_T = a) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(-E_0 a + B_2 \frac{1}{a}\right)\cos\varphi = 0 \Rightarrow B_2 = +E_0 a^2$

Επομένως $\Phi = \left(-E_0 r_T + E_0 \frac{a^2}{r_T}\right)\cos\varphi = -a E_0 \left(\frac{r_T}{a} - \frac{a}{r_T}\right)\cos\varphi$

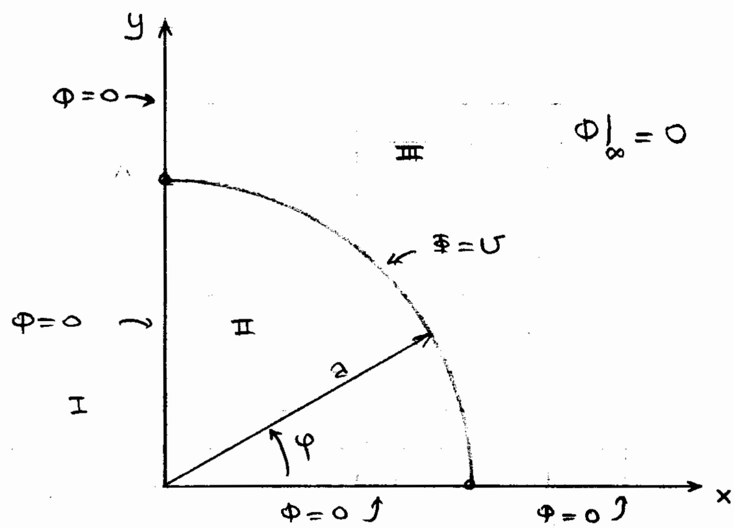
Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\hat{i}_{r_T} - \frac{1}{r_T}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\hat{i}_\varphi \Rightarrow$

$$\vec{E} = E_0\left[1+\left(\frac{a}{r_T}\right)^2\right]\cos\varphi\,\hat{i}_{r_T} - E_0\left[1-\left(\frac{a}{r_T}\right)^2\right]\sin\varphi\,\hat{i}_\varphi$$

Θα μπορούσε να έχει χρησιμοποιηθεί και η πληροφορία $\left.\frac{1}{r_T}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right|_{r_T=\infty}\hat{i}_\varphi = -E_0\hat{i}_x$

$\Rightarrow \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right|_{r_T=\infty} = +E_0 r_T \sin\varphi$ η οποία όμως ικανοποιείται και είναι πλεονάζουσα.

Παράδειγμα: Ζητείται το δυναμικό παντού στο χώρο του σχήματος.



Προφανώς στα σημεία $r_T=a, \varphi=\pi/2$ και $r_T=a, \varphi=0$ έχουμε ασυνέχεια του δυναμικού στις οριακές συνθήκες. Επομένως η λύση αναμένεται να αποτελείται από άπειρους όρους. Ο χώρος χωρίζεται σε τρείς περιοχές I, II, και III.

Για την περιοχή I, $\Phi=0$ εφόσον η οριακή συνθήκη είναι παντού μηδενική.

Στην περιοχή II ($0<r_T<a$, $0<\varphi<\pi/2$), $F(\varphi)=\sin(m\varphi)$ εφόσον $F(\varphi=0)=0$.

Όμως $F(\varphi=\pi/2)=0 \Rightarrow \sin(m\pi/2)=0 \Rightarrow m=2n$. Επομένως $F_m(\varphi)=\sin(m\varphi)$ και $m=2n$. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις $R_T(r_T)$ είναι της μορφής

$R_T(r_T) = A_m\,(r_T/a)^m$ ώστε $R_T(r_T=0)$ να μην απειρίζεται. Το δυναμικό λοιπόν στην περιοχή II δίδεται από την σχέση:

$$\Phi_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}\left(\frac{r_T}{a}\right)^{2n}\sin(2n\varphi)$$

Οι συντελεστές A_{2n} μπορούν να βρεθούν από την συνοριακή συνθήκη

$\Phi(r_T=a) = U \quad (0<\varphi<\pi/2)$.

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin(2n\varphi) = U \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \int_0^{\pi/2} \sin(2n\varphi)\sin(2\ell\varphi)\, d\varphi = U \int_0^{\pi/2} \sin(2\ell\varphi)\, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2\ell\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\ell}\left(1 - \cos(\ell\pi)\right) = \begin{cases} 0 & \ell = 2p \\ 1/\ell & \ell = 2p-1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2n\varphi)\sin(2\ell\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad n \neq \ell \\ \pi/4 & \text{εάν} \quad n = \ell \end{cases}$$

Επομένως $A_{2\ell}\, \pi/4 = U \begin{cases} 0 & \ell = 2p \\ \frac{1}{\ell} & \ell = 2p-1 \end{cases}$

$$A_{2\ell} = \frac{4}{\pi} U \frac{1}{\ell} \quad \text{όταν} \quad \ell = 2p-1 \quad \rightarrow \quad A_{2(2p-1)} = \frac{4}{\pi} U \frac{1}{2p-1}$$

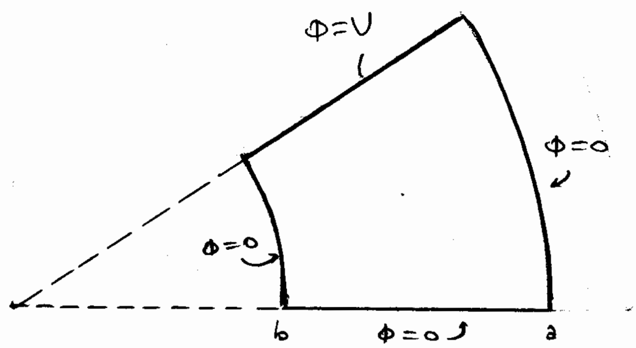
Επομένως $\Phi_{II} = \sum_{p=1}^{\infty} A_{2(2p-1)} \left(\frac{r_T}{a}\right)^{2(2p-1)} \sin\left(2(2p-1)\varphi\right) =$

$$= \frac{4U}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p-1} \left(\frac{r_T}{a}\right)^{2(2p-1)} \sin\left(2(2p-1)\varphi\right)$$

Παρόμοια στην περιοχή III η λύση είναι της μορφής

$$\Phi_{III} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4U}{\pi} \frac{1}{2p-1} \left(\frac{a}{r_T}\right)^{2(2p-1)} \sin\left(2(2p-1)\varphi\right)$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί το δυναμικό στην περιοχή $0<\varphi<\varphi_0$ και $b<r_T<a$.



Εφόσον υπάρχει περιοδικότητα ως προς r_T, $\Phi(r_T=b)=0=\Phi(r_T=a)$ θα πρέπει

$K_T=-m^2<0 \Rightarrow R_T(r_T)=B_1\sin(m\ln r_T)+B_2\cos(m\ln r_T)$

Αλλά $R_T(r_T=b)=0 \Rightarrow B_1\sin(m\ln b)+B_2\cos(m\ln b)=0 \Rightarrow$

$$B_2=-B_1\frac{\sin(m\ln b)}{\cos(m\ln b)}$$

Επομένως $R_T(r_T)=\dfrac{B_1}{\cos(m\ln b)}\sin(m\ln r_T-m\ln b)=B_1'\sin(m\ln(\frac{r_T}{b}))$

Έχουμε όμως και $R_T(r_T=a)=0 \Rightarrow \sin(m\ln(\frac{a}{b}))=0 \Rightarrow$

$$m\ln(a/b)=n\pi \qquad n=1,2,3,.. \Rightarrow \quad m=\frac{n\pi}{\ln(a/b)}$$

Αφού υπάρχει και ασυνέχεια δυναμικού στις οριακές συνθήκες είναι αναμενόμενο να υπάρχει λύση υπό την μορφή σειράς με άπειρους όρους. Οι συναρτήσεις $F(\varphi)$ θα είναι της μορφής $A_1\sinh(m\varphi)+A_2\cosh(m\varphi)$. Αφού $\Phi(\varphi=0)=0$

$\rightarrow A_2=0 \rightarrow F(\varphi)=A_1\sinh(m\varphi) \Rightarrow F_n(\varphi)=A_n\sinh(\frac{n\pi}{\ln(a/b)}\varphi)$

και η λύση είναι της μορφής:

$$\Phi(r_T,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ln(a/b)}\ln\left(\frac{r_T}{b}\right)\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{\ln(a/b)}\varphi\right)$$

Οι συντελεστές A_n μπορούν να υπολογισθούν από την οριακή συνθήκη

$$\Phi(r_T;\varphi=\varphi_0)=V=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ln(a/b)}\ln\left(\frac{r_T}{b}\right)\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{\ln(a/b)}\varphi_0\right)$$

Η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $\sin(\frac{n\pi}{\ln(a/b)}\ln(\frac{r_T}{b}))=R_n(r_T)$

μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

$$\int_b^a \frac{1}{r_T} R_n(r_T) R_\ell(r_T)\, dr_T = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(a/b) & n=\ell \\ 0 & n\neq \ell \end{cases}$$

$$\int_b^a \frac{1}{r_T} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln(a/b)} \ln\left(\frac{r_T}{b}\right)\right) dr_T = \begin{cases} \ln\left(\frac{a}{b}\right)\left[\frac{2}{n\pi}\right] & n = 2p-1 \\ 0 & n = 2p \end{cases}$$

Επομένως $A_{2p-1} = \dfrac{4U}{\pi} \dfrac{1}{2p-1} \dfrac{1}{\sinh\left(\frac{(2p-1)\pi}{\ln(a/b)} \varphi_0\right)}$, $A_{2p} = 0$

και το δυναμικό δίδεται από την εξίσωση:

$$\Phi(r_T,\varphi) = \frac{4U}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p-1} \frac{1}{\sinh\left(\frac{(2p-1)\pi}{\ln(a/b)}\varphi_0\right)} \sin\left(\frac{(2p-1)\pi}{\ln(a/b)} \ln\left(\frac{r_T}{b}\right)\right) \sinh\left(\frac{(2p-1)\pi}{\ln(a/b)}\varphi\right)$$

Αριθμητική Επίλυση της Εξίσωσης Laplace - Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών:

Υποθέτουμε και πάλι ότι επιδιώκουμε την επίλυση της εξίσωσης Laplace σε δύο διαστάσεις. Δηλαδή $\Phi = \Phi(x,y)$ και το πρόβλημα είναι ανεξάρτητο του z. Η εξίσωση Laplace στις καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Οι παράγωγοι του Φ θα πρέπει να προσεγγισθούν με πεπερασμένες διαφορές:

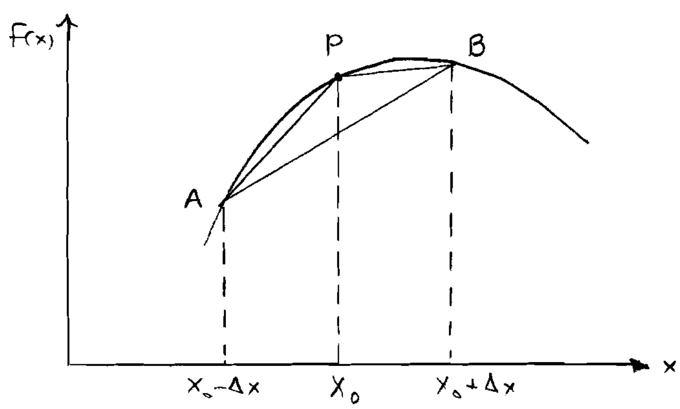
Εστω συνάρτηση f(x): Μπορούμε να ορίσουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις για την παράγωγο της f(x):

(FD): Forward Difference $= f'(x_0) \simeq \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

(BD): Backward Difference $= f'(x_0) \simeq \dfrac{f(x_0) - f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

(CD): Central Difference $= f'(x_0) \simeq \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$

Οι διαφορές στην προσέγγιση της παραγώγου μπορούν να φανούν στο κάτωθι σχήμα:



Στο προηγούμενο σχήμα η κλίση της γραμμής AP εκφράζει την backward-difference, η κλίση της PB εκφράζει την forward-difference και η κλίση της AB εκφράζει την central difference. Με χρήση των προσεγγίσεων της πρώτης παραγώγου μπορούμε να βρούμε προσεγγίσεις για παραγώγους ανωτέρας τάξης. Για παράδειγμα

$$f''(x_0) \simeq \frac{f'(x_0+\Delta x/2) - f'(x_0-\Delta x/2)}{\Delta x} \qquad (CD)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left\{ \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0-\Delta x)}{\Delta x} \right\} =$$

$$= \frac{f(x_0+\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Ο παραπάνω προσδιορισμός της f'' είναι λίγο διαισθητικός. Μια περισσότερο γενική μέθοδος είναι η χρησιμοποίηση της σειράς Taylor:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

$$f(x_0-\Delta x) = f(x_0) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

Αθροίζοντας έχουμε:

$$f(x_0+\Delta x) + f(x_0-\Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O(\Delta x)^4$$

όπου $O(\Delta x)^4$ αντιστοιχεί στο σφάλμα όταν η σειρά διακόπτεται.

Παρόμοια, αφαιρώντας τις παραπάνω εκφράσεις έχουμε:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x) = 2\Delta x\, f'(x_0) + O(\Delta x)^3$$

Οπότε οι προσεγγίσεις των παραγώγων πρώτης και δεύτερης τάξης είναι:

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

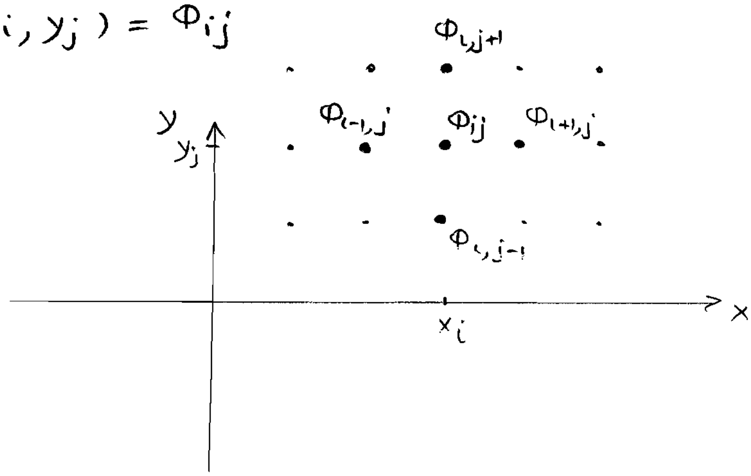
$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0+\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Για να επιλύσουμε την εξίσωση Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ χωρίζουμε τον χώρο ως εξής:

$$x_i = i\,\Delta x$$

$$y_j = j\,\Delta y$$

και $\Phi(x_i, y_j) = \Phi_{ij}$



$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{x_i,y_j} \simeq \frac{\Phi(x_i+\Delta x) - 2\,\Phi(x_i,y_j) + \Phi(x_i-\Delta x, y_j)}{(\Delta x)^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right|_{x_i,y_j} \simeq \frac{\Phi(x_i,y_j+\Delta y) - 2\,\Phi(x_i,y_j) + \Phi(x_i, y_j-\Delta y)}{(\Delta y)^2} = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

Επομένως $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow$

$$\Phi_{i+1,j}\frac{1}{(\Delta x)^2} + \Phi_{i-1,j}\frac{1}{(\Delta x)^2} - \Phi_{i,j}\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right) + \Phi_{i,j+1}\frac{1}{\Delta y^2} + \Phi_{i,j-1}\frac{1}{\Delta y^2} = 0$$

Από τις συνοριακές συνθήκες $\Phi|_S$ = γνωστό ή $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S$ = γνωστό.

Οπότε δημιουργείται ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$[A][x] = [b] \rightarrow [x] = [A]^{-1}[b]$$

όπου $[b]$: περιέχει γνωστές τιμές του Φ, $[X]$ = περιέχει τις άγνωστες τιμές των $\Phi_{i,j}$ και $[A]$ είναι ο πίνακας των συντελεστών.