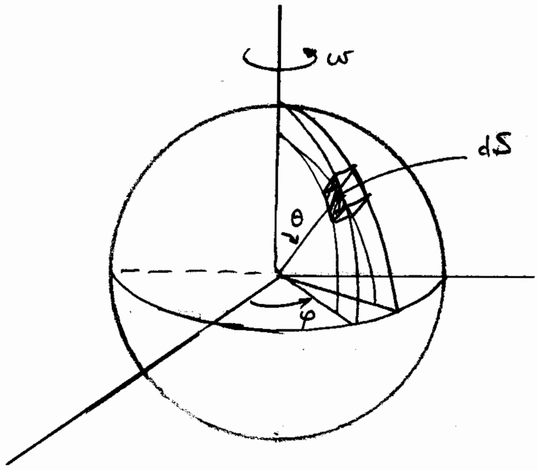
ΑΣΚΗΣΗ 1:

(α)



Έστω στοιχειώδης όγκος dV στο εσωτερικό της σφαίρας. Λόγω της περιστροφής της σφαίρας με γωνιακή ταχύτητα ω έχουμε το στοιχειώδες ρεύμα $dI = \frac{dQ}{dt} = \frac{\rho\, dV}{dt} \Rightarrow$

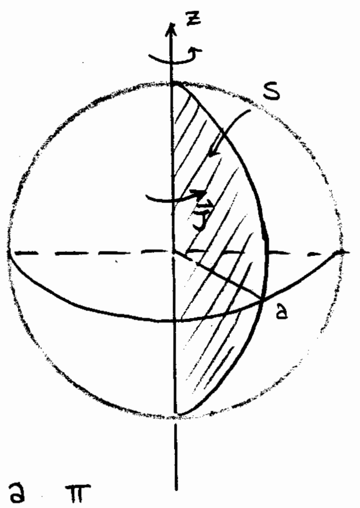
$$dI = \rho \frac{r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

$$dI = \rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, \omega \quad \text{αφού } \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Η χωρική πυκνότητα ρεύματος στο σημείο του στοιχειώδους όγκου dV είναι $\vec{J} = \frac{dI}{dS}\hat{i}_\varphi = \frac{\omega \rho r^2 \sin\theta\, \cancel{dr}\, \cancel{d\theta}}{\cancel{r\, d\theta\, dr}}\hat{i}_\varphi = \omega\rho r \sin\theta\, \hat{i}_\varphi$

Όμως $\rho = \frac{Q}{V_{\text{σφαίρας}}} = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$

Επομένως $\vec{J}(r,\theta) = \omega \frac{3Q}{4\pi a^3} r \sin\theta\, \hat{i}_\varphi$



Το συνολικό ρεύμα από ένα σταθερό ημικύκλιο ακτίνας a μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = r\, d\theta\, dr\, \hat{i}_\varphi$$

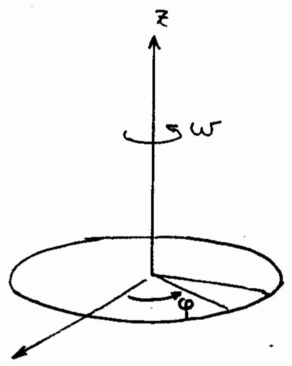
Επομένως

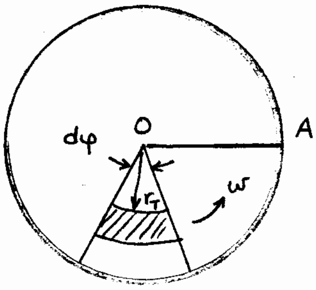
$$I = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi} \omega \frac{3Q}{4\pi a^3} r \sin\theta\, (\hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi)\, r\, d\theta\, dr = \frac{3Q\omega}{4\pi a^3}\int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{Q\omega}{2\pi}$$

CAMPAD 22-144 200 SHEETS

(β)





Έστω στοιχειώδης επιφάνεια dS με φορτίο $dQ = \sigma dS$. Το παραγόμενο ρεύμα λόγω της περιστροφής είναι:

$$dI = \frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma\, dS}{dt} = \frac{\sigma\, r_T\, d\varphi\, dr_T}{dt} = \sigma r_T\, dr_T \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \sigma r_T\, dr_T\, \omega$$

Η αντίστοιχη επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος είναι:

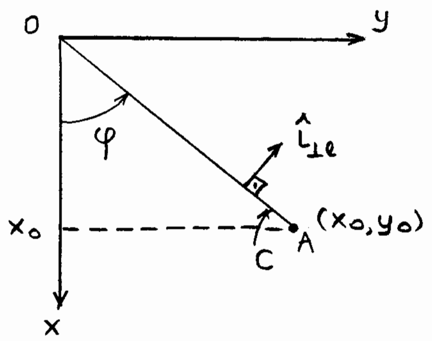
$$\left.\begin{array}{l} K = \dfrac{dI}{dr_T} = \sigma \omega r_T \implies \vec{K} = \sigma \omega r_T\, \hat{i}_\varphi \\ \sigma = Q/\pi a^2 \end{array}\right\} \implies \vec{K} = \frac{Q}{\pi a^2} r_T \omega\, \hat{i}_\varphi$$

Το συνολικό ρεύμα από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ είναι

$$I = \int_0^a \vec{K}\cdot\hat{i}_{\perp(OA)}\, dr_T = \int_0^a \frac{Q}{\pi a^2}\omega r_T (\hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi)\, dr_T = \frac{Q\omega}{\pi a^2}\left.\frac{r_T^2}{2}\right|_0^a =$$

$$= \frac{Q\omega}{\pi a^2}\frac{a^2}{2} = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2:



(α) $\vec{K} = a x \hat{i}_x + b x y \hat{i}_y$

Εφόσον η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος εκφράζεται σε A/m οι διαστάσεις και αντίστοιχες μονάδες των σταθερών a και b είναι

a : A/m^2

b : A/m^3

(β) $I = \int \vec{K} \cdot \hat{i}_{\perp \ell} \, d\ell$

$\hat{i}_{\perp \ell} = -\sin\varphi \, \hat{i}_x + \cos\varphi \, \hat{i}_y$

$\cos\varphi = x_0 / \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\quad \sin\varphi = y_0 / \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

Τμήμα C: $\dfrac{y-0}{y_0-0} = \dfrac{x-0}{x_0-0} \Rightarrow \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{x}{x_0} \Rightarrow y = \dfrac{y_0}{x_0} x = \tan\varphi \, x$

Επομένως $I = \displaystyle\int_{x=0}^{x_0} (a x \hat{i}_x + b x y \hat{i}_y) \cdot (-\sin\varphi \, \hat{i}_x + \cos\varphi \, \hat{i}_y) \, d\ell$

$d\ell = dx / \cos\varphi$

$$I = \int_0^{x_0} (-a \sin\varphi \, x + b x y(x) \cos\varphi) \frac{dx}{\cos\varphi} =$$

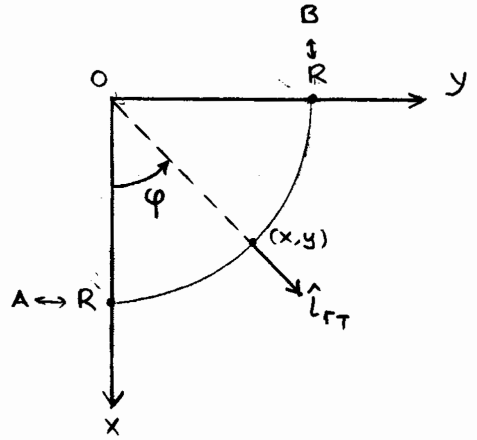
$$= \int_0^{x_0} (-a \tan\varphi \, x + b x \tan\varphi \, x) \, dx = -a \tan\varphi \frac{x_0^2}{2} + b \tan\varphi \frac{x_0^3}{3}$$

Επομένως το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από το τμήμα OA είναι

$$I = \left(-a \frac{x_0^2}{2} + b \frac{x_0^3}{3}\right) \frac{y_0}{x_0} = \left(-a \frac{x_0}{2} + b \frac{x_0^2}{3}\right) y_0$$

Το ρεύμα είναι υπολογισμένο κατά την διεύθυνση $\hat{i}_{\perp \ell}$. Αν είναι αρνητικό τότε ρέει προς την διεύθυνση $-\hat{i}_{\perp \ell}$.

(γ)



Το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από το τμήμα AB είναι :

$$I = \int_A^B \vec{K} \cdot \hat{\imath}_{r_T} \, dr_T$$

$$dr_T = R\,d\varphi$$

$$\hat{\imath}_{r_T} = \cos\varphi \, \hat{\imath}_x + \sin\varphi \, \hat{\imath}_y$$

Επομένως $I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (ax\hat{\imath}_x + bxy\,\hat{\imath}_y)\cdot(\cos\varphi\,\hat{\imath}_x + \sin\varphi\,\hat{\imath}_y)\,R\,d\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (ax\cos\varphi + bxy\sin\varphi)\,R\,d\varphi$$

$x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ και $I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (aR\cos^2\varphi + bR^2\cos\varphi\sin^2\varphi)\,R\,d\varphi$

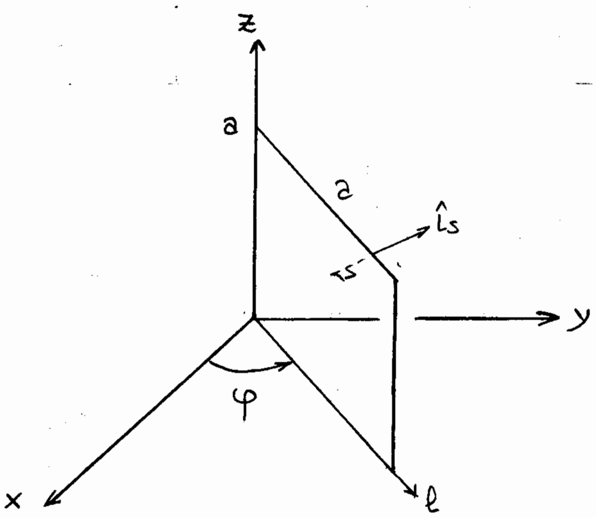
$$\sim I = aR^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi + bR^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= aR^2(\pi/4) + bR^3(1/3)$$

Άρα το συνολικό ρεύμα που ρέει κατά την διεύθυνση $\hat{\imath}_{r_T}$ στο τμήμα AB είναι $I = aR^2(\pi/4) + bR^3(1/3)$.

22-144 200 SHEETS

ΑΣΚΗΣΗ 3:



$$\vec{J} = A\left(x^3\hat{i}_x + y^3\hat{i}_y + z^3\hat{i}_z\right)$$

(α) Εφόσον $\vec{J}$ μετράται σε A/m^2

$$[A]m^3 = A/m^2 \Rightarrow [A] = A/m^5$$

(β) Από το ΝΔΦ σε σημειακή μορφή έχουμε $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$

Αλλά $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \dfrac{\partial J_x}{\partial x} + \dfrac{\partial J_y}{\partial y} + \dfrac{\partial J_z}{\partial z} = A3x^2 + A3y^2 + A3z^2 = 3A(x^2+y^2+z^2)$

$$= 3Ar^2$$

Επομένως $\dfrac{\partial\rho(x,y,z,t)}{\partial t} = -3Ar^2 \Rightarrow \dfrac{\partial\rho(a,a,a,t)}{\partial t} = -3A\,3a^2 = -9Aa^2$

(γ) $$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_V \rho\, dV\right) = \int_V \frac{d\rho}{dt}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{d\rho}{dt}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^a \frac{d\rho}{dt} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^a (-3Ar^2)\, r^2\, dr\, 4\pi =$$

$$= -12\pi A \int_0^a r^4 dr = -12\pi A \frac{a^5}{5}$$

Εφόσον $A>0 \Rightarrow \dfrac{dQ}{dt} < 0$ άρα το φορτίο μειώνεται με τον χρόνο.

(δ) Το συνολικό ρεύμα δίδεται από την σχέση:

$$\left.\begin{aligned} I &= \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}\cdot\hat{i}_s\, dS \\ \hat{i}_s &= -\sin\varphi\, \hat{i}_x + \cos\varphi\, \hat{i}_y \\ dS &= d\ell\, dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = \iint A\left(x^3\hat{i}_x + y^3\hat{i}_y + z^3\hat{i}_z\right)\cdot\left(-\sin\varphi\,\hat{i}_x + \cos\varphi\,\hat{i}_y\right) d\ell\, dz$$

$$\Rightarrow I = \iint\left(-A\sin\varphi\, x^3 + A\cos\varphi\, y^3\right) dz\, d\ell$$

$$\ell = x/\cos\varphi \Rightarrow d\ell = \frac{dx}{\cos\varphi} \qquad y = \tan\varphi\, x$$

Επομένως το συνολικό ρεύμα κατά την διεύθυνση $\hat{\imath}_r$ που διέρχεται από το τετράγωνο πλευράς a είναι:

$$I = \int_{x=0}^{a\cos\varphi} \int_{z=0}^{a} (-A\sin\varphi\, x^3 + A\cos\varphi \tan^3\varphi\, x^3) \frac{dx}{\cos\varphi}\, dz =$$

$$= a\left(-A\sin\varphi/\cos\varphi + A\tan^3\varphi\right) \int_0^{a\cos\varphi} x^3 dx = aA\left[-\tan\varphi + \tan^3\varphi\right] \frac{a^4\cos^4\varphi}{4}$$

$$= a^5 A \frac{\cos^4\varphi}{4} \tan\varphi\, (\tan^2\varphi - 1)$$

(γ) Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί και ως εξής:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad \text{όπου } S \text{ η σφαίρα ακτίνας a.}$$

$$\vec{J} = A(x^3\hat{\imath}_x + y^3\hat{\imath}_y + z^3\hat{\imath}_z)$$

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad z = a\cos\theta$$

$d\vec{S} = \hat{\imath}_r\, a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ και $\hat{\imath}_x\cdot\hat{\imath}_r = \sin\theta\cos\varphi$, $\hat{\imath}_y\cdot\hat{\imath}_r = \sin\theta\sin\varphi$,

$\hat{\imath}_z\cdot\hat{\imath}_r = \cos\theta$

Επομένως $$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} A\left[x^3\,\hat{\imath}_x\cdot\hat{\imath}_r + y^3\,\hat{\imath}_y\cdot\hat{\imath}_r + z^3\,\hat{\imath}_z\cdot\hat{\imath}_r\right] a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} A\left[a^3\sin^3\theta\cos^3\varphi\,\sin\theta\cos\varphi + a^3\sin^3\theta\sin^3\varphi\,\sin\theta\sin\varphi + a^3\cos^3\theta\,\cos\theta\right] a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} Aa^5\left[\sin^5\theta\cos^4\varphi + \sin^5\theta\sin^4\varphi + \cos^4\theta\sin\theta\right] d\theta\, d\varphi$$

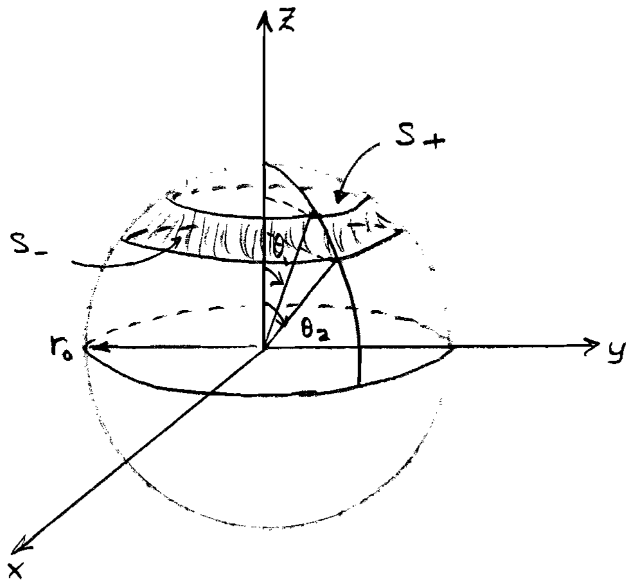
Όμως $$\int_0^{\pi}\sin^5\theta\, d\theta \int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{16}{15}\cdot\frac{3\pi}{4},$$

$$\int_0^{\pi}\sin^5\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{16}{15}\cdot\frac{3\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi}\cos^4\theta\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{2}{5}\,2\pi$$

Επομένως $$\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -Aa^5\left[2\,\frac{16}{15}\,\frac{3\pi}{4} + \frac{2\cdot 2\pi}{5}\right] = -Aa^5\left[\frac{8\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right]$$

$$= -Aa^5(12\pi/5) \quad \text{όπως και προηγουμένως.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4:



$$\vec{J} = \frac{400\sin\theta}{r^2+4}\,\hat{i}_r \quad \left(\frac{A}{m^2}\right)$$

$\theta_1 = 0.1\pi$, $\theta_2 = 0.3\pi$

(α) $I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ όπου S' η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια πάνω στη σφαίρα ακτίνας $r_0 = 0.8$ m.

$$d\vec{S} = \hat{i}_r\, r_0 d\theta\, r_0 \sin\theta\, d\phi = \hat{i}_r\, r_0^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \frac{400\sin\theta}{r_0^2+4}\,\underbrace{\hat{i}_r\cdot\hat{i}_r}_{=1}\, r_0^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{400\cdot 2\pi r_0^2}{r_0^2+4}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{800\pi r_0^2}{r_0^2+4}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{800\pi r_0^2}{r_0^2+4}\left[\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1) - \frac{1}{4}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)\right]$$

$$= 77.4232 \text{ A}$$

(β) Αρκεί να βρούμε την συνολική επιφάνεια της γραμμοσκιασμένης περιοχής. Τότε $\vec{J}_{avg} = \frac{I}{S}\hat{i}_r$

$$S = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} dS = \int_\varphi\int_\theta r_0^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = r_0^2\, 2\pi\left[-\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} =$$

$$= 2\pi r_0^2\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right] = 1.4608 \text{ m}^2$$

Επομένως $|\vec{J}_{avg}| = \frac{77.4232}{1.4608}\left(\frac{A}{m^2}\right) = 53.0005 \left(\frac{A}{m^2}\right)$

Ένας ορθότερος ορισμός της μέσης τιμής είναι ο εξής.

$$\vec{J}_{avg} = \frac{\int_S \vec{J}\, dS}{\int_S dS}$$

$$S = \int dS = \int_0^{2\pi}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi r_0^2 \left[\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2\right] = 1.4608 m^2$$

$$\int \vec{J}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{400 \sin\vartheta}{r_0^2+4}\left[\sin\vartheta \underbrace{\cancel{\cos\varphi}}_{0}\, \hat{i}_x + \sin\vartheta \underbrace{\cancel{\sin\varphi}}_{0}\, \hat{i}_y + \cos\vartheta\, \hat{i}_z\right] r_0^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \hat{i}_z \frac{800\pi r_0^2}{r_0^2+4}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos\vartheta \sin^2\vartheta\, d\theta =$$

$$= \frac{800\pi r_0^2}{r_0^2+4}\left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \frac{800\pi r_0^2}{r_0^2+4}\frac{1}{3}\left[\sin^3\vartheta_2 - \sin^3\vartheta_1\right]$$

Επομένως,

$$\vec{J}_{avg} = \hat{i}_z \frac{800\pi\, 0.8^2}{0.8^2+4}\frac{1}{3}\left[\sin^3(0.3\pi) - \sin^3(0.1\pi)\right]\frac{1}{S}$$

$$= 57.7764\, \hat{i}_z \frac{1}{1.4608}\frac{A}{m^2} = 39.5512\, \hat{i}_z\, (A/m^2).$$

(γ) $\dfrac{dQ}{dt} = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ για την μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου στον όγκο που περικλείεται από την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια και τα επίπεδα $z = r_o\cos\theta_2$ και $z = r_o\cos\theta_1$.

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \int_{S_+} \vec{J}\cdot d\vec{S} + \int_{S_-} \vec{J}\cdot d\vec{S} = I + \int_{S_+}\vec{J}\cdot d\vec{S} + \int_{S_-}\vec{J}\cdot d\vec{S}$$

όπου S_+ και S_- η άνω και κάτω επιφάνεια του όγκου.

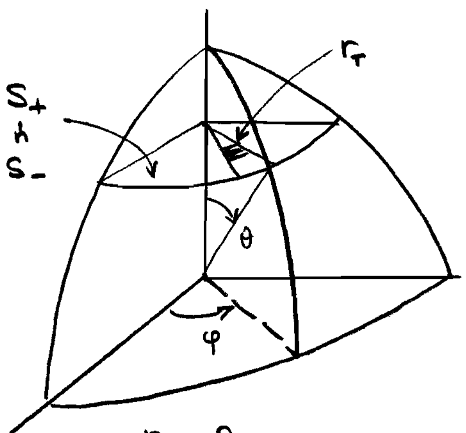
$$\int_{S_+} \vec{J}\cdot d\vec{S} = ?$$

$$\vec{J} = \frac{400\sin\theta}{r^2+4}\,\hat{i}_r$$

$$d\vec{S} = \hat{i}_z\, dS = \hat{i}_z\, r_T\, d\varphi\, dr_T$$

$$\hat{i}_r\cdot\hat{i}_z = (\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{i}_y + \cos\theta\,\hat{i}_z)\cdot\hat{i}_z$$

$$= \cos\theta$$



$$r^2 = r_T^2 + z_i^2 = r_T^2 + r_o^2\cos^2\theta_i \quad (i=1,2)$$

r_T μεταβάλλεται από $0 \to r_o\sin\theta$

Επομένως, $I_+ = \int_{S_+} \vec{J}\cdot d\vec{S} =$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r_T=0}^{r_o\sin\theta_1} \frac{400\sin\theta}{r_T^2 + r_o^2\cos^2\theta_1 + 4}\cos\theta\; r_T\, dr_T\, d\varphi$$

$$\sin\theta = \frac{r_T}{r} = \frac{r_T}{[r_T^2 + r_o^2\cos^2\theta_1]^{1/2}}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{r_o\cos\theta_1}{[r_T^2 + r_o^2\cos^2\theta_1]^{1/2}}$$

$$I_+ = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_o\sin\theta_1} \frac{400\, r_T^2\, r_o\cos\theta_1}{[r_T^2 + r_o^2\cos^2\theta_1 + 4][r_T^2 + r_o^2\cos^2\theta_1]}\, dr_T\, d\varphi =$$

$$= 800\pi\, r_o\cos\theta_1 \int_0^{r_o\sin\theta_1} \frac{r_T^2}{[r_T^2 + r_o^2\cos^2\theta_1 + 4][r_T^2 + r_o^2\cos^2\theta_1]}\, dr_T$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}\left[a\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - b\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\right]$$

$$a^2 = r_0^2\cos^2\theta_1 + 4 \quad , \quad b^2 = r_0^2\cos^2\theta_1$$

$$I_+ = 800\pi r_0\cos\theta_1\left[\frac{1}{4}\right]\left[a\tan^{-1}\left(\frac{r_T}{a}\right) - b\tan^{-1}\left(\frac{r_T}{b}\right)\right]_0^{r_0\sin\theta_1} =$$

$$= 200\pi r_0\cos\theta_1\left[a\tan^{-1}\left[\frac{r_0\sin\theta_1}{a}\right] - b\tan^{-1}\left[\frac{r_0\sin\theta_1}{b}\right]\right]$$

$$I_- = -200\pi r_0\cos\theta_2\left[a'\tan^{-1}\left(\frac{r_0\sin\theta_2}{a'}\right) - b'\tan^{-1}\left(\frac{r_0\sin\theta_2}{b'}\right)\right]$$

$$a' = \left[r_0^2\cos^2\theta_2 + 4\right]^{1/2} \quad , \quad b' = r_0\cos\theta_2$$ (το '−' για $d\vec{S} = -\hat{i}_z dS$)

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω εξισώσεις για τις δοθείσες τιμές παίρνουμε :

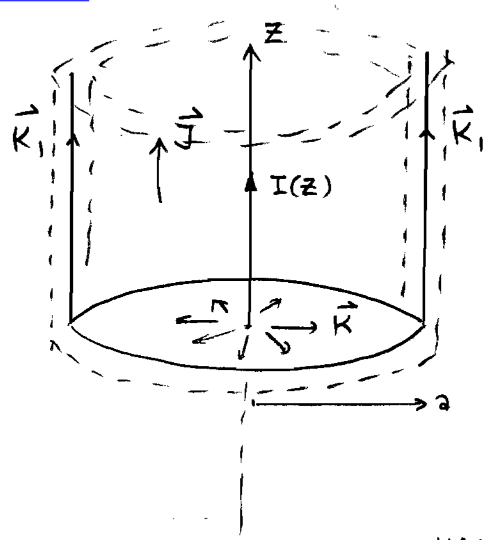
$$I_+ = 3.3922\ \text{A} \qquad \text{και} \qquad I_- = -54.3090\ \text{A}$$

Επομένως, $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = I + I_+ + I_- = 77.4232 + 3.3922 - 54.3090$

$$= +26.5065\ \text{A}$$

και συνεπώς $\frac{dQ}{dt} = -26.5065\ \text{A}$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

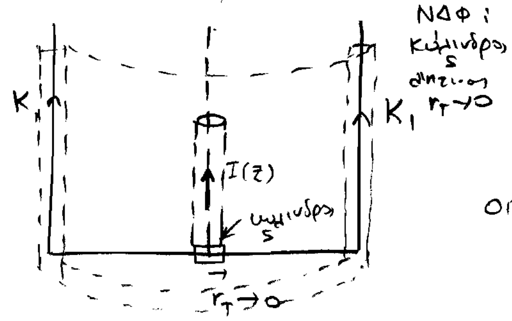


$$\vec K = \hat i_{r_T} K_0 \left(\frac{a}{r_T}\right) \cos\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right)$$

$$\vec K_1 = \hat i_z K_1(z)$$

$$\vec J = \hat i_z J(r_T, z)$$

(α)



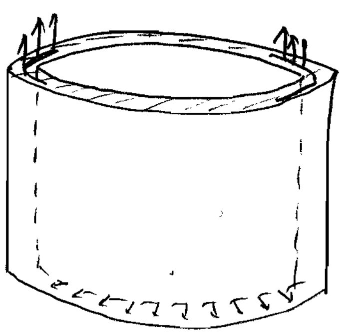
ΝΔΦ: κύλινδρος S απειροστός $r_T \to 0$ $\quad \int \vec K \cdot \hat i_{\perp \ell}\, dl + I(z) + \int \vec J \cdot \hat i_z r_T' d\varphi\, dr_T' = 0$

όταν $r_T \to 0$ $\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{r_T} \vec J \cdot \hat i_z\, r_T' d\varphi\, dr_T' \to 0$

οπότε $\quad \int_0^{2\pi} \hat i_{r_T} K_0 \left(\frac{a}{r_T}\right) \cos\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right) \cdot \hat i_{r_T} r_T\, d\varphi + I(z) = 0$

$$\sim) \quad I(z) = -K_0 a \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right)_{r_T \to 0} d\varphi = -2\pi a K_0$$

Τώρα ας χρησιμοποιήσουμε σαν κλειστή επιφάνεια S το κυλινδρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας $a-\varepsilon$ και εξωτερικής ακτίνας $a+\varepsilon$ όπου $\varepsilon \to 0$.

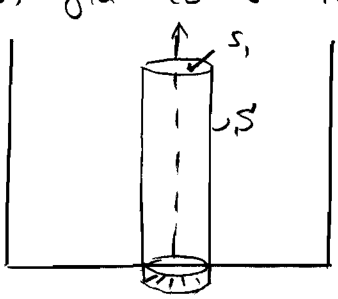


Από ΝΔΦ $\sim \oint_S \vec J \cdot d\vec S = 0 \Rightarrow$

$$2\pi \underset{a}{\underset{\shortparallel}{r_T}} K_1(z) - 2\pi \underset{a}{\underset{\shortparallel}{r_T}} K_0 \left(\frac{a}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi a}{a}\right) = 0$$

$$K_1(z) = K_0$$

Τέλος για το $\vec J$ παίρνουμε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας $r_T < a$



$$\oint_S \vec J \cdot d\vec S = 0 \Rightarrow$$

$$I(z) + \int_{S_1} \vec J \cdot d\vec S + 2\pi r_T K_0 \frac{a}{r_T} \cos\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right) = 0$$

$$2\pi\int_0^{r_T} J(r_T',z)\, r_T'\, dr_T' + I(z) + 2\pi r_T K_0\left(\frac{a}{r_T}\right)\cos\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{2\pi}\int_0^{r_T} J(r_T',z)\, r_T'\, dr_T' - K_0 \cancel{2\pi} a + \cancel{2\pi} K_0 a \cos\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right) = 0$$

Παραγωγίζοντας ως προς r_T (Leibnitz rule) έχουμε :

$$J(r_T,z)\, r_T + K_0 a\left(-\frac{2\pi}{a}\sin\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$J(r_T,z) = \frac{K_0 2\pi}{r_T}\sin\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right)$$

Επομένως όλες οι άγνωστες πυκνότητες ρεύματος υπολογίσθηκαν χρησιμοποιώντας τον ΝΔΦ.

$$I(z) = \begin{cases} -2\pi a K_0 & z>0 \\ 0 & z<0 \end{cases}$$

$$\vec{J}(r_T,z) = \hat{i}_z \begin{cases} \dfrac{K_0 2\pi}{r_T}\sin\left(\dfrac{2\pi r_T}{a}\right) & z>0 \\ 0 & z<0 \end{cases}$$

$$\vec{K}_1 = K_0\hat{i}_z \quad (z>0)$$