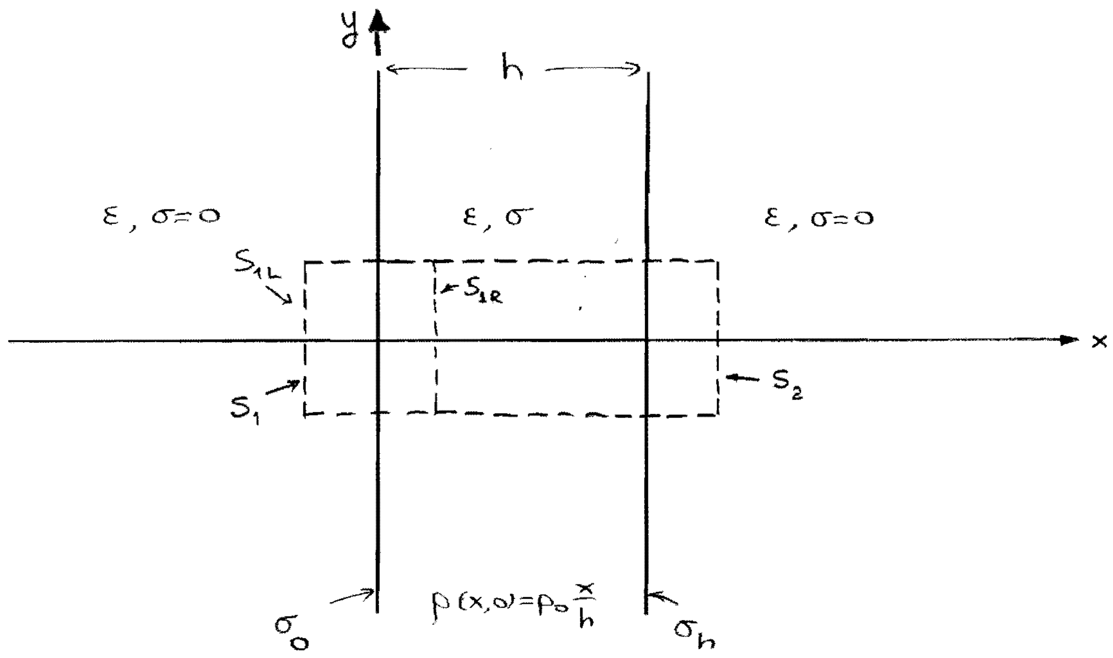
ΑΣΚΗΣΗ 1:



(α) Στο εσωτερικό της πλάκας ($0<x<h$): ΝΔΦ $\longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$$\rho(x,t) = \rho(x,0)\,e^{-t/\tau}, \quad \tau = \epsilon/\sigma \quad \sim \quad \rho(x,t) = \rho_o \frac{x}{h} e^{-t/\tau}$$

Το αρχικό ολικό φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας (yz) της πλάκας είναι

$$Q_{tot}(t=0) = \sigma_o(0) + \sigma_h(0) + \int_0^h \rho(x,0)\,dx =$$

$$= \sigma_o(0) + \sigma_h(0) + \rho_o(h/2)$$

Αυτό το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας πρέπει να μείνει σταθερό $\forall\ t$.

Όμως $\rho(x, t\to\infty) = 0$, δηλαδή το φορτίο απο το εσωτερικό θα διανεμηθεί στις επιφάνειες της πλάκας. Στην μόνιμη κατάσταση ($t\to\infty$) το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας πρέπει να είναι μηδενικό γιατί στην μόνιμη κατάσταση δεν ρέει ρεύμα $\sim \vec{J}=0 \sim \vec{E}=0$. Επομένως το συνολικό φορτίο θα διανεμηθεί εξ ίσου στις δύο επιφάνειες της πλάκας $x=0$, και $x=h$. Άρα $\sigma_o(t\to\infty) = \sigma_h(t\to\infty) = Q_{tot}(t=0)/2 =$

$$= \frac{1}{2}\left[\sigma_o(0) + \sigma_h(0) + \rho_o\frac{h}{2}\right]$$

Τώρα ας εφαρμόσουμε τον ΝΔΦ στην κλειστή επιφάνεια S_1:

$$\oint_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{dQ}{dt} = 0$$

Η πυκνότητα ρεύματος λόγω της απέραντης έκτασης της πλάκας είναι μόνο στην διεύθυνση x. Η αριστερή πλευρά της $S_1^{(S_{1L})}$ δεν έχει ρεύμα. Επομένως

$$\oint_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{S_{1R}} J_x(x,t)\,\hat{i}_x\cdot\hat{i}_x\, dy\,dz \doteq J_x(x,t)\,\Delta S$$

$$Q(t) = \sigma_0(t)\,\Delta S + \int_0^x \rho(x',t)\,dx'\,\Delta S$$. Επομένως,

$$J_x(x,t)\,\cancel{\Delta S} + \frac{d}{dt}\left[\sigma_0(t)\,\cancel{\Delta S} + \int_0^x \rho(x',t)\,dx'\,\cancel{\Delta S}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$J_x(x,t) + \frac{d\sigma_0}{dt} + \int_0^x \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx' = 0 \Rightarrow$$

$$J_x(x,t) + \frac{d\sigma_0}{dt} + \int_0^x \rho_0 \frac{x'}{h} e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right)dx' = 0 \Rightarrow$$

$$J_x(x,t) = -\frac{d\sigma_0}{dt} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \frac{\rho_0}{h}\frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

Όμοια εφαρμόζοντας τον ΝΔΦ στην S_2 :

$$\oint_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{dQ}{dt} = 0 \rightsquigarrow$$

$$-J_x(x,t) + \frac{d\sigma_h}{dt} + \int_x^h \rho_0 \frac{x'}{h} e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right)dx' = 0 \Rightarrow$$

$$-J_x(x,t) + \frac{d\sigma_h}{dt} - \frac{\rho_0}{h} e^{-t/\tau}\frac{1}{\tau}\frac{h^2-x^2}{2} = 0 \qquad (2)$$

Από (1) ∧ (2) $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dt}(\sigma_0+\sigma_h) = \frac{\rho_0 h}{2}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \rightsquigarrow$$

$$\sigma_0(t)+\sigma_h(t) - [\sigma_0(0)+\sigma_h(0)] = \int_0^t \frac{\rho_0 h}{2}\frac{1}{\tau}e^{-t'/\tau}\,dt' =$$

$$= \frac{\rho_0 h}{2}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_0(t)+\sigma_h(t) = \left[\sigma_0(0)+\sigma_h(0)+\frac{\rho_0 h}{2}\right] - \frac{\rho_0 h}{2}e^{-t/\tau}$$

Επίσης $\sigma_o(\infty) = \sigma_h(\infty) = \frac{1}{2}\left[\sigma_o(0) + \sigma_h(0) + \frac{\rho_o h}{2}\right]$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_o(t) = A_1 e^{-t/\tau} + A_2 \\ \sigma_o(0) = A_1 + A_2 \\ \sigma_o(\infty) = A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_o(t) = [\sigma_o(0) - \sigma_o(\infty)]e^{-t/\tau} + \sigma_o(\infty)$$

και όμοια $\sigma_h(t) = [\sigma_h(0) - \sigma_h(\infty)]e^{-t/\tau} + \sigma_h(\infty)$

$$\sigma_o(t) = \sigma_o(0)e^{-t/\tau} + \sigma_o(\infty)(1 - e^{-t/\tau}) =$$
$$= \sigma_o(0)e^{-t/\tau} + \frac{1}{2}\left[\sigma_o(0) + \sigma_h(0) + \frac{\rho_o h}{2}\right](1 - e^{-t/\tau})$$

και

$$\sigma_h(t) = \sigma_h(0)e^{-t/\tau} + \sigma_h(\infty)(1 - e^{-t/\tau}) =$$
$$= \sigma_h(0)e^{-t/\tau} + \frac{1}{2}\left[\sigma_o(0) + \sigma_h(0) + \frac{\rho_o h}{2}\right](1 - e^{-t/\tau})$$

Η πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = J_x(x,t)\,\hat{i}_x = \left[-\frac{d\sigma_o}{dt} + \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\frac{\rho_o}{h}\frac{x^2}{2}\right]\hat{i}_x$

$$= \left\{+\frac{1}{\tau}[\sigma_o(0) - \sigma_o(\infty)]e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau}\frac{\rho_o}{h}\frac{x^2}{2}e^{-t/\tau}\right\}\hat{i}_x$$

$$= \left\{\frac{1}{2\tau}\left[\sigma_o(0) - \sigma_h(0) - \frac{\rho_o h}{2}\right]e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau}\frac{\rho_o}{h}\frac{x^2}{2}e^{-t/\tau}\right\}\hat{i}_x =$$

$$= \hat{i}_x \; \frac{1}{2\tau}\left[\sigma_o(0) - \sigma_h(0) - \frac{\rho_o h}{2} + \frac{\rho_o}{h}x^2\right]e^{-t/\tau}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{1}{2\tau\sigma}\left[\sigma_o(0) - \sigma_h(0) - \frac{\rho_o h}{2} + \frac{\rho_o}{h}x^2\right]e^{-t/\tau}$$

(β) Στην μόνιμη κατάσταση $t \to \infty$ έχουν ήδη βρεθεί τα φορτία.

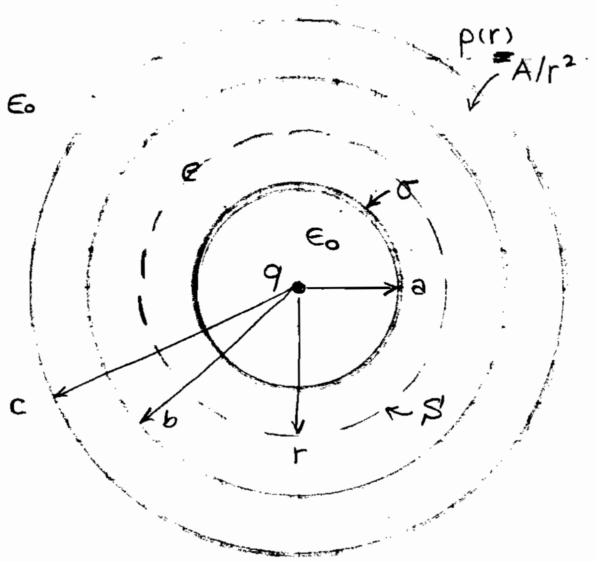
$$\sigma_o(t \to \infty) = \sigma_o(\infty) = \frac{1}{2}\left[\sigma_o(0) + \sigma_h(0) + \frac{\rho_o h}{2}\right]$$

$$\sigma_h(t \to \infty) = \sigma_h(\infty) = \frac{1}{2}\left[\sigma_o(0) + \sigma_h(0) + \frac{\rho_o h}{2}\right]$$

$$\rho(x, t \to \infty) = 0$$

$\vec{E}(x, t \to \infty) = 0$, και $\vec{J}(x, t \to \infty) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 2:



Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας το πεδίο είναι ακτινικό και συνάρτηση μόνο του r, δηλαδή

$\vec{E} = E(r)\,\hat{\imath}_r$ και $\vec{D} = D(r)\,\hat{\imath}_r$

Ας χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss για σφαιρικές επιφάνειες διαφορετικών ακτινών.

$0 < r < a$:
$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q = q \Rightarrow \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \hat{\imath}_r D(r)\cdot\hat{\imath}_r\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \Rightarrow$$
$$D(r)\,4\pi r^2 = q \Rightarrow \quad D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$a < r < b$:
$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q + \int \sigma\, dS = q + 4\pi a^2 \sigma \Rightarrow$$
$$D(r) = \frac{q + 4\pi a^2\sigma}{4\pi r^2}$$

$b < r < c$:
$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q + \int_{r=a} \sigma\, dS + \int_{r'=b}^{r} \frac{A}{r'^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr' \Rightarrow$$
$$D(r)\,4\pi r^2 = q + 4\pi a^2\sigma + \int_b^r 4\pi \cancel{r'^2}\,\frac{A}{\cancel{r'^2}}\, dr' =$$
$$= q + 4\pi a^2\sigma + 4\pi A\,(r-b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad D(r) = \frac{q + 4\pi a^2\sigma + 4\pi A\,(r-b)}{4\pi r^2}$$

$c < r < \infty$
$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q + 4\pi a^2\sigma + 4\pi A\,(c-b) \Rightarrow$$
$$D(r) = \frac{q + 4\pi a^2\sigma + 4\pi A\,(c-b)}{4\pi r^2}$$

Επομένως η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δίδεται από την σχέση :

$$\vec{E} = \hat{i}_r E(r) = \hat{i}_r \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & 0<r<a \\[2mm] \dfrac{1}{4\pi\epsilon r^2}\left[q+4\pi a^2\sigma\right] & a<r<b \\[2mm] \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[q+4\pi a^2\sigma+4\pi A(r-b)\right] & b<r<c \\[2mm] \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[q+4\pi a^2\sigma+4\pi A(c-b)\right] & c<r<\infty \end{cases}$$

Ας ελέγξουμε τις οριακές συνθήκες:

$r=a$: $\quad \hat{i}_n \cdot \left[\vec{D}(r=a+) - \vec{D}(r=a-)\right] =$

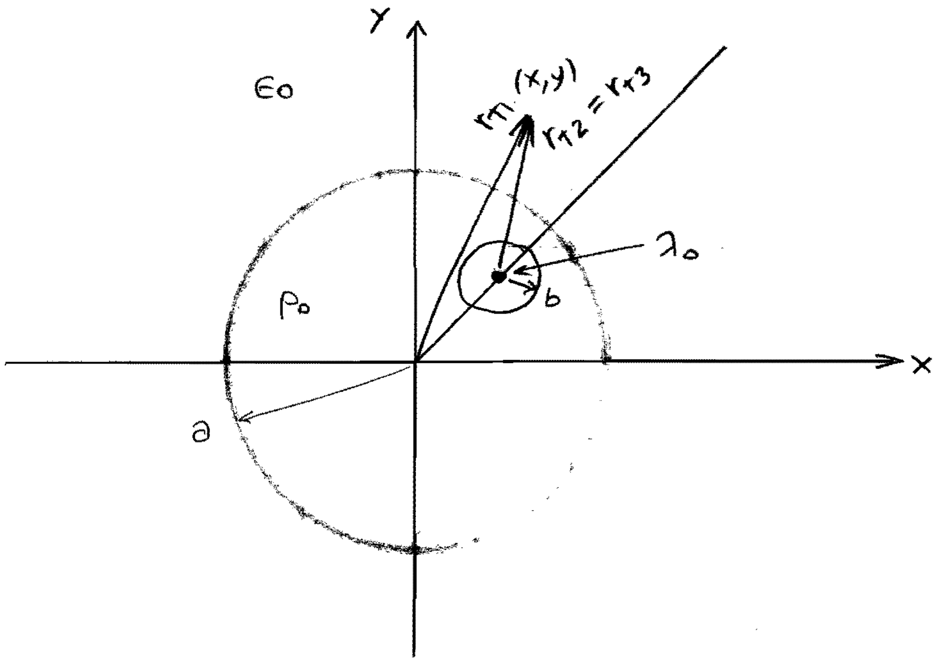
$$\hat{i}_r \cdot \left[\hat{i}_r \frac{q+4\pi a^2\sigma}{4\pi a^2} - \hat{i}_r \frac{q}{4\pi a^2}\right] = \sigma$$ όπως αναμένεται.

$r=b$: $\quad \hat{i}_n \cdot \left[\vec{D}(r=b+) - \vec{D}(r=b-)\right] = \hat{i}_r \cdot \left[\hat{i}_r \dfrac{q+4\pi a^2\sigma+4\pi A(b-b)}{4\pi b^2}\right.$

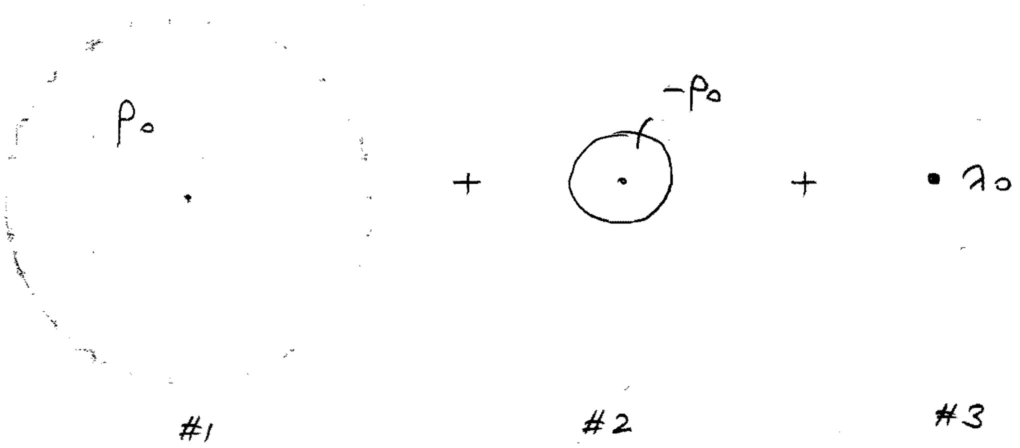
$$\left. - \hat{i}_r \frac{q+4\pi a^2\sigma}{4\pi b^2}\right] = 0 \quad \checkmark$$

Όμοια και για $r=c$.

ΑΣΚΗΣΗ 3:



(α) Το πρόβλημα ανάγεται στην επαλληλία των 3 προβλημάτων: (όλα έχουν κυλινδρική συμμετρία)



Πρόβλημα 1:

$r_T < a$: $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \ell \pi r_T^2 \rho_o \sim \cancel{2\pi} r_T \ell . D(r_T) = \cancel{\ell} \cancel{\pi} r_T^{\cancel{2}} \rho_o$

$$\vec{E}_1 = \hat{1}_{r_{T_1}} \frac{r_{T_1}\rho_o}{2\epsilon_o} \qquad r_{T_1} < a$$

και

$$\vec{E}_1 = \hat{1}_{r_{T_1}} \frac{a^2\rho_o}{2\epsilon_o r_{T_1}} \qquad r_{T_1} > a$$

Πρόβλημα 2:

$$\vec{E}_2 = \hat{i}_{r_{T2}} \frac{r_{T2}(-\rho_o)}{2\epsilon_o} \qquad r_{T2} < b$$

$$\vec{E}_2 = \hat{i}_{r_{T2}} \frac{b^2(-\rho_o)}{2\epsilon_o r_{T2}} \qquad r_{T2} > b$$

Πρόβλημα 3:

$$\vec{E}_3 = \hat{i}_{r_{T3}} \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r_{T3}} \qquad r_{T3} > 0$$

$$r_{T1} = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \hat{i}_{r_{T1}} = \hat{i}_x \cos\phi + \hat{i}_y \sin\phi = $$

$$= \hat{i}_x \frac{x}{r_{T1}} + \hat{i}_y \frac{y}{r_{T1}}$$

$$r_{T2} = \left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2\right]^{1/2}$$

$$\hat{i}_{r_{T2}} = \frac{\vec{r}_{T1} - (x_o\hat{i}_x + y_o\hat{i}_y)}{r_{T2}} = \frac{\hat{i}_x(x-x_o) + \hat{i}_y(y-y_o)}{r_{T2}}$$

$$r_{T3} = r_{T2} \qquad \hat{i}_{r_{T3}} = \hat{i}_{r_{T2}}$$

Εσωτερικό $r_{T1} < a$ & $r_{T2} < b$:

$$\vec{E} = \hat{i}_{r_{T1}} \frac{r_{T1}\rho_o}{2\epsilon_o} + \hat{i}_{r_{T2}} \frac{r_{T2}(-\rho_o)}{2\epsilon_o} + \hat{i}_{r_{T3}} \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r_{T3}}$$

Εσωτερικό κυλίνδρου a και εξωτερικό κυλίνδρου b ($r_{T1}<a$, $r_{T2}>b$)

$$\vec{E} = \hat{i}_{r_{T1}} \frac{r_{T1}\rho_o}{2\epsilon_o} + \hat{i}_{r_{T2}} \frac{b^2(-\rho_o)}{2\epsilon_o r_{T2}} + \hat{i}_{r_{T3}} \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r_{T3}}$$

Εξωτερικό και από τους 2 κυλίνδρους. ($r_{T1}>a$, $r_{T2}>b$)

$$\vec{E} = \hat{i}_{r_{T1}} \frac{a^2\rho_o}{2\epsilon_o r_{T1}} + \hat{i}_{r_{T2}} \frac{b^2(-\rho_o)}{2\epsilon_o r_{T2}} + \hat{i}_{r_{T3}} \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r_{T3}}$$

1) $\underline{r_{T1} < a, \quad r_{T2} < b}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}_{T1}}{r_{T1}} \frac{r_{T1}\rho_o}{2\epsilon_o} + \frac{\vec{r}_{T2}}{r_{T2}} \frac{r_{T2}(-\rho_o)}{2\epsilon_o} + \frac{\vec{r}_{T2}}{r_{T2}} \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r_{T2}} =$$

$$= \frac{\rho_o}{2\epsilon_o}(x\hat{i}_x + y\hat{i}_y) - \frac{\rho_o}{2\epsilon_o}\left((x-x_o)\hat{i}_x + (y-y_o)\hat{i}_y\right) +$$

$$\frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \frac{(x-x_o)\hat{i}_x + (y-y_o)\hat{i}_y}{[(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]} =$$

$$= \hat{i}_x\left[\frac{\rho_o}{2\epsilon_o}(\cancel{x} - \cancel{x} + x_o) + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \frac{x-x_o}{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}\right]$$

$$\hat{i}_y\left[\frac{\rho_o}{2\epsilon_o}(y - y + y_o) + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \frac{y-y_o}{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}\right]$$

$\underline{r_{T1} < a, \quad r_{T2} > b}$

$$\vec{E} = \frac{\rho_o}{2\epsilon_o}(x\hat{i}_x + y\hat{i}_y) + \left(\frac{-\rho_o b^2}{2\epsilon_o} + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o}\right) \frac{(x-x_o)\hat{i}_x + (y-y_o)\hat{i}_y}{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}$$

$$= \left[\frac{\rho_o}{2\epsilon_o}x + \frac{\lambda_o - \pi\rho_o b^2}{2\epsilon_o\pi} \frac{x-x_o}{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}\right]\hat{i}_x +$$

$$\left[\frac{\rho_o}{2\epsilon_o}y + \frac{\lambda_o - \pi b^2\rho_o}{2\epsilon_o\pi} \frac{y-y_o}{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}\right]\hat{i}_y$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_o a^2}{2\epsilon_o}\left\{\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\hat{i}_x + \frac{y}{x^2+y^2}\hat{i}_y\right\}$$

$$\frac{\lambda_o - \pi b^2 \rho_o}{2\epsilon_o \pi}\left\{\frac{x-x_o}{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\hat{i}_x \quad \frac{y-y_o}{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\hat{i}_y\right\}$$

$$= \left[\frac{\rho_o a^2}{2\epsilon_o}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\lambda_o - \pi b^2 \rho_o}{2\epsilon_o \pi}\frac{x-x_o}{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\right]\hat{i}_x$$

$$\left[\frac{\rho_o a^2}{2\epsilon_o}\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\lambda_o - \pi b^2 \rho_o}{2\epsilon_o \pi}\frac{y-y_o}{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\right]\hat{i}_y$$

για $r_{T1} > a$ και $r_{T2} > b$

(β) $r_T = k\,(x_o^2+y_o^2)^{1/2} > a \qquad r_T = kR_o \qquad R_o = (x_o^2+y_o^2)^{1/2}$

$$\vec{E} = \hat{\imath}_{r_{T1}} \frac{a^2\rho_o}{2\epsilon_o r_{T1}} + \hat{\imath}_{r_{T2}} \frac{b^2(-\rho_o)}{2\epsilon_o r_{T2}} + \hat{\imath}_{r_{T3}} \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r_{T3}}$$

$\hat{\imath}_{r_{T1}} = \hat{\imath}_{r_{T2}} = \hat{\imath}_{r_{T3}} = \hat{\imath}_{r_T}$ για τα σημεία πάνω στην Ot.

$$\vec{E} = \hat{\imath}_{r_T} \left\{ \frac{a^2\rho_o}{2\epsilon_o kR_o} - \frac{b^2\rho_o}{2\epsilon_o (k-1)R_o} + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o (k-1)R_o} \right\}$$

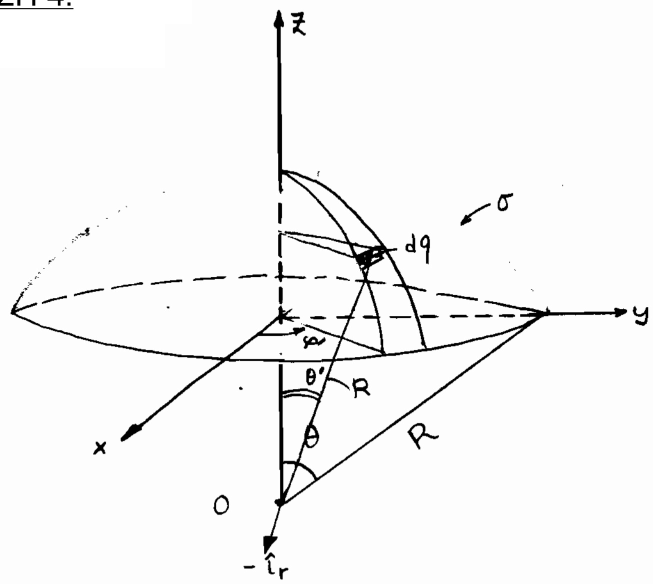
$$= \hat{\imath}_{r_T} \frac{1}{2\epsilon_o} \left\{ \frac{a^2\rho_o}{kR_o} - \frac{b^2\rho_o}{(k-1)R_o} + \frac{\lambda_o/\pi}{(k-1)R_o} \right\} =$$

$$= \hat{\imath}_{r_T} \frac{1}{2\epsilon_o R_o} \left\{ \frac{a^2\rho_o}{k} + \frac{\lambda_o/\pi - b^2\rho_o}{k-1} \right\}$$

$$E = 0 \rightarrow \qquad \frac{a^2\rho_o}{k} = \frac{b^2\rho_o - \lambda_o/\pi}{k-1}$$

$$\frac{k-1}{k} = \frac{b^2\rho_o - \lambda_o/\pi}{a^2\rho_o} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{\lambda_o}{\pi a^2\rho_o}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4:



Το στοιχειώδες φορτίο $dq = \sigma dS$ δημιουργεί το πεδίο $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}(-\hat{\imath}_r)$$

$$\hat{\imath}_r = \sin\theta'\cos\varphi'\,\hat{\imath}_x + \sin\theta'\sin\varphi'\,\hat{\imath}_y + \cos\theta'\,\hat{\imath}_z$$

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta'\, d\theta' d\varphi'$$

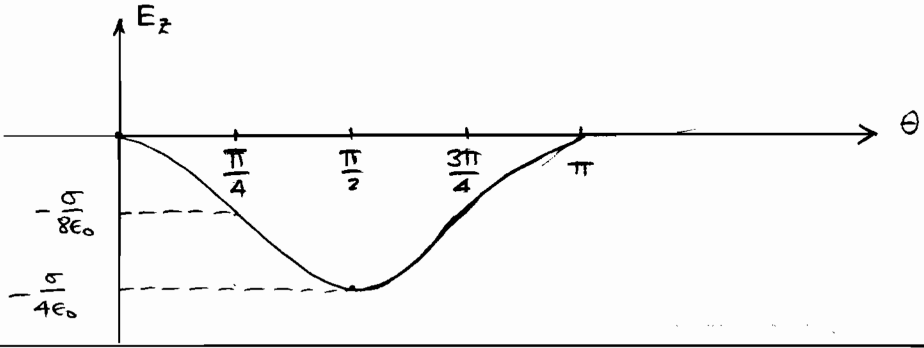
Επομένως,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = -\int_{\theta'=0}^{\theta}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\sigma R^2 \sin\theta'\, d\theta' d\varphi'}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left[\sin\theta'\cos\varphi'\,\hat{\imath}_x + \sin\theta'\sin\varphi'\,\hat{\imath}_y + \cos\theta'\,\hat{\imath}_z\right] =$$

$$= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left[\left\{\int_0^{\theta}\sin^2\theta'\, d\theta \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\cos\varphi' d\varphi}}_{0}\right\}\hat{\imath}_x + \left\{\int_0^{\theta}\sin^2\theta' d\theta \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\sin\varphi' d\varphi'}}_{0}\right\}\hat{\imath}_y + \left\{\int_0^{\theta}\sin\theta'\cos\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'\right\}\hat{\imath}_z\right] \Rightarrow$$

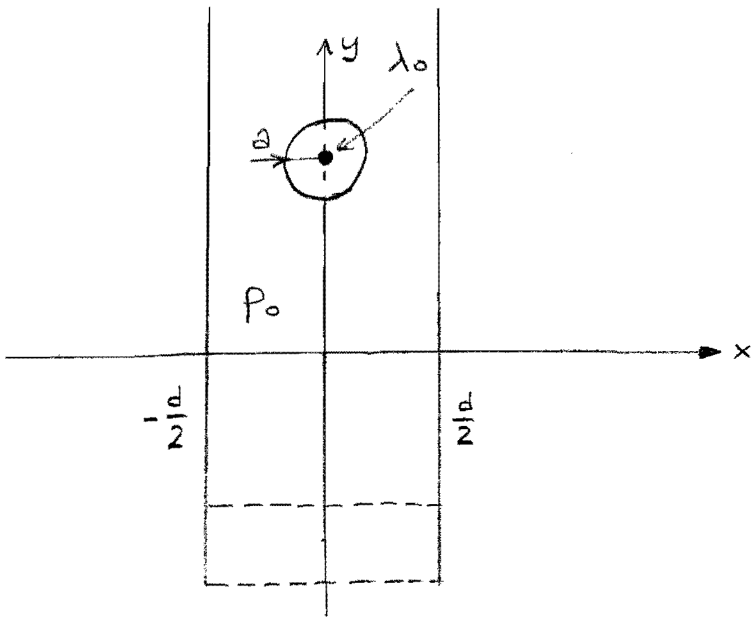
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}2\pi\,\hat{\imath}_z\left[\int_0^{\theta}\frac{1}{2}\sin 2\theta' d\theta'\right] = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\imath}_z\left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta'\right]_0^{\theta}$$

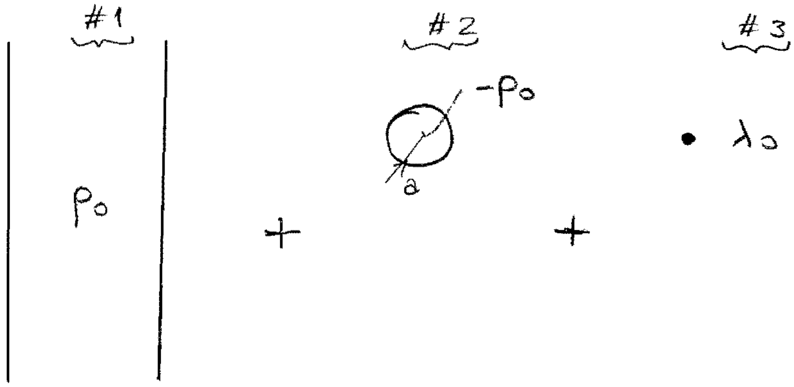
$$= -\frac{\sigma}{8\epsilon_0}\hat{\imath}_z\left[1-\cos 2\theta\right]$$



ΑΣΚΗΣΗ 5:

(α)





Το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την επαλληλία των ως άνω 3 προβλημάτων.

πρόβλημα 1

$x < -\frac{d}{2}$ $$\vec{E}_1 = \hat{\imath}_x (-1) \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\rho_0 \, dx}{2\epsilon_0} = -\hat{\imath}_x \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} d$$

$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$ $$\vec{E}_1 = \hat{\imath}_x \left[(+1) \int_{-d/2}^{x} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} dx - 1 \int_{x}^{d/2} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} dx \right] = \hat{\imath}_x \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[x + \frac{d}{2} - \left(\frac{d}{2} - x \right) \right]$$

$$= \hat{\imath}_x \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} 2x = \hat{\imath}_x \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x$$

$x > \frac{d}{2}$ $$\vec{E}_1 = \hat{\imath}_x \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} d$$

Πρόβλημα 2:

$0 < r_T < a$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = -\rho_o \pi r_T^2 \ell \Rightarrow$$

$$\epsilon_o 2\pi r_T E_2 \cancel{\ell} = -\rho_o \pi r_T^2 \cancel{\ell} \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{-\rho_o r_T}{2\epsilon_o} \hat{i}_{r_T}$$

$r_T > a$

$$2\pi r_T \epsilon_o E_2 \ell = -\rho_o \pi a^2 \ell \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{\rho_o a^2}{2\epsilon_o r_T} \hat{i}_{r_T}$$

$$r_T = (x^2 + (y-y_o)^2)^{1/2}$$

$$\hat{i}_{r_T} = \cos\phi \, \hat{i}_x + \sin\phi \, \hat{i}_y \qquad \cos\phi = \frac{x}{r_T}, \quad \sin\phi = \frac{y-y_o}{r_T}$$

Πρόβλημα 3:

$$\vec{E}_3 = \hat{i}_{r_T} \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r_T}$$

r_T και $\hat{i}_{r_T}$ όπως προηγουμένως

Επομένως:

$x < -\frac{d}{2}$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 =$$

$$= -\hat{i}_x \frac{\rho_o}{2\epsilon_o} d + \frac{-\rho_o a^2}{2\epsilon_o} \left[\frac{x}{x^2+(y-y_o)^2} \hat{i}_x + \frac{y-y_o}{x^2+(y-y_o)^2} \hat{i}_y \right]$$

$$+ \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \left[\frac{x}{x^2+(y-y_o)^2} \hat{i}_x + \frac{y-y_o}{x^2+(y-y_o)^2} \hat{i}_y \right]$$

$$\rightarrow \vec{E} = \hat{i}_x \left[-\frac{\rho_o}{2\epsilon_o} d + \left(-\frac{\rho_o a^2}{2\epsilon_o} + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \right) \frac{x}{x^2+(y-y_o)^2} \right] +$$

$$\hat{i}_y \left[-\frac{\rho_o a^2}{2\epsilon_o} + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \right] \frac{y-y_o}{x^2+(y-y_o)^2}$$

$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$ και $r_T = \sqrt{x^2 + (y-y_o)^2} > a$

$$\vec{E} = \hat{i}_x \frac{\rho_o}{\epsilon_o} x + \frac{-\rho_o a^2}{2\epsilon_o} \left(\frac{x}{r_T^2} \hat{i}_x + \frac{y-y_o}{r_T^2} \hat{i}_y \right) + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \left(\frac{x}{r_T^2} \hat{i}_x + \frac{y-y_o}{r_T^2} \hat{i}_y \right)$$

$$\vec{E} = \hat{i}_x \left[\frac{\rho_0}{\epsilon_0} x + \left(-\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{x}{x^2+(y-y_0)^2} \right] +$$

$$\hat{i}_y \left[\left(-\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{y-y_0}{x^2+(y-y_0)^2} \right]$$

$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$ και $r_T < a$ (μέσα στην κυλινδρική κοιλότητα)

$$\vec{E} = \hat{i}_x \left(\frac{\rho_0}{\epsilon_0} x \right) - \frac{\rho_0 r_T}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{r_T} \hat{i}_x + \frac{y-y_0}{r_T} \hat{i}_y \right) + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r_T^2} \hat{i}_x + \frac{y-y_0}{r_T^2} \hat{i}_y \right)$$

$$= \hat{i}_x \left[\frac{\rho_0}{\epsilon_0} x + \left(-\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} x + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2+(y-y_0)^2} \right) \right] +$$

$$\hat{i}_y \left[-\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (y-y_0) + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{y-y_0}{x^2+(y-y_0)^2} \right]$$

$x > \frac{d}{2}$

$$\vec{E} = \hat{i}_x \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} d + \left(\frac{-\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \right) \left(\frac{x}{r_T^2} \hat{i}_x + \frac{y-y_0}{r_T^2} \hat{i}_y \right) + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r_T^2} \hat{i}_x + \frac{y-y_0}{r_T^2} \hat{i}_y \right)$$

$$= \hat{i}_x \left[\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} d + \left(\frac{-\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{x}{x^2+(y-y_0)^2} \right] +$$

$$\hat{i}_y \left[\left(-\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{y-y_0}{x^2+(y-y_0)^2} \right]$$

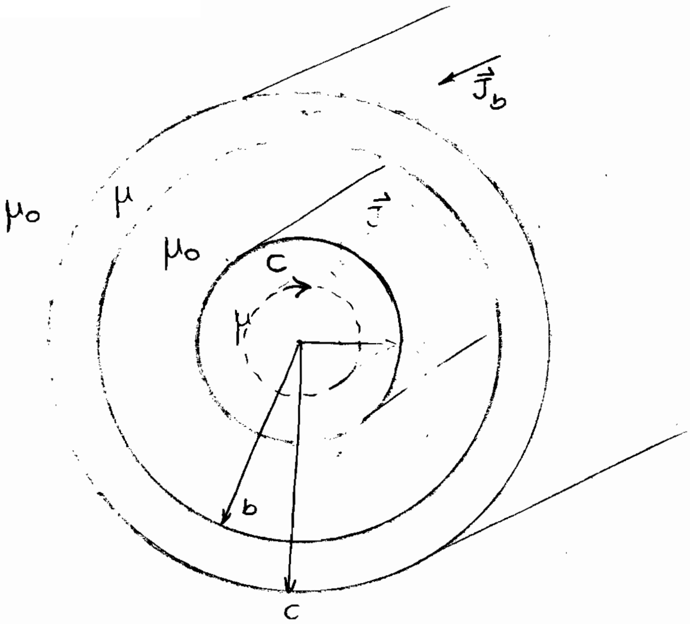
(β) Για $x=0$ και $r_T > a \rightsquigarrow |y-y_0| > a$

$$\vec{E} = \hat{i}_y \left(-\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{|y-y_0|}$$

Αρκεί ο συντελεστής $-\frac{\rho_0 a^2}{2\cancel{\epsilon_0}} + \frac{\lambda_0}{2\pi\cancel{\epsilon_0}} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\pi} = \rho_0 a^2 \Rightarrow$

$\lambda_0 = \rho_0 \pi a^2$

ΑΣΚΗΣΗ 6:



Ολικό ρεύμα στον αγωγό ακτίνας a: $I_a = +\int_{S_a} \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{r_T'=0}^{a} \vec{J}_a(r_T')\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\, r_T'\, d\varphi'\, dr_T'$

$$= \int_0^a\int_0^{2\pi} J_0 \frac{r_T'^2}{a^2}\, r_T'\, dr_T'\, d\varphi' = J_0 \frac{1}{a^2}\, 2\pi\, \frac{a^4}{4} = J_0 a^2\pi/2$$

Εφόσον το ρεύμα επιστρέφει από τον αγωγό b $I_b = -I_a$

$$I_b = \int_{S_b}\vec{J}_b\cdot d\vec{S} = \int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{r_T'=b}^{c} J_1 e^{-kr_T'}(-\hat{i}_z)\cdot\hat{i}_z\, r_T'\, d\varphi'\, dr_T' =$$

$$= -J_1 2\pi \int_b^c e^{-kr_T'} r_T'\, dr_T' = -J_1 2\pi\left[\frac{e^{-kb}(1+bk)}{k^2} - \frac{e^{-kc}(1+ck)}{k^2}\right]$$

Επομένως $I_a=-I_b \Rightarrow J_0 a^2\cancel{\pi}\frac{1}{2} = J_1 2\cancel{\pi}\left[e^{-kb}(1+bk)-e^{-kc}(1+ck)\right]\frac{1}{k^2}$

$$\Rightarrow J_1 = \frac{J_0 a^2}{4}k^2\left(\frac{1}{e^{-kb}(1+bk)-e^{-kc}(1+ck)}\right)$$

Για την εύρεση του μαγνητικού πεδίου θα χρησιμοποιηθεί ο νόμος του Ampere για βρόχους ακτίνας r_T. Το μαγνητικό πεδίο είναι φ-διεύθυνσης. $\vec{H}=H(r_T)\hat{i}_\varphi$.

$0<r_T<a$: $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r'=0}^{r_T} J_a(r_T')\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\, r_T'\, d\varphi'\, dr_T' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} H(r_T)\,\hat{i}_\varphi\cdot\hat{i}_\varphi\, r_T\, d\varphi = 2\pi\int_0^{r_T} J_0\frac{r_T'^2}{a^2}\, r_T'\, dr_T' \Rightarrow$$

$$H(r_T)\, r_T\, \cancel{2\pi} = \cancel{2\pi}\,\frac{J_0}{a^2}\left(\frac{r_T^4}{4}\right) \Rightarrow H(r_T) = \frac{J_0}{a^2}\frac{r_T^3}{4}$$

$a < r_T < b$: $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I = I_a = J_0 \dfrac{a^2\pi}{2} \Rightarrow$

$$H(r_T)\, 2\cancel{\pi} r_T = J_0 \frac{a^2 \cancel{\pi}}{2} \Rightarrow H(r_T) = J_0 \frac{a^2}{4 r_T}$$

$b < r_T < c$: $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_a + \int \vec{J}_b \cdot d\vec{S} =$

$$= I_a + \int_{r_T'=b}^{r_T} \int_0^{2\pi} J_1 e^{-k r_T'} (-\hat{i}_z)\cdot \hat{i}_z \, r_T' d\varphi' dr_T' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(r_T)\, 2\pi r_T = \frac{J_0 \pi a^2}{2} - 2\pi J_1 \int_b^{r_T} e^{-k r_T'} r_T' dr_T' =$$

$$= \frac{J_0 \pi a^2}{2} - 2\pi J_1 \frac{1}{k^2}\left[e^{-kb}(1+bk) - e^{-k r_T}(1 + r_T k)\right]$$

$$\Rightarrow H(r_T) = \frac{1}{2\pi r_T}\left\{ \frac{J_0 \pi a^2}{2} - 2\pi J_1 \frac{1}{k^2}\left(e^{-kb}(1+bk) - e^{-k r_T}(1+r_T k)\right)\right\}$$

$c < r_T < \infty$: $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_a + I_b = 0 \Rightarrow H(r_T) = 0$

Η μαγνητική επαγωγή δίδεται από την σχέση $\vec{B} = \mu \vec{H}$

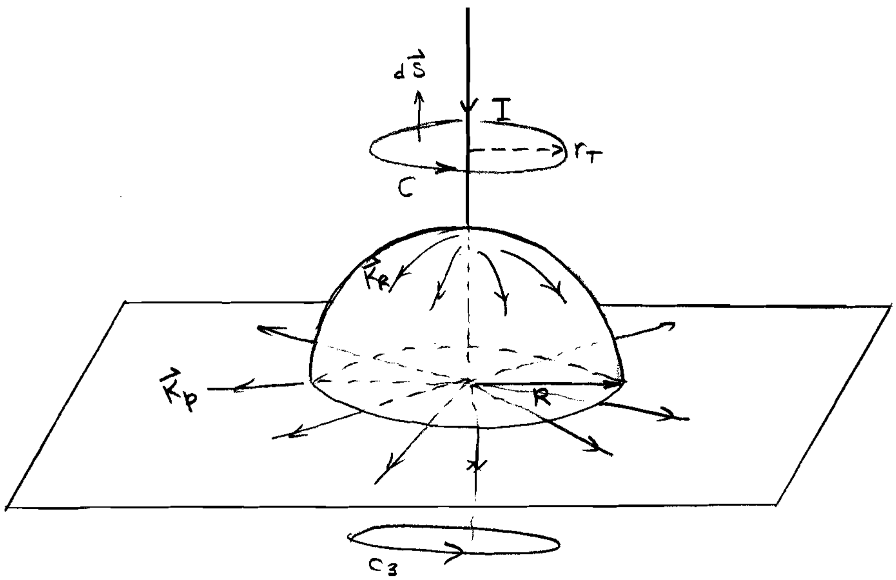
$0 < r_T < a$: $\vec{B} = \hat{i}_\varphi \mu H(r_T) = \hat{i}_\varphi \mu \left\{ \dfrac{J_0}{a^2} \dfrac{r_T^3}{4} \right\}$

$a < r_T < b$: $\vec{B} = \hat{i}_\varphi \mu_0 H(r_T) = \hat{i}_\varphi \mu_0 \left\{ J_0 \dfrac{a^2}{4 r_T} \right\}$

$b < r_T < c$: $\vec{B} = \hat{i}_\varphi \mu H(r_T) = \hat{i}_\varphi \mu \left\{ \dfrac{1}{2\pi r_T}\left[\dfrac{J_0 \pi a^2}{2} - 2\pi J_1 \dfrac{1}{k^2}\left(e^{-kb}(1+bk) - e^{-k r_T}(1+k r_T)\right)\right]\right\}$

$c < r_T < \infty$: $\vec{B} = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 7:



(α)

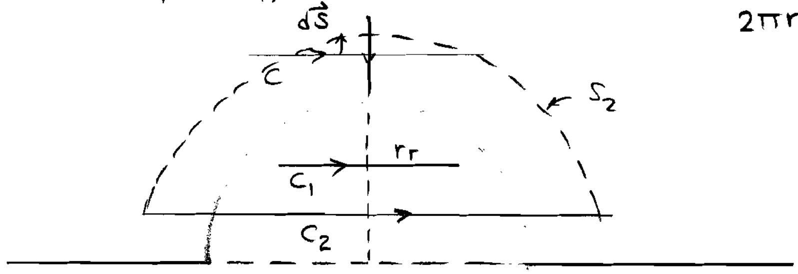
Το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητο της γωνίας φ λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας που παρουσιάζει. $s = \{x, y, z, \varphi\}$ και $\varphi \in s$.

Αφού $\frac{\partial}{\partial s} = 0$ $\left(\acute{\eta}\ \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0\right)$ και $J_\varphi, K_\varphi, I_\varphi = 0$ (δεν υπάρχουν ρεύματα στην διεύθυνση φ) $\sim$ $\vec H_{\perp\varphi} = 0$ $\sim$ $H_\varphi \neq 0$ και $H_z = H_{r_T} = 0$. Άρα το μαγνητικό πεδίο είναι της μορφής $\vec H = H(r_T, z)\,\hat i_\varphi$

Αν θεωρήσουμε ένα βρόχο C όπως φαίνεται στο σχήμα: $(z > R)$

$$\oint_C \vec H \cdot d\vec \ell = -I \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} H(r_T, z)\, \hat i_\varphi \cdot \hat i_\varphi \, r_T\, d\varphi = -I \Rightarrow$$

$$2\pi r_T H(r_T, z) = -I \Rightarrow \quad \vec H = -\frac{I}{2\pi r_T}\hat i_\varphi \quad (z > R)$$



Για $0 < z < R$ αν $r_T < \sqrt{R^2 - z^2}$ τότε $\oint_{C_1} \vec H \cdot d\vec \ell = 0$ εφόσον δεν τέμνεται κανένα ρεύμα. Άρα $H(r_T, z) = 0$

Για $0 < z < R$ και $r_T > \sqrt{R^2 - z^2}$ $\sim$ $\oint_{C_2} \vec H \cdot d\vec \ell = \int_{S_2} \vec J \cdot d\vec S = -I$

$\sim$ $H(r_T, z)\, 2\pi r_T = -I$ $\sim$ $H(r_T, z) = -\dfrac{I}{2\pi r_T}$

Παρόμοια οποιοδήποτε C_3 για $z<0$.

$$\oint_{C_3} \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \quad H(r_T, z) = 0 \qquad z<0$$

Συνοψίζοντας:

$$\vec{H} = \hat{i}_\varphi \begin{cases} -\dfrac{I}{2\pi r_T} & z>R \\ -\dfrac{I}{2\pi r_T} & 0<z<R, \quad r_T > \sqrt{R^2-z^2} \\ 0 & 0<z<R \quad r_T < \sqrt{R^2-z^2} \\ 0 & z<0 \end{cases}$$

(β) Έστω $\vec{K}_R$ η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος πάνω στο σφαιρικό κέλυφος και $\vec{K}_p$ η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος πάνω στο επίπεδο.

Οριακή Συνθήκη πάνω στο κέλυφος:

$$\hat{i}_n \times (\vec{H}(r=R^+) - \vec{H}(r=R^-)) = \vec{K}_R \Rightarrow$$

$$\vec{K}_R = \hat{i}_r \times \left[\hat{i}_\varphi \left(-\frac{I}{2\pi R \sin\theta}\right) - 0 \right] \Rightarrow \qquad (0<\theta<\pi/2)$$

$$\vec{K}_R = -\hat{i}_\theta \left(-\frac{I}{2\pi R\sin\theta}\right) \Rightarrow \quad \vec{K}_R = \hat{i}_\theta \frac{I}{2\pi R}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

Οριακή Συνθήκη πάνω στο επίπεδο: $(\sqrt{x^2+y^2} > R \ , z=0)$ ή $r_T > R$.

$$\hat{i}_n \times [\vec{H}(r_T, z=0+) - \vec{H}(r_T, z=0-)] = \vec{K}_p \Rightarrow \qquad (r_T > R)$$

$$\hat{i}_z \times \left[\hat{i}_\varphi \left(-\frac{I}{2\pi r_T}\right) - 0\right] = \vec{K}_p \Rightarrow$$

$$\vec{K}_p = -\hat{i}_{r_T}\left(-\frac{I}{2\pi r_T}\right) = \frac{I}{2\pi r_T}\hat{i}_{r_T} \qquad (z=0).$$